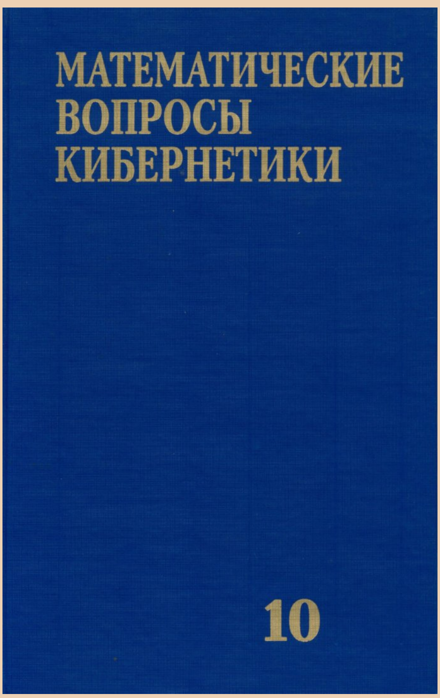

Р. М. Колпаков

Замкнутые классы булевых случайных величин с рациональнозначными распределениями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колпаков Р. М. Замкнутые классы булевых случайных величин с рациональнозначными распределениями // Математические вопросы кибернетики. Вып. 10. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — С. 215–224. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2001-215

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ БУЛЕВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С РАЦИОНАЛЬНОЗНАЧНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ *)

Р. М. КОЛПАКОВ
(МОСКВА)

Введение

Данное исследование посвящено вопросам дискретных преобразований конечных вероятностных распределений, имеющим важное значение для структурной теории вероятностных автоматов (см. [1]). Центральным для этих вопросов понятием является понятие преобразователя вероятностных распределений. Одним из наиболее важных как с теоретической, так и с практической точки зрения типов преобразователей вероятностных распределений является преобразователь, который выдает значение моделируемой им случайной величины ζ_0, исходя из значений имеющихся в его распоряжении случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Такой преобразователь естественным образом представляется в виде функции из $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ в Ω_0, где Ω_i — множество значений случайной величины ζ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. В частности, если случайные величины $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ являются булевыми, т. е. принимают только два различных значения, например, 0 и 1, то данный преобразователь задается некоторой булевой фукцией f: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. Если при этом случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ независимы и вероятность принятия значения 1 случайной величиной ζ_i равна ρ_i, $i = 1, \ldots, n$, то, обозначив через $\mathcal{N}(f)$ множество всех наборов из $\{0, 1\}^n$, на которых функция f равна 1, мы можем определить вероятность $\boldsymbol{P}\{\zeta_0 = 1\}$ принятия значения 1 случайной величиной ζ_0 следующим образом: **)

$$\boldsymbol{P}\{\zeta_0 = 1\} = \sum_{(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \in \mathcal{N}(f)} (\rho_1)_{\sigma_1} \ldots (\rho_k)_{\sigma_k}, \tag{1}$$

где $(\rho)_1 = \rho$ и $(\rho)_0 = 1 - \rho$. Обозначим величину (1) через $\mathcal{P}\{f(\rho_1, \ldots, \rho_n)\}$. Исследования свойств этой величины были начаты еще в середине XIX века известным английским математиком Дж. Булем, который открыл некоторые фундаментальные взаимосвязи между величинами $\rho_1, \ldots, \rho_n$ и $\mathcal{P}\{f(\rho_1, \ldots$ $\ldots, \rho_n)\}$ (см. [12]).

Пусть H — множество чисел из интервала (0; 1). Мы говорим, что число $a \in (0; 1)$ *порождается* множеством H, если существует булева функция

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99–01–01175, 00–15–96103) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект АО 110).

**) В случае $f \equiv 0$ мы, очевидно, имеем $\boldsymbol{P}\{\zeta_0 = 1\} = 0$.

$f(x_1, \ldots, x_k)$ такая, что $a = \mathscr{P}\{f(\rho_1, \ldots, \rho_k)\}$ для некоторых $\rho_1, \ldots, \rho_k$ из H. Обозначим через $[H]$ замыкание множества H, т. е. множество всех чисел, порождаемых множеством H. Заметим, что, если $f(x) = x$, то $\mathscr{P}\{f(\rho)\} = \rho$ для любого $\rho \in (0; 1)$, тем самым $H \subseteq [H]$.

Будем также говорить, что множество $A \subseteq (0; 1)$ *порождается* множеством H, если $A \subseteq [H]$. Мы называем множество H *замкнутым*, если $H = [H]$.

Для произвольного множества натуральных чисел T и натурального k мы обозначаем через T^{-k} множество всех чисел из T, больших k. Для любого числа n из $\mathbb{N}^{-1}$ через $\mathscr{I}[n]$ обозначается множество всех простых делителей n.

Изучение различных аспектов определенного нами порождения чисел является важным направлением исследований в области синтеза преобразователей вероятностных распределений.

Ряд вопросов, связанных с приближенным порождением чисел одноэлементными множествами и некоторыми другими множествами специального вида, был рассмотрен в [6, 11]. Однако вопрос о полном описании замыканий множеств произвольных чисел из интервала (0; 1) остается открытым.

Естественным подходом к решению данной проблемы представляется рассмотрение множеств из более узких замкнутых классов чисел, всюду плотных в интервале (0; 1). Таким классом является множество всех рациональных чисел из интервала (0; 1), которое мы обозначаем через $\boldsymbol{Q}(0; 1)$. Для любого множества M различных простых чисел мы можем выделить из $\boldsymbol{Q}(0; 1)$ подмножество $G[M]$ всех дробей таких, что все простые делители знаменателей этих дробей содержатся в M:

$$\left\{a = \frac{m}{n} \;\middle|\; 0 < a < 1,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^{-1},\ \mathscr{I}[n] \subseteq M\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что множества $G[M]$ являются замкнутыми и тем самым представляют собой простейший пример замкнутых подклассов множества $\boldsymbol{Q}(0; 1)$.

По-видимому, рассматриваемое порождение рациональных чисел впервые изучалось в работе Р. Л. Схиртладзе [10]. Им было показано, что множества $G[\{2\}]$ и $G[\{3\}]$ порождаются в классе вероятностных контактных сетей системами чисел $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ соответственно. Таким образом, множества $G[\{2\}]$ и $G[\{3\}]$ являются *конечно порожденными*, т. е. порождаются некоторыми своими конечными подмножествами.

Дальнейшие исследования в данной области были проведены Ф. И. Салимовым в [8, 9]. Им было доказано, что множество $G[M]$ является конечно порожденным для любого конечного M, и была полностью установлена структура решетки, образуемой множествами $G[M]$.

Изучение порождения рациональных чисел в классе вероятностных контактных сетей было продолжено автором в [2, 3]. Была установлена конечная порожденность множеств $G[M]$ в этом классе для всех конечных множеств M, содержащих по крайней мере два числа, а также для $M = \{5\}$ и $M = \{7\}$.

В [4] получен критерий порождаемости множества $G[M]$, где M конечно, заданным конечным подмножеством.

В [5] дано простое описание замыканий всех конечных множеств чисел из $\boldsymbol{Q}(0; 1)$.

На основе этого результата мы приводим в настоящей работе полное описание всех замкнутых и всех конечно порожденных замкнутых подмножеств множества $\boldsymbol{Q}(0; 1)$. Мы также определяем структуру решетки, образуемой этими подмножествами.

Вспомогательные определения и результаты

Следуя стандартной терминологии, мы называем натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *попарно простыми*, если каждое из этих чисел взаимно просто с любым другим из них. Множество чисел из $\mathbb{N}^{-1}$ будем называть *разделимым*, если если оно содержит меньше двух чисел, либо все его числа попарно просты. Будем также называть множество натуральных чисел *взаимно простым* с натуральным числом n, если любое число из этого множества взаимно просто с n. Пустое множество считается взаимно простым с любым натуральным числом. Если множество натуральных чисел A конечно, мы обозначаем через $\|A\|$ произведение всех чисел множества A. Для пустого множества мы полагаем $\|\varnothing\| = 1$. Отметим следующий очевидный факт.

Утверждение 1. *Величина $\|A\|$ взаимно проста с любым натуральным числом, взаимно простым с множеством A.*

Доказательство. Пусть A, B — непустые разделимые множества. Мы называем множество B *делителем* множества A, если для любого числа b из B во множестве A найдется число, кратное b. Пустое множество будем считать делителем любого разделимого множества. Покажем, что введенное нами отношение делимости обладает свойством антисимметричности.

Утверждение 2. *Разделимые множества A и B являются делителями друг друга тогда и только тогда, когда $A = B$.*

Пусть A и B являются делителями друг друга. Предположим, что $A \neq B$. Без ограничения общности мы можем полагать, что множество A содержит некоторое число a, не содержащееся в B. Тогда в B содержится отличное от a число b, кратное a, и в A содержится число c, кратное b. Следовательно, разделимое множество A содержит различные числа a и c, не являющиеся взаимно простыми. Тем самым мы получили противоречие. В обратную сторону утверждение очевидно.

Делитель B разделимого множества A будем называть *строгим*, если $B \neq A$. Из утверждения 2 вытекает следующее свойство строгих делителей.

Утверждение 3. *Любой делитель строгого делителя разделимого множества является строгим делителем этого множества.*

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — конечные разделимые множества. *Наибольшим общим делителем* $(A_1, \ldots, A_s)$ этих множеств мы называем множество

$$\{a \mid \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_s) > 1,\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, s\},$$

состоящее из больших, чем 1, наибольших общих делителей всевозможных выборок из s чисел по одному числу от каждого из множеств $A_1, \ldots, A_s$. Если хотя бы одно из множеств $A_1, \ldots, A_s$ является пустым, будем полагать $(A_1, \ldots, A_s) = \varnothing$. Отметим, что $(A_1, \ldots, A_s)$ является разделимым множеством и делителем каждого из множеств $A_1, \ldots, A_s$. Кроме того, любое разделимое множество, являющееся делителем каждого из множеств $A_1, \ldots, A_s$, является делителем множества $(A_1, \ldots, A_s)$.

Можно легко обобщить понятие наибольшего общего делителя на случай бесконечного числа конечных разделимых множеств следующим образом. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — конечные разделимые множества. Тогда мы определяем *наибольший общий делитель* $(A_1, A_2, \ldots)$ этих множеств как множество

$$\{a \mid \quad a > 1,\ a = (a_1, a_2, \ldots),\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots\},$$

состоящее из всех тех натуральных чисел, больших 1, которые являются наибольшими общими делителями бесконечных выборок чисел из множеств $A_1, A_2, \ldots$ по одному числу от каждого из этих множеств. Если хотя бы одно из множеств $A_1, A_2, \ldots$ является пустым, мы полагаем $(A_1, A_2, \ldots) = \varnothing$. Заметим, что $(A_1, A_2, \ldots)$ является конечным разделимым множеством. Отметим также, что множество $(A_1, A_2, \ldots)$ является делителем каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots$ и любое разделимое множество, являющееся делителем каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots$, является делителем множества $(A_1, A_2, \ldots)$. В дальнейшем мы воспользуемся следующим свойством множества $(A_1, A_2, \ldots)$.

Лемма 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — бесконечная последовательность конечных разделимых множеств натуральных чисел. Тогда для некоторого достаточно большого j справедливо равенство*

$$(A_1, A_2, \ldots) = (A_1, \ldots, A_j) = (A_1, \ldots, A_{j+1}) = (A_1, \ldots, A_{j+2}) = \ldots$$

Доказательство. Для удобства положим $T_1 = A_1$, $T_i = (A_1, \ldots, A_i)$ для $i \geqslant 2$ и $T = (A_1, A_2, \ldots)$. Заметим, что для любого i множество T_{i+1} является делителем T_i, поэтому, если $T_i \neq T_{i+1}$, то T_{i+1} является строгим делителем T_i и в этом случае согласно утверждению 3 все множества $T_{i+1}, T_{i+2}, T_{i+3}, \ldots$ являются строгими делителями T_i, т. е. не совпадают с T_i. Таким образом, поскольку все множества $T_2, T_3, \ldots$ являются делителями конечного множества T_1, имеющего конечное число делителей, неравенство $T_i \neq T_{i+1}$ может быть выполнено только для конечного числа значений i. Это означает, что для некоторого достаточно большого j выполняется $T_j = T_{j+1} = T_{j+2} = \ldots$

Предположим, что $T_j \neq T$. Поскольку T является делителем T_j, согласно утверждению 2 получаем, что T_j не является делителем T. Это означает, что в T_j найдется число a, не содержащееся в T. Согласно определению множества T_j мы имеем $a = (a_1, \ldots, a_j)$ для некоторых чисел $a_1, \ldots, a_j$ из множеств $A_1, \ldots, A_j$ соответственно. Если для любого $k > j$ множество A_k содержит некоторое число a_k, кратное a, то $a = (a_1, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots)$ и, следовательно, $a \in T$. Поэтому найдется некоторое $k > j$ такое, что ни одно из чисел множества A_k не делится на a. Тогда, очевидно, число a не может содержаться во множестве T_k, что противоречит равенству $T_j = T_k$. Таким образом, $T_j = T$.

Заметим, что, если разделимое множество A взаимно просто с натуральным числом n, то любой делитель этого множества также взаимно прост с n. Поэтому мы можем сформулировать еще одно свойство наибольших общих делителей разделимых множеств.

Утверждение 4. *Наибольший общий делитель разделимых множеств натуральных чисел взаимно прост с любым из чисел, взаимно простых с хотя бы одним из этих множеств.*

Множество натуральных чисел $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$ будем называть *мультипликативным разбиением* конечного множества натуральных чисел A, если ему соответствует некоторое разбиение множества A на непересекающиеся (возможно несобственные) подмножества $A_1, \ldots, A_t$ такие, что $b_i = \|A_i\|$, $i = 1, \ldots, t$.

Из утверждения 1 вытекает

Утверждение 5. *Мультипликативное разбиение разделимого множества натуральных чисел является разделимым и взаимно простым с любым из натуральных чисел, взаимно простых с этим множеством.*

Замкнутые классы в $Q(0;1)$

Пусть t_1, t_2 — взаимно простые натуральные числа, M — произвольное непустое множество различных простых чисел, взаимно простое с t_1 и t_2. Обозначим через $G[M;\, t_1\colon t_2]$ следующее подмножество множества $G[M]$:

$$\left\{ \tfrac{m}{n} \;\middle|\; \tfrac{m}{n} \in G[M],\, m \equiv 0 \pmod{t_1},\, m \equiv n \pmod{t_2} \right\}.$$

В [5] показано, что множество $G[M;\, t_1\colon t_2]$ непусто и корректно определено относительно операций сокращения и умножения числителя и знаменателя дроби на одно и то же число в случае, если M конечно. Таким же образом можно показать справедливость этих свойств множества $G[M;\, t_1\colon t_2]$ в случае бесконечного M.

Пусть T — конечное разделимое множество натуральных чисел, взаимно простых со множеством M. Согласно утверждению 5 для любого подмножества T' множества T мы имеем, что числа $\|T'\|$, $\|T \setminus T'\|$ являются взаимно простыми между собой и со множеством M. Поэтому для любого подмножества T' множества T существует множество $G[M;\, \|T'\|\colon \|T \setminus T'\|]$. Следовательно, мы можем рассмотреть следующее подмножество множества $G[M]$:

$$\bigcup_{T' \subseteq T} G\left[M;\, \|T'\|\colon \|T \setminus T'\|\right],$$

где объединение берется по всем, в том числе и несобственным, подмножествам T' множества T. Мы обозначаем данное подмножество через $G[M;\, T]$. В случае, если $T = \varnothing$, мы полагаем $G[M;\varnothing] = G[M]$. Можно показать, что любое множество $G[M;\, T]$ является замкнутым.

Лемма 2. *Для любого множества M различных простых чисел и любого конечного разделимого множества T натуральных чисел, взаимно простых с M, множество $G[M;\, T]$ является замкнутым.*

В данной работе мы опускаем доказательство леммы 2, поскольку оно практически дословно повторяет приведенное в [5, лемма 3] доказательство замкнутости множеств $G[M;\, T]$ в случае конечного M.

Согласно лемме 2 все множества $G[M;\, T]$ образуют собой некоторую совокупность замкнутых подмножеств множества $Q(0;1)$, которую мы обозначаем через $\boldsymbol{G}$. Для того чтобы охарактеризовать структуру решетки, образуемой множествами из $\boldsymbol{G}$, нам необходимо установить зависимость отношения включения между произвольными двумя множествами $G[M_1;\, T_1]$, $G[M_2;\, T_2]$ из $\boldsymbol{G}$ от множеств M_1, M_2 и T_1, T_2. Относительно множеств M_1, M_2 эта зависимость очевидна.

Утверждение 6. *Пусть $G[M_1;\, T]$, $G[M_2;\, T]$ — два множества из $\boldsymbol{G}$. Тогда $G[M_1;\, T] \subseteq G[M_2;\, T]$ в том и только в том случае, когда $M_1 \subseteq M_2$.*

Зависимость отношения $G[M;\, T_1] \subseteq G[M;\, T_2]$ от множеств T_1, T_2 описывается несколько сложнее, поскольку для различных множеств T_1, T_2 множества $G[M;\, T_1]$, $G[M;\, T_2]$ могут совпадать. Следующее утверждение, приведенное в [5, утверждение 11] для случая конечного M, дает нам пример такого совпадения.

Утверждение 7. *Для любого множества $G[M;\, T]$ из $\boldsymbol{G}$ выполняется $G[M;\, T] = G[M;\, T^{-2}]$.*

Мы используем утверждение 7 для доказательства следующего факта.

Утверждение 8. *Пусть $G[M;\, T_1]$, $G[M;\, T_2]$ — два множества из $\boldsymbol{G}$. Тогда $G[M;\, T_1] \subseteq G[M;\, T_2]$ в том и только в том случае, когда T_2^{-2} является делителем T_1.*

Доказательство. Пусть T_2^{-2} является делителем T_1. Рассмотрим произвольное подмножество T_1' множества T_1. Поскольку любое число из T_2^{-2} является делителем какого-нибудь числа из T_1, мы можем разбить множество T_2^{-2} на два подмножества T_2' и T_2'' такие, что числа из T_2' являются делителями чисел из T_1' и числа из T_2'' являются делителями чисел из $T_1 \setminus T_1'$. Таким образом, все числа из T_2' являются делителями числа $\|T_1'\|$, а все числа из T_2'' являются делителями числа $\|T_1 \setminus T_1'\|$. Поскольку все числа из T_2^{-2} являются попарно простыми, получаем тогда, что числа $\|T_2'\|$ и $\|T_2''\|$ являются делителями чисел $\|T_1'\|$ и $\|T_1 \setminus T_1'\|$ соответственно. Поэтому $G[M; \|T_1'\|\colon \|T_1 \setminus T_1'\|] \subseteq G[M; \|T_2'\|\colon \|T_2''\|] \subseteq G[M; T_2^{-2}]$. Следовательно, в силу произвольности выбора подмножества T_1' мы имеем $G[M; T_1] \subseteq G[M; T_2^{-2}]$. Таким образом, применяя утверждение 7, получаем, что $G[M; T_1] \subseteq G[M; T_2]$.

Предположим теперь, что T_2^{-2} не является делителем T_1. Это означает, что в T_2^{-2} найдется число t, не являющееся делителем ни одного из чисел множества T_1. Покажем, что $G[M; T_1] \nsubseteq G[M; \{t\}]$. Для этого выделим три возможных случая:

а) Пусть $(\|T_1\|, t) = 1$. Выберем натуральное n такое, что $\mathscr{I}(n) \subseteq M$ и $n > 2\|T_1\|$, и рассмотрим дроби $\frac{\|T_1\|}{n}$ и $\frac{2\|T_1\|}{n}$. Так как $(\|T_1\|, t) = 1$ и $t > 2$, то ни одно из чисел $\|T_1\|$, $2\|T_1\|$ не делится на t. Кроме того, числа $n - \|T_1\|$ и $n - 2\|T_1\|$ не могут быть тождественными по модулю t, поэтому одно из этих чисел также не делится на t. Таким образом, по крайней мере одна из дробей $\frac{\|T_1\|}{n}$, $\frac{2\|T_1\|}{n}$ не содержится в $G[M; \{t\}]$. С другой стороны, обе эти дроби содержатся в подмножестве $G[M; \|T_1\|\colon 1]$ множества $G[M; T_1]$.

б) Пусть $(\|T_1\|, t) = a > 1$ и $\|T_1\|$ не делится на t. Выберем натуральное n такое, что $\mathscr{I}(n) \subseteq M$ и $n > \|T_1\|$, и рассмотрим дробь $\frac{\|T_1\|}{n}$, принадлежащую подмножеству $G[M; \|T_1\|\colon 1]$ множества $G[M; T_1]$. Если $n - \|T_1\|$ является кратным t, то n является кратным a и, следовательно, $(n, t) > 1$. Это противоречит необходимому для множества $G[M; T_2]$ условию взаимной простоты множества M со всеми числами множества T_2. Таким образом, ни $\|T_1\|$, ни $n - \|T_1\|$ не делятся на t. Следовательно, $\frac{\|T_1\|}{n} \notin G[M; \{t\}]$.

в) Пусть $\|T_1\|$ является кратным t. Тогда, поскольку никакое число из T_1 не кратно t, в T_1 найдутся по крайней мере два числа t' и t'', не являющиеся взаимно простыми с t. Разобьем множество T_1 на два подмножества T_1' и T_1'' такие, что $t' \in T_1'$, $t'' \in T_1''$. Рассмотрим произвольную дробь $\frac{m}{n}$ из подмножества $G[M; \|T_1'\|\colon \|T_1''\|]$ множества $G[M; T_1]$. Заметим, что ни m, ни $n - m$ не могут быть кратными t, поскольку в противном случае число n делится соответственно либо на (t, t''), либо на (t, t') и, следовательно, не является взаимно простым с t, что противоречит необходимому для множества $G[M; T_2]$ условию взаимной простоты множества M со всеми числами множества T_2. Таким образом, $\frac{m}{n} \notin G[M; \{t\}]$.

Так как, очевидно, $G[M; T_2] \subseteq G[M; \{t\}]$, из доказанного соотношения $G[M; T_1] \nsubseteq G[M; \{t\}]$ вытекает $G[M; T_1] \nsubseteq G[M; T_2]$.

Суммируя утверждения 6, 7 и 8, мы получаем

Утверждение 9. *Пусть $G[M_1; T_1]$, $G[M_2; T_2]$ — два множества из $\mathbf{G}$. Тогда*

а) $G[M_1; T_1] \subseteq G[M_2; T_2]$ тогда и только тогда, когда $M_1 \subseteq M_2$ и T_2^{-2} является делителем T_1;

б) $G[M_1; T_1] = G[M_2; T_2]$ тогда и только тогда, когда $M_1 = M_2$ и $T_1^{-2} = T_2^{-2}$.

Доказательство. Если $M_1 \subseteq M_2$ и T_2^{-2} является делителем T_1, то согласно утверждениям 6 и 8 выполняется $G[M_1;\, T_1] \subseteq G[M_2;\, T_1] \subseteq \subseteq G[M_2;\, T_2]$. Пусть теперь $G[M_1;\, T_1] \subseteq G[M_2;\, T_2]$. Тогда, очевидно, $M_1 \subseteq M_2$. Предположим, что T_2^{-2} не является делителем T_1. Тогда согласно утверждению 8 имеем $G[M_1;\, T_1] \not\subseteq G[M_1;\, T_2]$. Так как $G[M_1;\, T_2] = G[M_2;\, T_2] \bigcap G[M_1]$, то $G[M_1;\, T_1] \bigcap G[M_2;\, T_2] \subseteq G[M_1;\, T_2]$. Поэтому из $G[M_1;\, T_1] \not\subseteq G[M_1;\, T_2]$ вытекает $G[M_1;\, T_1] \not\subseteq G[M_2;\, T_2]$. Таким образом, п. а) полностью доказан.

Предположим теперь $G[M_1;\, T_1] = G[M_2;\, T_2]$. Тогда согласно п. а) нашего утверждения имеем, что $M_1 = M_2$ и множество T_1^{-2} является делителем T_2. Тем самым T_1^{-2} является делителем T_2^{-2}. Аналогичным образом получаем, что T_2^{-2} является делителем T_1^{-2}. Поэтому согласно утверждению 2 имеем $T_1^{-2} = T_2^{-2}$. С другой стороны, соотношение $G[M_1;\, T_1] = G[M_2];\, T_2]$ очевидным образом следует из равенств $M_1 = M_2$ и $T_1^{-2} = T_2^{-2}$ в силу утверждения 7.

Утверждение 9 позволяет установить отношение включения между любыми множествами из $\boldsymbol{G}$.

Основной результат

Основной целью данной работы является описание всех замкнутых классов чисел из множества $\boldsymbol{Q}(0;1)$. Поскольку любой из этих классов является замыканием некоторого своего подмножества (например, самого этого класса), для решения данной задачи нам достаточно дать описание замыканий всевозможных подмножеств множества $\boldsymbol{Q}(0;1)$. Поскольку любое рациональное число однозначно выражается некоторой несократимой дробью, без ограничения общности мы можем рассматривать только замыкания множеств несократимых дробей из $\boldsymbol{Q}(0;1)$.

Пусть $H = \left\{ \frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_s}{n_s} \right\}$ — конечное множество несократимых дробей из $\boldsymbol{Q}(0;1)$. Положим

$$T[H] = \begin{cases} \left(\{m_1, n_1 - m_1\}^{-1}, \ldots, \{m_s, n_s - m_s\}^{-1}\right), & \text{если } s \geqslant 2; \\ \{m_1, n_1 - m_1\}^{-1}, & \text{если } s = 1. \end{cases}$$

В [5] получено следующее описание для множества $[H]$.

Теорема 1. *Пусть* $H = \left\{ \frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_s}{n_s} \right\}$ *— конечное множество несократимых дробей из* $\boldsymbol{Q}(0;1)$. *Тогда* $[H] = G\left[\bigcup\limits_{i=1}^{s} \mathcal{I}(n_i);\, T[H]^{-2}\right]$.

Если $H = \left\{ \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots \right\}$ является бесконечным множеством несократимых дробей из $\boldsymbol{Q}(0;1)$, мы обозначаем через $T[H]$ множество

$$\left(\{m_1, n_1 - m_1\}^{-1}, \{m_2, n_2 - m_2\}^{-1}, \ldots\right).$$

В силу несократимости дробей множества H для любого $i = 1, 2, \ldots$ множество $\{m_i, n_i - m_i\}^{-1}$ является разделимым и взаимно простым с n_i. Поэтому, учитывая утверждение 4, мы имеем, что множество $T[H]$ является разделимым и взаимно простым с каждым из чисел $n_1, n_2, \ldots$. Тем самым $T[H]$ взаимно просто с любым числом из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}(n_i)$. Таким образом, мы можем рассмотреть множество $G\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{I}(n_i);\ T[H]^{-2}\right]$. Следующая теорема является обобщением теоремы 1 на случай замыканий бесконечных подмножеств множества $\mathbf{Q}(0;1)$.

Теорема 2. *Пусть* $H=\left\{\frac{m_1}{n_1},\ldots,\frac{m_s}{n_s},\ldots\right\}$ *— бесконечное множество несократимых дробей из* $\mathbf{Q}(0;1)$. *Тогда* $[H]=G\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{I}(n_i);\ T[H]^{-2}\right]$.

Доказательство. Для удобства обозначим множество $\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{I}(n_i)$ через П. Для любой дроби $\frac{m_i}{n_i}$ из H множество $T[H]^{-2}$ разбивается на два подмножества T_i', T_i'' чисел, являющихся делителями чисел m_i и n_i-m_i соответственно. В силу взаимной простоты всех чисел множества $T[H]$ числа m_i и n_i-m_i должны быть кратными числам $\|T_i'\|$ и $\|T_i''\|$ соответственно, поэтому $\frac{m_i}{n_i}\in G[\mathcal{I}(n_i);\ \|T_i'\|:\ \|T_i''\|]\subseteq G[\Pi;\ T[H]^{-2}]$. Таким образом, $H\subseteq G[\Pi;\ T[H]^{-2}]$ и согласно лемме 2 множество $G[\Pi;\ T[H]^{-2}]$ замкнуто. Следовательно, $[H]\subseteq G[\Pi;\ T[H]^{-2}]$.

Рассмотрим теперь произвольную дробь $\frac{m}{n}$ из $G[\Pi;T[H]^{-2}]$. Обозначим через H_i, $i=1,2,\ldots$, подмножество $\left\{\frac{m_1}{n_1},\ldots,\frac{m_i}{n_i}\right\}$ множества H. Согласно лемме 1 существует такое j, что $T[H]=T[H_j]=T[H_{j+1}]=\ldots$ и тем самым $T[H]^{-2}=T[H_j]^{-2}=T[H_{j+1}]^{-2}=\ldots$. Поскольку $\mathcal{I}(n)\subseteq\Pi$, для любого p из $\mathcal{I}(n)$ найдется j_p такое, что $p\in\mathcal{I}\left(n_{j_p}\right)$. Положим $j^*=\max\left(j,\max_{p\in\mathcal{I}(n)}j_p\right)$ и $\Pi^*=\bigcup_{i=1}^{j^*}\mathcal{I}(n_i)$. Согласно теореме 1 имеем $[H_{j^*}]=G[\Pi^*;\ T[H_{j^*}]^{-2}]=G[\Pi^*;\ T[H]^{-2}]$. Так как $\mathcal{I}(n)\subseteq\Pi^*$, то $\frac{m}{n}\in G[\Pi^*;\ T[H]^{-2}]$. Поэтому $\frac{m}{n}\in[H_{j^*}]\subseteq[H]$. Таким образом, $G[\Pi;\ T[H]^{-2}]\subseteq[H]$.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что любое замкнутое множество чисел из $\mathbf{Q}(0;1)$ является элементом множества $\mathbf{G}$. Поэтому, учитывая лемму 2, мы получаем

Следствие 1. *Множество* $\mathbf{G}$ *является множеством всех замкнутых подмножеств множества* $\mathbf{Q}(0;1)$.

Следствие 1 в совокупности с утверждением 9 дает нам полное описание решетки всех замкнутых классов чисел множества $\mathbf{Q}(0;1)$.

Конечно порожденные замкнутые классы в $\mathbf{Q}(0;1)$

Среди замкнутых классов чисел наибольшее значение с практической точки зрения имеют классы, порождаемые конечными множествами чисел. Поэтому представляет большой интерес вопрос описания всех конечно порожденных замкнутых подмножеств множества $\mathbf{Q}(0;1)$. Обозначим через $\mathbf{G}_{\text{fin}}$ подмножество множества $\mathbf{G}$, состоящее из всех множеств $G[M];T]$ таких, что M конечно. Из теоремы 1 вытекает, что все конечно порожденные замкнутые подмножества множества $\mathbf{Q}(0;1)$ являются элементами множества $\mathbf{G}_{\text{fin}}$. Мы можем показать, что обратное утверждение также справедливо.

Теорема 3. *Любое множество из* $\mathbf{G}_{\text{fin}}$ *является конечно порожденным.*

Доказательство. Пусть $G[M; T]$ — произвольное множество из $G_{\rm fin}$. В силу утверждения 7 без ограничения общности мы можем полагать, что $T = T^{-2}$. Поскольку $G[M; T]$ состоит из счетного количества рациональных чисел, мы можем представить $G[M; T]$ в виде бесконечной последовательности несократимых дробей $\left\{\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_i}{n_i}, \ldots\right\}$, которую обозначим через H. Очевидно, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}(n_i) = M$, поэтому согласно теореме 2 имеем $[H] = G[M; T[H]^{-2}]$. Согласно лемме 2 множество $G[M; T]$ замкнуто, поэтому $[H] = G[M; T]$, тем самым $G[M; T] = G[M; T[H]^{-2}]$. Из этого равенства в силу п. б) утверждения 9 вытекает $T = T[H]^{-2}$. Обозначим через H_i, $i = 1, 2, \ldots$, множество $\left\{\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_i}{n_i}\right\}$. Согласно лемме 1 существует такое j, что $T[H] = T[H_j] = T[H_{j+1}] = \ldots$ и, следовательно, $T = T[H]^{-2} = T[H_j]^{-2} = T[H_{j+1}]^{-2} = \ldots$ Поскольку $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}(n_i)$ и M конечно, то, очевидно, $M = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{I}(n_i)$ для некоторого достаточно большого s. Положим $k = \max(j, s)$. Заметим, что $T = T[H_k]^{-2}$ и $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{I}(n_i) = M$, поэтому согласно теореме 1 получаем $[H_k] = G[M; T]$.

Следствие 2. *Множество $G_{\rm fin}$ является множеством всех конечно порожденных замкнутых подмножеств множества $\boldsymbol{Q}(0; 1)$.*

Заключение

В данной работе мы полностью охарактеризовали все замкнутые и все конечно порожденные замкнутые классы бинарных вероятностных распределений с рациональными значениями вероятностей, представляющих собой частный случай конечных вероятностных распределений с рациональными значениями вероятностей. Поэтому интересным направлением дальнейших исследований является обобщение полученных нами результатов на случай произвольных конечных вероятностных распределений. Такое обобщение позволило бы создать универсальные преобразователи конечных вероятностных распределений с рациональными значениями вероятностей. Другим важным направлением исследований является изучение порождения чисел из множеств, более широких по отношению ко множеству $\boldsymbol{Q}(0; 1)$, в частности, алгебраических чисел из интервала $(0; 1)$ (см. [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов. — М.: Наука, 1985.
2. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел вероятностными контактными сетями // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1992. — № 5. — С. 46–52.
3. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел вероятностными контактными π-сетями // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, вып. 3. — С. 18–38.
4. Колпаков Р. М. Критерий порождения множеств рациональных вероятностей в классе булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. — Т. 6, № 2. — С. 41–61.
5. Колпаков Р. М. О преобразованиях булевых случайных величин // Математические вопросы кибернетики. Вып. 9. — М.: Физматлит, 2000. — С. 227–252.
6. Нурмеев Н. Н. О булевых функциях с аргументами, принимающими случайные значения // Тез. докл. VIII Всесоюзн. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Горький, 1988. — Ч. 2. — С. 59–60.

7. Нурмеев Н. Н. О сложности реализации преобразователей вероятностей схемами из функциональных элементов // Методы и системы тех. диагностики: межвуз. сборник научных трудов. — Саратов, 1993. — Вып. 18. — С. 131–132.
8. Салимов Ф. И. К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. Казань: Казанский гос. университет, 1979. — Вып. 15. — С. 68–89.
9. Салимов Ф. И. Об одном семействе алгебр распределений // Известия вузов. Сер. Матем. 1988. — № 7. — С. 64–72.
10. Схиртладзе Р. Л. О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрССР. — 1961. — Т. 26, № 2. — С. 181–186.
11. Схиртладзе Р. Л. О методе построения булевой случайной величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. Вып. 7. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1966. — С. 71–80.
12. Hailperin Th. Boole's logic and probability: a critical exposition from the standpoint of contemporary algebra, logic and probability theory // Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam Oxford North-Holland Publishing Co. 1976. V. 85.

Поступило в редакцию 20 X 2001