

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

Н.А. Зайцев, А.А. Ильин, Ю.Б. Радвогин

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ  
ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ  
ОБЛАСТИ С ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

Москва, 2001 г.

Н.А. Зайцев, А.А. Ильин, Ю.Б. Радвогин, *Исследование двумерного стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной области с подвижными стенками.*

**Аннотация.** Предложен алгоритм расчёта для больших чисел Рейнольдса двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной области большого удлинения с движущимися боковыми стенками. Характерной чертой алгоритма является аналитический учёт особенностей решения, возникающих в точках контакта подвижных и неподвижных стенок. Приведены результаты численного исследования.

1

N.A. Zaitsev, A.A. Ilyin, Yu.B. Radvogin. *Analysis of the two-dimensional stationary viscous incompressible flow in a rectangular domain with moving walls.*

**Abstract.** An algorithm for the computation for high Reynolds numbers of the two-dimensional viscous flow in an elongated rectangular domain with moving walls is presented. A characteristic feature of the algorithm is the fact that the singularities at the points of contact between the immovable and moving walls are analytically taken into account. Numerical results are presented.

---

<sup>1</sup>Настоящее исследование поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант No. 99-01-01157 и грант No. 00-01-00387

# 1 Введение

Предлагаемая работа посвящена одной из классических задач о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости. Речь идёт об изучении структуры потока в прямоугольной области, одна или две границы которой движущиеся. Наиболее популярной (по крайней мере, до 90-х годов) является задача с одной скользящей границей — крышкой. Этой задаче посвящено огромное число работ. Мы сошлёмся здесь лишь на работу [1], в которой исследовано течение в квадратной области при числах Рейнольдса вплоть до  $Re = 10000$ .

Уже в задаче с одной движущейся крышкой возникают довольно сложные особенности течения — замкнутые вихревые образования и особые точки. Эта задача часто используется для тестирования новых численных алгоритмов и оценки их эффективности. Однако, по причинам, которые будут разъяснены в данной работе, верификация универсальных алгоритмов решения задач о течении вязкой жидкости на задачах этого типа является не вполне корректной процедурой.

Всё дело в том, что наличие угловых точек с различными скоростями движения границ (в нашем случае одна из границ неподвижна, а другая скользит) порождает особенности в решении: неинтегрируемые бесконечности. И, следовательно, для достижения контролируемой точности следует учитывать структуру этих особенностей, что препятствует (по крайней мере, формально) применению универсальных алгоритмов. Что же касается оценки точности специализированных расчётов, то здесь априорный теоретический анализ вряд ли возможен из-за чрезвычайно сложной картины течения и, главным образом, из-за разномасштабности возникающих структур. Поэтому на первое место выходят вопросы, связанные с выбором адекватной разностной сетки, с тактикой проведения численных исследований и с интерпретацией полученных результатов. Хотя, разумеется, основные характеристики алгоритма, такие как порядок аппроксимации, должны соответствовать точности ожидаемых результатов.

Перейдём к задаче с двумя движущимися границами. Помимо того, что в этом случае структура течения становится более сложной, возникают ещё два специфических направления исследования.

Первое связано с проблемой единственности. Вообще говоря, неединственность искомых течений ничему не противоречит. Классическим примером является задача о диффузоре–конфузоре (см. [4], Гл. 5). Однако, получить неединственность в реально двумерных задачах не так прос-

то. По-видимому, впервые этот факт был обнаружен в [2]. Последние результаты в этом направлении (см. [3]) дают представление о различных решениях и о соответствующей бифуркационной картине.

Второе направление исследования задачи с двумя движущимися границами состоит в изучении течений в областях большого удлинения для таких значений  $Re$ , при которых реальный поток становится турбулентным. Учитывая, что турбулентная вязкость значительно превышает ламинарную, в качестве простейшей модели течения можно рассматривать классический случай  $\nu = \text{const}$ , но при этом попытаться продвинуться в область достаточно больших значений  $Re$ . Что касается удлинения  $\lambda$ , то при  $\lambda \gg 1$  можно надеяться, что область влияния особых (угловых) точек относительно мала, и поэтому структура течения и его характеристики в основной части потока соответствуют реальной картине. Проблема неединственности в данной работе не затрагивается.

Цель исследований, результаты которых представлены в данной работе, состоит в изучении структуры течения в основной части области, определении трения на движущихся стенках и анализе вихревых образований при увеличении  $Re$  вплоть до  $Re = 50000$ . Полученные данные позволяют выявить основные тенденции решения при  $Re \rightarrow \infty$ .

## 2 Постановка задачи

Рассматривается двумерное стационарное движение вязкой жидкости в плоском канале между двумя непроницаемыми перегородками, движущимися с одинаковыми скоростями (см. схему на Рис. 1).



Рис. 1: Труба с перегородками.

Зафиксируем область течения  $S$ , перейдя в систему координат, связанную с движущимися перегородками. Тогда вертикальные стороны

прямоугольника  $S$  станут неподвижными, а горизонтальные будут двигаться со скоростью  $U$ . Параметры области таковы: ширина  $a$  и длина  $\lambda a$ .

Введём декартову систему координат с осью  $x$ , совпадающей с нижней границей канала и направленной в сторону скольжения (т.е. направо при  $U > 0$ ). Тогда границы  $S$  задаются следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, y \in [0, a], \\ x = \lambda a, y \in [0, a], \end{array} \right\} \text{ — неподвижные непроницаемые перегородки,}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, x \in [0, \lambda a], \\ y = a, x \in [0, \lambda a], \end{array} \right\} \text{ — стенки канала, движущиеся со скоростью } U.$$

В предположении постоянства коэффициента кинематической вязкости  $\nu$  течение описывается уравнениями Навье–Стокса в форме

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho_0} p_x &= \nu \Delta u, \\ uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho_0} p_y &= \nu \Delta v, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначения стандартны:  $u$  и  $v$  — декартовы компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно,  $p$  — давление,  $\rho_0$  — (постоянная) плотность. Давление определяется с точностью до несущественной в данной постановке аддитивной постоянной.

Краевые условия:  $u = U$ ,  $v = 0$  при  $y = 0$ ,  $y = a$  и  $u = v = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = \lambda a$  (см. Рис. 2).

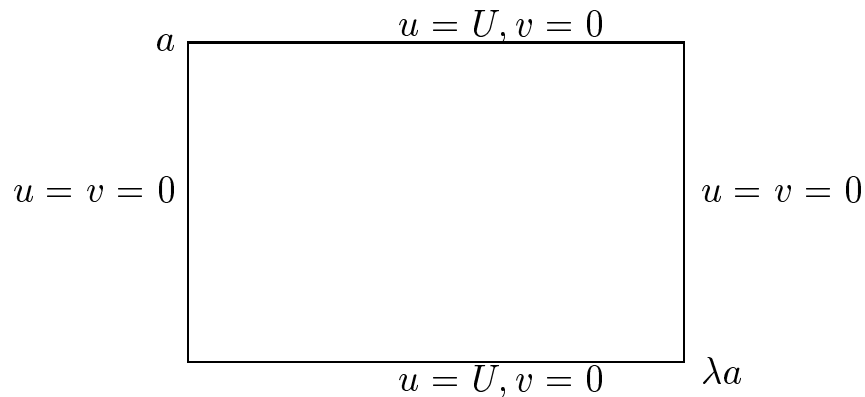


Рис. 2: Исходная область и краевые условия.

Перейдём к безразмерным переменным.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/a, & \bar{y} &= y/a, \\ \bar{u} &= u/U, & \bar{v} &= v/U, \\ \bar{p} &= p/(\rho_0 U^2). \end{aligned}$$

Тогда в безразмерном виде получим

$$\begin{aligned}\bar{u}\bar{u}_x + \bar{v}\bar{u}_y + \bar{p}_x &= \varepsilon\Delta\bar{u}, \\ \bar{u}\bar{v}_x + \bar{v}\bar{v}_y + \bar{p}_y &= \varepsilon\Delta\bar{v}, \\ \bar{u}_x + \bar{v}_y &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\varepsilon = \nu/(aU) = 1/\text{Re}$ , а краевые условия следующие:  $\bar{u} = 1$ ,  $\bar{v} = 0$  при  $y = 0$ ,  $y = 1$  и  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = \lambda$ . Черту в дальнейшем будем опускать.

Введём функцию тока  $\psi$  и вихрь  $\omega$ :

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \omega = \text{rot } \vec{u} = u_y - v_x = \Delta\psi.$$

Применяя  $\text{rot}$  к первым двум уравнениям в (2), получим систему

$$\begin{aligned}\varepsilon\Delta\omega &= \psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y, \\ \Delta\psi &= \omega.\end{aligned}\tag{3}$$

Заметим, что граничные условия симметричны относительно средней линии  $y = 1/2$ . Вопросы существования несимметричных решений (при небольших  $\lambda$ ) исследовались в [2], [3]. Мы же будем интересоваться лишь симметричными решениями. Итак, пусть  $\psi$  и  $\omega$  удовлетворяют условиям:

$$\psi(x, y) = -\psi(x, 1 - y), \quad \omega(x, y) = -\omega(x, 1 - y), \quad 0 \leq y \leq 1/2, \quad 0 \leq x \leq \lambda.\tag{4}$$

Тогда исходная задача сводится к задаче в области  $\tilde{S}$  (нижней половине области  $S$ ) с граничными условиями, показанными на Рис. 3.

Мы будем искать решение в виде

$$\begin{aligned}\psi &= \bar{\psi} + \psi', \\ \omega &= \bar{\omega} + \omega',\end{aligned}\tag{5}$$

где  $\bar{\psi}$  и  $\bar{\omega}$  некоторые известные функции. Тогда для  $\psi'$  и  $\omega'$  получим систему (в которой для простоты записи штрихи опущены)

$$\begin{aligned}\varepsilon\Delta\omega &= \psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y + p\psi_y - q\psi_x + r\omega_x - s\omega_y + \bar{F}, \\ \Delta\psi &= \omega + \bar{G},\end{aligned}\tag{6}$$

где  $p(x, y) = \bar{\omega}_x$ ,  $q(x, y) = \bar{\omega}_y$ ,  $r(x, y) = \bar{\psi}_y$ ,  $s(x, y) = \bar{\psi}_x$ ,

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y) &= -\varepsilon\Delta\bar{\omega} + \bar{\psi}_y\bar{\omega}_x - \bar{\psi}_x\bar{\omega}_y, \\ \bar{G}(x, y) &= \bar{\omega} - \Delta\bar{\psi}.\end{aligned}\tag{7}$$

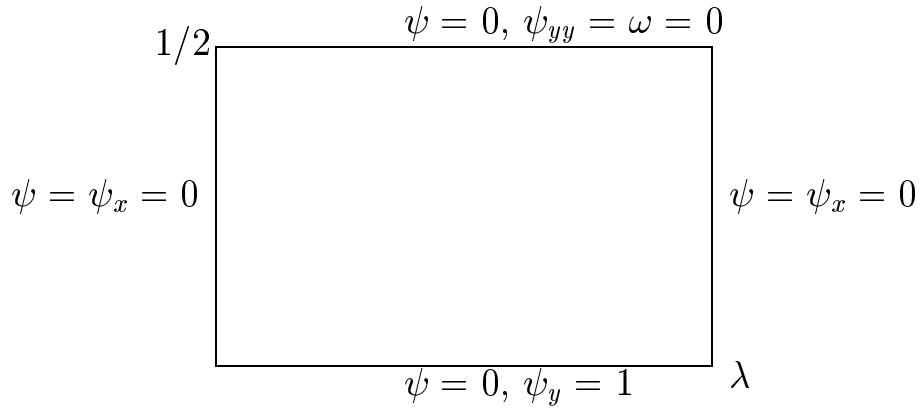


Рис. 3: Задача в нижней половине области.

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
 y = 0 \quad \psi(x, 0) &= -\bar{\psi}(x, 0), \quad \psi_y(x, 0) = 1 - \bar{\psi}_y(x, 0), \\
 y = \frac{1}{2} \quad \psi(x, 1/2) &= -\bar{\psi}(x, 1/2), \quad \omega(x, 1/2) = -\bar{\omega}(x, 1/2), \\
 x = 0 \quad \psi(0, y) &= -\bar{\psi}(0, y), \quad \psi_x(0, y) = -\bar{\psi}_x(0, y), \\
 x = \lambda \quad \psi(\lambda, y) &= -\bar{\psi}(\lambda, y), \quad \psi_x(\lambda, y) = -\bar{\psi}_x(\lambda, y).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Конкретизируем  $\bar{\psi}$  и  $\bar{\omega}$ . Роль этих функций — учесть особенности решения в угловых точках. Начнём с точки  $x = 0, y = 0$ , то есть с левого нижнего угла. Асимптотическое разложение решения в окрестности этой точки имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \psi &= rF_0(\varphi) + r^2F_1(\varphi) + \dots, \\
 \omega &= r^{-1}\Phi_0(\varphi) + \Phi_1(\varphi) + r\Phi_2(\varphi) + \dots,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $(r, \varphi)$  — полярные координаты с центром в в точке  $x = 0, y = 0$ :

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Подстановка этих разложений в (3) даёт для нулевого приближения  $(F_0, \Phi_0)$  следующую систему обыкновенных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 + \Phi_0'' &= 0, \\
 F_0 + F_0'' &= \Phi_0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Граничные условия на сторонах прямого угла порождают краевые условия для системы (10):

$$F_0(0) = 0, \quad F_0'(0) = 1, \quad F_0(\pi/2) = 0, \quad F_0'(\pi/2) = 0. \quad (11)$$

Решение задачи (10), (11) даёт главный член асимптотики (см., например, [4], где также обсуждается ситуация, возникающая в связи с наличием неинтегрируемой особенности):

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) = r F_0(\varphi) = r \mu \left( \frac{\pi^2}{4} \sin \varphi - \frac{\pi}{2} \varphi \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right) = \\ \mu \left( \frac{\pi^2}{4} y - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(y/x) (\pi y + 2x) \right), \end{aligned}$$

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{r} \Phi_0(\varphi) = \mu \frac{1}{r} (2 \sin \varphi - \pi \cos \varphi) = \mu \left( \frac{2y - \pi x}{x^2 + y^2} \right), \quad \mu = \frac{1}{\pi^2/4 - 1}. \quad (12)$$

В качестве функций  $\bar{\psi}$  и  $\bar{\omega}$  возьмём сумму первых членов из асимптотических разложений (9), (12), соответствующих четырём углам полной области  $S$  (несмотря на то, что в силу симметрии течения решения будут фактически отыскиваться в  $\tilde{S}$ ):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x, y) = \Psi(x, y) + \Psi(\lambda - x, y) - \Psi(x, 1 - y) - \Psi(\lambda - x, 1 - y), \\ \bar{\omega}(x, y) = \Omega(x, y) + \Omega(\lambda - x, y) - \Omega(x, 1 - y) - \Omega(\lambda - x, 1 - y). \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что  $\Delta \Psi = \Omega$  и  $\Delta \Omega = 0$ , поэтому  $\Delta \bar{\psi} = \bar{\omega}$  и  $\Delta \bar{\omega} = 0$ . Следовательно, для данного выбора функций, учитывающих особенности решения в углах, вид правых частей  $\bar{F}$  и  $\bar{G}$  в (7) несколько упрощается:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y) = \bar{\psi}_y \bar{\omega}_x - \bar{\psi}_x \bar{\omega}_y, \\ \bar{G}(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Введём “сжимающие” координаты  $\xi, \eta$ :  $x = x(\xi)$ ,  $x : [0, 1] \rightarrow [0, \lambda]$  и  $y = y(\eta)$ ,  $y : [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$ . Тогда в координатах  $(\xi, \eta)$  расчётная область  $\tilde{S}$  представляет собой единичный квадрат. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\dot{x}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\dot{y}} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\dot{x}^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\dot{y}^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\ddot{y}}{\dot{y}^3} \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned}$$



Введём обозначения

$$A = A(\xi) = \frac{1}{\dot{x}^2(\xi)}, \quad \bar{A} = \bar{A}(\xi) = \frac{\ddot{x}(\xi)}{\dot{x}^3(\xi)},$$

$$B = B(\eta) = \frac{1}{\dot{y}^2(\eta)}, \quad \bar{B} = \bar{B}(\eta) = \frac{\ddot{y}(\eta)}{\dot{y}^3(\eta)},$$

$$C = C(\xi, \eta) = \frac{1}{\dot{x}(\xi)\dot{y}(\eta)}.$$

Тогда система (6) в переменных  $\xi, \eta$  принимает вид

$$\varepsilon(A\omega_{\xi\xi} + B\omega_{\eta\eta} - \tilde{A}\omega_{\xi} - \tilde{B}\omega_{\eta}) + P\psi_{\eta} + Q\psi_{\xi} = C(\omega_{\xi}\psi_{\eta} - \omega_{\eta}\psi_{\xi}) + \bar{F}, \quad (15)$$

$$A\psi_{\xi\xi} + B\psi_{\eta\eta} - \bar{A}\psi_{\xi} - \bar{B}\psi_{\eta} = \omega + \bar{G},$$

где

$$\tilde{A}(\xi, \eta) = \bar{A}(\xi) + \frac{1}{\varepsilon \dot{x}(\xi)} r(x(\xi), y(\eta)), \quad P(\xi, \eta) = -\frac{1}{\dot{y}(\eta)} p(x(\xi), y(\eta)),$$

$$\tilde{B}(\xi, \eta) = \bar{B}(\eta) - \frac{1}{\varepsilon \dot{y}(\eta)} s(x(\xi), y(\eta)), \quad Q(\xi, \eta) = \frac{1}{\dot{x}(\xi)} q(x(\xi), y(\eta)).$$

Граничные условия:

$$\eta = 0 \quad \psi(x(\xi), y(0)) = -\bar{\psi}(x(\xi), 0), \quad \psi_{\eta}(x(\xi), y(0)) = \dot{y}(0)(1 - \bar{\psi}_y(x(\xi), 0)),$$

$$\eta = 1 \quad \psi(x(\xi), y(1)) = -\bar{\psi}(x(\xi), 1/2), \quad \omega(x(\xi), y(1)) = -\bar{\omega}(x(\xi), 1/2),$$

$$\xi = 0 \quad \psi(0, y(\eta)) = -\bar{\psi}(0, y(\eta)), \quad \psi_{\xi}(0, y(\eta)) = -\dot{x}(0)\bar{\psi}_x(0, y(\eta)),$$

$$\xi = 1 \quad \psi(x(1), y(\eta)) = -\bar{\psi}(\lambda, y(\eta)), \quad \psi_{\xi}(x(1), y(\eta)) = -\dot{x}(1)\bar{\psi}_x(\lambda, y(\eta)).$$

(16)

### 3 Разностные уравнения

Введём в единичном квадрате  $0 \leq \xi, \eta \leq 1$  равномерную сетку  $\xi_i = h_{\xi}i$ ,  $\eta_j = h_{\eta}j$ ,  $h_{\xi} = 1/N_{\xi}$ ,  $h_{\eta} = 1/N_{\eta}$ , где  $0 \leq i \leq N_{\xi}$ ,  $0 \leq j \leq N_{\eta}$ . Неизвестными являются значения функций  $\psi$  и  $\omega$  во внутренних точках  $1 \leq i \leq N_{\xi} - 1$ ,

$1 \leq j \leq N_\eta - 1$ ; всего  $2(N_\xi - 1)(N_\eta - 1)$  неизвестных. Введём некоторый средний шаг  $h$ , например,  $h = (h_\xi + h_\eta)/2$ . Тогда  $h_\xi = \alpha h$ ,  $h_\eta = \beta h$ . Выпишем разностные уравнения, соответствующие системе (15), заменяя все производные центральными разностями.

$$\begin{aligned}
& \varepsilon [A_i(\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}) + B_j(\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}) - \\
& \quad \tilde{A}_{i,j}(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}) - \tilde{B}_{i,j}(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1})] + \\
& \quad P_{i,j}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) + Q_{i,j}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) = \\
& \quad C_{i,j} [(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}) - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1})] + h^2 \bar{F}_{i,j}, \\
& \quad 2 \leq i \leq N_\xi - 2, \quad 2 \leq j \leq N_\eta - 1,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
& A_i(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) + B_j(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) - \\
& \quad \bar{A}_i(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) - \bar{B}_j(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) = h^2 \omega_{i,j} + h^2 \bar{G}_{i,j}, \\
& \quad 1 \leq i \leq N_\xi - 1, \quad 1 \leq j \leq N_\eta - 1.
\end{aligned} \tag{18}$$

В (17), (18) введены обозначения

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{A(\xi_i)}{\alpha^2}, \quad B_j = \frac{B(\eta_j)}{\beta^2}, \quad \tilde{A}_{i,j} = \tilde{A}(\xi_i, \eta_j) \frac{h}{2\alpha}, \quad \tilde{B}_{i,j} = \tilde{B}(\xi_i, \eta_j) \frac{h}{2\beta}, \\
P_{i,j} &= P(\xi_i, \eta_j) \frac{h}{2\beta}, \quad Q_{i,j} = Q(\xi_i, \eta_j) \frac{h}{2\alpha}, \quad C_{i,j} = C(\xi_i, \eta_j) \frac{1}{4\alpha\beta}, \\
\bar{A}_i &= \bar{A}(\xi_i) \frac{h}{2\alpha}, \quad \bar{B}_j = \bar{B}(\eta_j) \frac{h}{2\beta}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в отличие от полной области  $S$ , первое уравнение в (15) аппроксимируется и в верхних приграничных точках, поскольку функция  $\omega$  известна на верхней границе, см. Рис. 3.

Аппроксимируя граничные условия (16) со вторым порядком, замыкаем систему уравнений (17), (18) следующими граничными условиями

(однотипными для всех точек, кроме нижних угловых, которые обслуживаются отдельно):

$$\psi_{1,j} - \frac{1}{4}\psi_{2,j} = -\frac{1}{2}h_\xi \dot{x}(0)\bar{\psi}_x(0, y(\eta_j)) - \frac{3}{4}\bar{\psi}(0, y(\eta_j)) =: a_0(j),$$

$$\psi_{N_\xi-1,j} - \frac{1}{4}\psi_{N_\xi-2,j} = \frac{1}{2}h_\xi \dot{x}(1)\bar{\psi}_x(\lambda, y(\eta_j)) - \frac{3}{4}\bar{\psi}(\lambda, y(\eta_j)) =: b_0(j),$$

$$j = 2, \dots, N_\eta - 1,$$

$$\psi_{i,1} - \frac{1}{4}\psi_{i,2} = \frac{1}{2}h_\eta \dot{y}(0)(1 - \bar{\psi}_y(x(\xi_i), 0)) - \frac{3}{4}\bar{\psi}(x(\xi_i), 0) =: c_0(i),$$

$$i = 2, \dots, N_\xi - 2,$$

$$\psi_{1,1} = \psi_{1,1}^{\text{FP}} - \bar{\psi}(x(h_\xi), y(h_\eta)), \quad \psi_{N_\xi-1,1} = \psi_{N_\xi-1,1}^{\text{FP}} - \bar{\psi}(x(1 - h_\xi), y(h_\eta)), \quad (19)$$

где  $\psi_{1,1}^{\text{FP}} = \Psi(x(h_\xi), y(h_\eta))$ ,  $\psi_{N_\xi-1,1}^{\text{FP}} = \Psi(\lambda - x(h_\xi), y(h_\eta))$  (см. (12)).

*Замечание 1.* Строго говоря, при использовании разностной схемы второго порядка аппроксимации необходима ограниченность четвёртых производных от  $\omega$ . Но это возможно лишь тогда, когда в асимптотических разложениях (9) удержано достаточно большое число членов — вплоть до  $r^6 F_5(\varphi)$  и  $r^4 \Phi_5(\varphi)$ . Речь идёт о последовательном решении системы краевых задач для  $F_k(\varphi)$  и  $\Phi_k(\varphi)$ .

$$\begin{aligned} 4F_1 + F_1'' &= \Phi_1, & \varepsilon\Phi_1'' + (F_0\Phi_0)' &= 0, \\ 9F_2 + F_2'' &= \Phi_2, & \varepsilon(\Phi_2 + \Phi_2'') + (F_1'\Phi_0 + F_0\Phi_1' + 2F_1\Phi_0) &= 0, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (20)$$

“Нулевую” пару системы (20) и её решение см. (10), (12); последующие уравнения имеют аналогичную структуру и получаются, как и приведённые выше, прямой подстановкой (9) в систему Навье–Стокса, записанную в полярных координатах. Граничные условия к системе (20) — однородные:  $F_k = F_k' = \Phi_k = \Phi_k' = 0$  при  $\varphi = 0$ ; и  $\varphi = \pi/2$ .

Однако, практическая реализация такой программы сопряжена с рядом трудностей. Во-первых, сложность аналитических вычислений  $F_k$  и  $\Phi_k$  катастрофически растёт с ростом  $k$ . Во-вторых, при  $r \gg 1$  (а практически речь идёт о  $r \sim 20$ ) наличие множителя  $r^6$  существенно ухудшает обусловленность всей разностной системы, что, в конечном итоге, приводит к необходимости усложнять алгоритм путём увеличения разрядности машинного представления чисел.

Что касается необходимости учёта нулевого приближения, то, забегая вперёд, заметим следующее: включение в алгоритм соответствующих членов не только недорогой ценой улучшает точность, но и значительно повышает эффективность итерационного процесса решения нелинейной разностной задачи.

*Замечание 2.* В заключение этого раздела определим “сжимающие” координаты  $x(\xi) : [0, 1] \rightarrow [0, \lambda]$  и  $y(\eta) : [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$ , которые использовались в алгоритме:

$$x(\xi) = \frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{arctg}(k(2\xi - 1))}{\operatorname{arctg} k} \right), \quad (21)$$

$$y(\eta) = a(\eta - 1)^7 + b(\eta - 1)^5 + c(\eta - 1)^3 + d(\eta - 1) + \frac{1}{2}.$$

Коэффициент  $k$  характеризует сгущение у концов  $x = 0$  и  $x = \lambda$ . Функция  $y(\eta)$  выбиралась полиномом по нечётным степеням  $\eta - 1$  с тем, чтобы функция была бы нечётной относительно  $y(1) = 1/2$ :

$$y(\eta) - y(1) = -(y(2 - \eta) - y(1)).$$

## 4 Численный алгоритм

Полученная система разностных уравнений (17)–(19) решается итерационным методом Ньютона. Для этого переменные  $\psi, \omega$  представляются в виде

$$(\psi, \omega)_{i,j} = (\psi^{(s)}, \omega^{(s)})_{i,j} + (\delta\psi, \delta\omega)_{i,j}, \quad (22)$$

где  $\delta$  обозначает приращение, а индекс (s) — значение на предыдущей итерации. Подставляя (22) в (17)–(19) и отбрасывая квадратичные члены, получаем следующую линейную систему для приращений, соответствующую

щюю нелинейной системе разностных уравнений (17) – (19):

$$\begin{aligned}
& \varepsilon [A_i(\delta\omega_{i+1,j} - 2\delta\omega_{i,j} + \delta\omega_{i-1,j}) + B_j(\delta\omega_{i,j+1} - 2\delta\omega_{i,j} + \delta\omega_{i,j-1}) - \\
& \quad \tilde{A}_{i,j}(\delta\omega_{i+1,j} - \delta\omega_{i-1,j}) - \tilde{B}_{i,j}(\delta\omega_{i,j+1} - \delta\omega_{i,j-1})] + \\
& Q_{i,j}(\delta\psi_{i+1,j} - \delta\psi_{i-1,j}) + P_{i,j}(\delta\psi_{i,j+1} - \delta\psi_{i,j-1}) - \\
& C_{i,j} [(\psi_{i,j+1}^{(s)} - \psi_{i,j-1}^{(s)})(\delta\omega_{i+1,j} - \delta\omega_{i-1,j}) - (\psi_{i+1,j}^{(s)} - \psi_{i-1,j}^{(s)})(\delta\omega_{i,j+1} - \delta\omega_{i,j-1}) + \\
& (\delta\psi_{i,j+1} - \delta\psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j}^{(s)} - \omega_{i-1,j}^{(s)}) - (\delta\psi_{i+1,j} - \delta\psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1}^{(s)} - \omega_{i,j-1}^{(s)})] = G_{i,j}^{(s)},
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{i,j}^{(s)} &= h^2 \bar{F}_{i,j} + \\
& C_{i,j} [(\psi_{i,j+1}^{(s)} - \psi_{i,j-1}^{(s)})(\omega_{i+1,j}^{(s)} - \omega_{i-1,j}^{(s)}) - (\psi_{i+1,j}^{(s)} - \psi_{i-1,j}^{(s)})(\omega_{i,j+1}^{(s)} - \omega_{i,j-1}^{(s)})] - \\
& \varepsilon [A_i(\omega_{i+1,j}^{(s)} - 2\omega_{i,j}^{(s)} + \omega_{i-1,j}^{(s)}) + B_j(\omega_{1,j+1}^{(s)} - 2\omega_{i,j}^{(s)} + \omega_{i,j-1}^{(s)}) - \\
& \quad \tilde{A}_{i,j}(\omega_{i+1,j}^{(s)} - \omega_{i-1,j}^{(s)}) - \tilde{B}_{i,j}(\omega_{i,j+1}^{(s)} - \omega_{i,j-1}^{(s)})] - \\
& Q_{i,j}(\psi_{i+1,j}^{(s)} - \psi_{i-1,j}^{(s)}) - P_{i,j}(\psi_{i,j+1}^{(s)} - \psi_{i,j-1}^{(s)}), \\
& 2 \leq i \leq N_\xi - 2, \quad 2 \leq j \leq N_\eta - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_i(\delta\psi_{i+1,j} - 2\delta\psi_{i,j} + \delta\psi_{i-1,j}) + B_j(\delta\psi_{i,j+1} - 2\delta\psi_{i,j} + \delta\psi_{i,j-1}) - \\
& \bar{A}_i(\delta\psi_{i+1,j} - \delta\psi_{i-1,j}) - \bar{B}_j(\delta\psi_{i,j+1} - \delta\psi_{i,j-1}) - h^2\delta\omega_{i,j} = H_{i,j}^{(s)},
\end{aligned}$$

(24)

где

$$H_{i,j}^{(s)} = h^2 \omega_{i,j}^{(s)} + h^2 \bar{G}_{i,j} -$$

$$\left[ A_i(\psi_{i+1,j}^{(s)} - 2\psi_{i,j}^{(s)} + \psi_{i-1,j}^{(s)}) + B_j(\psi_{i,j+1}^{(s)} - 2\psi_{i,j}^{(s)} + \psi_{i,j-1}^{(s)}) - \right.$$

$$\left. \bar{A}_i(\psi_{i+1,j}^{(s)} - \psi_{i-1,j}^{(s)}) - \bar{B}_j(\psi_{i,j+1}^{(s)} - \psi_{i,j-1}^{(s)}) \right],$$

$$1 \leq i \leq N_\xi - 1, \quad 1 \leq j \leq N_\eta - 1.$$

$$\delta\psi_{1,j} - \frac{1}{4} \delta\psi_{2,j} = -\psi_{1,j}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{2,j}^{(s)} + a_0(j),$$

$$\delta\psi_{N_\xi-1,j} - \frac{1}{4} \delta\psi_{N_\xi-2,j} = -\psi_{N_\xi-1,j}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{N_\xi-2,j}^{(s)} + b_0(j),$$

$$\delta\psi_{i,1} - \frac{1}{4} \delta\psi_{i,2} = -\psi_{i,1}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{i,2}^{(s)} + c_0(i),$$

$$i = 2, \dots, N_\xi - 2, \quad j = 2, \dots, N_\eta - 1,$$

$$\delta\psi_{1,1} = -\psi_{1,1}^{(s)} + \psi_{1,1}^{\text{rp}} - \bar{\psi}_{1,1}, \quad \delta\psi_{N_\xi-1,1} = -\psi_{N_\xi-1,1}^{(s)} + \psi_{N_\xi-1,1}^{\text{rp}} - \bar{\psi}_{N_\xi-1,1}, \quad (25)$$

где  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  определены в (19).

Введём векторы неизвестных  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, N_\xi - 1$ ,

$$W_i = (\delta\psi_{i,1}, \delta\omega_{i,1}, \delta\psi_{i,2}, \delta\omega_{i,2}, \dots, \delta\psi_{i,N_\eta-1}, \delta\omega_{i,N_\eta-1})^T.$$

Тогда линейную систему (23)–(25) можно переписать в следующем виде

$$\mathcal{B}_1 W_1 + \mathcal{C}_1 W_2 = F_1,$$

$$\mathcal{A}_i W_{i-1} + \mathcal{B}_i W_i + \mathcal{C}_i W_{i+1} = F_i, \quad (26)$$

$$\mathcal{A}_{N_\xi-1} W_{N_\xi-2} + \mathcal{B}_{N_\xi-1} W_{N_\xi-1} = F_{N_\xi-1},$$

$$i = 2, \dots, N_\xi - 2.$$

В этой системе  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  это матрицы порядка  $2(N_\eta - 1) \times 2(N_\eta - 1)$ :  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{C}$  блочно-диагональные матрицы, имеющие на главной диагонали  $N_\eta - 1$

ненулевых  $2 \times 2$  блоков. Для  $i = 2, \dots, N_\xi - 2$  имеем

$$\mathcal{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}^2 & a_{12}^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{21}^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{11}^{N_\eta-1} & a_{12}^{N_\eta-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{21}^{N_\eta-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^j &= -Q_{i,j} - C_{i,j}(\omega_{i,j+1}^{(s)} - \omega_{i,j-1}^{(s)}), \\ a_{12}^j &= \varepsilon(A_i + \tilde{A}_{i,j}) + C_{i,j}(\psi_{i,j+1}^{(s)} - \psi_{i,j-1}^{(s)}), \text{ для } j = 2, \dots, N_\eta - 1, \\ a_{21}^j &= A_i + \bar{A}_i, \text{ для } j = 1, \dots, N_\eta - 1; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathcal{C}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_{21}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}^2 & c_{12}^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{21}^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{11}^{N_\eta-1} & c_{12}^{N_\eta-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{21}^{N_\eta-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_{11}^j &= Q_{i,j} + C_{i,j}(\omega_{i,j+1}^{(s)} - \omega_{i,j-1}^{(s)}), \\ c_{12}^j &= \varepsilon(A_i - \tilde{A}_{i,j}) - C_{i,j}(\psi_{i,j+1}^{(s)} - \psi_{i,j-1}^{(s)}), \text{ для } j = 2, \dots, N_\eta - 1, \\ c_{21}^j &= A_i - \bar{A}_i, \text{ для } j = 1, \dots, N_\eta - 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Матрицы  $\mathcal{B}$  — “трёхдиагональные”:

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{21}^{1r} & b_{22}^{1r} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{11}^{2l} & b_{12}^{2l} & b_{11}^2 & b_{12}^2 & b_{11}^{2r} & b_{12}^{2r} & \dots & 0 \\ b_{21}^{2l} & b_{22}^{2l} & b_{21}^2 & b_{22}^2 & b_{21}^{2r} & b_{22}^{2r} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{11}^{N_\eta-1 l} & b_{12}^{N_\eta-1 l} & b_{11}^{N_\eta-1} & b_{12}^{N_\eta-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & b_{21}^{N_\eta-1 l} & b_{22}^{N_\eta-1 l} & b_{21}^{N_\eta-1} & b_{22}^{N_\eta-1} \end{pmatrix},$$

где для левого, центрального и правого блоков имеем соответственно

$$\begin{aligned} b_{11}^{jl} &= -P_{i,j} + C_{ij}(\omega_{i+1,j}^{(s)} - \omega_{i-1,j}^{(s)}), \\ b_{12}^{jl} &= \varepsilon(B_j + \tilde{B}_{i,j}) - C_{ij}(\psi_{i+1,j}^{(s)} - \psi_{i-1,j}^{(s)}), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} b_{21}^{jl} &= B_j + \bar{B}_j, \quad b_{22}^{jl} = 0, \\ b_{11}^j &= 0, \quad b_{12}^j = -2\varepsilon(A_i + B_j), \\ b_{21}^j &= -2(A_i + B_j), \quad b_{22}^j = -h^2, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} b_{11}^{jr} &= P_{i,j} - C_{ij}(\omega_{i+1,j}^{(s)} - \omega_{i-1,j}^{(s)}), \\ b_{12}^{jr} &= \varepsilon(B_j - \tilde{B}_{i,j}) + C_{ij}(\psi_{i+1,j}^{(s)} - \psi_{i-1,j}^{(s)}), \\ b_{21}^{jr} &= B_j - \bar{B}_j, \quad b_{22}^{jr} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь  $j = 1, \dots, N_\eta - 1$ , и следует учесть, что первая строка матриц  $\mathcal{B}_i$  выписана явно.

Для  $i = 1$  и  $i = N_\xi - 1$  матрицы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  заполняются следующим образом (меняется лишь заполнение нечётных строк).

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{N_\xi-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{21}^{1r} & b_{22}^{1r} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21}^{2l} & b_{22}^{2l} & b_{21}^2 & b_{22}^2 & b_{21}^{2r} & b_{22}^{2r} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & b_{21}^{N_\xi-1 l} & b_{22}^{N_\xi-1 l} & b_{21}^{N_\xi-1} & b_{22}^{N_\xi-1} \end{pmatrix},$$



причём оставшиеся элементы  $b_*^*$  вычисляются по правилам (29)–(31).

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_{21}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{21}^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{21}^{N_\eta-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $c_*^*$  вычисляются по правилам (28).

$$A_{N_\xi-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{21}^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{21}^{N_\eta-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где, как и выше, элементы  $a_*^*$  вычисляются по правилам (27). Наконец, для правых частей в (26) имеем следующие выражения:

$$F_i = \begin{pmatrix} -\psi_{i,1}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{i,2}^{(s)} + c_0(i) \\ H_{i,1}^{(s)} \\ G_{i,2}^{(s)} \\ H_{i,2}^{(s)} \\ \vdots \\ G_{i,N_\eta-1}^{(s)} \\ H_{i,N_\eta-1}^{(s)} \end{pmatrix},$$

где  $i = 2, \dots, N_\xi - 2$  и где  $G_{i,j}^{(s)}$  и  $H_{i,j}^{(s)}$  определены в (23) и (24). Далее для  $F_1$  и  $F_{N_\xi-1}$  имеем соответственно

$$\begin{pmatrix} \psi_{1,1}^{\text{ГР}} - \psi_{1,1}^{(s)} - \bar{\psi}_{11} \\ H_{1,1}^{(s)} \\ -\psi_{1,2}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{2,2}^{(s)} + a_0(2) \\ H_{1,2}^{(s)} \\ \vdots \\ -\psi_{1,N_\eta-1}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{2,N_\eta-1}^{(s)} + a_0(N_\eta - 1) \\ H_{1,N_\eta-1}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{N_\xi-1,1}^{\text{ГР}} - \psi_{N_\xi-1,1}^{(s)} - \bar{\psi}_{N_\xi-1,1} \\ H_{N_\xi-1,1}^{(s)} \\ -\psi_{N_\xi-1,2}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{N_\xi-2,2}^{(s)} + b_0(2) \\ H_{N_\xi-1,2}^{(s)} \\ \vdots \\ -\psi_{N_\xi-1,N_\eta-1}^{(s)} + \frac{1}{4} \psi_{N_\xi-2,N_\eta-1}^{(s)} + b_0(N_\eta - 1) \\ H_{N_\xi-1,N_\eta-1}^{(s)} \end{pmatrix}$$

Система (26) решается методом матричной прогонки. Сначала вычисляем

$$\mu_2 = -\mathcal{B}_1^{-1} \mathcal{C}_1, \quad \nu_2 = \mathcal{B}_1^{-1} F_1.$$

Затем для  $i = 2, \dots, N_\xi - 2$  вычисляем

$$\mu_{i+1} = -(\mathcal{A}_i \mu_i + \mathcal{B}_i)^{-1} \mathcal{C}_i, \quad \nu_{i+1} = (\mathcal{A}_i \mu_i + \mathcal{B}_i)^{-1} (F_i - \mathcal{A}_i \nu_i).$$

Далее искомые векторы  $W_i$  вычисляются по формулам

$$W_{N_\xi-1} = (\mathcal{A}_{N_\xi-1} \mu_{N_\xi-1} + \mathcal{B}_{N_\xi-1})^{-1} (F_{N_\xi-1} - \mathcal{A}_{N_\xi-1} \nu_{N_\xi-1}),$$

$$W_{i-1} = \mu_i W_i + \nu_i, \quad i = N_\xi - 1, \dots, 2.$$

*Замечание 3.* Легко видеть, что объём вычислительной работы порядка  $N_\eta^3 N_\xi$ . Поэтому данный способ решения линейной системы эффективен при  $N_\eta \ll N_\xi$ , что как раз и характерно для области большого удлинения.

## 5 О точности метода

Прежде чем переходить к описанию результатов, коснёмся вопроса о точности метода. Первое — действительно ли программно реализованный алгоритм обеспечивает второй порядок аппроксимации. Второе — какова реально достигнутая точность.

Начнём с проверки порядка аппроксимации. Стандартный путь состоит в сравнении результатов, полученных при двух последовательных удвоениях разностной сетки. Поскольку для схемы  $k$ -ого порядка  $f_h = f_{\text{точн}} + Ch^k + o(h^k)$ , где  $f$  любая из функций  $\psi, \omega$ , то из трёх соотношений

$$\begin{aligned} f_h &= f_{\text{точн}} + Ch^k + o(h^k), \\ f_{2h} &= f_{\text{точн}} + 2^k Ch^k + o(h^k), \\ f_{4h} &= f_{\text{точн}} + 4^k Ch^k + o(h^k), \end{aligned}$$

следует, что

$$\mu = \frac{f_{4h} - f_{2h}}{f_{2h} - f_h} = 2^k + o(h). \quad (32)$$

Контрольные расчёты проводились для  $\lambda = 20$ ,  $\text{Re} = 100$  при трёх парах  $(N_\xi, N_\eta) = (200, 10), (400, 20), (800, 40)$ . В качестве основной проверочной точки была выбрана точка  $x = 10, y = 0.2$ . Расчёты показали, что как для  $\psi$ , так и для  $\omega$   $\mu \approx 4.15$ . Близость  $\mu$  к 4 была проверена также и в других, не слишком близких к угловым, точках. Итак, реализованный алгоритм действительно обеспечивает второй порядок аппроксимации  $k = 2$ .

Заметим, что порядок аппроксимации граничных условий играет существенную роль. В порядке эксперимента аппроксимация граничных условий была понижена до первого порядка. Оказалось, что  $\mu \sim 2$  во внутренних точках, несмотря на всё тот же второй порядок аппроксимации системы дифференциальных уравнений. Таким образом, аппроксимация первого порядка лишь граничных условий порождает глобальную аппроксимацию того же порядка.

Что касается оценки точности конкретных расчётов сложных вариантов ( $\text{Re} = 10000 - 50000$ ), то метод удвоения сетки становится практически неприменимым, поскольку минимально необходимый сеточный объём уже сам по себе достаточно велик, и его удвоение (и, тем более, учетверение) требует огромных временных затрат. Поэтому были использованы два расчёта с одним и тем же объёмом разностной сетки  $V$ , но с различным распределением точек, то есть с различными “сгущениями”.

Для оценки точности получаемых решений при больших числах Рейнольдса было проведено сравнение результатов расчётов задач со следующими параметрами:  $\lambda = 20$ ,  $\text{Re} = 50000$ ,  $V = 600 \times 156$ ; распределение то-

чек по  $x$  неравномерное (со сгущением к боковым стенкам  $x = 0$  и  $x = 20$ ; коэффициент сгущения  $k = 40$ , см. (21)). Варианты отличались распределением точек по  $y$ : (А) — равномерное, (В) — пятикратное сгущение вблизи стенки  $y = 0$  и двукратное вблизи линии симметрии  $y = 1/2$ .

На Рис. 4 и 5 показаны графики функции  $u(y)$  при  $x = 1$  и  $x = 19$ , соответственно. Поскольку оказалось, что в интервале  $0.05 < y < 0.45$  кривые для обоих вариантов практически неотличимы, то на этих рисунках изображены лишь концевые (по  $y$ ) участки кривых. Сопоставление результатов позволяет утверждать, что даже вблизи боковых стенок различие в скоростях  $u(y)$  не превосходит 2%.

Все представленные ниже результаты получены с использованием неравномерной сетки (В) при тех же значениях  $N_\xi$ ,  $N_\eta$  и  $k$ .

## 6 Численные результаты и их анализ

На Рис. 6, 7, 8 и 9 показаны линии тока (изолинии функции  $\psi$ ) для  $\lambda = 20$  при числах Рейнольдса  $Re = 100$ ,  $Re = 2000$ ,  $Re = 20000$  и  $Re = 50000$ . Следует иметь в виду, что все эти рисунки сильно растянуты по вертикали (примерно в 30 раз). Обращает на себя внимание плоско-параллельная структура потока (вне окрестности боковых стенок) при  $Re = 100$ , Рис. 6. С ростом  $Re$  эта картина деформируется ( $Re = 2000$ , Рис. 7), но при дальнейшем увеличении  $Re$  течение снова стремится стать плоско-параллельным:  $Re = 20000$ , Рис. 8 и  $Re = 50000$ , Рис. 9. Однако, как будет показано ниже, профиль скорости  $u(y)$  при этом существенно меняется.

Рисунки 10 – 13 демонстрируют структуру течения вблизи правого верхнего (Рис. 10, 11) и левого нижнего (Рис. 12, 13) углов. Характер линий тока позволяет предположить, что с увеличением числа Рейнольдса вблизи этих углов, а точнее, вблизи боковых стенок, образуются вторичные вихревые образования. Подчеркнём, что изображённые на этих рисунках области содержат огромное число расчётных точек. Кроме того, данная картина воспроизводится и при вариации сеточных параметров. Следовательно, приведённая структура линий тока не является артефактом, а соответствует точному решению задачи.

Что же касается другой пары углов (правого нижнего и левого верхнего), то в их окрестностях линии тока не содержат вихревых образований и имеют вид гипербол.

На последующих рисунках изображены профили  $u(y)$  в различных сечениях:  $x = 1$  — Рис. 14,  $x = 10$  — Рис. 15,  $x = 19$  — Рис. 16. Рассмотрим

срединное сечение ( $x = 10$ ) и для анализа картины течения воспользуемся плоско-параллельным приближением, что оправдывается характером линий тока, см. Рис. 6–9.

Напомним, что не зависящее от  $x$  решение  $\psi(y)$ , удовлетворяющее граничным условиям  $\psi(0) = \psi(1/2) = 0$  и  $\psi_y(0) = 1$  имеет вид

$$\psi(y) = ay^3 - \frac{a+4}{2}y^2 + y.$$

Отсюда для  $u(y) = \psi_y(y)$  имеем

$$u(y) = 3ay^2 - (a+4)y + 1. \quad (33)$$

Условие симметрии  $u_y(1/2) = 0$  даёт

$$u(y) = 6y^2 - 6y + 1 \quad (\text{плоское течение Пуазейля}). \quad (34)$$

Профиль скорости (34) достаточно хорошо совпадает с решением полной краевой задачи для  $\text{Re} = 2000$  при  $x = 10$ , см. Рис. 15. Расчёты для меньших значений  $\text{Re}$  ( $\text{Re} = 100 - 1000$ ) дают практически полное совпадение с плоским течением Пуазейля.

С увеличением  $\text{Re}$  кривые  $u(y)$  всё дальше отходят от параболы (34) и стремятся вне концевых (по  $y$ ) участков к линейной функции. Что же может служить предельным решением. Вернёмся к (33) и заменим условие симметрии при  $y = 1/2$  на условие  $u(1/2) = -1$ . Получим

$$u(y) = -4y + 1 \quad (\text{течение Куэтта}), \quad (35)$$

соответствующее постоянному давлению:  $\nabla p = 0$ .

Расчёты показали, что с ростом  $\text{Re}$  значения  $u_y$  на стенке (при  $y = 0$ ) в центральной (по  $x$ ) зоне течения стремятся к значению  $u_y = -6$ , т.е. именно к значению, определяющемуся течением Пуазейля (34).

Для течения Куэтта (35)  $u_y = -4$  везде, в том числе и при  $y = 0$ . Аналогичная ситуация и на линии симметрии:  $(u_y)^{\text{Пуазейль}} = 0 \neq (u_y)^{\text{Куэтт}} = -4$ . Таким образом, можно предположить следующую картину стремления решения к пределу в срединной части при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Для достаточно больших значений  $\text{Re}$  профиль скорости состоит из трёх частей: центральная, близкая к линейному течению Куэтта (35), пограничный слой вблизи движущейся стенки, где  $u_y$  меняется от  $-6$  (на стенке) до  $-4$  (на верхней границе пограничного слоя) и, наконец, пограничный слой вблизи линии симметрии, где  $u_y$  изменяется от нуля до  $-4$ , см. схему на Рис. 17.

Одной из важнейших характеристик течения является сила трения, которая в данной задаче просто пропорциональна  $u_y$  на движущейся стенке. На Рис. 18 представлены графики функции  $u_y(x, 0)$  для различных значений  $Re$ . Здесь следует отметить два момента. Во-первых, для  $x \approx 10$   $u_y \approx -6$  при  $Re \rightarrow \infty$  (ср. с течением Пуазейля). Во-вторых, функция  $u_y$  даже при  $Re = 50000$  демонстрирует некоторое распределение (зависимость от  $x$ ), которое, видимо, близко к предельному.

Что касается угловых точек, то здесь  $u_y$  содержит неинтегрируемую особенность:  $u_y \sim c_0/x$  при  $x \rightarrow 0$  и  $u_y \sim c_1/(20 - x)$  при  $x \rightarrow 20$ . Такое поведение  $u_y$  соответствует свойствам точного решения задачи в рассматриваемой идеализированной постановке. Таким образом, полная сила трения, определяемая интегралом от  $u_y$  по всей длине канала, оказывается бесконечно большой, что, разумеется, противоречит реальности.

Проблема моделирования течения вблизи угловых точек при разрыве скоростей является весьма сложной задачей, и, по-видимому, обнадеживающих результатов в этом направлении пока нет. Тем не менее, представляется правдоподобным, что по крайней мере для областей большого удлинения характеристики потока вне окрестностей угловых точек не зависят от структуры течения вблизи особенностей. Поэтому можно надеяться, что результаты, приведённые в данной работе, отражают реальные свойства течения.

В заключение считаем приятным долгом выразить благодарность В. И. Алфёрову, привлёкшему наше внимание к этой проблематике.

# Литература

- [1] R. Schreiber and H.B. Keller, *Driven cavity flows by efficient numerical techniques*, J. Comp. Phys. **49** (1983), 310.
- [2] H.C. Kulhman, M. Wanschura, and H.J. Rath, *Flow in two-sided lid-driven cavities: non-uniqueness, instability, and cellular structures*, J. Fluid Mech. **336** (1997), 267.
- [3] S. Albensoeder, H.C. Kulhman, and H.J. Rath, *Multiplicity of steady two-dimensional flows in two-sided lid-driven cavities*, submitted to Theor. Comp. Fluid. Dyn.
- [4] Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир, Москва, 1973.

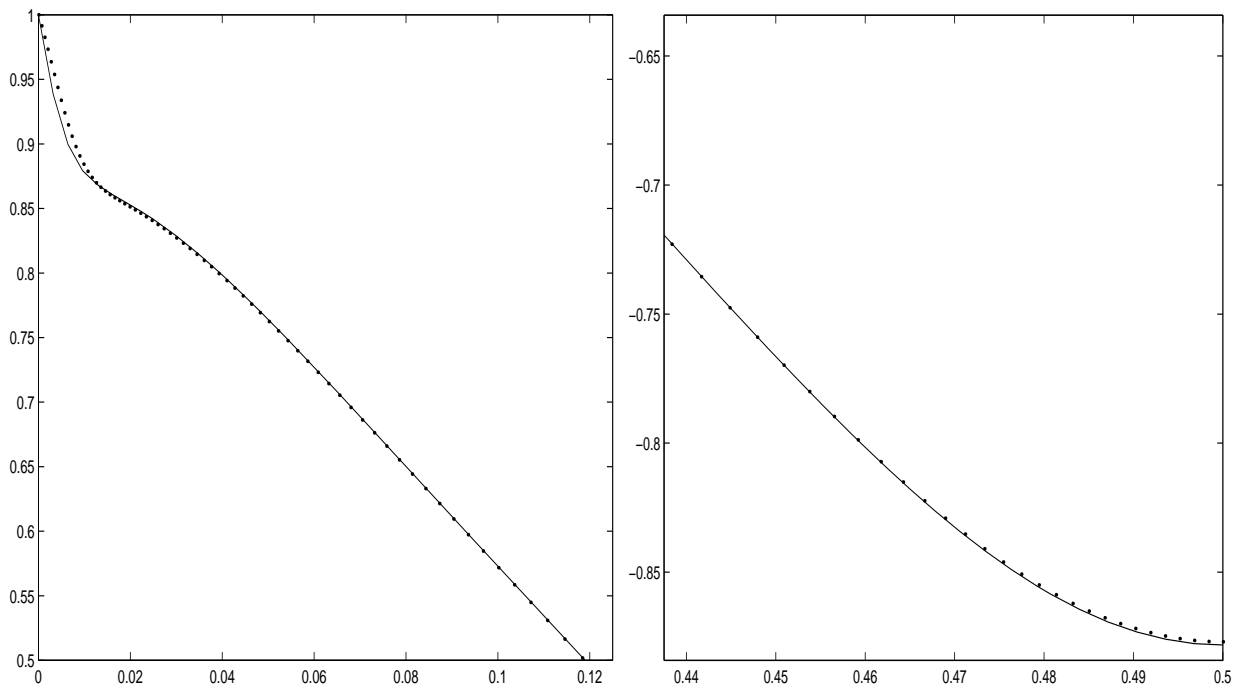


Рис. 4: Сравнение (вблизи  $y = 0$  и  $y = 1/2$ ) двух расчётов скорости  $u(y)$  на равномерной сетке по  $y$  (непрерывная линия) и на сетке с пятикратным сгущением вблизи  $y = 0$  и двукратным сгущением вблизи  $y = 1/2$  (точки);  $\lambda = 20$ ,  $Re = 50000$ ,  $x = 1$ .

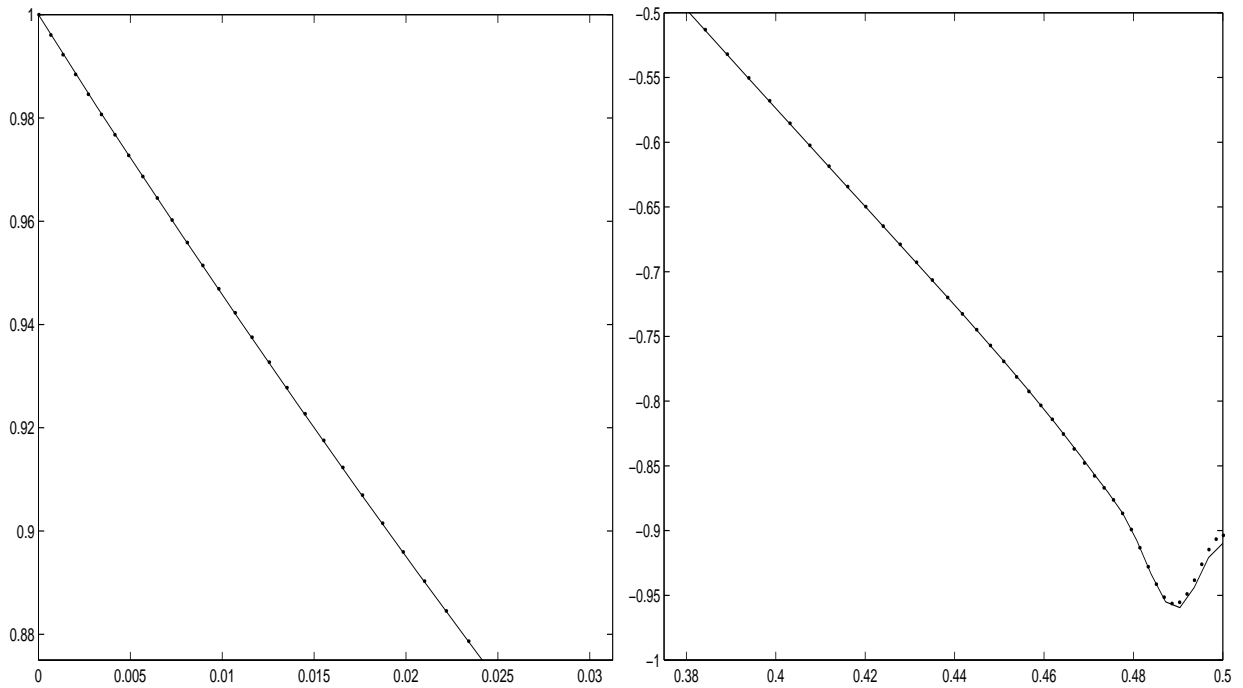


Рис. 5: Как и на Рис. 4, но в сечении  $x = 19$ .



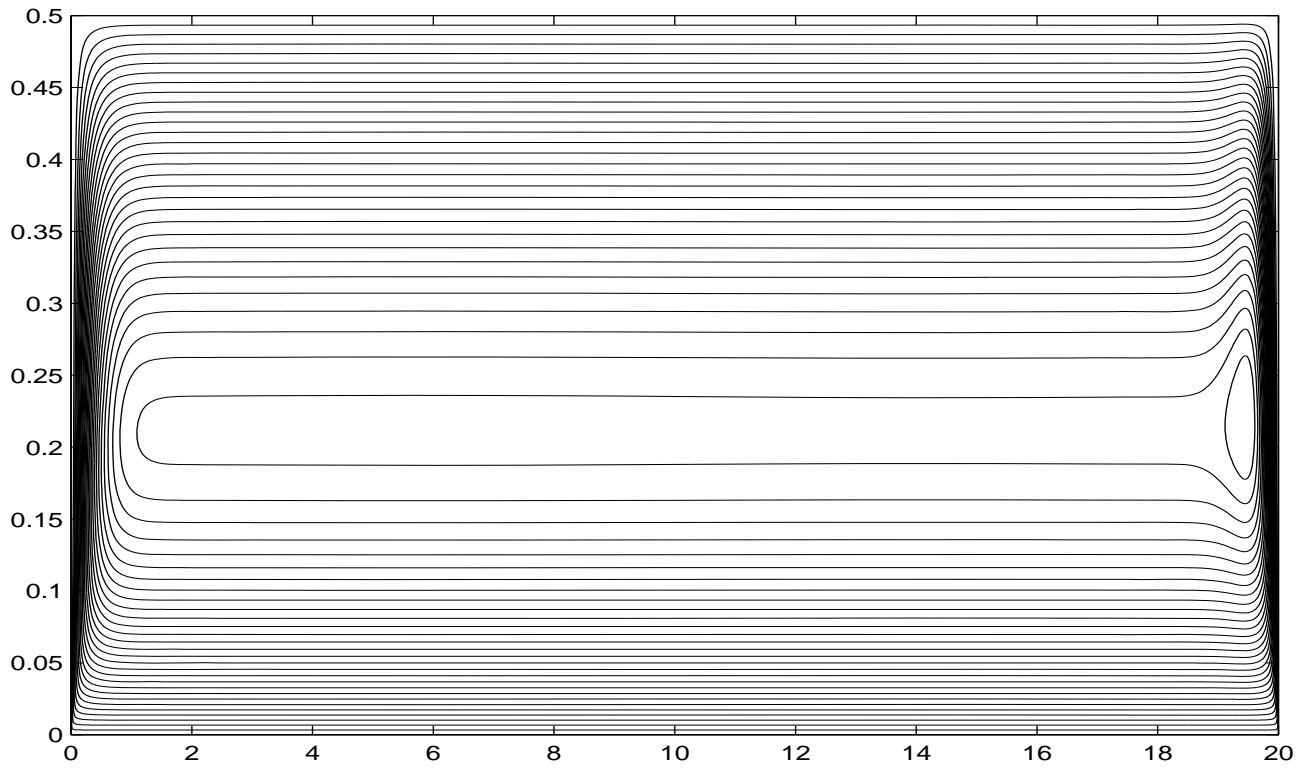


Рис. 6: Линии тока для  $\lambda = 20$ ,  $Re = 100$ .

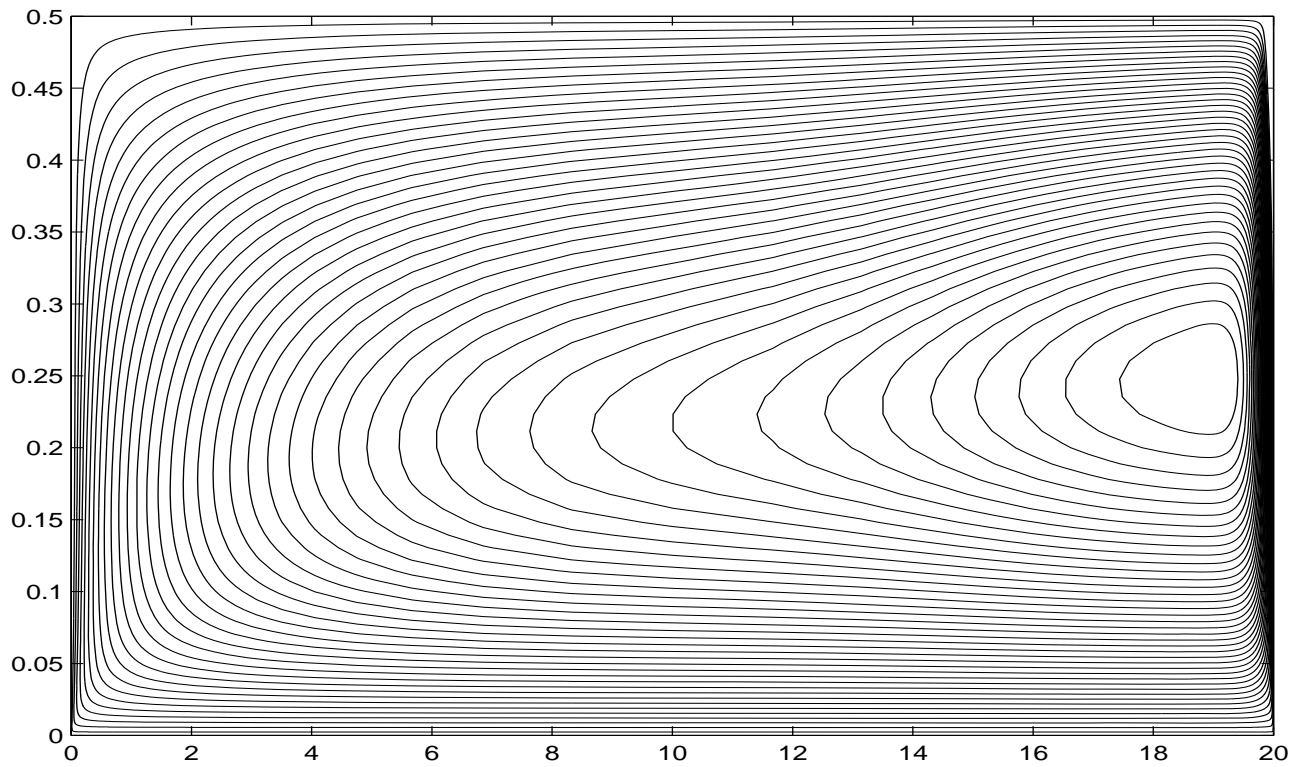


Рис. 7: Линии тока для  $\lambda = 20$ ,  $Re = 2000$ .

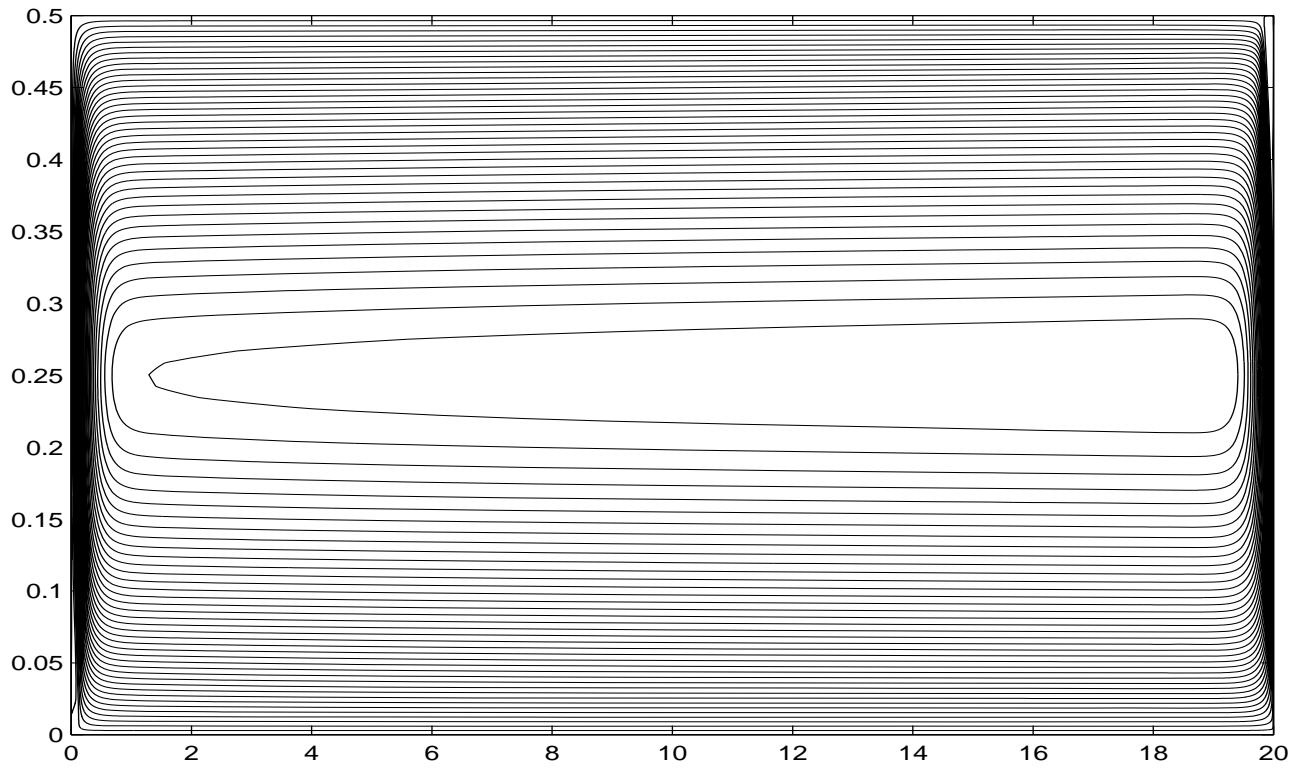


Рис. 8: Линии тока для  $\lambda = 20$ ,  $Re = 20000$ .

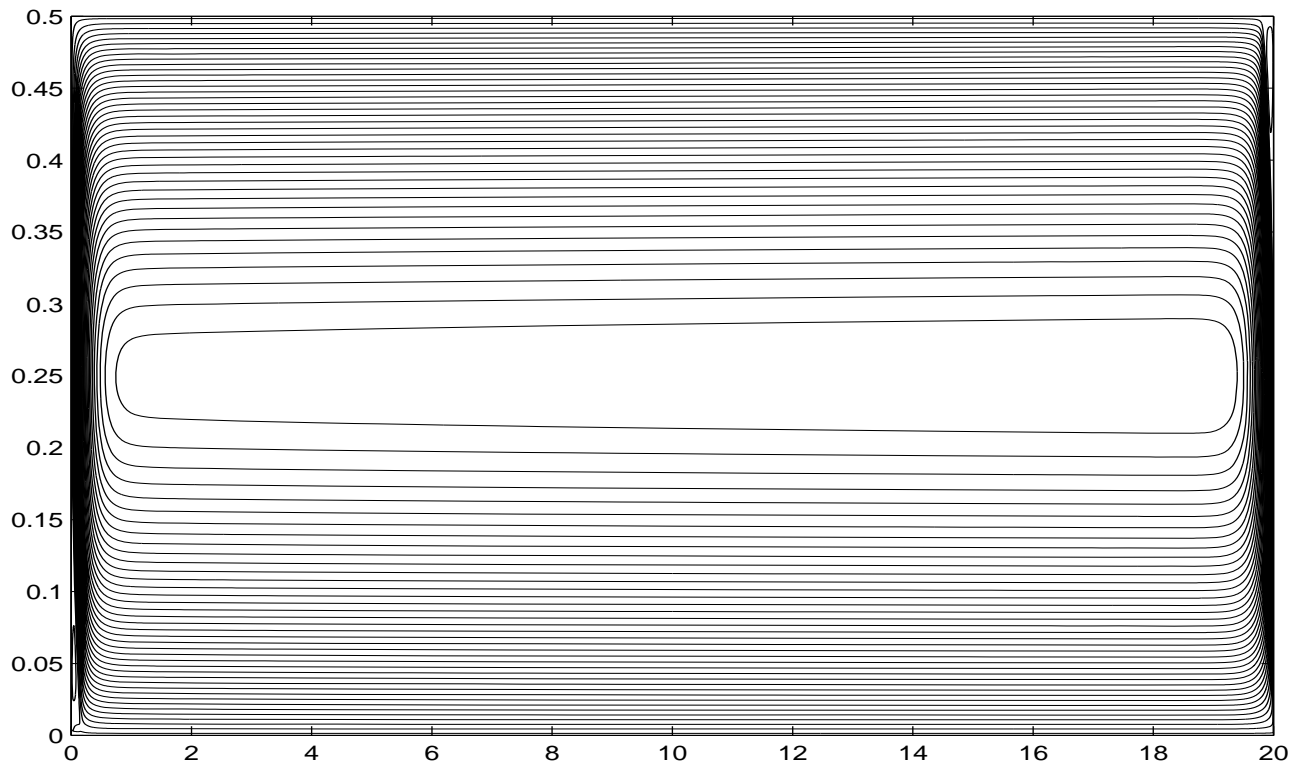


Рис. 9: Линии тока для  $\lambda = 20$ ,  $Re = 50000$ .

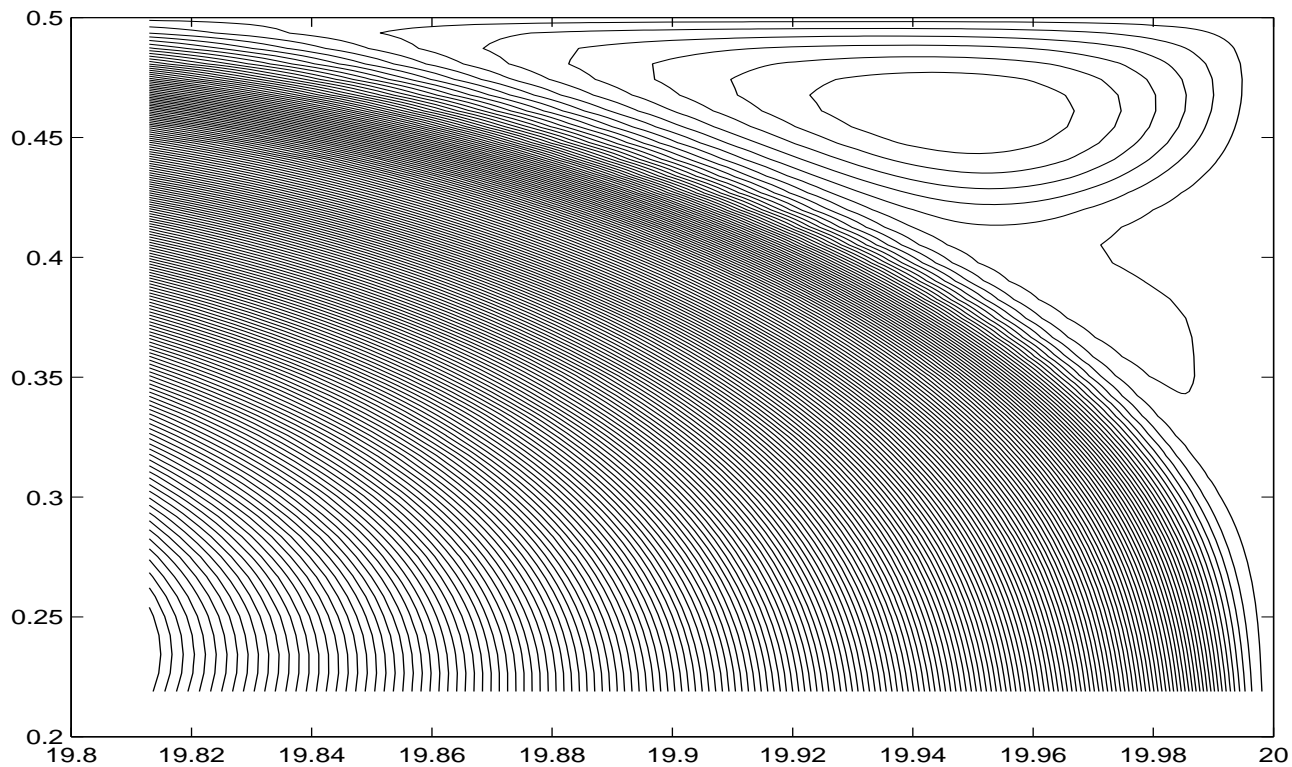


Рис. 10: Картина течения в правом верхнем угле,  $\lambda = 20$ ,  $Re = 20000$ .

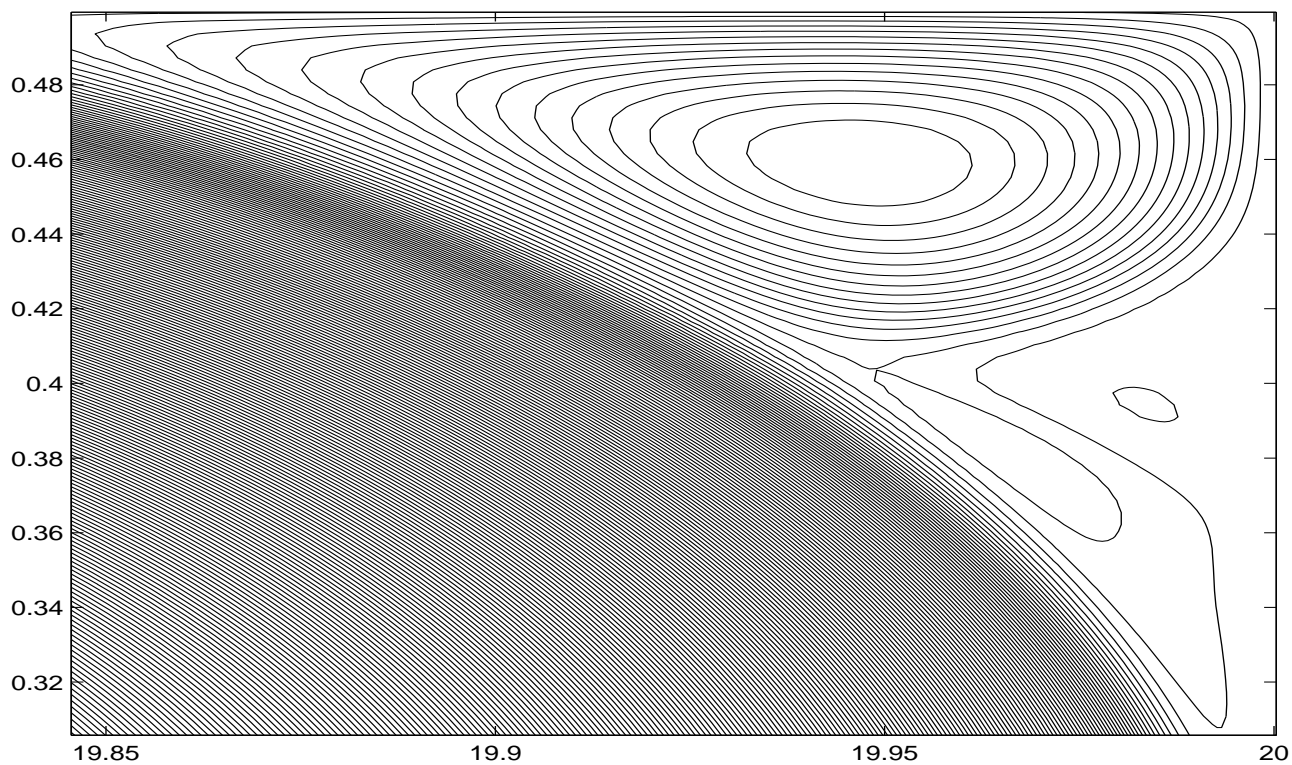


Рис. 11: Картина течения в правом верхнем угле,  $\lambda = 20$ ,  $Re = 50000$ .

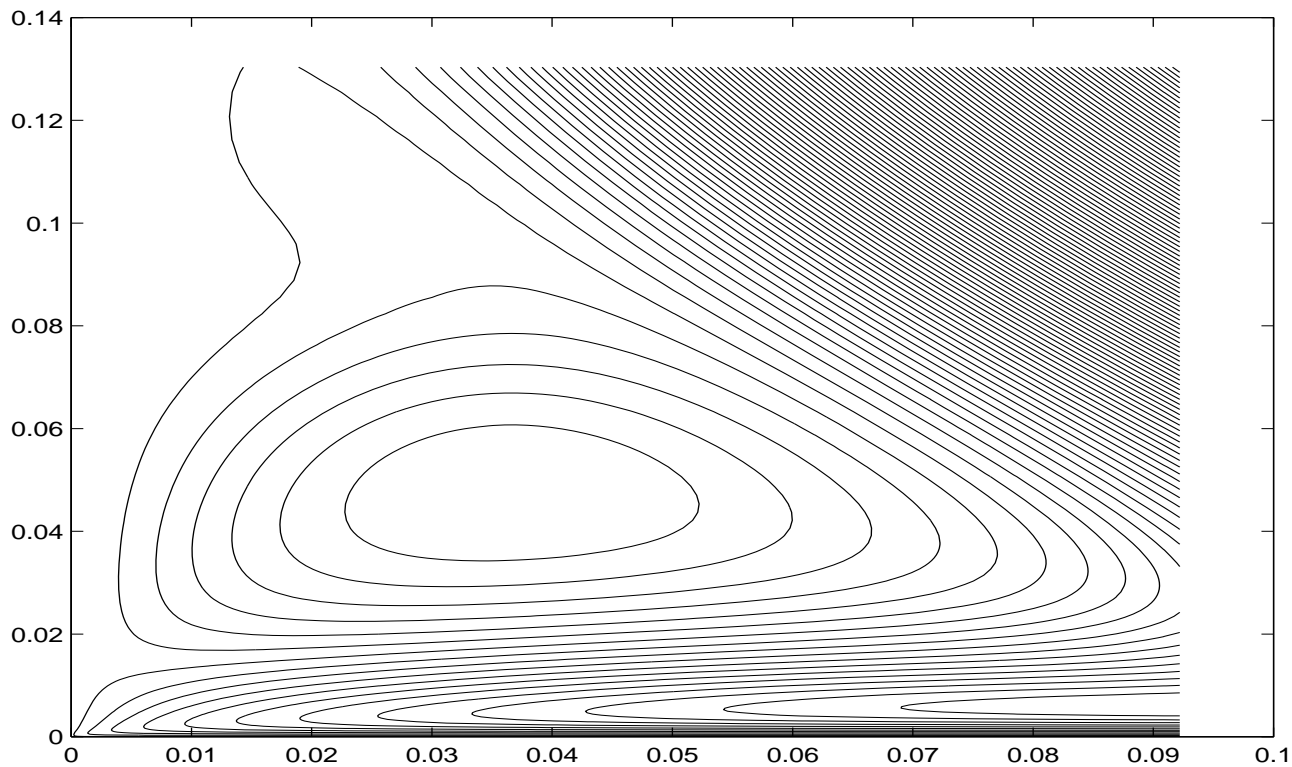


Рис. 12: Картина течения в левом нижнем угле,  $\lambda = 20$ ,  $Re = 20000$ .

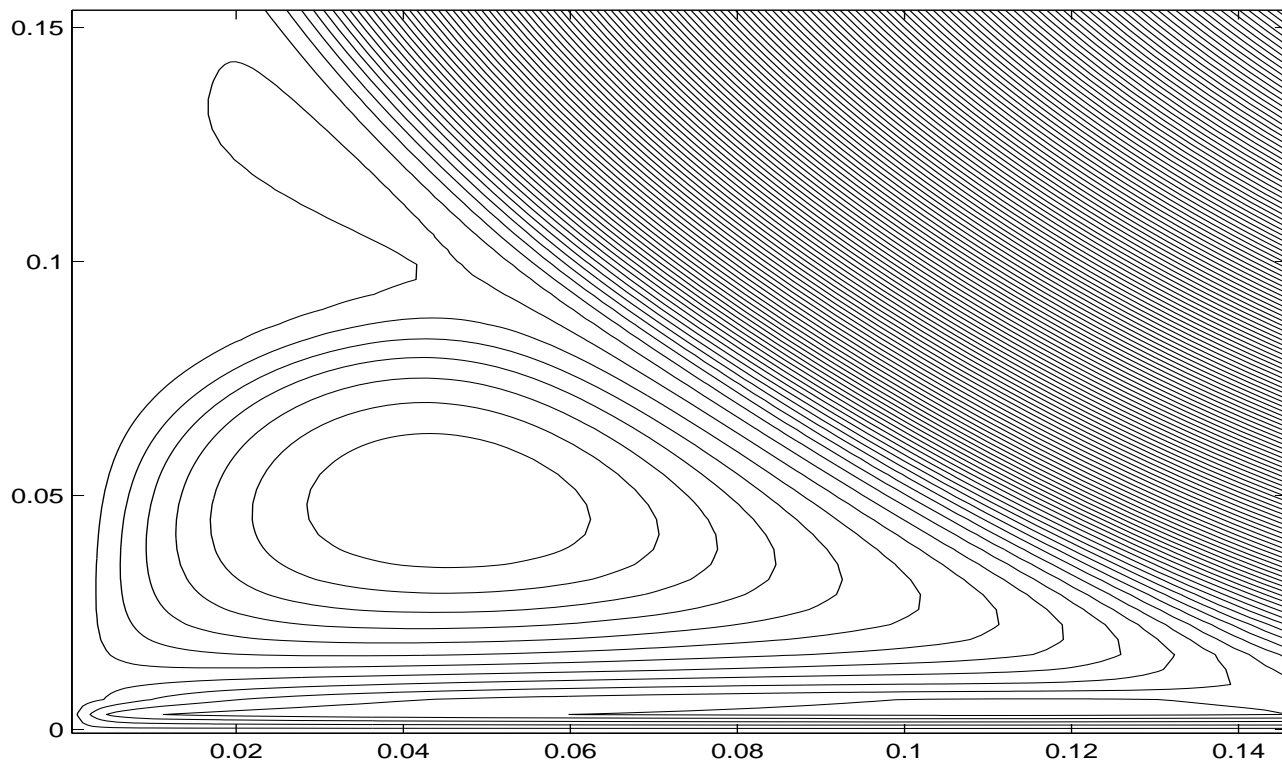


Рис. 13: Картина течения в левом нижнем угле,  $\lambda = 20$ ,  $Re = 50000$ .

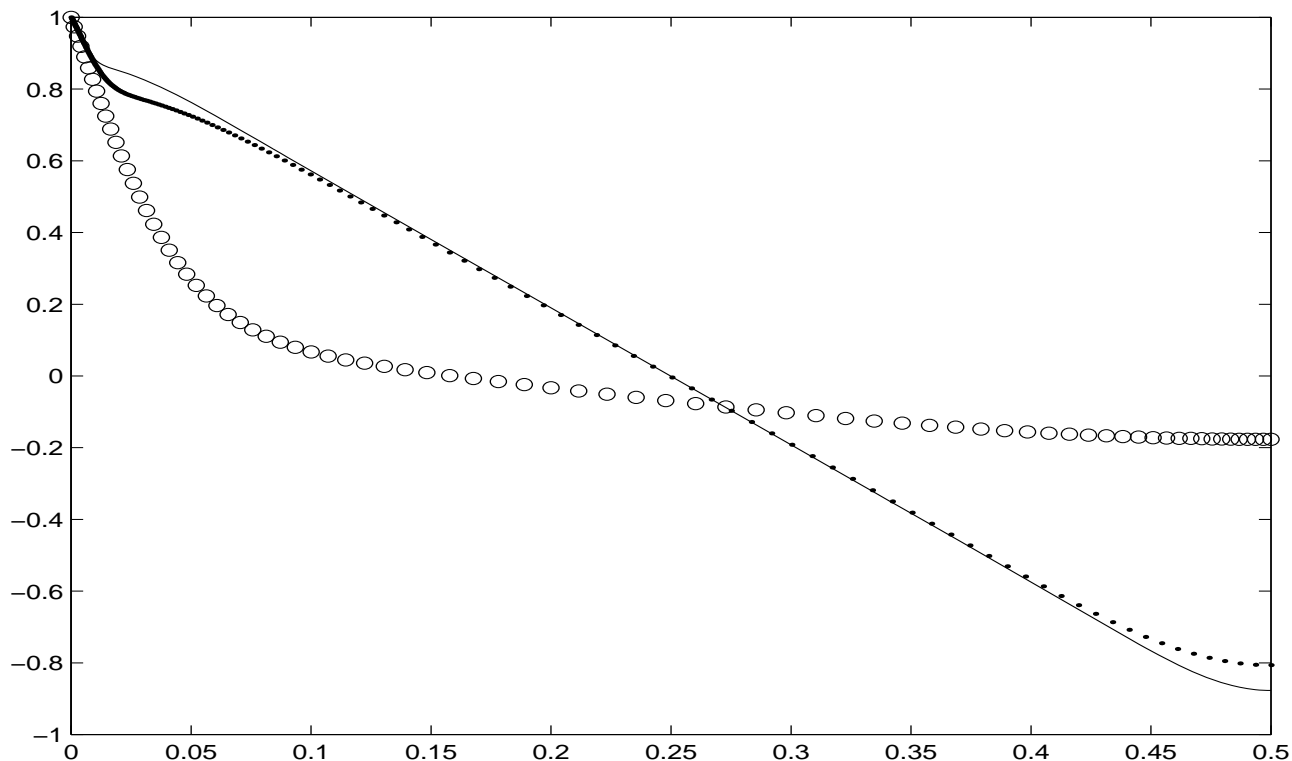


Рис. 14: Профили скорости  $u(y)$  для  $\lambda = 20$  при  $x = 1$  для  $\text{Re} = 2000$  ( $\circ \circ \circ$ ),  $\text{Re} = 20000$  (...),  $\text{Re} = 50000$  (непрерывная линия).

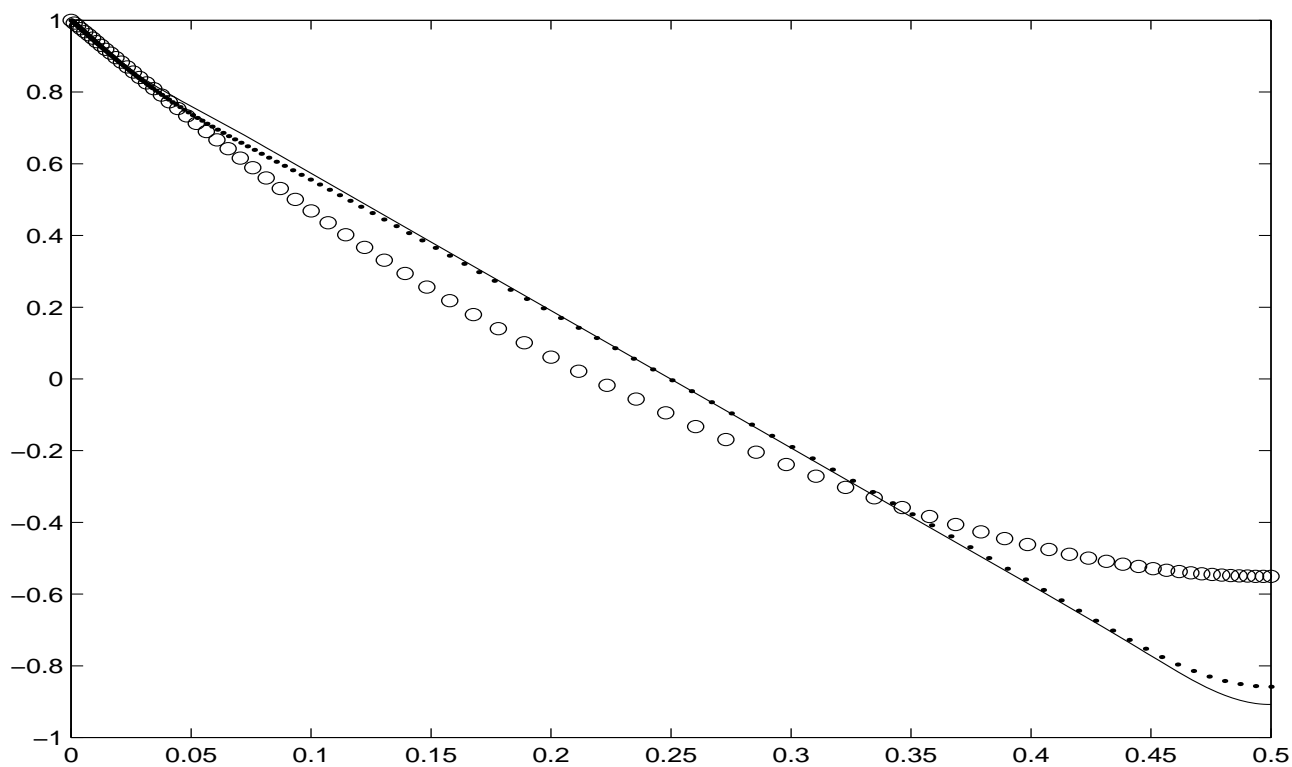


Рис. 15: Профили скорости  $u(y)$  для  $\lambda = 20$  при  $x = 10$  для  $\text{Re} = 2000$  ( $\circ \circ \circ$ ),  $\text{Re} = 20000$  (...),  $\text{Re} = 50000$  (непрерывная линия).

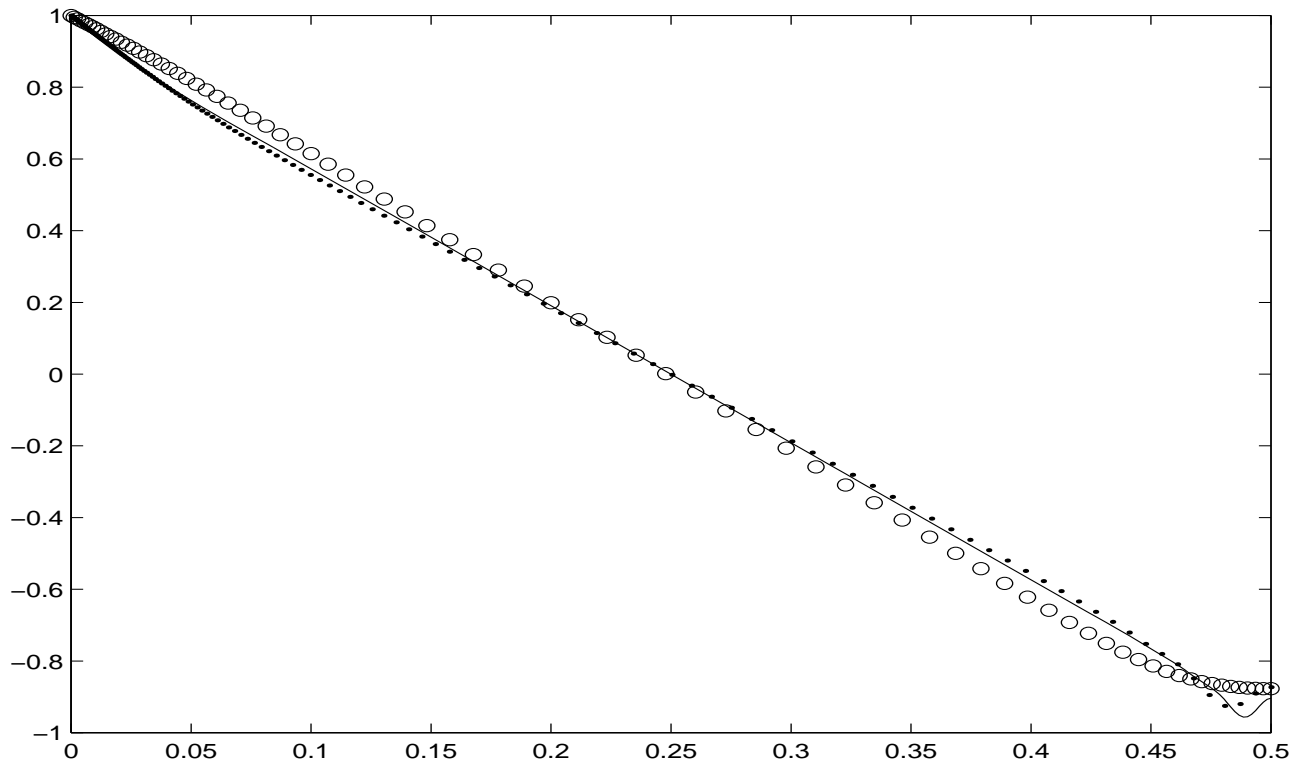


Рис. 16: Профили скорости  $u(y)$  для  $\lambda = 20$  при  $x = 19$  для  $Re = 2000$  ( $\circ \circ \circ$ ),  $Re = 20000$  (...),  $Re = 50000$  (непрерывная линия).

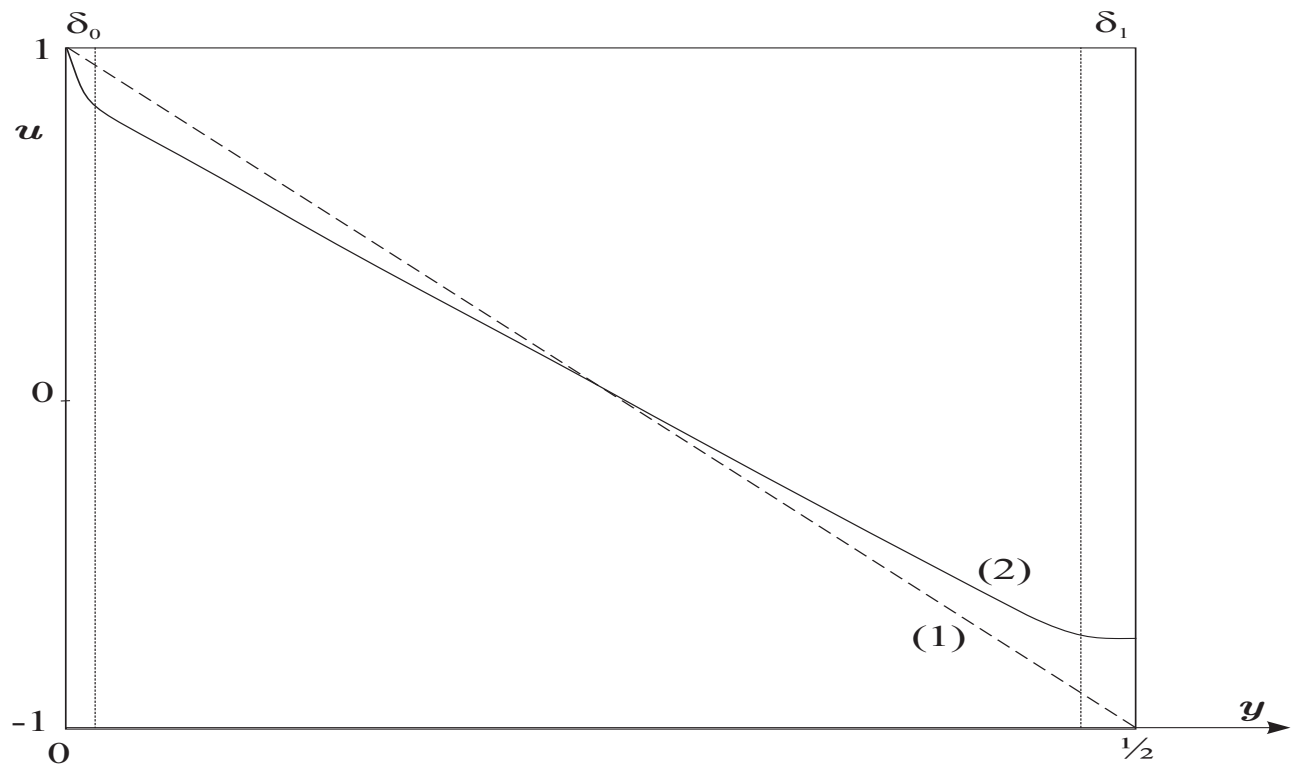


Рис. 17: Схема течения срединной части канала при  $Re \gg 1$ : (1) — профиль течения Куэтта; (2) — профиль  $u(y)$ ;  $\delta_0, \delta_1 \sim Re^{-1/2}$  (толщины пограничных слоёв).

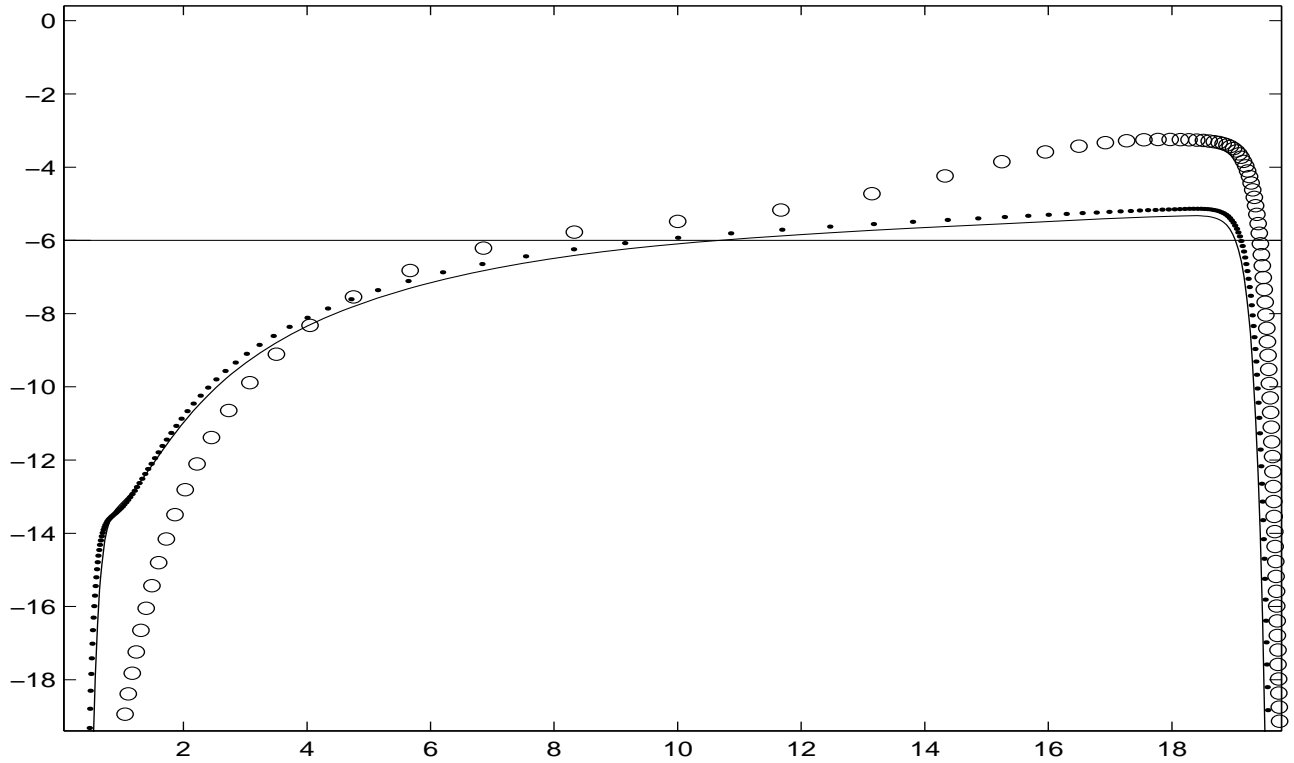


Рис. 18: Распределение градиента скорости  $u_y$  (силы трения) при  $\lambda = 20$  для  $Re = 2000$  ( $\circ \circ \circ$ ),  $Re = 20000$  (...),  $Re = 50000$  (непрерывная линия).