Ордена Ленина Институт Прикладной Математики
имени М.В.Келдыша
Российской Академии Наук

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, Л.Г. Страховская,
Р.П. Федоренко, О.Б. Феодоритова

МЕТОД КОНЕЧНЫХ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Москва, 2001

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 99-01-00133) и Международного Фонда CRDF (проект RM2-2243).

УДК: 519.6

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко, О.Б. Феодоритова.

Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии.

АННОТАЦИЯ

Метод конечных суперэлементов применяется к решению задач конвекции-диффузии. Особое внимание уделяется сингулярно-возмущенным задачам с доминирующим конвективным членом, что соответствует существованию в решении тонких внутренних и пограничных слоев, описание которых трудно для численного анализа.

Реализованный подход относится к классу стабилизированных методов Галеркинского типа, получивших широкое распространение в последние годы. Проведено сравнение с близким по конструкции методом RFB (Residual-free Bubbles).

Стр. 36, табл. 6, рис. 18, библ. 16 назв.

R.P. Fedorenko, O.B. Feodoritova, N.D. Novikova, L.G. Strakhovskaya, V.T. Zhukov.

Finite superelement method in convection-diffusion problems.

ABSTRACT

The finite superelement method is used to solve convection-diffusion problems. The particular attention is paid for singularly perturbed problems in convective-dominated case. It corresponds to existance of thin interior and boundary layers in the solution, their description is difficult for numerical analysis.

The implemented approach belongs to a class of stabilized Galerkin methods, that have been widely used for last years. The comparison with Residual-free Bubbles method colesed to considered one was carried out.

1 Введение

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) был предложен в [1] и развит затем в последующих работах (см. [2], [3] и приведенную там библиографию) как метод дискретизации дифференциальных уравнений, учитывающий мелкомасштабные (относительно шага сетки) неоднородности задачи. Такие неоднородности могут быть выделены явно – стержни в ядерном реакторе, инородные включения в композитных материалах и т.п. В данной работе рассматривается задача конвекции-диффузии, где явных неоднородностей нет, но есть разные пространственные масштабы решения. Эта задача важна для приложений и служит хорошей моделью для разработки методов в динамике вязкой жидкости.

Задачи конвекции-диффузии при доминировании конвективного переноса решения могут содержать внутренние и пограничные слои – узкие области, где решение и его производные меняются очень сильно, скачкообразно, и решение их считается трудными в численном анализе.

Приближенное решение такой задачи, полученное, например, стандартным методом конечных элементов (МКЭ) может иметь большие нефизические осцилляции. Для преодоления недостатков МКЭ в последние 20 лет развиваются стабилизированные методы конечных элементов, в частности, streamline upwind/Petrov-Galerkin (SUPG,[13],[6]), Galerkin/least-squares (GLS,[7]), residual-free bubbles (RFB,[8], [11]). Эти методы являются развитием метода классической искусственной вязкости в рамках галеркинской аппроксимации дифференциальной задачи, причем стабилизацию обеспечивает учет мелкомасштабных компонентов решения [9],[10].

Здесь мы строим специальный вариант МКСЭ, который родственен стабилизированным методам конечных элементов. В § 2 приведена постановка простейшей краевой задачи для скалярного линейного уравнения конвекции-диффузии, в § 3 описана дискретизация уравнения на неструктурных треугольных сетках, в § 4 представлены результаты численных экспериментов.

2 Модельная задача

В ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с границей $\partial\Omega$ ищется решение $u(x, y)$ первой краевой задачи для линейного уравнения конвекции-диффузии:

$$Lu \equiv -\nabla \cdot (\varepsilon \, \nabla u) + p \nabla u + au = f, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

здесь $\varepsilon(x, y)$, $p = (p_1(x, y), p_2(x, y))$, $a(x, y)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ – заданные функции, $\varepsilon(x, y) > 0$, $a(x, y) \geq 0$.

Мы будем рассматривать слабую формулировку задачи (2.1) в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ – пространстве функций, имеющих обобщенные производные первого порядка, интегрируемые с квадратом. Так как заменой $u \longrightarrow u - g(x, y)$ неоднородная задача Дирихле (2.1), (2.2) может быть сведена к однородной, то для удобства будем считать, что $g(x, y) \equiv 0$. Слабая формулировка задачи в этом случае имеет вид: найти $u \in H_0^1$ такую, что

$$B(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, $B(\cdot, \cdot)$ – билинейная форма: $B(u, v) = (\varepsilon \nabla u, \nabla v) + (p \nabla u + au, v)$.

Относительно входных данных задачи предполагаем, что выполнены условия, обеспечивающие ее корректность.

Мы будем рассматривать как правило сингулярно возмущенные задачи, в которых коэффициент вязкости ε очень мал по сравнению с модулем конвективной скорости p. Для оценки доминирования конвективного переноса служит число Рейнольдса (называемое в задачах конвекции-диффузии числом Пекле)

$$Re = \frac{p_0 l_0}{\varepsilon_0},$$

определяемое характерными параметрами задач – линейным размером l_0, скоростью p_0, вязкостью ε_0. В практических расчетах $Re \approx 10^6$. Для характеристики разностной задачи используется локальное (сеточное) число Рейнольдса

$$r = \frac{|p|h}{2\varepsilon},$$

где h – линейный размер ячейки сетки.

3 Дискретизация

3.1 Сетка, сеточные функции

В области Ω строится неструктурная треугольная сетка, полученная регулярной триангуляцией области. Такая сетка состоит из треугольников $T^1, ..., T^r$, которые будем называть ячейками, причем $Int\ T^i \cap Int\ T^j = 0$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_j T^j = \bar{\Omega}$, где $Int\ T^j$ – внутренность треугольника. Треугольники могут иметь общую сторону, или общую вершину или не иметь общих точек совсем. В расчетах, помимо простейших сеток, использовались адаптивные сетки, полученные с помощью генератора сеток AHA2D (авторы Мартынов А., Медведев С. и др., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).

Введем сеточные аппроксимации функций u, ε, p, f, g, сохраняя за ними прежние обозначения. Каждую ячейку сетки мы рассматриваем как суперэлемент (СЭ) заданного порядка π. Описание СЭ приведено в п.3.4. Дискретную схему, построенную на основе суперэлементов порядка π, будем называть схемой порядка π. Отметим, что такая схема точна в классе полиномов степени π, т.е. если коэффициенты, правая часть и само решение $u(x, y)$ являются полиномами степени $\leq \pi$, то построенная конечномерная схема дает точное решение. Для схемы порядка π значения сеточных функций задаются в вершинах треугольника, а также в некотором числе дополнительных узлов на сторонах треугольника и внутри него в зависимости от π.

Полное число узлов сетки в треугольнике T^t есть $M = (\pi + 1)(\pi + 2)/2$, из них $(\pi - 1)$ лежит на каждой стороне и $(\pi - 1)(\pi - 2)/2$ узла лежит внутри треугольника (см. фиг.1).

Сетку, состоящую из вершин треугольников и точек, лежащих на ребрах, будем называть основной и обозначать N_h. Полную сетку, включающую узлы сетки N_h и узлы внутри треугольников обозначим M_h. При $\pi = 1, 2$ сетки N_h и M_h совпадают. На сетке N_h будет записываться дискретная схема, сетка M_h используется для кусочно-гладкого восполнения сеточных функций.

Пространство функций H_0^1 будем аппроксимировать пространством W_h непрерывных кусочно-полиномиальных функций, как в стандартном МКЭ. Функция $w \in W_h$, аппроксимирующая любую функцию $u \in H_0^1$, в каждой ячейке является интерполяционным полиномом степени $\leq \pi$ по узлам сетки M_h :

$$w|_{T^t} = P(x, y; u), \quad P(x_m, y_m; u) = u(x_m, y_m),$$

$$(x_m, y_m) \in T^t, \quad m = 1, 2, ..., M.$$

Полином P, интерполирующий функцию u по M узлам в ячейке, будем записывать в виде:

$$P(x, y; u) = \sum_{m=1}^{M} u_m \tilde{\Phi}_m(x, y), \tag{3.1}$$

где $\{\tilde{\Phi}_m(x,y), m = 1, ..., M\}$ – система функций, образующая в ячейке полный полиномиальный базис степени π, причем $\tilde{\Phi}_m(x_m, y_m) = 1$, $\tilde{\Phi}_m(x_k, y_k) = 0$, $k \neq m$.

Подчеркнем, что во внутренних узлах треугольника (они есть при $\pi \geq 3$) разностная схема явно не записывается, но эти узлы служат для интерполяции (3.1) сеточных функций ε, p, a, f.

Выделим в этом базисе часть функций $\{\tilde{\varphi}_i(x,y), i = 1, ..., 3\pi\}$, не обращающихся тождественно в нуль на границе ячейки ∂T. Функции $\{\tilde{\varphi}_i\}$ составляют полный интерполяционный базис порядка π на границе треугольника; при $\pi = 1, 2$ оба базиса $\{\tilde{\Phi}_m\}$ и $\{\tilde{\varphi}_i\}$ совпадают.

3.2 Стабилизированные схемы Галеркина

Семейство стабилизированных схем Галеркина можно записать в виде [10]: ищется $u \in W_h$ такая, что для $\forall v \in W_h$

$$B(u,v) + \sum_t \tau(Lu - f, \bar{L}v)_T = (f, v), \tag{3.2}$$

где τ – параметр, зависящий от размера ячейки, а суммирование проводится по всем ячейкам сетки; индекс T означает, что интеграл вычисляется по ячейке $T = T^t$, t – номер ячейки. Стабилизирующий оператор $\bar{L}$ определяет тип метода:

$$\begin{array}{lll} \bar{L}v = Lv & - & \text{Galerkin/least squares (GLS)}, \\ \bar{L}v = p\nabla v + av & - & \text{streamline upwind/Petrov} - \text{Galerkin (SUPG)}. \end{array}$$

В общем случае задача о выборе параметра τ не решена, но существуют рекомендации по его выбору, основанные на теоретическом анализе модельных задач и большом практическом опыте. При $\tau = 0$ получаем классический метод Галеркина. Для одномерного уравнения с постоянными коэффициентами можно указать значение τ, при котором схема (3.2) на кусочно-линейных функциях превращается в известную точную схему.

Заметим, что если W_h – пространство непрерывных кусочно-линейных функций, а $\varepsilon(x,y) = const$ в каждой ячейке, то GLS и SUPG совпадают.

Для сравнения различных методов мы будем использовать GLS/SUPG схемы с эмпирическим выбором τ по некоторым простым правилам, например, будем задавать в ячейке T $\tau = 0$, если сеточное число Рейнольдса $r < 1$, в противном случае

$$\tau = \frac{l}{3|p|},$$

где l – периметр треугольника, [15].

3.3 Residual-free bubbles

Рассмотрим RFB метод [8], [11], [12]. В этом методе приближенное решение ищется в виде $u = u^r + u^b$, где u^r – компонент решения, соответствующий стандартному МКЭ, u^b – "bubbleкомпонент, обращающийся в нуль на границе каждой ячейки, т.е. $u^r \in W_h$, $u^b \in B_h$. Предполагается, что W_h основано на полиномиальных аппроксимациях (3.1) степени 1 или 2 . Точное определение пространства B_h будет дано ниже. В пространстве $V = W_h \bigoplus B_h$ записывается схема Галеркина: найти $u \in V$ из условия

$$B(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V \tag{3.3}$$

Полагая в (3.3) $v \equiv v^b$ в T и нулю в остальных ячейках, получим для каждой ячейки независимые краевые задачи: найти $u^b \in B_h^t$ из условия

$$B(u^r + u^b, v^b)_T = (f, v^b)_T \quad \forall v^b \in B_h^t, \tag{3.4}$$

здесь индекс T означает, что интегрирование ведется по ячейке T. В ячейке T функции u^r, u^b – гладкие, поэтому задача (3.4) эквивалентна классической задаче:

$$Lu^b = -(Lu^r - f) \quad T \quad u^b = 0 \quad \partial T \tag{3.5}$$

Задача (3.4) представляет собой известную процедуру static condensation и позволяет выразить u^b через основную компоненту решения u^r. Уравнение (3.5) является определением residual-free bubbles- пространства B_h^t. Для $\forall u^b \in V$ ее компонент u^b равен 0 на границе каждой ячейки, а внутри является решением задачи (3.5).

По определению пространства W_h в каждой ячейке T

$$u^r = \sum_m u_m^r \tilde{\Phi}_m, \tag{3.6}$$

следовательно, задачу (3.5) можно свести к решению независимых задач для базисных функций Φ_m:

$$\begin{array}{c} L\Phi_m = -L\tilde{\Phi}_m \quad T, \\ \Phi_m = 0 \quad \partial T, \\ m = 1, ..., M \end{array} \tag{3.7}$$

$$\begin{array}{c} L\Phi_0 = f \quad T, \\ \Phi_0 = 0 \quad \partial T. \end{array} \tag{3.8}$$

Функции $\{\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_M\}$ можно считать определенными во всей области Ω, ячейка T является носителем этих bubble-функций. Поэтому для каждой ячейки пространство $B_h^t = span\{\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_M\}$, а все пространство B_h является прямой суммой пространств: $B_h = \bigoplus_t B_h^t$. С помощью решения задач (3.7), (3.8) функция u^b выражается через значения u^r в ячейке:

$$u^b = \sum_m u_m^r \Phi_m + \Phi_0. \tag{3.9}$$

Учитывая (3.6) и (3.9), получаем в каждой ячейке

$$u = \sum_m u_m^r (\tilde{\Phi}_m + \Phi_m) + \Phi_0. \tag{3.10}$$

Именно такая специальная конструкция конечного элемента, названная суперэлементом, была введена в 1976 в [1] и получила развитие в [2]-[4].

Для основного компонента решения u^r получаем уравнение:

$$B(u, v^r) = (f, v^r) \quad \forall v^r \in W_h.$$

Здесь u в соответствии с (3.10) зависит только от u^r. Если решение задачи (3.5) записать в операторной форме

$$u^b = -M(Lu^r - f),$$

где M – оператор, обратный к L на T, то получим

$$B(u^r, v^r) + \sum_t (M(Lu^r - f), -L^* v^r)_T = (f, v^r) \quad \forall v^r \in W_h,$$

где $-L^* v = \nabla(\varepsilon \nabla v) + p \nabla v$, что позволяет говорить о методе RFB как об обобщении стабилизированной схемы Галеркина (3.2).

3.4 Метод конечных суперэлементов

Построим в ячейке T^t суперэлемент порядка π. Пусть m – локальный номер узла в ячейке, $m = 1, 2, ..., M = (\pi + 1)(\pi + 2)/2$. Среди всех узлов ячейки выделим подмножество граничных узлов $i = 1, 2, ..., 3\pi$. Объединение таких подмножеств по всем ячейкам составляет сетку N_h, на которой ищется решение. Коэффициенты и правая часть исходного уравнения считаются переменными в ячейке и аппроксимируются интерполяционным полиномом вида (3.2) по всем узлам ячейки. Например, аппроксимация правой части уравнения в ячейке имеет вид:

$$f^t(x,y) = \sum_{m=1}^{M} q_m^t \tilde{\Phi}_m^t(x,y),$$

q_m^t – значения функции f на полной сетке M_h. Приближенное решение уравнения (2.1) в ячейке t ищется в форме

$$u^t(x,y) = \sum_{i=1}^{3\pi} u_i^t \varphi_i^t(x,y) + \sum_{m=1}^{M} q_m^t \Phi_m^t(x,y), \tag{3.11}$$

где

$$\{\varphi_i^t(x,y), i = 1,...,3\pi\},$$
$$\{\Phi_m^t(x,y), m = 1,...,M\}$$

базисные системы функций в треугольнике, u_i^t – искомое решение.

В дальнейшем номер t ячейки в обозначениях обычно опускается для упрощения записи.

Формальное определение базисов $\{\varphi_i\}$ и $\{\Phi_m\}$ простое: они являются приближенными решениями в треугольнике T следующих элементарных задач:

$$\begin{cases} L\varphi_i = 0 & (x,y) \in T, \\ \varphi_i = \tilde{\varphi}_i & (x,y) \in \partial T, \quad i = 1,...,3\pi \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} L\Phi_m = \tilde{\Phi}_m & (x,y) \in T, \\ \Phi_m = 0 & (x,y) \in \partial T, \quad m = 1,...,M, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $\{\tilde{\varphi}_i(x,y), i = 1,...,3\pi\}$ – полный интерполяционный базис порядка π на ∂T, $\{\tilde{\Phi}_m(x,y), m = 1,...,M\}$ – полный интерполяционный базис порядка π в треугольнике. Краевые задачи (3.12), (3.13) решаются независимо для каждого треугольника. Эти задачи решаются приближенно и для их решения может использоваться один из двух алгоритмов.

Алгоритм 1. (Полиномиальный суперэлемент, микро-СЭ).

Пусть $\{\psi_j(x,y), j = 1,...,J\}$ – линейно-независимая система функций, обращающихся в нуль на границе треугольника T^t: $\psi_i(x,y) = 0$, $(x,y) \in \partial T^t$. В качестве такого базиса мы рассматриваем полиномиальный базис степени $\geq \pi$. Пространство $span\{\psi_1,...,\psi_J\}$ содержит функции из основного пространства $span\{\tilde{\Phi}_1,...,\tilde{\Phi}_M\}$ полиномов степени $\leq \pi$ и набор полиномов более высоких степеней. Число J и система базисных функций определяются в зависимости от порядка схемы π и задаются специальной таблицей, приведенной в приложении. Число J является параметром метода; влияние этого параметра на точность результатов обсуждается в § 4. В представляемом здесь варианте МКСЭ функции $\varphi_i(x,y)$, $\Phi_m(x,y)$ ищутся как приближенные решения семейства элементарных задач (3.12), (3.13) в виде

$$\varphi_i(x,y) = \tilde{\varphi}_i(x,y) + \sum_{j=1}^{J} a_{ij}\psi_j(x,y),$$

$$\Phi_m(x,y) = \sum_{j=1}^{J} b_{mj}\psi_j(x,y).$$

Системы уравнений для нахождения a_{ij}, b_{mj} строятся с помощью галеркинской процедуры и имеют вид:

$$B(\varphi_i, \psi_j) = 0, \quad j = 1,...,J$$

$$B(\Phi_m, \psi_j) = (\tilde{\Phi}, \psi_j), \quad j = 1, ..., J$$

Нахождение базисов $\varphi_i, i = 1, ..., 3\pi$, $\Phi_m, m = 1, ..., M$ требует обращения одной $J \times J$ – матрицы P с коэффициентами $p_{kj} = B(\psi_j, \psi_k)$.

Алгоритм 2. (Кусочно-полиномиальный суперэлемент, макро-СЭ).

В ячейке строится треугольная сетка, состоящая из небольшого числа ячеек, 10-100. На такой сетке краевые задачи (3.12), (3.13) решаются с помощью приводимой здесь схемы МКСЭ,т.е. используется рекурсивная процедура - в каждой ячейке локальной сетки строится микро-суперэлемент с помощью Алгоритма 1. Порядок схемы при решении локальных задач в ячейках формально не связан с порядком основной схемы и может зависеть от номера ячейки основной сетки. Итак, при применении Алгоритма 1 приближенное решение в ячейке является полиномом, который содержит более высокие степени, чем интерполяционный полином (3.1). Алгоритм 2 приближает решение в ячейке достаточно сложным агрегатом - кусочно-полиномиальной непрерывной функцией.

Построение схемы. Отметим, что если $\pi > 2$, то при применении стандартного МКЭ искомая сеточная функция определяется в некотором наборе узлов внутри каждой ячейки. В МКСЭ способ построения решения включает в себя процедуру исключения внутренних переменных, известную под названием static condensation. Эта процедура состоит в выражении переменных, соответствующих внутренним узлам ячейки, через значения на границе ячейки. Но МКСЭ служит не только для исключения внутренних переменных, но и для обогащения стандартной конечноэлементной аппроксимации W_h пространства $H_0^1(\Omega)$.

Действительно, пространство W_h состоит из кусочно-непрерывных функций, являющихся в каждой ячейке полиномами вида (3.1), а в МКСЭ аппроксимационное пространство состоит из функций вида (3.11) (и зависит от способа решения краевых задач (3.12), (3.13)). В идеальном варианте - при точном решении краевых задач - формула (3.11) определяет элемент аппроксимационного пространства, который на сторонах ячеек совпадает с интерполянтом приближаемой функции, а в каждой ячейке является решением исходного уравнения.

Формулу (3.11) мы можем переписать в виде:

$$u = \sum_{i=1}^{3\pi} u_i(\tilde{\varphi}_i + \Phi_i) + \Phi_0 \tag{3.14}$$

где $\Phi_0 = \sum\limits_{m=1}^{M} q_m \Phi_m(x, y)$, или

$$u = u^r + u^b, \tag{3.15}$$

где

$$u^r = \sum_{i=1}^{3\pi} u_i \tilde{\varphi}_i, \tag{3.16}$$

$$u^b = \sum_{i=1}^{3\pi} u_i \Phi_i + \Phi_0. \tag{3.17}$$

Функция u^r является полиномиальным интерполянтом, u^b – residual-free bubble функция. Будем считать, что u^r определяет конечномерное пространство S_h, а u^b – пространство B_h.

Сравнивая (3.14)-(3.17) с (3.6)-(3.10), видим, что аппроксимационное пространство в МКСЭ такое же, как и в RFB, но при $\pi > 2$ в полиномиальном компоненте исключены bubble-функции, дополняющие базис $\tilde{\varphi}_i, i = 1, ..., 3\pi$ до полного интерполяционного базиса $\{\tilde{\Phi}_m, m = 1, ..., M\}$. Итак, аппроксимационное пространство V в МКСЭ можно записать в виде прямой суммы двух пространств: $V = S_h \bigoplus B_h$, где S_h - пространство непрерывных функций, ограничение которых на границу каждой ячейки является полиномом степени $\leq \pi$ (совпадает на ребрах сетки со стандартным интерполянтом МКЭ), а пространство B_h является типичным пространством residual-free bubble функций, описывающих мелкомасштабные изменения решения.

Поэтому после построения в каждой ячейке суперэлемента для формирования системы разностных уравнений для функции u на сетке N_h (т.е. относительно величин u_i на границах ячеек) можно использовать условия слабой непрерывности потока на границах ячеек [5]. В ряде задач этот подход по точности и обьему вычислений эффективен, но в задачах конвекции-диффузии требует дополнительного изучения. В данной работе мы приводим вариант МКСЭ, основанный на методе Галеркина: u^r ищется из условия

$$B(u, v^r) = (f, v^r) \quad \forall v^r \in S_h.$$

Для формирования разностных уравнений предварительно в каждой ячейке вычисляются функционалы:

$$\begin{gathered} B(\varphi_i, \tilde{\varphi}_j), \quad B(\Phi_m, \tilde{\varphi}_j), \quad (\tilde{\Phi}_m, \tilde{\varphi}_j), \\ i, j = 1, ..., 3\pi, \quad m = 1, ..., M \end{gathered}$$

Заметим, что все интегралы, необходимые при определении функционалов, вычисляются аналитически.

Напомним, что узел сетки N_h может быть двух типов: 1) вершина треугольника 2) точка на ребре сетки, т.е. точка на стороне треугольника, не являющаяся его вершиной. Каждому внутреннему узлу сетки N_h соответствует разностное уравнение: узлу типа 1 – уравнение с шаблоном "Звезда связывающее значения сеточной функции во всех примыкающих к узлу ячейках (см. фиг.2).; узлу типа 2 – уравнение с шаблоном "Ромб связывающее значения сеточной функции в двух примыкающих к ребру ячейках (см. фиг.3).

4 Результаты численных экспериментов

Рассмотрим некоторые модельные задачи, используемые для тестирования стабилизированных методов. Как правило, это сингулярно возмущенные задачи, в которых коэффициент вязкости мал по сравнению с модулем конвективной скорости, т.е. конвективный перенос существенно преобладает.

4.1. Пограничный слой вблизи твердой стенки.

Рассмотрим задачу об обтекании плоской полубесконечной пластинки плоскопараллельным ламинарным потоком жидкости [14]. Передним краем пластинки является линия $x = 0$. Система уравнений пограничного слоя (уравнения Прандтля) для компонент вектора скорости (v_x, v_y) имеет вид:

$$\begin{gathered} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{gathered} \tag{4.1}$$

Задача решается при $x > 0$, $y > 0$ с граничными условиями:

$$\begin{array}{ll} v_x = v_y = 0 & y = 0, \\ v_x = U & y \longrightarrow \infty. \end{array} \tag{4.2}$$

Здесь μ – вязкость, U – скорость основного потока – заданные постоянные. Всюду ниже $U = 1$.

Задача (4.1), (4.2) имеет точное решение

$$v_x = U f'(\xi), \quad \xi = y\sqrt{\frac{U}{\mu x}},$$

$$v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu U}{x}}(\xi f' - f),$$

где $f(\xi)$ – решение краевой задачи

$$ff'' + 2f''' = 0,$$
$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

Функция f находится численно на подробной сетке, поэтому можно считать функции v_x, v_y известными. Положим: $v_x = U$, $v_y = 0$ при $x \le 0$.

Задача 4.1a. Ищется решение задачи (2.1)-(2.2) при нулевой правой части, $a = 0$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $p_1 = v_x$, $p_2 = v_y$, а граничная функция $g(x, y)$ определяется из точного решения $u(x, y) = v_x$. Область Ω –четырехугольник с вершинами [0.5;0], [20.5;0], [17.5;0.105], [0.47; 0.03]. Сетка получена из топологически прямоугольной сетки 10×12, каждый прямоугольник разбивается диагональю на 2 треугольника. По оси OY прямоугольная сетка равномерна, по оси OX шаг увеличивался по геометрической прогрессии со знаменателем $q_y = 1.5$, считая от левой границы области.

Заметим, что область не содержит особой точки решения [0;0], и треугольники не имеют больших тупых углов, хотя аспектное отношение – отношение максимального размера треугольника к минимальному – меняется в значительных пределах, от 1 до 1000.

Проведенное сравнение схем GLS и СЭ для порядков 1-3 показывает, что эти схемы близки по точности (см. табл.1).

Таблица 1.

π	Микро-СЭ			GLS	
	J	C	L_2	C	L_2
1	3	0.252E-01	0.777E-02	0.458E-01	0.156E-01
2	3	0.199E-01	0.134E-02	0.157E-01	0.103E-02
3	3	0.233E-02	0.136E-03	0.324E-02	0.179E-03

На фиг.4 приведены графики приближенных решений, полученных по схемам Микро-СЭ порядка 1 и 2.

Задача 4.1b. Задача аналогична первой, отличие состоит в области расчета и сетке. Область расчета – четырехугольник с вершинами [0.5;0], [20.5;0], [17.5;0.105], [-3.5; 0.03] частично расположена в части $x < 0$, и приближенное решение ощущает влияние особенности 9точное решение задачи Прандтля определено при $x > 0$). Сетка получена из равномерной прямоугольной сетки 10×12. Весь погранслой разрешен одним-двумя слоями ячеек, аспектное отношение изменяется в пределах от 1 до 2000, построенная сетка содержит треугольники с большими углами ($= \pi - 0.001$). Результаты расчетов по схемам GLS и СЭ для порядков 1-3 приведены в табл.2 и на фиг.5.

Таблица 2.

π	Микро-СЭ			GLS	
	J	C	L_2	C	L_2
1	3	0.956E-01	0.152E-01	0.179E+00	0.251E-01
2	3	0.769E-01	0.658E-02	0.173E+00	0.892E-02
3	3	0.802E-01	0.448E-02	0.129E+00	0.611E-02

Оба метода (МКСЭ и GLS) демонстрируют практически одинаковые результаты.

4.2. Задача с разрывными граничными данными.

Основная цель решения тестовых задач 4.2 a,b,c – проверка работоспособности методов при расчете практически разрывных решений без претензий учета малой вязкости на грубых сетках. Основной критерий оценки – приближенное решение не должно содержать сильных нефизических осцилляций и разрыв может быть размазан на ширину не более 2-3 ячеек сетки.

Задача 4.2.a [11]. Рассмотрим единичный квадрат Ω (см. фиг.6a). Коэффициенты: $\varepsilon = 10^{-6}$, $p_1 = p_2 = \sqrt{2}/2$, $f = 0$. Поле скоростей однородно и направлено под углом 45^0 к оси OX. Разрыв в точке (0,0) переносится внутрь области характеристикой $y = x$ и вдоль нее образуется узкий внутренний слой. Этот слой схемой МКСЭ (порядок схемы $\pi = 1$, число bubble-функций $J = 6$) размазывается практически на одну ячейку. Стандартная схема Галеркина совершенно неработоспособна. Точность стабилизированных схем МКСЭ и GLS удовлетворительна. Фиг. 7 демонстрирует работоспособность указанных методов в этом случае.

Задача 4.2.b [15]. Постановка задачи приведена на фиг. 6b. Вязкость $\varepsilon = 10^{-4}$, поле скорости однородно и направлено под углом $arctg\frac{2}{3}$ к оси OX. Кроме внутреннего слоя, у части границы $x = 1$ образуется пограничный экспоненциальный слой. На фиг. 8 представлены расчеты по схеме GLS (слева) и по схеме МКСЭ (справа). Сетка получена из прямоугольной сетки 20×20 делением каждой ячейки диагональю на два треугольника. Вверху приведены результаты для схем порядка $\pi = 1$, внизу – для схем порядка $\pi = 3$. Схема Микро-СЭ порядка $\pi = 1$ имела $J = 28$ "bubbleфункций (1,28), в схеме Макро-СЭ порядка $\pi = 3$ использовалась локальная сетка из

16 треугольников в каждой ячейке, рассматриваемых как Микро-СЭ (1,6), т.е. как суперэлемент порядка $\pi = 1$ с $J = 6$. На фиг. 9 приведены профили приближенных решений плоскостями $x = 0.5$ и $y = 0.9$. Анализ представленных результатов показывает, что схемы порядка $\pi = 1$ GLS и МКСЭ близки по точности расчета "разрывов". В случае порядка $\pi = 3$ экспоненциальный пограничный слой размазывается меньше схемой МКСЭ, но приближенное решение имеет осцилляции $\sim 3\%$. При использовании схемы МКСЭ без локальных сеток внутри ячеек осцилляции более значительны и превышают $10 - 20\%$.

Задача 4.2.c [15]. Постановка задачи приведена на фиг. 6c. Вязкость $\varepsilon = 10^{-6}$, поле скорости однородно и направлено под углом 60^0 к оси OX. Кроме внутреннего слоя, у части границы $x = 1$ и у границы $y = 1$ образуются пограничные экспоненциальные слои. На фиг. 10 представлены расчеты по схеме GLS (слева) и по схеме МКСЭ (справа). Сетка получена из прямоугольной сетки 20×20 делением каждой ячейки диагональю на два треугольника. На фиг. 10 вверху приведены результаты для схем порядка $\pi = 1$, внизу – для схем порядка $\pi = 3$. Схема Микро-СЭ (1,21) порядка $\pi = 1$ имела $J = 21$ "bubbleфункций, в схеме Макро-СЭ порядка $\pi = 3$ использовалась локальная сетка в каждой ячейке из 64 треугольников, рассматриваемых как Микро-СЭ (1,6). При решении задач в ячейках использовалась схема микро-СЭ с дополнительной стабилизацией GLS. На фиг. 11 приведены профили приближенных решений плоскостями $x = 0.5$ и $y = 0.9$. Анализ представленных результатов показывает, что схемы порядка $\pi = 1$ GLS и SE близки по точности расчета "разрывов". В случае порядка $\pi = 3$ экспоненциальный пограничный слой размазывается меньше схемой СЭ, приближенное решение имеет локализованные осцилляции $\sim 5\%$. При использовании схемы СЭ без локальных сеток внутри ячеек осцилляции разрушают решение.

4.3. Задача с криволинейным внутренним слоем.

Рассмотрим в квадрате $0 < x, y < 1$ уравнение

$$u_x + f'(x - x_s)u_y = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.3}$$

с заданной функцией $f(z) = 0.125 \sin(5z)$, имеющее точное решение при $x_s < 0$:

$$u(x, y) = erf\left(\frac{y - y_s - f(x - x_s)}{2\sqrt{\mu(x - x_s)}}\right),$$

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-s^2} ds.$$

Уравнение (4.3) является параболическим, роль формального времени выполняет переменная x, поэтому краевое условие на правой стороне квадрата не ставится, на остальных трех сторонах граничная функция $g(x, y)$ определяется из точного решения (4.3). Это решение описывает сглаживание диффузией "ступеньки"в начальных данных: на линии $x = x_s$ $u(y, x_s) = sign(y - y_s)$. Внутренний слой зарождается в точке (x_s, y_s) и распространяется вдоль кривой, определяемой функцией $f(z)$.

Задача решалась при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, $x_s = -1$, $y_s = 0.6$ на сетках, полученных из квадратной $N \times N$ сетки: каждая квадратная ячейка делилась диагоналями на 2 или на 4 треугольные ячейки. Изучалась точность схемы МКСЭ $||u_h - u||$ в нормах C и L_2.

На фиг. 12 показаны линии уровня приближенного решения для случая $\pi = 3$, $J = 6$.

Тест 4.3.a. Первая серия расчетов связана с изучением зависимости точности схемы СЭ от параметра J – числа базисных функций, используемых при построении полиномиального суперэлемента в Алгоритме 1, п. 3.4. Для примера взята схема второго порядка. Установленная зависимость справедлива для схем любого другого порядка. Из таблицы видно, что с ростом числа J погрешность решения уменьшается примерно в 1.5 раза и решение становится более монотонным. Для сравнения в таблице показана также погрешность схемы GLS.

Таблица 3.

Влияние числа bubble-функций J на точность решения

		C	L_2
$\pi = 1$	GLS	0.159	0.364-01
сетка	J=1	0.176	0.413-01
20×20	3	0.171	0.328-01
	6	0.135	0.292-01
	10	0.111	0.224-01
	15	0.129	0.263-01
	21	0.107	0.214-01
$\pi = 2$	GLS	0.182-01	0.214-02
сетка	1	0.196-01	0.306-02
20×20	3	0.229-01	0.338-02
	6	0.164-01	0.260-02
	10	0.193-01	0.283-02
	15	0.180-01	0.208-02
	21	0.190-01	0.253-02

Таблица 4.

Сходимость асимптотического порядка для решения задачи 4.3 на последовательности равномерных сеток

Полиномиальный порядок	L_2-ошибка
1	2.5
2	3.2
3	4.1
4	5.15
5	6.5

Тест 4.3.b. Вторая серия расчетов была предпринята для определения асимптотической точности схемы МКСЭ в зависимости от порядка π. Расчеты проводились на последовательности сгущающихся сеток при $N = 5 \div 80$. Результаты приведены на фиг. 13. Они показывают, что схема МКСЭ порядка π достигает асимптотического порядка точности $(\pi + 1)$ в L_2. В этой задаче решение является достаточно гладким и сеточные аппроксимации решения достигают своего оптимума при достаточно малом числе степеней свободы (см. Таблицу 4).

Тест 4.3.c. В третьей серии расчетов сравнивались две суперэлементные схемы Микро-СЭ и Макро-СЭ. Для демонстрации использовалась равномерная треугольная сетка, полученная из прямоугольной сетки 10×10 делением ячеек одной диагональю (см. фиг. 14). В случае Макро-СЭ в каждой треугольной ячейке вводилась локальная сетка, состоящая из 64 ячеек. В каждой макро-ячейке строился суперэлемент порядка π с помощью Алгоритма 2, § 3. Для его построения на локальной сетке использовался Микро-СЭ такого же порядка π. В Макро-СЭ рассматривались локальные сетки двух типов: равномерная (см. фиг. 15) и сетка со сгущением по направлению вектора скорости (см. фиг. 16). Макро-СЭ улучшает монотонность решения – в приближенном решении уменьшаются нефизические осцилляции, которые с малой амплитудой присутствуют в решении Микро-СЭ. Заметим, что расчетная сетка достаточно груба для схем данного порядка. Результаты, полученные с использованием разных стратегий построения локальных сеток, практически одинаковы, что подтверждает Таблица 5. Для выработки оптимальной стратегии необходимы дополнительные исследования.

Таблица 5.

Сравнение Микро- и Макро-СЭ

π	J	Микро-СЭ		Макро-СЭ		Макро-СЭ	
		L_2	C	L_2	C	L_2	C
2	10	0.041	0.177	0.027	0.117	0.027	0.116
3	10	0.014	0.066	0.008	0.042	0.008	0.042
4	10	0.004	0.026	0.0026	0.013	0.003	0.014

4.4. Задача с точным экспоненциальным решением, [16].

Рассмотрим единичный квадрат Ω (см. фиг. 17). Коэффициенты: $\varepsilon = 0.01$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $f = 0$. Поле скоростей однородно и направлено вверх. Вдоль границы $y = 1$ образуется пограничный слой шириной 0.01. Изучалась работоспособность схемы СЭ в процессе адаптации сетки к решению. Начальная сетка получена из квадратной сетки 4×4 делением каждой квадратной ячейки на 4 треугольника (см. фиг. 18a). Такая сетка груба для представления решеня и приближенное решение на ней, полученное по схеме Микро-СЭ (2,6), немонотонно (фиг. 18b). За 8 шагов адаптации с помощью сеточного генератора адаптивных сеток AHA2D (А.Мартынов, С.Медведев и др.) получено удовлетворительное решение (см. фиг. 18c,d). Проведены два расчета: с использованием Микро-СЭ во всех ячейках сетки и комбинированный расчет, в котором в ячейках с высоким аспектным отношением применялся Макро-СЭ со специальной локальной адаптированной к геометрии сеткой (см. фиг. 18e). Результаты, полученные в обоих вариантах, совпадают. Это объясняется тем, что точность расчета в данном случае определяется интерполянтом решения на ребрах сетки. Введение в ячейках локальных сеток призвано обеспечить дополнительную устойчивость схемы, а не улучшить точность схемы.

Представленный расчет показывает надежную работу МКСЭ в адаптационной процедуре и возможности метода на сетках с высокоаспектным отношением. И хотя в данном расчете результаты, полученные с помощью Микро-СЭ и комбинированного подхода (см. фиг. 18e), совпадают, двухуровневые методы представляются перспективными как в контексте обеспечения устойчивости, так и для повышения точности в задачах со сложной структурой решения в ячейках основной сетки.

5 Заключение

Построенный специальный вариант МКСЭ принадлежит классу стабилизированных методов галеркинского типа и по конструкции близок к RFB методу. В задачах с доминирующим конвективным процессом этот подход демонстрирует результаты (точность, устойчивость) такие же, как и другие стабилизированные методы (GLS, SUPG, RFB).

Основные вычислительные затраты МКСЭ связаны с построением базиса в элементе сетки (в нашем случае в треугольнике) и зависят как от порядка схемы π так и от выбранной размерности дополнительного bubble-пространства (J). Выбор параметра J минимальным соответствует стандартному методу конечных элементов (или варианту SUPG/GLS при соответствующем и очень простом изменении функционалов).

С другой стороны, МКСЭ включает в себя процедуру локального исключения неизвестных (известную в методе конечных элементов под названием "static condensation"), расположенных внутри треугольника. Такие неизвестные появляются при использовании схем высокого порядка ($\pi \geq 3$). Такое исключение приводит к уменьшению размерности результирующей линейной системы, улучшению ее обусловленности и, как следствие, к уменьшению вычислительных затрат на ее решение. Так что, суммарные вычислительные затраты МКСЭ и SUPG/GLS могут в ряде случаев оказаться сравнимыми.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Зависимость размерности J системы функций $\{\psi_j\}_{j=1}^J$ от порядка схемы π и номера варианта $Nvar$.

Таблица 6.

Nvar / π	1	2	3	4	5	6	7	8
1,2,3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	3	6	10	15	21	28	36	—
5	6	10	15	21	28	36	—	—
6	10	15	21	28	36	—	—	—
7	15	21	28	36	—	—	—	—

Параметр J изменяется дискретно в зависимости от номера варианта ($Nvar$) так, чтобы система функций $\{\psi_j\}_{j=1}^J$ была полной системой полиномов, определенной степени, обращающихся в 0 на границе треугольника.

Список литературы

[1] Л.Г. Страховская, Р.П.Федоренко. Об одной специальной разностной схеме. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, т.7, N 4, 1976

[2] Р.П.Федоренко. О некоторых задачах и приближенных методах вычислительной механики. ЖВМ и МФ, т.34, N 2, стр. 267-289, 1994

[3] R.P.Fedorenko. Finite Superelements Method and Multigrid Method in Problems of Elasticity Theory. Comp. Fluid Dynamics Journal, vol.5, No.2, pp.203-212, 1996

[4] R.P.Fedorenko. Finite Superelements Method. Recent advances in Numerical Methods and Applications II, O.P.Iliev, M.S.Kaschiev, S.D.Margenov, B.H.Sendov and P.S.Vasilevski Eds., Proceedings of the fourth International Cjnference, NMA'98, Sofia, Bulgaria, 19-23 August 1998, World Scientific, Singapore, 1999, pp. 16-26.

[5] В.Т.Жуков, Л.Г.Страховская, Р.П.Федоренко, О.Б.Феодоритова. Об одном направлении в конструировании разностных схем, 2000, Представлена к печати

[6] T.J.R. Hughes and A.N.Brooks. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion . In T.J.R. Hughes, editor, Finite Element Method For Convection Dominated Flows, AMD Vol. 34, 19-35. ASME, New York,1979

[7] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and G.M. Hilbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least squares method for advective-diffusive equations. Comput. Methods Appl.Mech.Engrg.,73(2): 173-189,1989

[8] F.Brezzi, L.P.Franca, T.J.R. Hughes, A.Russo.

$$b = \int g$$

Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 145 (1997), pp.329-339.

[9] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green's function, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 127 (1995), pp.387-401.

[10] T.J.R. Hughes, G. Feijoo, L. Mazzei,J-B. Quincy. The variational multiscale method- a paradigm for computational mechanics. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 166 (1998), pp.3-24.

[11] F.Brezzi, L.P.Franca, A.Russo. Further consideration on residual-free bubbles for advective-diffusive equation. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 166 (1998), pp.25-33.

[12] L.P.Franca, A.Nesliturk. On a two-level finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. To appear in Int. J. for Numererical Meth. in Engrg., 2000.

[13] T.J.R. Hughes. Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. Intrn. Journ. for Numer. Met. in Fluids, vol.7, 1261-1275, 1987

[14] Л.Д.Ландау, М.Л.Лифшиц. Механика сплошных сред. Москва, Тех.-Теор. Издат., 1954

[15] I.Harari, L.Franca, S.P.Oliveira. Streamline design of stability parameters for advection-diffusion problems. Journal of Computational Physics, 2000, submitted for publication.

[16] L.P.Franca, A.Nesliturk, M.Stynes. On the stability of residual-free bubbles for convection-diffusion problems and their approximation by a two-level finite element method. Comput. Methods Appl. Engrg., 166(1-2); 35-49, 1998