1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МИГРАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ

В настоящей работе исследуется демографическая задача о нестационарном распределении населения по возрастам и социальным стратам с учетом миграционных потоков. Строится модель, позволяющая на кинетическом уровне описания включить в рассмотрение как механическое движение населения, так и переходы между социальными группами. В качестве примера рассматриваются некоторые модели ассимиляции мигрантов среди основного населения (а также процесса возможного исчезновения основного населения). Подчеркнем, что нашей задачей было построение формальной математической модели демографических процессов, охватывающей максимально широкий круг вопросов и основывающейся на детальном знании структуры популяции. Аппарат кинетических уравнений представляется наиболее адекватным поставленной задаче. Расчеты, приводимые в нашей работе, основываются на реальных данных, относящихся к современному демографическому состоянию России, и иллюстрируют применимость тех или иных моделей для прогнозов развития демографической ситуации. Отметим, что тенденциям и особенностям миграционной ситуации в России посвящено большое число исследований, относящихся к различным сторонам жизни населения. Здесь мы ограничимся указанием на одну из последних монографий [2], в которой приведена обширная библиография.

Пусть имеется несколько политико-географических областей (городов, регионов, стран и т.п.). Обозначим через $N_i(t)$ численность населения i-ой области в момент времени t, $N_i(t) = \sum_{j=1}^{S_i} N_{ij}(t)$, где $N_{ij}(t)$ – число людей типа j, S_i – количество признаков, по которым распределяется население i-ой области. Как именно сортировать население, определяется условиями демографической задачи. Распределение может содержать и непрерывные параметры сортности. Возраст и пол выделим в отдельные категории, обозначив через $N_{ij}^{M,W}(x,t)\Delta x$ число мужчин (M) и женщин (W) j-го типа в i-ой области, возраст которых лежит в интервале $(x, x+\Delta x)$. Введем вероятности перехода $P_{ij\to km}^{M,W}(x,t)$ из области i в область k, из сорта j в сорт m в единицу времени. Вероятность окончательного выбытия с жизненного поля будем обозначать $q_{ij}^{M,W}(x,t;[N])$, а через $B_{ij}^{M,W}(x,t;[N])$ – вероятность рождения (в единицу времени) соответствующего индивида от женщины возраста x. Величина N в квадратных скобках обозначает возможную функциональную зависимость этих вероятностей от численности и, может быть, ряда других интегральных характеристик общества. Тогда уравнение баланса для плотности распределения $N_{ij}^{M,W}$ имеет вид:

$$\frac{\partial N_{ij}^{M,W}}{\partial t}+\frac{\partial N_{ij}^{M,W}}{\partial x}=\sum_{k,m}\left[\left(1-\delta_{ik}\delta_{jm}\right)P_{km\to ij}^{M,W}N_{km}^{M,W}\right]-$$

$$-N_{ij}^{M,W}\sum_{k,m}\left[\left(1-\delta_{ik}\delta_{jm}\right)P_{ij\to km}^{M,W}\right]-q_{ij}^{M,W}(x,t)N_{ij}^{M,W}(x,t),\quad x>0,\, t>0; \qquad (1.1)$$

$$N_{ij}^{M,W}(0,t)=\int_0^\infty B_{ij}^{M,W}(y,t;[N])N_i^W(y,t)dy.$$

Это уравнение дополняется начальным условием $N_{ij}^{M,W}(x,0)=N_{ij0}^{M,W}(x)$ и различными модельными представлениями о зависимости вероятностей перехода от времени. Вид ядра $B_{ij}^{M,W}(y,t;[N])$ в интегральном уравнении рождаемости (второе уравнение в (1.1)) считается известным.

Для описания динамики возрастного распределения замкнутого региона без учета миграционных потоков и сортировок на другие группы, кроме пола, получаем из (1.1)

$$\frac{\partial N^{M,W}(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial N^{M,W}(x,t)}{\partial x}=-q^{M,W}(x,t;[N])N^{M,W}(x,t), \quad x>0, \quad t>0;$$

$$N^{M,W}(0,t)=\int_0^\infty B^{M,W}(y,t;[N])N^{W}(y,t)dy; \qquad (1.2)$$

$$N^{M,W}(x,0)=N_0^{M,W}(x).$$

Система (1.2) была нами проанализирована в работе [1] применительно к демографической ситуации, сложившейся в России к 1998 году. Без учета миграционных процессов в [1] было получено точное аналитическое решение нестационарной демографической задачи (1.2) для стабильного населения, а также была введена нелинейная модель рождаемости, на основе которой был сделан прогноз динамики численности населения России и распределения его возрастного состава. Отметим, что впервые интегральное уравнение воспроизводства было введено Лоткой и Дублином в работе [3], однако оно не рассматривалось в контексте эволюционного кинетического уравнения для плотностей распределения населения по возрастам и иным признакам.

Чтобы учесть миграцию, в правую часть кинетического уравнения (1.2) следует ввести функцию источника, зависящего как от возраста, так и от времени. Если не различать мигрантов и коренное население, то вместо (1.2) получим

$$\frac{\partial N^{M,W}(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial N^{M,W}(x,t)}{\partial x}=-q^{M,W}(x,t;[N])N^{M,W}(x,t)+p^{M,W}(x,t);$$

$$N^{M,W}(0,t)=\int_0^\infty B^{M,W}(y,t;[N])N^{W}(y,t)dy; \qquad (1.3)$$

$$N^{M,W}(x,0)=N_0^{M,W}(x).$$

Уравнение (1.3) полезно проанализировать с точки зрения желаемого результата в эмиграционной политике: какой источник $p^{M,W}(x,t)$ требуется сформировать для достижения того или иного распределения населения по возрасту и полу.

В более реальной модели будем полагать, что эмигрируют представители титульного населения (обозначаемого далее индексом «1»), а иммигрируют люди некоторой другой национальности (индекс «2»). При использовании в кинетическом уравнении типа (1.3) коэффициентов рождаемости и смертности для иммигрантов следует учесть, что эти коэффициенты, вообще говоря, меняются при смене традиционной среды обитания (могут как увеличиться, так и уменьшится).

Задача эволюции численностей двух видов, занимающих свои социальные ниши (т.е. не конкурирующих друг с другом), сводится к решению двух независимых систем:

$$\frac{\partial N_i^{M,W}(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial N_i^{M,W}(x,t)}{\partial x}=-q_i^{M,W}(x,t;[N])N_i^{M,W}(x,t)+p_i^{M,W}(x,t);$$

$$N_i^{M,W}(0,t)=\int_0^\infty B_i^{M,W}(y,t;[N])N_i^{M,W}(y,t)dy\ ; \tag{1.4}$$

$$N_i^{M,W}(x,0)=N_{i0}^{M,W}(x),\quad i=1,2\ .$$

Полная биомасса в момент времени t определяется как

$$M(t)=\sum_i\int_0^\infty\left(N_i^M(x,t)+N_i^W(x,t)\right)dx\ . \tag{1.5}$$

В действительности, однако, происходит смешение видов, а также развивается конкуренция за жизненно важные ресурсы. В простейшей модели, учитывающей эти обстоятельства, можно считать, что межвидовое взаимодействие приводит к изменению (не обязательно росту) смертности первого вида, пропорциональному функции распределения численности второго вида, т.е. (верхние индексы для краткости опущены)

$$q_i(x,t;[N])=q_{i0}(x,t)+\sum_{j\neq i}\int_0^\infty\alpha_{ij}(x,y,t)N_j(y,t)dy\,, \tag{1.6}$$

где $\alpha_{ij}(x,y,t)$ – ядро конкурентного влияния на смертность первой группы в возрасте x со стороны второй группы с возрастным распределением $N_j(y,t)$. Кроме того, можно учесть также эффект притяжения мигрантов в те районы, где уже живут люди той же национальности, что моделируется слагаемым $c_i(x,t)N_i(x,t)$ (т.е. эффективным уменьшением коэффициента смертности на величину c_i), а также возникающую с ростом численности внутривидовую конкуренцию:

$$q_i(x,t;[N]) = -c_i(x,t) + q_{i0}(x,t) + \sum_j \int_0^\infty \alpha_{ij}(x,y,t)N_j(y,t)dy, \qquad (1.7)$$

где суммирование ведется уже по всем индексам, а α_{ii} отвечает конкуренции внутри социальной группы данного сорта. Модель (1.4) – (1.7) представляет собой обобщение на кинетическом уровне известной модели Ферхюльста-Вольтерра [4] для описания конкуренции в биологических сообществах. Ее детальное исследование будет проведено в отдельной работе. Численное исследование эволюции функций распределения населения по возрастам для моделей (1.3), (1.4) в приближении двух несмешивающихся сортов проводится далее в п.2 на основе данных [5-7], характеризующих Россию в 1998г.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХГРУППОВОЙ МОДЕЛИ

В этом параграфе мы приведем результаты численного решения задач, постановка которых была приведена выше, на основе данных [6] о текущем состоянии миграции в России. Коэффициенты рождаемости и смертности населения, используемые в расчетах, были взяты из того же источника и приведены в требуемом объеме в нашей предыдущей работе [1]. В Таблице 1 представлены некоторые данные о национальном составе населения России и о динамике миграционных потоков. Из них следует, что в двухгрупповом приближении члены «обобщенной» некоренной национальности составляли в 1989г около 16% от общего числа населения, причем на протяжении 30 лет эта величина изменялась незначительно (17-18%). Поэтому при проведении расчетов мы полагаем, что начальные условия для системы (1.3) на 1998г имеют вид $N_{01} = 0.84N_0$, $N_{02} = 0.16N_0$, где N_0 есть начальное распределение всего населения России по возрастам, приведенное в [1] по данным [6].

Таблица 1. Национальный состав населения России по данным переписей [5] (тыс. человек).

Годы переписи	1959	1970	1979	1989
Все население	117534	130079	137410	147022
Русские	97864	107748	113522	119866
Татары	4074	4755	5006	5522
Украинцы	3359	3346	3658	4363
Чуваши	1436	1637	1690	1774
Башкиры	954	1181	1291	1345
Белорусы	844	964	1052	1206
Мордва	1211	1177	1111	1073
Чеченцы	261	572	712	899
Немцы	820	762	791	842
Удмурты	616	678	686	715
Марийцы	498	581	600	644
Казахи	382	478	518	636
Аварцы	250	362	438	544
Евреи	855	792	692	537
Армяне	256	299	365	532
Буряты	252	313	350	417
Осетины	248	313	352	402
Остальное население	3354	3121	4596	5705

Насколько важно иметь представление о детальном национальном составе в задачах, связанных с миграцией, определяется как преимущественной национальностью иммигрантов, так и отличием их коэффициента рождаемости от соответствующего среднего обобщенного.

Источник $p(x,t)$ в правой части (1.3) можно приближенно задать, основываясь на данных о сальдо миграции:

Сальдо миграции, тыс. чел./год

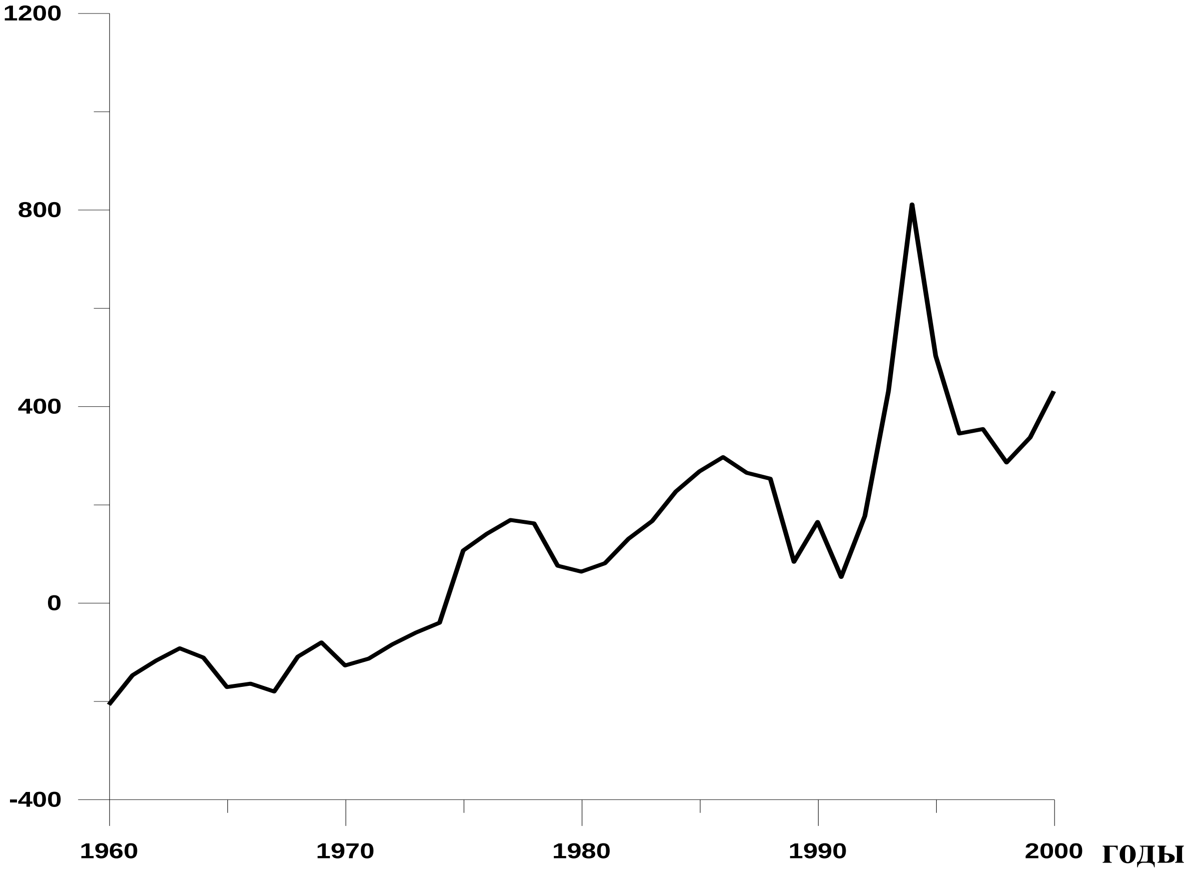

Рис.2.1. Ежегодный миграционный прирост численности населения России по данным [6].

Исключая всплеск миграционной активности 1994г, в среднем ежегодный механический прирост населения за последнее десятилетие можно оценить в 300 тысяч человек. На фоне естественной убыли около 700 тысяч в год (по данным [6] и по расчетам [1]) такого прироста недостаточно, чтобы оказать заметное влияние на демографическую ситуацию в целом. Приведем результаты расчетов распределения мужчин и женщин по возрастам для стабильного населения в предположении постоянного миграционного потока, когда мужчины трудоспособного возраста составляют 80% мигрантов. Для сравнения приведем также результаты расчетов по модели [1] без учета миграции.

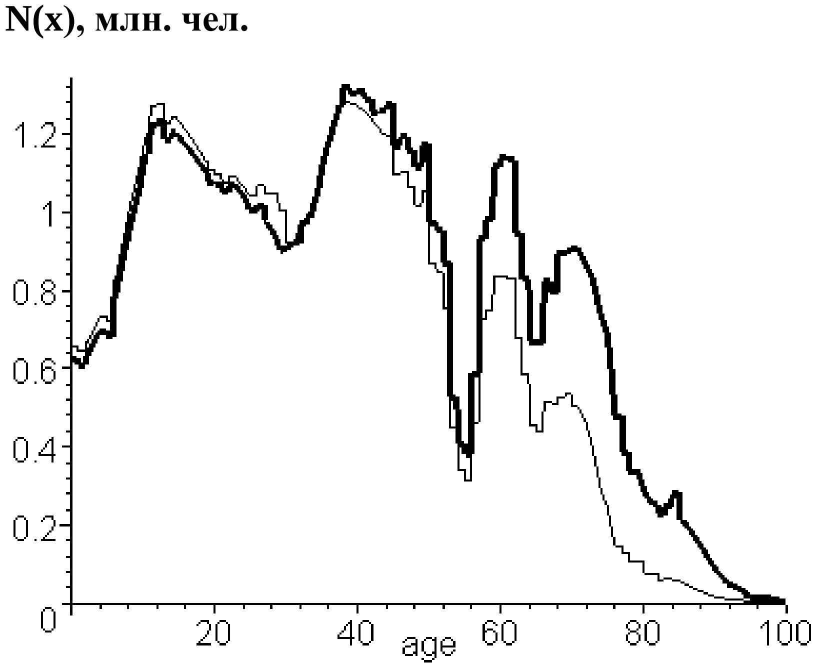

Рис.2.2. «Начальное» распределение населения России по возрастам (на 1998г по данным [8]). Жирная кривая отвечает W, а тонкая – M.

На этом графике хорошо просматриваются основные демографические проблемы, с которыми столкнулось промышленно развитое общество (практически во всех европейских странах с удельным энергопотреблением, превышающим 4 МВт/чел. в год наблюдается аналогичная картина). Во-первых, это положительный наклон графика в младших возрастах, т.е. прогрессирующий спад рождаемости. Во-вторых, значительное количество населения нетрудоспособного возраста: в России в 1998г в трудоспособном возрасте находились 44051 тыс. мужчин и 40286 тыс. женщин, а старше этого возраста – соответственно 8491 тыс. и 22009 тыс. человек (женщин почти в 2.6 раза больше). В-третьих, относительно большое количество людей послевоенной генерации, которые вступят в нетрудоспособный возраст в период резкого уменьшения численности работающих.

Если учесть миграцию населения (в основном в трудоспособных возрастах), то получаются графики, приводимые ниже:

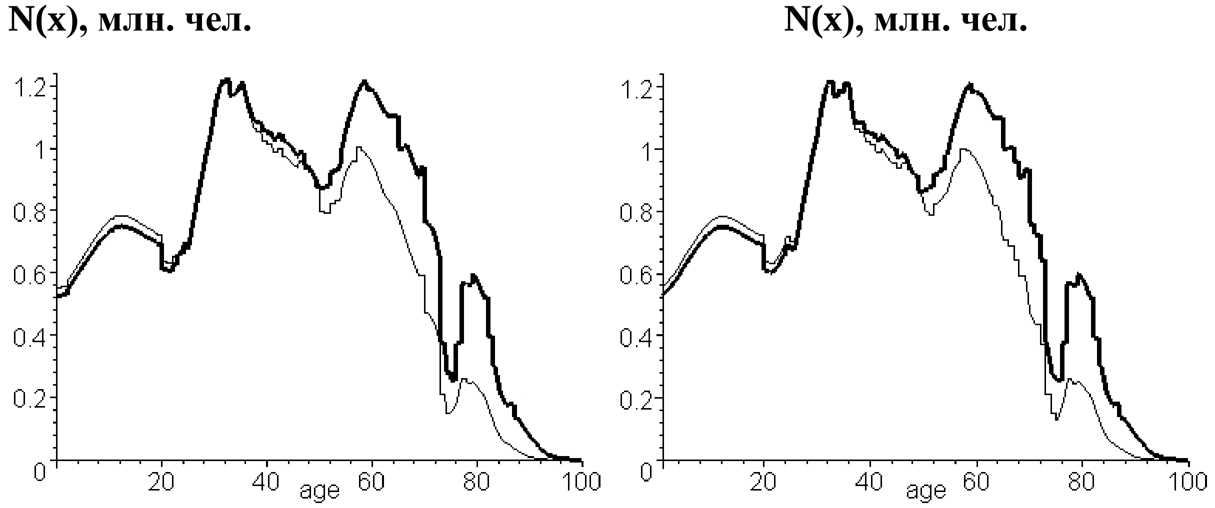

Рис.2.3. Распределение населения России по возрастам без учета миграции (слева) и с учетом постоянной миграции (справа) к 2020г. Жирная кривая отвечает W, а тонкая – M.

Влияние текущей миграции на полную численность населения в рамках модели «неразличимости» (1.3) пришельцев и аборигенов не превосходит 2%, т.е. практически незаметно даже в долгосрочном прогнозе. Некоторые отличия все же заметны в возрастном распределении, поскольку мигрируют в основном люди трудоспособного возраста, что несколько сдерживает эффект старения нации. Заметим, что в отсутствие миграции стабильная модель приводит к значительному постарению населения уже через 50 лет:

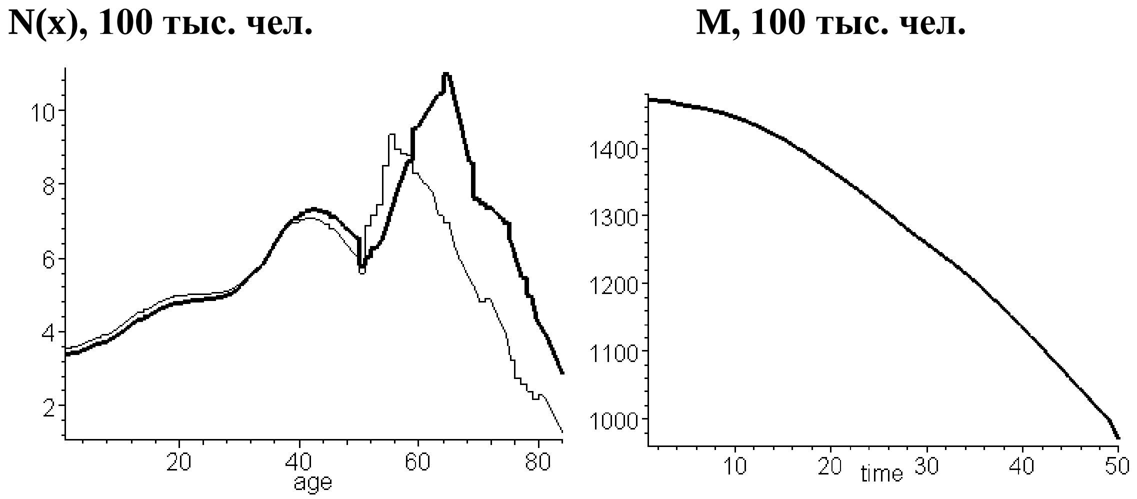

Рис. 2.4. Распределение населения по возрастам (слева) к 2050г. и динамика полной численности (на 100 тыс. чел.) населения России (справа) без учета миграции. Жирная кривая отвечает W, а тонкая – M.

Согласно (1.3), для того, чтобы полная численность (1.5) населения не изменялась со временем ($dM/dt = 0$), должно выполняться равенство (верхние индексы опущены)

$$\int_0^\infty p(x,t)dx = \int_0^\infty \left[q(x,t;N) - B(x,t;N)\right] N(x,t)dx . \tag{2.1}$$

Существует бесконечно много вариантов плотностей миграционных потоков $p(x,t)$, удовлетворяющих условию (2.1). Один из них, например, таков: плотность потока миграции пропорциональна плотности распределения населения по возрастам, т.е. $p(x,t) = \alpha N(x,t)$,

$$\alpha = \frac{1}{M(t)} \int_0^\infty \left[q(x,t;N) - B(x,t;N)\right] N(x,t)dx . \tag{2.2}$$

В частности, взяв за основу демографическое состояние России в 1998г, из (2.2) находим, что для сохранения полной численности требуется $\alpha = 9{,}8 \cdot 10^{-3}$. Отметим, что в настоящий момент (Рис. 2.1) $\alpha = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$.

Ниже мы приводим также детальные данные по странам прибытия и убытия, показывающие преимущественное направление миграций в Россию и из нее (Таблица 2). Из этих данных следует, что в двухгрупповом приближении можно выделить «обобщенного иммигранта». По данным [8] и Таблицы 2 средний коэффициент рождаемости такого иммигранта составляет 24,2 на 1000 человек населения «средней» национальности, а средний коэффициент смертности – 7,6 на 1000 (ниже, чем у основного населения). Младенческая смертность среди иммигрантов выше, чем среди титульного населения, более чем в 2 раза (40,2 против 16,9 в 1997г). Из той же Таблицы 2 следует, что собственно россиян эмигрирует приблизительно 80-90 тыс. человек в год, а иммигрирует около 370 тыс. иностранцев. Мы считаем, что перемещения из России в страны СНГ касаются в основном некоренного населения. Тогда в рамках модели двух невзаимодействующих групп (1.4) получаем по вышеприведенным данным динамику численности и прогноз распределения населения по возрастам (Рис.2.5).

Таблица 2. Динамика миграционных потоков по данным [6].

Годы	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Прибытие в РФ	**926020**	**923280**	**1146735**	**842050**	**631592**	**583260**	**495304**
СНГ и страны Балтии	925733	922886	1146349	841505	631173	582829	494819
Азербайджан	69943	54684	49495	43442	40310	29878	22210
Армения	15750	29806	46480	34112	25419	19123	16780
Белоруссия	36212	34670	43383	35337	23903	17575	13760
Грузия	54247	69934	66847	51412	38551	24517	21059
Казахстан	183891	195672	346363	241427	172860	235903	209880
Киргизия	62897	96814	66489	27801	18886	13752	10997
Латвия	27271	25891	26370	14859	8227	5658	3577
Литва	15354	19407	8456	4126	3055	1785	1384
Молдавия	32340	19344	21364	18715	17847	13750	10762
Таджикистан	72556	68761	45645	41799	32508	23053	18396
Туркменистан	19035	12990	20186	19129	22840	16501	10509
Узбекистан	112442	91164	146670	112312	49970	39620	41800
Украина	199355	189409	247351	188443	170928	138231	111934
Эстония	24440	14340	11250	8591	5869	3483	1771
Другие страны	287	394	386	545	419	431	485

Годы	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Убытие из РФ	**673143**	**483028**	**337121**	**339600**	**288048**	**234284**	**216691**
В СНГ и страны Балтии	570026	369115	231752	229287	191383	149461	133017
Азербайджан	19174	11543	6124	5614	4902	4302	3915
Армения	3756	1953	1906	2840	2997	2578	2356
Белоруссия	57520	46058	27751	25229	21542	18928	19035
Грузия	8021	4922	4671	4109	4106	3286	2933
Казахстан	87272	68703	41864	50388	38350	25364	26672
Киргизия	13124	10142	9947	9551	8472	6296	5310
Латвия	4095	2223	1339	1167	856	636	612
Литва	3668	2369	1525	1367	1252	1162	805
Молдавия	22419	14881	9386	8264	6894	5715	4766
Таджикистан	5886	5898	3676	3290	2613	2474	1977
Туркменистан	7069	6165	2817	1934	1380	1532	1537
Узбекистан	26085	20545	11318	15235	13384	7370	5231
Украина	309336	172131	108370	99422	83813	69116	57318
Эстония	2601	1582	1058	877	822	702	550
Другие страны	103117	113913	105369	110313	96665	84823	83674

$N_1(x)$, млн. чел. **$N_2(x)$, млн. чел.**

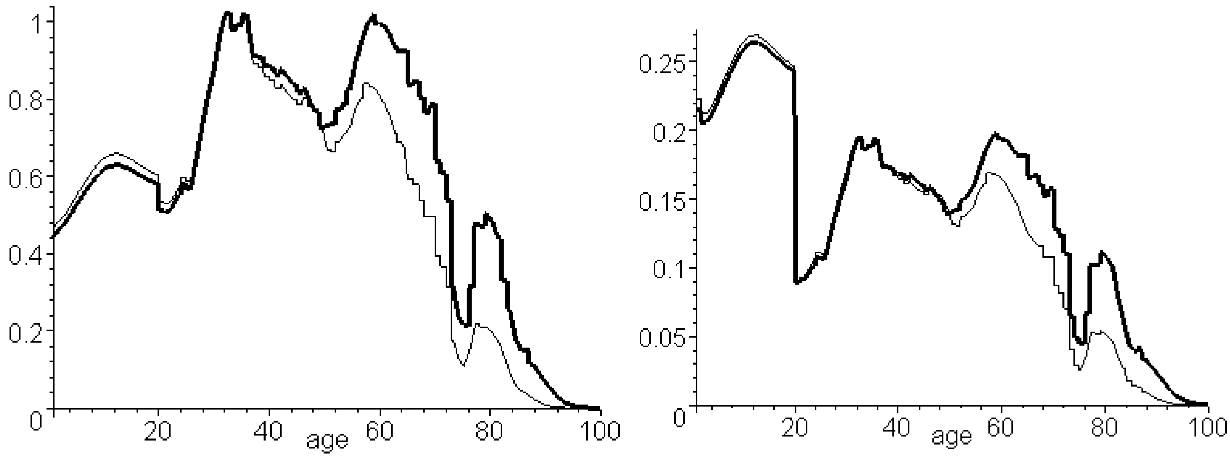

Рис. 2.5. Повозрастное распределение титульного населения России (слева) и представителей обобщенной другой национальности (справа) к 2020г с учетом миграции. Жирная кривая отвечает распределению W, а тонкая – M.

Поскольку эмиграция составляет всего 0,05% от общей численности населения, повозрастное распределение титульного населения осталось таким же, как и на Рис. 2.3 (с учетом пропорционального уменьшения). Представители же некоренной национальности, имея приблизительно в 2,5 раза более высокий коэффициент рождаемости, формируют омоложенную возрастную пирамиду. Резкий обрыв повозрастного распределения в районе 20 лет на правом графике объясняется тем, что начальные условия для обоих типов населения были заданы для простоты одним и тем же распределением на 1998г (Рис. 2.2) с коэффициентами соответственно 0,84 и 0,16. В этой модели за 20 лет численность титульного населения России уменьшится со 122 млн. чел. до 104 млн., а некоренного – возрастет с 23 млн. до 31 млн., из которых почти 7,5 млн. обусловлены миграционным потоком. Если такая тенденция сохранится, то численности обоих типов населения сравняются примерно через 75 лет и будут насчитывать по 60 млн. человек. Последнее утверждение, разумеется, не носит характер прогноза, поскольку тенденции могут сильно измениться уже на протяжении жизни поколения (т.е. за 25 лет). Поэтому долгосрочные прогнозы имеют лишь умозрительную ценность.

В то же время необходимо представлять последствия сложившейся ситуации, особенно если они не являются ярко выраженными на коротких интервалах времени в силу не только демографических, но и иных (например, политических) причин.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ АССИМИЛЯЦИИ МИГРАНТОВ

Демографические уравнения (1.2) или (1.4), в которых рождаемость представляется линейным интегральным оператором с ядром $B_i^{M,W}(y,t)$, не учитывает процессов ассимиляции мигрантов в многонациональном составе населения. Довольно актуален также вопрос об эволюции численности титульного населения государства. В этом параграфе мы построим качественную модель, учитывающую влияние смешанных браков на национальный состав населения открытого региона с учетом миграционных потоков. Эта модель более полно описывает демографическую ситуацию в регионе и может использоваться для проведения более корректных прогнозов.

Из расчетов, представленных в п.2, следует, что на уровне населения России в целом существующая миграция не вносит принципиальных изменений в возрастной состав. В то же время численность некоренного населения растет, причем его распределение по возрастам значительно отличается от общего. Поэтому важно иметь представления о динамике численности различных групп населения. В простейшей миграционной модели будем учитывать всего два сорта населения – аборигенов и пришельцев, обозначаемых соответственно индексами «1» и «2». Аборигены могут только эмигрировать, а пришельцы описываются результирующим сальдо миграции на основе данных Таблицы 2.

Рассмотрим сначала «жесткую» демографическую модель, в которой спектр национальностей не меняется, т.е. не допускается введения смешанных национальных категорий. Таковы, например, результаты переписей населения – это данные жесткой статистики. Для описания эволюции двухгрупповой модели введем постоянные величины самоидентификации $0 \le \xi, \eta \le 1$, которые показывают в среднем долю детей типа «1» от смешанных браков, если родители относятся к типам $1^M, 2^W$ и $1^W, 2^M$ соответственно. Из данных социологических опросов (см., напр., [7]) можно сделать вывод, что $\xi \approx 0.7, \eta \approx 0.5$.

Мы будем полагать, что обе нации не стремятся обособиться друг от друга (в противном случае получаются модели из п.1), а вступают в брак пропорционально численности соответствующей биологически активной части населения, обозначаемой A(t). Для определения этой численности введем функции $a^{M,W}(x)$ – единичные ступеньки, выделяющие средние возрастные интервалы биологической активности. Для мужчин таковым будем считать отрезок от 16 до 52 лет, а для женщин – от 13 до 47 лет. Эти функции для простоты полагаем одинаковыми для обеих категорий 1 и 2. Тогда

$$A^{M,W}(t) = \int_0^\infty a^{M,W}(x) N^{M,W}(x,t) dx\,, \; A = A^M + A^W. \qquad (3.1)$$

Обозначим через θ_{ij} долю детей, родившихся от родителей $i^M j^W, i, j = 1,2$. В рамках нашей гипотезы о пропорциональности имеем

$$\theta_{ij}(t) = \frac{A_i^M(t) A_j^W(t)}{A^M(t) A^W(t)}. \qquad (3.2)$$

Основным пунктом нашей теории является модификация интегрального уравнения рождаемости. Линейное по N^W уравнение (1.2) не учитывает наличие мужчин, которые в большинстве случаев необходимы для рождения детей. Мы предлагаем детализировать кривую рождаемости, представив ее в виде

$$B(y,t) = \int_0^\infty K(x,y,t) N^M(x,t) dx. \tag{3.3}$$

Ядро K(x,y,t) было введено нами в [1]. Здесь мы обобщим этот подход на случай смешения наций. Подчеркнем, что без представления рождаемости в виде (3.3) корректно описывать смешанные браки затруднительно, поэтому нелинейные модели рождаемости во многих случаях отражают само существо дела. Моделирование функции K(x,y,t) опирается на предположение о том, что при $A^M(t) >> A^W(t)$ рождаемость определяется в основном женщинами независимо от числа мужчин, и наоборот. В [1] мы предложили модель, в которой

$$K^{M,W} = \frac{1}{A(t)} b^{M,W}(y,t) a^M(x) a^W(y),$$

где $b(y,t)$ связана с интегральной рождаемостью B(y,t). Для определения $b(y,t)$ заметим, что на протяжении последних 40 лет (по статистическим данным) величина $\frac{A^M(t)}{A(t)}$ приближенно совпадала с вероятностью рождения мальчика (0.512 – 0.517). Тогда положим

$$b^M(y,t;[N]) a^W(y) = B(y), \quad b^W(y,t;[N]) a^W(y) = 0.95B(y).$$

Из (3.3) тогда следует, что число рожденных есть

$$\begin{aligned} N^M(0,t) &= \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty B(y,t) N^W(y,t) dy, \\ N^W(0,t) &= 0.95 \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty B(y,t) N^W(y,t) dy. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Обобщим формулу (3.4) на случай смешанных браков (для краткости запишем формулы только для мальчиков), вводя рождаемости $B_1(y,t)$ и $B_2(y,t)$ в несмешанных группах. С учетом гипотезы (3.2) получаем

$$N_1^M(0,t) = \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty \left[(\theta_{11} + \eta\theta_{21}) B_1(y) N_1^W(y,t) + \xi\theta_{12} B_2(y) N_2^W(y,t) \right] dy, \quad (3.5)$$

$$N_2^M(0,t) = \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty \left[(\theta_{22} + (1-\xi)\theta_{12}) B_2(y) N_2^W(y) + (1-\eta)\theta_{21} B_1(y) N_1^W(y) \right] dy.$$

Заметим теперь, что данные по рождаемости B(y,t), приводимые, напр., Госкомстатом [5,8], содержат усредненную информацию по всем группам, тогда как в (3.5) нам надо учесть разную фертильность выделенных категорий. Пусть известны фертильности f_1 и f_2 в чистых группах. Тогда можно приближенно оценить $B_1(y,t)$ и $B_2(y,t)$, имея только данные о B(y,t), если предположить, что $\frac{B_1}{B_2} \approx \frac{f_1}{f_2} \equiv f$. Тогда, поскольку число всех родившихся детей от женщин данного возраста y в момент t есть

$N_y^0 = B_1 N_1^W + B_2 N_2^W = BN^W$, где $N^W = N_1^W + N_2^W$, то

$$B_1(y,t) = B(y) f \frac{N^W(y,t)}{N_1^W(y,t) f + N_2^W(y,t)},$$
$$B_2(y,t) = B(y) \frac{N^W(y,t)}{N_1^W(y,t) f + N_2^W(y,t)}. \quad (3.6)$$

Но, кроме того, сами фертильности f_1 и f_2 надо найти, исходя из данных о средней фертильности по регионам. В данном случае двухгрупповой модели этими регионами являются страны, откуда идет основной миграционный поток (Таблица 2), и Россия. Поскольку в этих внешних странах тоже живут люди категорий 1 и 2, то единственные достаточно точно известные данные о фертильности (F в России и $\tilde{F}$ вне ее) также смешанные. Для их разделения применим то же самое приближение, что и при выводе (3.6), считая фертильность свойством нации, а не региона. Тогда, если $\frac{B}{\tilde{B}} = \frac{F}{\tilde{F}} \equiv \varphi$, то f в (3.6) определяется через φ и активное число женщин в обоих регионах:

$$f = \frac{\varphi A^W \tilde{A}_2^W - \tilde{A}^W A_2^W}{\tilde{A}^W A_1^W - \varphi A^W \tilde{A}_1^W}, \quad A^W = A_1^W + A_2^W. \tag{3.7}$$

Формулы (3.1) – (3.7) описывают, как уже говорилось, жесткую демографическую модель из двух групп населения. «Смягченная» модель включает в рассмотрение эволюцию трех категорий – аборигенов 1, пришельцев 2 и метисов 3. К третьему типу будем относить всех потомков от смешанных браков. Начальное состояние, опираясь на данные жесткой статистики, будем считать несмешанным. Для простоты полагаем, что метисы не мигрируют. Тогда кинетические уравнения для этих групп

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_i^{M,W}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial N_i^{M,W}(x,t)}{\partial x} = p_i^{M,W}(x,t;[N]) - q_i^{M,W}(x,t;[N]) N_i^{M,W}(x,t),\\ N_i^{M,W}(x,0) = N_{i0}^{M,W}(x), \quad i = 1, 2, 3\end{gathered} \tag{3.8}$$

имеют следующие граничные условия (уравнения рождаемости):

$$\begin{gathered}N_i^M(0,t) = \frac{A^M(t)}{A(t)} \theta_{ii}(t) \int_0^\infty B_i(y,t) N_i^W(y,t) dy, \quad i = 1,2;\\ N_3^M(0,t) = \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty dy \Big[\theta_{12} B_2(y,t) N_2^W(y,t) + \theta_{21} B_1(y,t) N_1^W(y,t) +\\ + \theta_{33} B_3(y,t) N_3^W(y,t) + \sum_{i=1}^{2} \Big(\theta_{i3} B_3(y,t) N_3^W(y,t) + \theta_{3i} B_i(y,t) N_i^W(y,t)\Big)\Big].\end{gathered} \tag{3.9}$$

Вероятности θ_{ij} определяются формулой (3.2), рождаемости B_1 и B_2 – формулой (3.6), а для B_3 положим приближенно $B_3 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$. Полная активная численность $A(t)$ определяется в (3.9) как сумма по всем трем категориям населения. Смертность в чистой категории определяется по средним смешанным данным аналогично рождаемости. Из этой модели следует, что если естественное воспроизводство меньше, чем смертность и эмиграция, деленные на θ_{11}, то аборигены асимптотически исчезают (смертность, отъезд и смешанные браки). Численные расчеты показывают, что для России в условиях 1998г время существования популяции титульного населения (безотносительно к тому, как себя самоидентифицируют метисы) составляет 100 лет, т.е. примерно 4 поколения. Разумеется, такие расчеты достаточно условны, поскольку предполагают сохранение текущей ситуации и равномерное перемешивание населения (страна рассматривается как географическая точка). Тем не менее, они качественно верно отражают текущие тенденции на небольшом отрезке времени.

Более детальный анализ процесса ассимиляции состоит в том, что в каждом поколении появляются новые категории населения, которые характеризуются совокупностью признаков, отличающих их как от аборигенов, так и от пришельцев. Для этого введем непрерывный параметр сортности $s \in [0, 1]$, приписав значение s = 0 аборигенам и s = 1 пришельцам. Тогда выражение $N^{M,W}(x, s, t)dxds$ есть число людей M,W в момент времени t, возраст которых лежит между x и x + dx, а параметр сортности – между s и s + ds. Естественно предположить, что существует некоторая точность различения принадлежности к той или иной категории. Приближенная модель с конечным числом значений параметра s будет рассмотрена в п.4. Здесь мы выведем уравнение рождаемости в модели непрерывной сортности.

Пусть совокупность фенотипических признаков категории 1 (s = 0) наследуется в смешанных браках с относительной силой $\varepsilon^{M,W}$ (для браков $1^M 2^W$ и $1^W 2^M$ соответственно). Относительную силу наследования признаков удобно представить через некоторые абсолютные значения этих сил. Именно, пусть $g_1^{M,W}$ – сила наследования признака 1 соответственно мужчиной и женщиной типа 1, а $g_2^{M,W}$ – аналогичная сила наследования признака 2. Будем считать, что значение s, определяющее смешанную категорию, пропорционально своему значению уменьшает абсолютную силу наследования. Например, если мужчина имеет категорию s, то сила наследования, с которой он передает своему потомку признаки типа 1, есть $G_1^M(s) = (1 - s)g_1^M$, а сила наследования признаков типа 2 – $G_2^M(s) = g_2^M s$.

Категория ребенка от родителей s_1^M, s_2^W определяется как среднее арифметическое их признаков с учетом соответствующих сил наследования:

$$s = \frac{\left(G_1^M(s_1) + G_2^M(s_1)\right)s_1 + \left(G_1^W(s_2) + G_2^W(s_2)\right)s_2}{G_1^M(s_1) + G_2^M(s_1) + G_1^W(s_2) + G_2^W(s_2)}. \qquad (3.10)$$

Поскольку ребенок от брака $1^M 2^W$ имеет по определению категорию $s = 1 - \varepsilon^M$, то из (3.10) получается

$$\varepsilon^M = \frac{g_1^M}{g_1^M + g_2^W}, \quad \varepsilon^W = \frac{g_1^W}{g_1^W + g_2^M}.$$

Если теперь ввести относительную силу наследования внутри категории 1, т.е. положить $g_1^M = \alpha g_1^W$, то вместо (3.10) получим выражение

$$s = \frac{\alpha\varepsilon^W s_2^2 + \varepsilon^M s_1^2 + \varepsilon^M \varepsilon^W \left[\alpha s_1 + s_2 - (\alpha+1)\left(s_1^2 + s_2^2\right)\right]}{\alpha\varepsilon^W s_2 + \varepsilon^M s_1 + \varepsilon^M \varepsilon^W (\alpha+1)(1 - s_1 - s_2)} \equiv \Psi(s_1, s_2). \qquad (3.11)$$

Величины $\alpha, \varepsilon^{M,W}$ известны из статистических данных [6,8].

Заметим здесь, что сортность s может меняться в процессе жизни индивида в силу климатических и иных условий региона. Это отразится на левой части кинетического уравнения, куда войдет член $\partial N / \partial s \cdot ds/dt$, если известен закон изменения s с течением времени. В этой работе мы будем считать параметр s постоянным на протяжении всей жизни каждого конкретного человека.

Коэффициенты рождаемости B(x,s) и смертности q(x,s) населения возраста x категории s будем приближенно описывать формулами линейной интерполяции, считая соответствующие коэффициенты аборигенов и пришельцев известными – например, в рамках модели (3.6):

$$B(x,s) = (1-s)B_1(x) + sB_2(x); \quad q(x,s) = (1-s)q_1(x) + sq_2(x). \qquad (3.12)$$

Теперь мы можем написать кинетическое уравнение демографической модели непрерывной сортности населения, т.е. уравнение непрерывной ассимиляции:

$$\frac{\partial N^{M,W}(x,s,t)}{\partial t}+\frac{\partial N^{M,W}(x,s,t)}{\partial x}=p^{M,W}(x,s)-q^{M,W}(x,s)N^{M,W}(x,s,t);$$

$$N^{M,W}(0,s,t)=\frac{1}{A(t)}\int_0^\infty dy\int_0^1 ds'\int_0^1 ds'' B^{M,W}(y,s'')N^{W}(y,s'',t)\delta(s-\Psi(s',s''))\cdot \qquad (3.13)$$

$$\cdot\frac{\left(A^{M}(s',t)\right)^2 A^{W}(s'',t)}{A^{M}(t)A^{W}(t)},$$

где $A^{M,W}(t)=\int_0^1 A^{M,W}(s,t)ds$, и $A^{M,W}(s,t)=\int_0^\infty N^{M,W}(x,s,t)a^{M,W}(x)dx$.

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ АССИМИЛЯЦИИ

Здесь мы приведем результаты расчетов по моделям (3.5), (3.9), (3.13).

N(x), млн. чел.

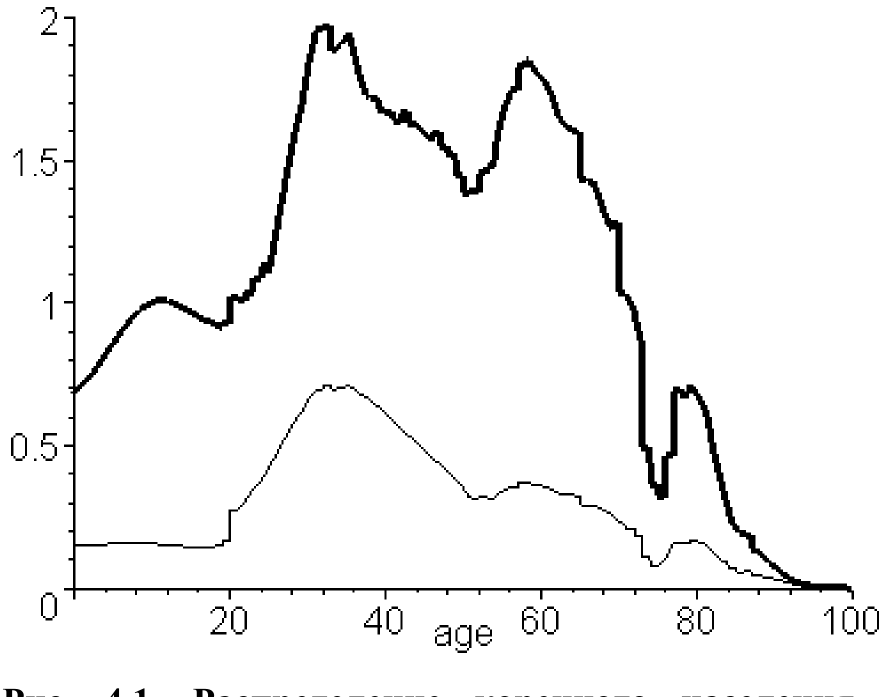

Рис. 4.1. Распределение коренного населения (жирная кривая) и обобщенных мигрантов (тонкая кривая) по возрастам к 2020г в рамках жесткой модели ассимиляции (3.5).

В жесткой модели ассимиляции численность коренного населения убывает несколько медленнее, чем в модели (1.4) независимой эволюции двух национальностей (106,5 млн. против 104 млн.). В то же время рост численности второй категории замедлился (28 млн. против 31 млн.). Уменьшение полной численности населения в этом случае несколько большее, что связано с увеличением доли титульного населения, рождаемость у которого меньше.

В модели (3.9) примем, что в начальный момент мигрантов и метисов было одинаковое число (по 16% от общего распределения), а остальные 64% – титульное население. Можно, разумеется, задать и любое другое начальное условие. Целью расчетов по этому уравнению было сравнение скоростей роста численностей трех выделенных категорий населения. Эта модель кажется более детальной, чем предыдущая жесткая модель (3.5), однако практически она менее адекватна реальной ситуации, поскольку в ней пренебрегается стиранием различий между метисами и аборигенами с течением времени.

N(x), млн. чел.

Рис. 4.2. Распределение населения по возрастам к 2020г по модели (3.9). 1 – аборигены, 2 – пришельцы, 3 – метисы.

Графики на рисунках 4.1, 4.2 и 2.2, 2.3, 2.5 интересно сравнивать на интервале от 0 до 20 лет, в соответствии с расчетным промежутком, поскольку в старших возрастах изменений в распределении аборигенов практически нет. Видно, что в модели (3.9) вследствие смешанных браков аборигены исчезают с большей скоростью, чем в других моделях (примерно по 1 млн. в год). Численность пришельцев растет примерно с той же скоростью, с которой убывает основное население, а численность метисов растет со скоростью, вдвое большей (по 2 млн. в год). Начиная с распределения численности соответственно в 99 млн., 23 млн. и 23 млн., к 2020г в рамках этой модели получаем 78, 25 и 28 млн. Это означает, что при сохранении этих тенденций через 100 лет аборигены исчезают, и остается две категории населения – метисы и пришельцы. Метисов в этом случае можно считать коренным населением, и дальнейшее описание проводить в рамках двухгрупповой модели. Это показывает, что модель (3.5) на интервале времени порядка 20 лет более адекватна, тогда как при долгосрочных прогнозах надо детализировать описание, переходя к модели (3.13). Мы приведем результаты расчетов по этой модели не для случая непрерывного параметра s, а для наборов s = 0, 1/4, 1/2 , 3/4. Промежуточные категории (1/8, 3/8, 5/8) с вероятностью 1/2 будем относить к двум ближайшим к ним категориям. Например, если в результате смешанного брака значение параметра s у ребенка становится меньше 1/4, то он с вероятностью 1/2 считается аборигеном, и с вероятностью 1/2 имеет категорию s = 1/4. (Разумеется, при желании описание можно сделать более детальным, и уже для 10 поколений можно будет практически получить непрерывное по s распределение.) Для простоты считаем, что силы наследования у мужчин и женщин любой категории одинаковы. Детальный анализ пятигрупповой модели и модели с непрерывным параметром сортности будет проведен в отдельной работе, поскольку в зависимости от начальных условий могут реализоваться различные режимы развития, включая образование нового этноса, что требует классификации начальных условий и исследования математических свойств нелинейного оператора рождаемости. Здесь мы приведем несколько вариантов расчетов в рамках пятигрупповой модели с целью сравнения полученных результатов с предыдущими.

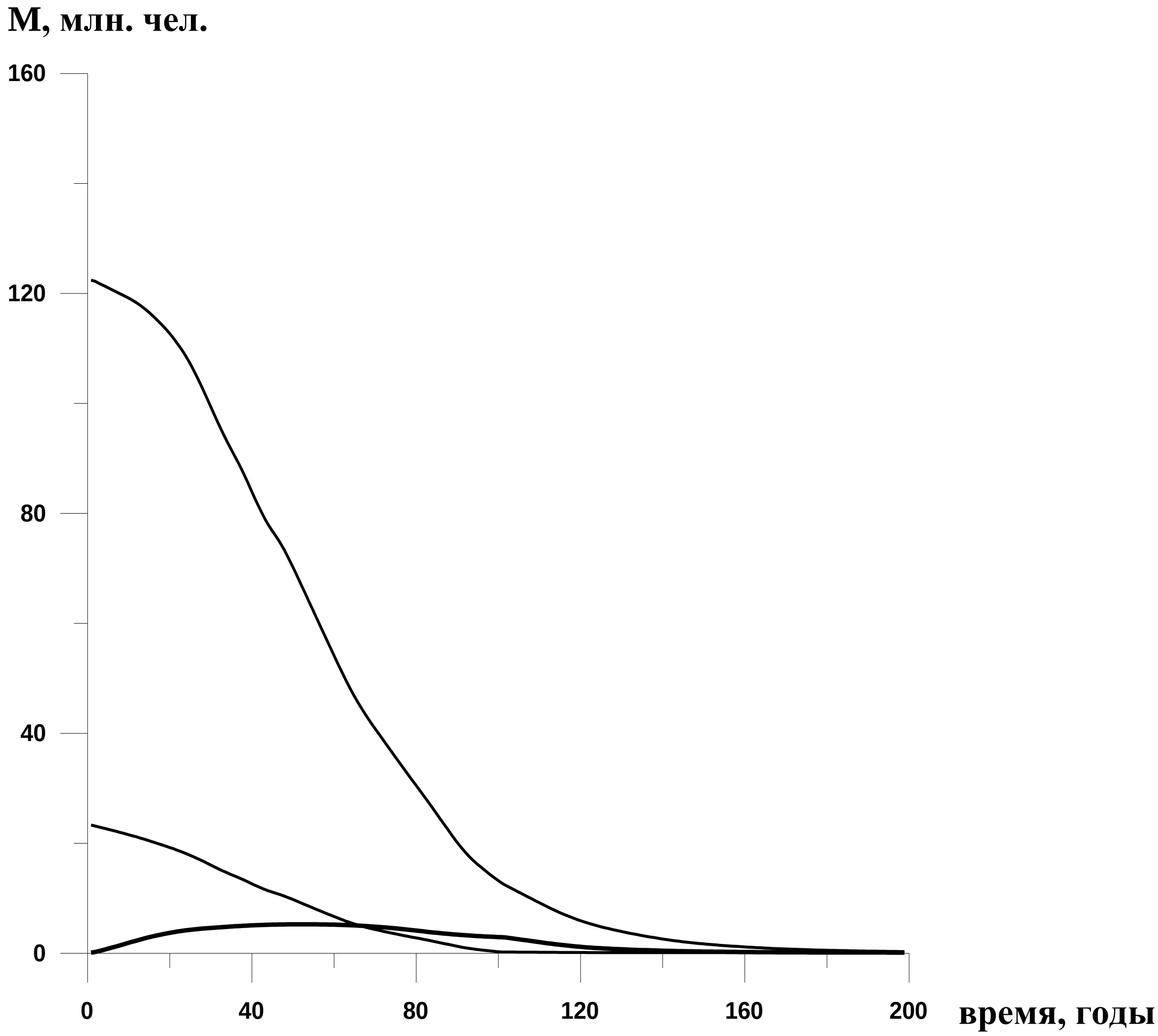

Рис. 4.3. Зависимость полной численности аборигенов (1), нации-донора (2) и метисов s=1/2 (3) от времени для России в условиях 1998г без учета миграции по модели (3.13).

Пятигрупповая модель приводит к продлению в 2 раза (по сравнению с трехгрупповой моделью) времени существования аборигенов, т.е. эти модели существенно различаются. Отметим, что в модели (3.13) фертильность всего населения меняется со временем, поскольку меняются соотношения между численностями входящих в него групп. Это позволяет получить такой нетривиальный эффект, как выживание нации в целом даже при недостаточном на некотором этапе коэффициенте простого воспроизводства. Например, если рождаемость нации-донора увеличить в 2 раза, то общая фертильность хотя и будет меньше 2 (при коэффициенте простого воспроизводства 2,15), но останется категория s = 1/4, численность которой будет возрастать после исчезновения представителей остальных категорий:

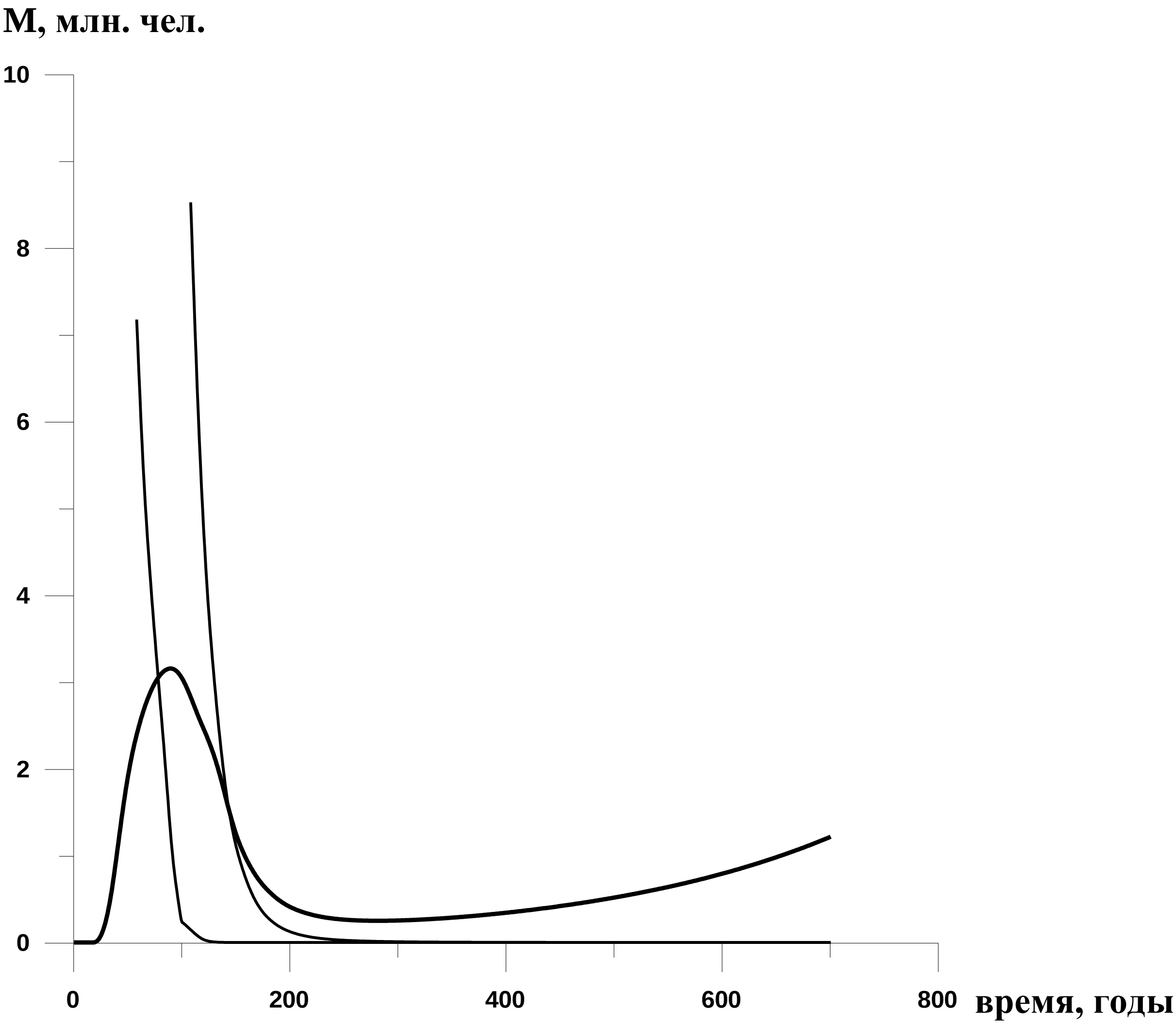

Рис. 4.4. Зависимость полной численности аборигенов (1), нации-донора (2) и метисов s=1/4 (3) от времени по модели (3.13) для фертильности в начальный момент (1998г) f(t=0)=1,9.

Таким образом, возникает проблема определения критических значений параметров демографической задачи для нескольких сортов населения (начальный процентный состав, коэффициенты рождаемости, миграционные потоки, смертность), при которых выживает хотя бы одна категория, две категории, и т.д. В рамках модели (3.13) можно также поставить вопрос о времени формирования нового этноса, отвечающего некоторому значению сортности s.

Модели, построенные в настоящей работе, позволяют прогнозировать развитие демографической ситуации при различной степени детализации описания. Сравнение результатов, получаемых по этим моделям, представляется важным, т.к. это дает возможность анализировать различные сценарии развития. В дальнейшем мы предполагаем учесть влияние ограниченности жизненного ресурса и изменения среды обитания вследствие жизнедеятельности на рождаемость и смертность, что придаст больший смысл долгосрочным прогнозам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галахов М.А., Орлов Ю.Н., Суслин В.М. Математические модели жизнеустройства. Демография. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 69, 2000.

2. Ионцев В.А. Международная миграция населения: теория и история изучения. М.: 1999.

3. Lotka A. J., Dublin L.I. On the true rate of natural increase. // J. American Stat. Association. 1925. V. 20. №150.

4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Мир, 1976.

5. Российский статистический ежегодник. М.: Госкомстат, 1999.

6. Демографический ежегодник России. М.: Госкомстат, 1999.

7. Винер Б.Е. К построению качественной регрессионной модели этнической идентичности. // Журнал социологии и социальной антропологии. 1998. Т.1. №3.

8. Народное хозяйство СССР в 1998г. Госкомстат СССР. 1989.