

В работе [1] мы предложили демографическую модель, описывающую изменение возрастного состава многонационального населения на основе кинетического уравнения, учитывающего естественное воспроизводство внутри каждой национальной группы, внешней миграции и процессов ассимиляции. Эта модель оказалась достаточно содержательной, т.к. позволила получить несколько различных режимов развития демографической ситуации для многонационального населения, и потому дальнейшее применение кинетического подхода к задачам демографии будет нами проводиться на ее основе. В настоящей работе мы подробно проанализируем пятигрупповую модель [1], дополнив ее учетом некоторых факторов, связанных с изменением качества жизни.

Для краткости рассматриваем население, состоящее в начальный момент из двух категорий – титульного населения (или аборигенов, обозначаемых далее индексом 0) и представителей другого этноса (этников, или пришельцев, обозначаемых индексом 1). Эти две группы различаются по фенотипу, а также имеют различные коэффициенты рождаемости и смертности. Например, для России по данным Госкомстата [2] можно определить обобщенного этника, численность которого составляет 16-18% от общего населения, фертильность в 2.5 раза больше средней по популяции, а смертность – в 1.3 раза меньше. Заметим, что в переписи населения отсутствуют смешанные категории, и это является определенным недостатком статистики, поскольку при опросе приходится выбирать какую-то одну национальность из жестко утвержденного списка. Это имеет далеко идущие последствия, т.к. люди, родившиеся в смешанных браках, объективно несут в себе черты национальностей родителей и наследуют различные аспекты культурных традиций, что сказывается и на демографических показателях, т.е. метисы фактически образуют некоторый другой этнос. Для аборигенов и обобщенных пришельцев можно ввести доли людей, имеющих (а также и не имеющих) национальных предпочтений при вступлении в брак. Здесь мы будем

рассматривать модель, когда никаких национальных предпочтений нет, и люди вступают в смешанный (а также и в мононациональный) брак с вероятностью, равной текущей доле соответствующей части населения. Учет коэффициентов предпочтений приведет к объединению “крайних” моделей – обособленного развития наций и модели ассимиляции.

Итак, полагаем, что дети от смешанных браков объективно принадлежат новой категории (метисы, индекс m) безотносительно того, с каким этносом они себя идентифицируют. В свою очередь от браков между m и 0 рождается “левая” категория метисов (L), а браки m и 1 дают “правую” категорию (R). Это – пять основных групп населения.

Таблица 1. Определение категории детей по типу родителей.

M/W	0	L	m	R	1
0	0	0.5 "0"	L	0.5 L	m
		0.5 L		0.5 m	
L		L	0.5 L	m	0.5 m
			0.5 m		0.5 R
m			m	0.5 m	R
				0.5 R	
R				R	0.5 "1"
					0.5 R
1					1

Таблица симметрична относительно главной диагонали в предположении равной силы передачи наследственных признаков мужчинами и женщинами. Если эти силы различны, то можно ввести непрерывный индекс s национальных категорий, что не приведет к принципиальным изменениям модели (соответствующее уравнение было получено в [1]), но значительно усложнит вычисления, результаты которых имеют реальное значение только на достаточно большом промежутке времени, т.к. для формирования непрерывного по s распределения требуется много

поколений смешанных браков. Таким образом, слишком подробная модель не может применяться на коротком интервале времени, а максимально упрощенная не имеет нужного качественного содержания. В настоящей работе мы предлагаем компромиссный вариант пятигрупповой демографической модели, позволяющей учитывать как краткосрочные, так и долговременные тенденции развития.

Введем функцию распределения $N_i^{M,W}(x, t)$ мужчин (M) и женщин (W) i -ой категории ($i=0, L, m, R, 1$) по возрастам x в момент времени t . Обозначим через $B_i(x, t)$ число родившихся в расчете на одну женщину возраста x , а через $q_i^{M,W}(x, t)$ – число умерших в расчете на одного живущего данной категории в возрасте x . Введем также миграционный поток $p_i^{M,W}(x, t)$ как число людей, прибывающих в страну в единицу времени. Следуя [1, 3], определим активную биомассу

$$A_i^{M,W}(t) = \int_0^{\infty} a_i^{M,W}(x) N_i^{M,W}(x, t) dx, \quad (1)$$

где $a_i^{M,W}(x)$ – функции биологически активного возраста (приблизительно от 17 до 52 лет для мужчин и от 13 до 47 лет для женщин). Определим также полную биомассу

$$A^{M,W}(t) = \sum_i A_i^{M,W}(t), \quad A(t) = A^M(t) + A^W(t).$$

Пусть $B(x, t)$ – средняя рождаемость по всему населению в целом, так что полное число рожденных в момент t определяется по интегральной формуле рождаемости Лотка [4]

$$N(0, t) = \int_0^{\infty} B(x, t) N^W(x, t) dx. \quad (2)$$

В нашей модели будем считать, что из полного количества рожденных (2) доля $\theta_{ij}(t)$ детей, родившихся от родителей $i^M j^W$, составляет

$$\theta_{ij}(t) = \frac{A_i^M(t)A_j^W(t)}{A^M(t)A^W(t)}. \quad (3)$$

В работах [1, 3] мы предложили вместо (2) использовать более детальное уравнение рождаемости, учитывающее наличие мужчин, т.к. иначе трудно описать смешанные браки. Поскольку достоверные данные о вероятности “столкновения” между M и W в уравнении рождаемости отсутствуют, мы приближенно моделировали этот процесс с помощью той же кривой рождаемости $B(x, t)$, что и выше, показывающей число рождений на одну женщину данного возраста. Основная система уравнений эволюции численности введенных выше пяти категорий населения имеет вид:

a) кинетическое уравнение для возрастного распределения M и W:

$$\frac{\partial N_i^{M,W}}{\partial t} + \frac{\partial N_i^{M,W}}{\partial x} = -q_i^{M,W} N_i^{M,W} + p_i^{M,W}, \quad t > 0, x > 0; \quad (4)$$

b) начальное условие $N_i^{M,W}(x, 0) = N_{i0}^{M,W}(x)$;

c) поскольку рождаемость девочек, согласно многочисленным статистическим данным, составляет в среднем 0.487 от общей рождаемости, то полагаем $N_i^W(0, t) = 0.95N_i^M(0, t)$; для простоты будем считать, что в начальный момент метисов нет, а есть только аборигены и пришельцы;

d) модифицированное [1] интегральное уравнение рождаемости мальчиков (в обозначениях Таблицы 1):

$$\begin{aligned} N_0^M(0, t) &= \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty [(\theta_{00}(t) + 0.5\theta_{L0}(t))B_0(x)N_0^W(x, t) + \\ &+ 0.5\theta_{0L}(t)B_L(x)N_L^W(x, t)] dx; \\ N_1^M(0, t) &= \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty [(\theta_{11}(t) + 0.5\theta_{R1}(t))B_1(x)N_1^W(x, t) + \\ &+ 0.5\theta_{1R}(t)B_R(x)N_R^W(x, t)] dx; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
N_m^M(0, t) &= \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty [(\theta_{mm}(t) + 0.5\theta_{Lm}(t) + 0.5\theta_{Rm}(t))B_m(x)N_m^W(x, t) + \\
&+ (\theta_{RL}(t) + 0.5\theta_{mL}(t) + 0.5\theta_{1L}(t))B_L(x)N_L^W(x, t) + \\
&+ (\theta_{LR}(t) + 0.5\theta_{mR}(t) + 0.5\theta_{0R}(t))B_R(x)N_R^W(x, t) + \\
&+ (\theta_{10}(t) + 0.5\theta_{R0}(t))B_0(x)N_0^W(x, t) + (\theta_{01}(t) + 0.5\theta_{L1}(t))B_1(x)N_1^W(x, t)] dx; \\
N_L^M(0, t) &= \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty [(\theta_{m0}(t) + 0.5\theta_{R0}(t) + 0.5\theta_{L0}(t))B_0(x)N_0^W(x, t) + \\
&+ (\theta_{LL}(t) + 0.5\theta_{0L}(t) + 0.5\theta_{mL}(t))B_L(x)N_L^W(x, t) + \\
&+ (\theta_{0m}(t) + 0.5\theta_{Lm}(t))B_m(x)N_m^W(x, t) + 0.5\theta_{0R}(t)B_R(x)N_R^W(x, t)] dx; \\
N_R^M(0, t) &= \frac{A^M(t)}{A(t)} \int_0^\infty [(\theta_{m1}(t) + 0.5\theta_{R1}(t) + 0.5\theta_{L1}(t))B_1(x)N_1^W(x, t) + \\
&+ (\theta_{RR}(t) + 0.5\theta_{1R}(t) + 0.5\theta_{mR}(t))B_R(x)N_R^W(x, t) + \\
&+ (\theta_{1m}(t) + 0.5\theta_{Rm}(t))B_m(x)N_m^W(x, t) + 0.5\theta_{1L}(t)B_L(x)N_L^W(x, t)] dx.
\end{aligned}$$

Пусть известны рождаемость и смертность для “чистых” категорий аборигенов и пришельцев. Эти величины, в принципе, могут быть определены по статистическим данным, относящимся к населению внутри страны и вне ее. Приближенное определение этих коэффициентов по имеющимся усредненным данным дано в [1]. Рождаемость (и аналогично смертность) в промежуточных группах метисов будем приближенно описывать, используя линейную интерполяцию:

$$B_m = \frac{1}{2}(B_0 + B_1), \quad B_L = \frac{3}{4}B_0 + \frac{1}{4}B_1, \quad B_R = \frac{1}{4}B_0 + \frac{3}{4}B_1. \quad (6)$$

Модель, включающая уравнения (3-6), представляется несколько громоздкой, однако расчеты по различным более простым моделям, проведенные в [1,3], показали, что пренебрежение некоторыми из факторов, которые в этих моделях считались не слишком важными, приводит к значительному отличию результатов от расчетов по уточненной пятигрупповой модели уже на промежутке времени порядка 30–50 лет, что сужает область применимости упрощенных

демографических уравнений к прогнозированию тенденций развития популяции.

Дадим здесь классификацию некоторых моделей, в которых применяются кинетические уравнения типа (4), (2), (5), по возможностям их применения к описанию эволюции численности населения.

I. Линейная модель стабильного населения.

Основные предположения. Рассматривается замкнутое сообщество, рождаемость и смертность в котором не зависят от времени, а определяются только возрастом индивидов. Число родившихся находится из линейного по численности женщин интеграла рождаемости (2).

Достоинства. Существует точное аналитическое решение для функции распределения населения (M и W) по возрастам (см. [3]), что полезно при качественном исследовании кинетического уравнения (4). Это решение имеет вид суперпозиции демографических волн, в которых имеется фактор мальтусовского роста. Оно может быть использовано для анализа тенденций развития популяции на небольшом отрезке времени.

Недостатки. Не описывает процессов, связанных с изменением рождаемости и смертности. Не учитывает наличие мужчин в уравнении рождаемости, что не дает возможности исследовать многонациональное население. Не позволяет определять изменения в тенденциях развития, связанные с резким сокращением численности мужчин в некоторых возрастных когортах в результате различных экстремальных ситуаций.

II. Нелинейная модель стабильного населения.

Основные предположения. Рождаемость описывается либо квадратичным по численности членом, либо дробно-рациональным. В последнем случае коэффициенты подбираются так, чтобы в предельных случаях малой численности мужчин или женщин рождаемость была бы приближенно линейной и определялась бы численностью меньшей группы, а при равенстве численностей биологически активных долей населения приводила бы к линейному члену вида (2). Для рождаемости могут быть

использованы и неаналитические интегральные зависимости ее от возрастной функции распределения.

Достоинства. Позволяет учитывать зависимость рождаемости от распределения по возрастам как женщин, так и мужчин. Более точно, чем линейная модель, описывает демографическую ситуацию во время социальных бедствий и при активной миграции населения.

Недостатки. Как и линейная модель, не описывает многонациональное население. Не годится для долгосрочного прогноза, т.к. остается незамкнутой относительно причин изменения рождаемости и смертности. Опирается на “микроскопические” вероятности процесса рождения, которые зависят от многих социальных факторов и трудно определяемы.

III. Жесткая модель многонационального населения.

Основные предположения. На основе модели II учитываются смешанные браки, дети от которых с некоторой вероятностью идентифицируют себя с тем или иным этносом.

Достоинства. Позволяет исследовать результаты переписей (где задан жесткий спектр характеристик населения), а также более корректно учитывает изменение процентных отношений в национальной структуре населения в результате внешних миграций.

Недостатки. Не учитывает объективного формирования нового этноса в результате смешанных браков. Существенно зависит от многих внешних факторов (например, политических или религиозных), влияющих на выбор национальной принадлежности.

IV. Трехгрупповая модель.

Основные предположения. Рассматриваются три категории населения – титульное (аборигены), этники (пришельцы) и метисы (дети от любых смешанных браков). Система уравнений аналогична (4-5).

Достоинства. Устранен один из недостатков жесткой модели III (отсутствие метисов), поэтому модель можно применить для оценки

тенденции изменения полной численности населения на достаточно большом промежутке времени.

Недостатки. Не учитывает ассимиляции метисов, и потому не подходит для анализа национальной структуры населения, хотя более точно, чем модель III, прогнозирует изменение полной численности.

Некоторые результаты расчетов по моделям I – IV для России по состоянию на 1998г с целью сравнения их прогнозных возможностей приведены нами в [1, 3]. Поскольку фертильность в России менее 1.5 (по разным данным от 1.2 до 1.4), темп сокращения населения весьма значителен, и потому основная цель указанных работ состояла в определении скорости убывания населения и характерного времени его существования при неизменных величинах рождаемости, смертности и миграционных потоков. Результаты, полученные по разным моделям, различаются между собой. Например, линейная замкнутая модель дает сокращение населения России со скоростью около 800 тыс. чел. в год с некоторым ускорением через 50 лет из-за формирования “перевернутой” возрастной пирамиды (ее вершина находится в точке рождения). Двухгрупповая жесткая модель с учетом миграции дает сокращение численности порядка 600 тыс. чел. в год, однако скорость сокращения коренного населения более высокая, чем в линейной модели; омоложение идет в основном за счет высокой рождаемости пришельцев. Учет метисов в трехгрупповой модели еще более снижает темп спада. Таким образом, уточнение демографических моделей особенно важно в долгосрочном прогнозе.

Пятигрупповая модель (3-6) представляет собой естественное обобщение моделей I – IV. Ее основное отличие от предыдущих в том, что появляется возможность изменения тенденций: например, низкая общая рождаемость еще не означает необратимого сокращения населения даже без учета миграции, поскольку изменение процентного соотношения численностей групп с разными рождаемостями может вывести общество в

целом в зону расширенного воспроизводства населения. (Типичный график изменения средней фертильности для режима выживания аборигенов без учета миграции представлен на Рис. 4). В трехмерном пространстве параметров v (начальная доля аборигенов), f_0 и f_1 (фертильности титульного населения и обобщенного пришельца) можно определить области асимптотического выживания i -ой категории ($i = 0, L, m, R, 1$), а также построить сепаратрису S , отделяющую область выживания (выше уровня S) от области исчезновения. Существование сепаратрисы обусловлено непрерывностью интеграла рождаемости по времени, т.к. кривые рождаемости $B_i(x, t)$ считаются непрерывными функциями обеих переменных, финитными по переменной x . Поскольку при достаточно большой фертильности f_0 население неограниченно возрастает, а при малой – убывает, то существует такое ее значение, при котором численность стационарна. Отметим, что стационарное решение неустойчиво относительно изменения параметров v, f_0, f_1 , поэтому при численном отыскании S можно с некоторой точностью лишь определить “рукав”, внутри которого проходит сепаратриса. Вблизи нее смена режимов развития (например, переход от депопуляции к росту) происходит на достаточно большом промежутке времени – порядка нескольких тысяч лет. Ниже на Рис.1 вертикальными линиями разделены области выживания различных категорий населения. Показаны также точки своеобразной этнической бифуркации, когда меняется режим выживания (например, с L на m в терминах Таблицы 1). Если доля аборигенов близка к единице, то реализуется большое разнообразие режимов выживания общества в целом. Это могут быть одна, две или три группы, тогда как с уменьшением доли аборигенов выживает только одна категория метисов (см. ниже). Характерный минимум на графике S предшествует смене режима, когда начинают выживать категории, более близкие к аборигенам (например, средние метисы сменяются левыми).

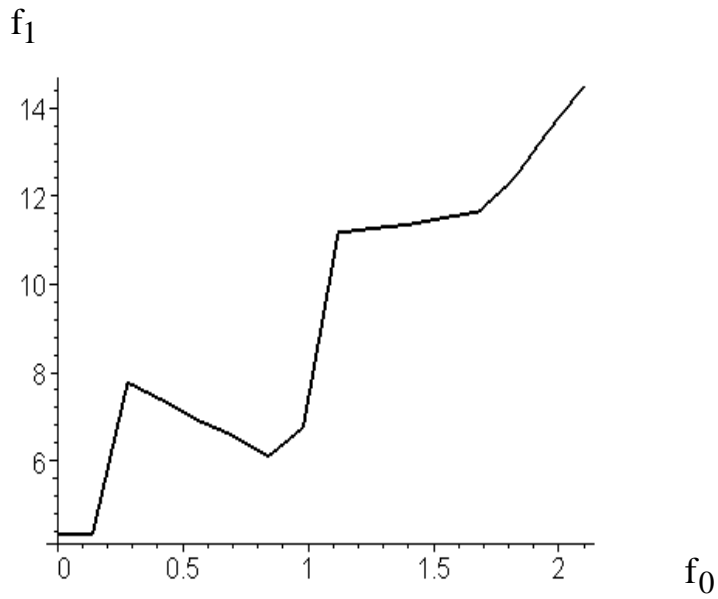


Рис.1. Сепаратриса выживания популяции в сечении $\nu = 0.9$.

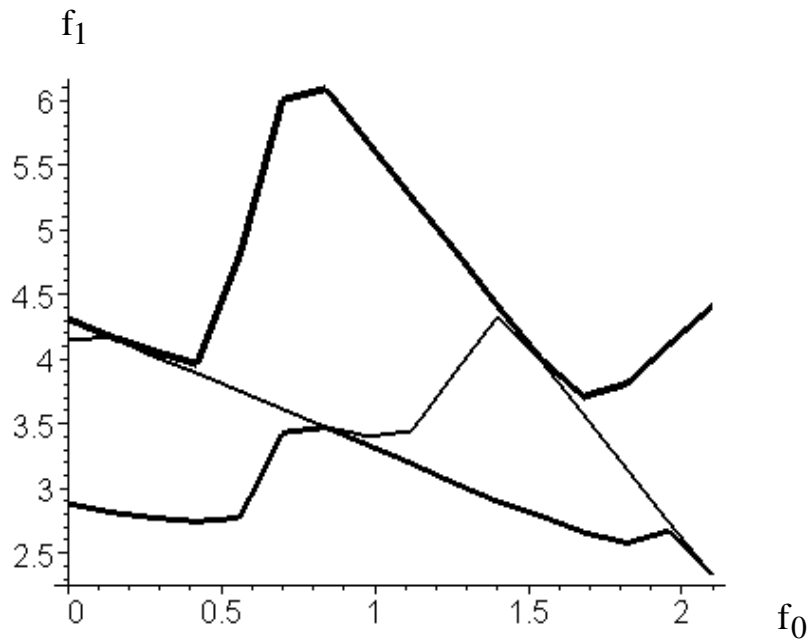


Рис.2. Сепаратрисы выживания (без учета миграции) в сечениях $\nu = 0.6$ (1), 0.7 (2), 0.8 (3). Линии смены режимов: сплошная тонкая для сечения 1, пунктирная 2, сплошная жирная 3.

f_1

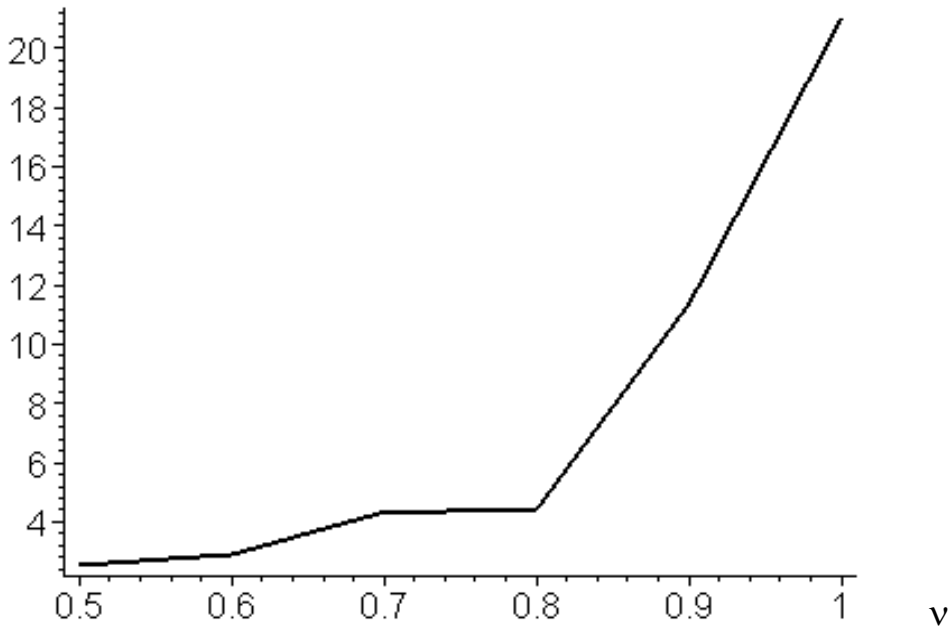


Рис.3. Сепаратриса выживания (без учета миграции) в сечении $f_0 = 1.4$.

На Рис.3 показано сечение сепаратрисы для фертильности аборигенов, отвечающей оптимистической оценке современной ситуации в России. Из Рис.4 для этого случая следует, что общая фертильность после некоторых колебаний начнет возрастать и превысит уровень 2.5, причем титульное население асимптотически не убывает из-за ассимиляционного потока со стороны метисов. Отметим, что учет миграции приводит к существенным изменениям в режимах выживания. Например, для того же случая $f_0 = 1.4$ и начальной доле $v = 0.9$ имеются два режима: при $f_1 > 7.9$ (против 8.1 без миграции) выживают аборигены и левые и средние метисы, а при $6.7 < f_1 < 7.9$ выживают только левые метисы (без миграции такой режим при данных параметрах отсутствует). Это означает, что учет даже незначительной в процентном отношении части мигрантов может привести к существенным изменениям в структуре населения на большом промежутке времени.

Укажем некоторые важные следствия из пятигрупповой модели без учета миграции, которые отсутствуют в моделях I – IV.

1. Если начальная доля аборигенов не ниже $v_{cr} = 0.82$, то они могут выжить, когда фертильности f_0 и f_1 удовлетворяют условиям: $f_0 > 0.95$,

$f_1 > 6.35$. Поскольку рождаемость собственно аборигенов недостаточна для их выживания (если $f_0 < 2.15$), то они могут выжить только при условии выживания по крайней мере левых метисов. Если рождаемость аборигенов не очень высокая ($f_0 < 1.68$), то должны также выживать и средние метисы m . Подчеркнем, что если $f_0 < 2.15$, то ни при каких других условиях титульное население не выживает. В связи с этим уместно отметить, что в России по данным Госкомстата [2, 5-6] доля титульного населения составляет $0.82 \div 0.84$, т.е. в настоящее время мы находимся вблизи точки бифуркации.

2. Если $\nu > 0.6$, то ни при какой (даже очень большой) рождаемости пришельцев нация-донор не выживает, но дает начало новому этносу, состоящему из метисов какого-то одного сорта (m , L или R). Это происходит из-за растворения пришельцев среди большого количества аборигенов, вследствие чего их эффективная рождаемость становится существенно меньше, и они исчезают раньше титульного населения. В то же время большая начальная численность аборигенов приводит к формированию значительной популяции метисов, которые, однако, “разбавляются” уже гораздо слабее, чем пришельцы, т.к. доля аборигенов быстро уменьшается.

3. При фиксированной доле ν режимы выживания метисов с ростом f_0 смещаются “влево”, т.е. от R к L , причем смена режимов происходит вблизи локальных экстремумов сепаратрисы. Характерно, что для большинства режимов сепаратриса убывает с ростом f_0 , достигая некоторой точки локального минимума, после чего следует ее резкий рост и смена режима выживания. Это объясняется тем, что при увеличении рождаемости аборигенов фертильность простого воспроизводства метисов достигается при меньших значениях рождаемости пришельцев. Наличие же минимума нетривиально: оно связано с эффектом неполного исчезновения аборигенов к моменту формирования нового этноса,

поскольку справа от точки минимума доля сохранившихся аборигенов возрастает, понижая тем самым общую фертильность, и потому для выживания требуются большие значения f_1 .

4. При фиксированной фертильности аборигенов режимы выживания метисов также смещаются “влево” с ростом ν . Это объясняется тем, что если рождаемость этников высокая, но их доля в общем населении мала, то они быстро исчезают, передавая эстафету метисам. Последние же сформировываются после исчезновения или значительного сокращения аборигенов, которые являются своеобразным поглотителем рождаемости этников. Отметим, что даже при $f_0 = 0$ существует режим выживания средних метисов: для этого должно быть $\nu > 0.7, f_1 > 4.06$. Критические (для выживания) значения f_1 монотонно возрастают с ростом ν .

5. Имеется эффект немонотонного изменения средней фертильности, и потому ее локальный рост (как и спад) еще не означает кардинального изменения демографической ситуации. Например, при значениях параметров, указанных ниже на Рис.4, выживают аборигены и левые и средние метисы, причем фазовая диаграмма зависимости f от df/dt имеет спиралевидную форму, что некоторым образом (хотя и не совсем по той же причине) перекликается с результатами работы [7]. Осцилляции рождаемости вызваны периодическим вхождением в детородный возраст все новых поколений метисов, пока не образуется достаточно большая этническая группа.

Ниже приведены зависимости средней фертильности всего населения и асимптотического (при больших временах) распределения аборигенов по возрастам для одного из режимов их выживания.

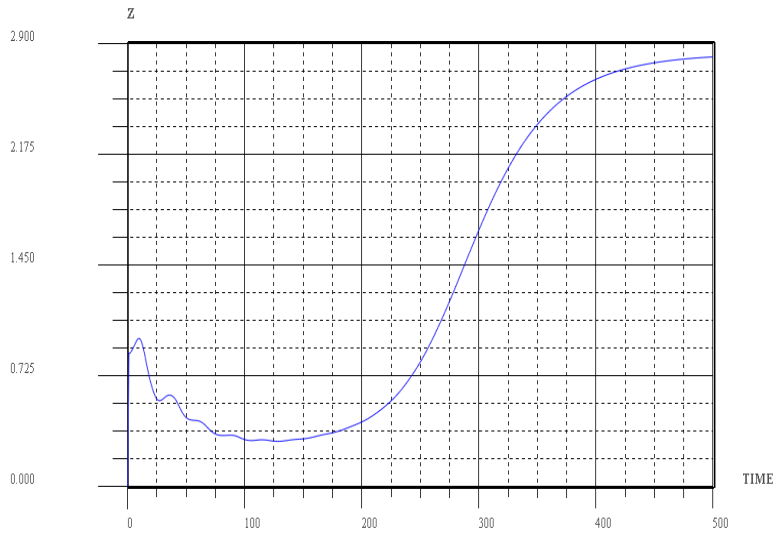


Рис.4. Зависимость фертильности всего населения от времени (по годам) для значений параметров $v = 0.9$, $f_0 = 1.4$, $f_1 = 8.11$.

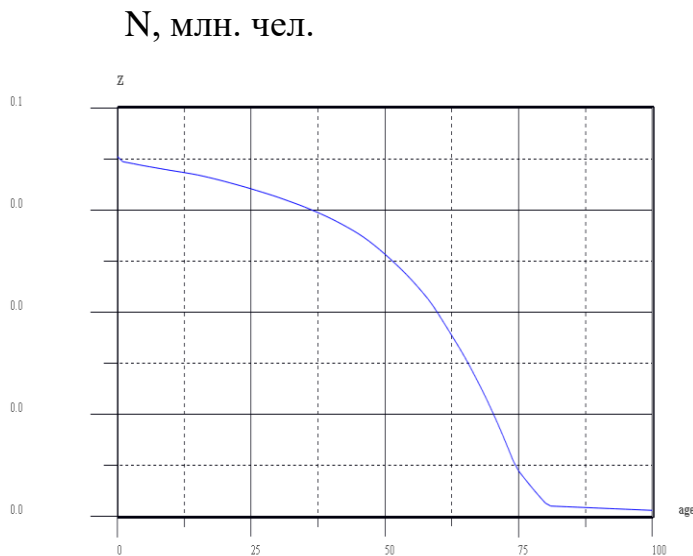


Рис.5. Асимптотическое распределение аборигенов по возрастам для значений параметров $v = 0.9$, $f_0 = 1.4$, $f_1 = 8.11$.

Распределение, представленное на Рис.5, качественно имеет тот же вид, что и точное решение стационарной линейной модели мононационального стабильного населения (см. [3]). Это естественно, поскольку вблизи сепаратрисы параметры популяции должны меняться незначительно, т.е. население можно рассматривать как стабильное. В частности, Рис.4–5 отвечают превышению значений параметров, при

которых никто не выживает, всего на 0.001 для фертильности f_1 , и уже наблюдается неограниченный рост численности.

Рассмотрим теперь в рамках системы (3-6) влияние на рождаемость и смертность некоторых факторов, связанных с изменением качества жизни социума. Мы полагаем, что это изменение имеет интегральный характер, т.е. определяется посредством усреднения некоторой функции влияния по всей (или по части) популяции. Тогда в уравнении (4) коэффициент смертности определяется не только возрастом индивида, но и функционально зависит от интегральных характеристик населения. Нам будет удобно представить миграционный поток $p_i^{M,W}(x,t)$ как $p_i^{M,W}(x,t) = c_i(x,t)N_i^{M,W}(x,t)$, так что уравнение (4) с учетом влияния текущего распределения численности на смертность и рождаемость переписывается в виде:

$$\frac{\partial N_i^{M,W}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial N_i^{M,W}(x,t)}{\partial x} = -q_i^{M,W}(x,t)N_i^{M,W}(x,t), t > 0, x > 0;$$

$$q_i^{M,W}(x,t) = q_{i0}^{M,W}(x) - c_i^{M,W}(x,t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \int (\alpha_{ij}^M(x,y,t)N_j^M(y,t) + \alpha_{ij}^W(x,y,t)N_j^W(y,t)) dy. \quad (7)$$

Здесь $\alpha_{ij}^{M,W}$ – некоторые функции, зависящие от возраста и, возможно, ряда других переменных, которыми характеризуется население (например, доходами, уровнем образования или сферой занятости). В последнем случае уравнение (7) должно быть записано для расширенного числа аргументов y функции распределения. Аналогично считаем, что рождаемость в (5) представляется в виде

$$B_1(x,t) = B_{i0}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \int (\beta_{ij}^M(x,y,t)N_j^M(y,t) + \beta_{ij}^W(x,y,t)N_j^W(y,t)) dy. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые варианты построения функций влияния α и β , не переходя к пространственному распределению населения, а ограничиваясь представлением о стране как о географической точке.

Одним из факторов снижения смертности является улучшение качества жизни, которое можно понимать как развитие сферы услуг, медицины и т.п. В первом приближении будем считать, что на это тратится некоторая часть бюджета страны, составляющая долю α_0 от ВВП, т.е. на каждого члена общества (если нет реальной дискриминации) приходится $\alpha_0(t)Y(t)/M(t)$ услуг, выраженных, например, в деньгах. Здесь величины Y и M являются функционалами от распределения населения по возрастам (и, если требуется более детальное описание, по сферам деятельности, доходу и т.п.):

$$M(t) = \int_0^{\infty} \sum_j \left(N_j^M(x, t) + N_j^W(x, t) \right) dx -$$

полная численность населения,

$$Y(t) = \sum_{j,n} \int_0^{\infty} \left(P_j^M(x, n, t) N_j^M(x, n, t) + P_j^W(x, n, t) N_j^W(x, n, t) \right) Y_n(t) dx - \quad (9)$$

полный ВВП (Y/M – среднедушевой ВВП).

В формуле (9) индекс n нумерует отрасли народного хозяйства, $P_j^{M,W}(x, n, t)$ – средняя производительность труда в n -ой отрасли за год (если время измеряется в годах), $Y_n(t)$ – текущая стоимость единицы выпущенной продукции, $N_j(x, n, t)$ – численность работающих j -ой группы в n -ой отрасли. В первом приближении суммирование по отраслям в (9) можно заменить средними величинами, относящимися к работающему населению в целом (от 18 до 65 лет), чтобы качественно определить влияние экономического развития на демографическую ситуацию. Для учета обратного влияния требуется уже дифференциация работающего населения по сферам деятельности. Если считать, что

уменьшение смертности пропорционально количеству произведенных удобств, некоторая доля которых имеет противоположную тенденцию (увеличение смертности) из-за сопутствующих отрицательных эффектов, то, вводя соответствующий коэффициент пропорциональности в α_0 , получаем поправку к функции $q(x, t)$ в виде

$$q(x, t) = q_0(x) - \alpha_0(x, t) Y(t) / Y_0(t) M(t), \quad (10)$$

где Y_0 – текущая стоимость некоторой условной “единицы” услуг. Реальное содержание такой “единицы” определяется трудноизмеримой величиной качества жизни, которое связано с затратами энергии и временем, необходимым для достижения желаемого результата. Заметим, что стоимость Y_0 зависит от уровня инфляции, причем инфляция спроса и инфляция предложения [8] должны рассматриваться в контексте качества жизни с различных позиций, но мы пока не будем делать такого разделения.

С другой стороны, всякая деятельность по производству ВВП (9) сопровождается также и производством отходов, которые по определению ухудшают качество жизни. В экологии вводят понятие относительной вредности отхода, которая определяется по отношению ПДК (предельно допустимых концентраций) веществ в окружающей среде. Оценки влияния превышения норм ПДК на здоровье населения известны весьма приближенно. Приведем здесь некоторые данные, полученные в результате наблюдений в городах Екатеринбург и Нижний Тагил [9]. Из них, в частности, следует, что влияние различных вредностей не суммируется, а носит комплексный характер, но пока за недостатком информации мы будем использовать линейную модель влияния.

Таблица 2. Прирост смертности в %% на каждые 10 мкг/м³ загрязнителя атмосферы по статистически значимым результатам корреляционно-регрессионного анализа временных рядов:

Город	Загрязнитель	Прирост смертности
-------	--------------	--------------------

Екатеринбург	Пыль	0,1
Екатеринбург	СО	0,01
Екатеринбург	SO _x	0,51
Нижний Тагил	Пыль	0,76
Нижний Тагил	СО	0,01
Нижний Тагил	Фенол	1,56

Будем исходить из следующих представлений. Пусть C_n – концентрация обобщенного отхода (на единицу потребляемой энергии E) от n -го типа производства, V_n – соответствующая вредность отхода, а $E_n(t)$ – энергия, затрачиваемая на производство единицы продукции в n -ой отрасли. Тогда скорость производства вредности есть

$$\frac{d}{dt} \sum_{j,n} \int_0^{\infty} (P_j^M(x, n, t) Y_n(t) N_j^M(x, n, t) + (*)^W) E_n (1 - \eta_n) C_n V_n dx \equiv \frac{d}{dt} \sum_n \Psi_n,$$

где η_n – коэффициент использования энергии. Если предположить дополнительно, что существует постоянная λ_n уменьшения вредности, характеризующая возможности самоочищения среды, то вредность от процесса жизнедеятельности есть

$$V(t) = \sum_n \left(\Psi_n(t) - \lambda_n \exp(-\lambda_n t) \int_0^t \Psi_n(\tau) \exp(\lambda_n \tau) d\tau \right). \quad (11)$$

Вводя теперь коэффициенты α_1, β_1 влияния единичной вредности на рост смертности и спад рождаемости, получаем соответствующие поправки к зависимостям $q(x, t)$ и $B(x, t)$ (см. формулы (12) ниже).

Другой характерной особенностью современного этапа развития общества является то, что практически во всех странах Европы, включая и Россию, наблюдается резкий спад рождаемости. Замечено [10], что в бедных странах, производящих менее 3кВт мощности на человека, рождаемость высокая, а в более богатых – низкая. В частности, средняя мощность производства энергии в мире составляет 2.5кВт, в странах Западной Европы – 3кВт, в России – 3.6кВт, в Швеции – 12кВт, в

Норвегии – 21кВт. Фертильность в этих странах порядка 1.1–1.3. Возможно, это связано с тем, что на данном этапе развития достижение желаемого уровня жизни требует значительного времени для перехода в соответствующую социальную группу. В относительно бедных странах (и социальных группах) достижение такого “потолка” происходит раньше. Кроме того, имеется и “эгоистический” фактор, влияние которого усиливается при смещении акцента с проблем выживания к развлечениям. Косвенным признаком, подтверждающим эту точку зрения, является уменьшение рождаемости при переходе в социальные категории с более высоким уровнем образования. Развитие медицины, позволяющее с комфортом не иметь детей, также обусловлено достижением высокого технологического уровня. Соответствующий член в уменьшении рождаемости аналогичен по структуре выражению (10). Для учета зависимости рождаемости от удельного энергопотребления надо ввести распределение людей по доходам, что, в свою очередь, потребует введения пространственной переменной и учета внутренней миграции и конкуренции, обусловленной нехваткой жизненно важных ресурсов для некоторых категорий населения. Такое исследование будет проведено в отдельной работе.

Итак, зависимость рождаемости и смертности от времени будем описывать следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 B_i(x, t) &= B_{i0}(x) - \frac{\beta_0 Y(t) / Y_0 + \beta_1 V(t)}{M(t)}, \\
 q_i(x, t) &= q_{i0}(x) - c_i(x, t) - \frac{\alpha_0 Y(t) / Y_0 - \alpha_1 V(t)}{M(t)}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Подчеркнем, что здесь мы пытаемся опереться на данные, характеризующие население в целом. Разбиение населения на социальные группы требует учета многих факторов, влияние которых, во-первых, неизвестно, а во-вторых, для разных факторов может в целом взаимно компенсироваться. Естественно, расчеты в рамках локальных поправок

вида (12) имеют смысл только для небольшого промежутка времени. Основная цель предлагаемой модели – показать, что некоторые тенденции, трактуемые как негативные в демографическом плане, могут быть таковыми локально, хотя в целом общество может находиться на “позитивной” траектории развития, как в примере на Рис. 4. Приведем некоторые официальные данные [5,6,11], на основе которых можно приближенно оценить коэффициенты α, β в формуле (12). При этом надо иметь в виду, что точность самих данных, публикуемых Госкомстатом (например, по ВВП), составляет около 5%.

1. Темпы роста потребления населением материальных благ и услуг составляют от 4.5% до 5.8% в год.

2. Объем ВВП (млрд. руб.) за период 1997-2000 годы:

Таблица 3.

годы	1997	1998	1999	2000
ВВП	2725,8	2840,0	4607,0	6946,5
дефлятор		105,7%	156,7%	140,0%
реальный темп роста		-0,9%	+3,5%	+7,7%

В 2001г рост инфляции планируется в пределах 12-14%. Заметим, однако, что по данным Европейского Банка Реконструкции и Развития темпы роста ВВП существенно отличаются от приводимых Госкомстатом:

годы	1994	1995	1996	1997	1998
рост ВВП, %	-12,7	-4,1	-3,5	+0,8	-4,6

3. Производительность труда растет со скоростью 7% в год.

4. К.п.д. энергетики составляет от 30 до 40 %.

5. Вредность от развития промышленности будем в основном связывать с выбросами автотранспорта и ТЭС. В общем загрязнении атмосферы отходами производства ТЭС выбросы по пыли составляют

20%, по диоксиду серы – 50%, по окислам азота – 30%. На долю теплоэнергетики приходится 60% производства окислов азота (от полного их производства промышленностью), 45% окислов серы, 38% золы.

Поступление металлов с золами от ТЭС по отношению к мировому производству (раз): висмут 3, мышьяк 6, кобальт 12, уран 70, бериллий 80, скандий 600, германий 2550, галлий 5000. Отсюда следует, что поступление в окружающую среду металлов за счет сжигания ископаемых топлив по многим металлам значительно превосходит их промышленное производство. Представляется важным, что выбросы урана с золами от сжигания каменного и бурого углей превосходят его промышленное производство и составляют около 200 тыс. т. в год. Хотя активно разрабатываются кислотные методы восстановления галлия, тория, алюминия из золошлаковых отходов, однако сами эти методы также не являются экологически чистыми. Данные относительно суммарной величины отходов на территории России значительно различаются между собой: от 1 млрд. т. золы в золоотвалах с ежегодным увеличением их на 50 млн. т. (оптимистическая оценка омских энергетиков) до 1.5 млрд. т. с увеличением 100 млн. т. в год по оценке ИФ СО РАН. ТЭС средней мощности занимает площадь 200-300 га, сжигает до 2500 т. топлива в час, образуя при этом 1000 т. золы, площадь золоотвала через 10 лет эксплуатации достигает 800-1500 га. Содержание в золе токсичных микроэлементов примерно в 100 раз превосходит их среднее содержание в земной коре. Динамика выброса в атмосферу основных отходов в млн. т. и в кг/т.у.т. (в скобках) представлена ниже:

Таблица 4.

	1995	1996	1997	1998
Зола	1.38 (19.20)	1.38 (17.2)	1.17 (16.8)	1.15 (16.4)
NO _x	1.17 (4.50)	1.07 (4.31)	1.07 (4.30)	1.03 (4.30)
SO ₂	2.05 (20.06)	1.98 (19.7)	1.76 (19.5)	1.70 (18.8)

Основываясь на прогнозных оценках развития ТЭК до 2020 года по данным Углекомитета при Минтопэнерго России, можно оценить рост загрязнения среды при повышении удельной доли сжигания углей:

Таблица 5.

	1990	2000	2020
Уголь, млн. т./год	400	230	500
Нефть, млн. т./год	520	300	220
Газ, млрд. м ³ /год	740	600	550

Таблица 6. ПДК некоторых продуктов горения, мг/м³:

Пыль нетоксичная	10
Зола горючих сланцев	4
Диоксид серы	10
Окись азота	0.04
Двуокись азота	2
Окись углерода	20
Бензапирен	0.00015
Бериллий	0.001
Бор	6
Пятиокись ванадия	0.1
Германий	2
Кадмий	0.2
Диоксид марганца	0.3
Мышьяк	0.5
Ртуть	0.01
Свинец	0.01
Сурьма	0.5
Таллий	0.01
Фтор	0.15
Хлор	1

Таблица 7. Типичные примеси, содержащиеся в угольных золах, г/т:

Pb	As	V	Cr	Zn	U	Mo	Ge
20-200	10-100	20-100	20-100	60-200	5-20	2-10	10-70

6. Статьи расходной части бюджета в процентах от ВВП (их доли приблизительно постоянны в течение последних лет), влияние которых на демографические показатели можно трактовать более-менее однозначно: наука и развитие технологий – 0,5 (В ↓, q ↓); образование и культура – 0,8 (В ↓, q ↓); промышленность и строительство – 1,8 (В ↑, q ↓); транспорт и связь – 0,1 (q ↓); СМИ – 0,1 (q ↑); охрана природы – 0,1 (В ↑, q ↓); помощь при чрезвычайных ситуациях – 0,3 (q ↓); здравоохранение – 0,4 (q ↓); социальная сфера – 0,7 (В ↑, q ↓).

7. Динамика повозрастной смертности (на 1000) практически во всех когортах, кроме последней, имела тенденцию к уменьшению:

Таблица 8.

когорты	1978	1984	1988	1993	1996
<1	28,8	25,9	24,6	17,1	15,5
1-4	2,8	2,7	2,5	1,3	0,8
5-9	0,7	0,6	0,6	0,3	0,2
10-14	0,5	0,5	0,5	0,3	0,2
15-19	1,0	0,9	1,0	0,7	0,7
20-24	1,7	1,5	1,4	1,3	0,7
25-29	2,3	2,0	1,7	1,4	0,9
30-34	2,9	2,8	2,2	1,7	1,2
35-39	4,3	3,6	2,9	2,4	1,7
40-44	5,4	5,7	4,0	3,4	2,9
45-49	7,8	7,3	6,4	4,8	4,5
50-54	10,3	11,3	8,9	7,3	6,5
55-59	13,5	15,1	14,0	12,0	11,5
60-64	20,1	20,4	20,0	20,8	18,4
65-69	29,2	31,1	28,2	30,1	28,1
>69	76,5	78,7	80,2	91,5	70,9

8. Фертильность почти монотонно (за исключением подъема в середине 80-х) убывала с 2,417 в 1961г до 1,242 в 1998г. При этом у городского населения – с 1,935 до 1,133, а у сельского – с 3,195 до 1,580. В крупных городах эта тенденция выражена более отчетливо: в Москве в 1999г фертильность составляла 1,05, а Санкт-Петербурге – 0,95. Поэтому

динамику общей фертильности надо увязывать с урбанизацией [12], т.е. фактически с ростом удельного производства энергии.

Основываясь на приведенных данных, получим оценочные значения для коэффициентов в (12). Будем считать, что доминирующими факторами в падении рождаемости являются образование, культура и технический прогресс; для простоты считаем, что рост потребления обусловлен только ростом ВВП. Тогда $\beta_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-2}$. Предположим, что влияние повышения цен на $Y_n(t)$ и $Y_0(t)$ в (10) взаимно компенсируется, а скрытая инфляция может быть учтена в производительности труда. Если считать также, что реальный ВВП растет на 2-4 % в год, то среднюю производительность труда в (9) будем полагать пропорциональной $\exp(0,03t)$. Тогда в (12) вместо $Y(t)$ войдет численность трудоспособного населения $U(t)$. На данном этапе пока не будем учитывать вредность среды в изменении рождаемости, т.е. положим $\beta_1 = 0$. Из данных [11] следует, что существуют колебания рождаемости с характерным периодом порядка половины жизни поколения (возможно, обусловленные “привыканием” к более комфортным условиям жизни). Итак, зависимость рождаемости от времени (на срок порядка 20 лет) полагаем в виде

$$B_i(x, t) \approx B_{i0}(x) - 3 \cdot 10^{-5} e^{0,03t} \cos(0,1t) U(t) / M(t). \quad (13)$$

Вклад роста ВВП в уменьшение смертности оценивается аналогично. Для учета вредности надо использовать оценки Таблиц 2-7. За единицу вредности можно принять, например, ПДК окиси углерода. Такой подход должен учитывать распределение населения по отраслям производства и по регионам. Для приближенных оценок достаточно воспользоваться данными Таблицы 8, из которых следует сокращение смертности в результате суммарного действия всех факторов. Тогда после усреднения по возрастным когортам получаем оценку

$$q_i(x, t) \approx q_{i0}(x) - 6 \cdot 10^{-4} \exp(0,03t) U(t) / M(t). \quad (14)$$

Используя формулы (13-14) в модели (4-5), получаем приближение краткосрочного прогноза для пяти групп населения с учетом миграции.

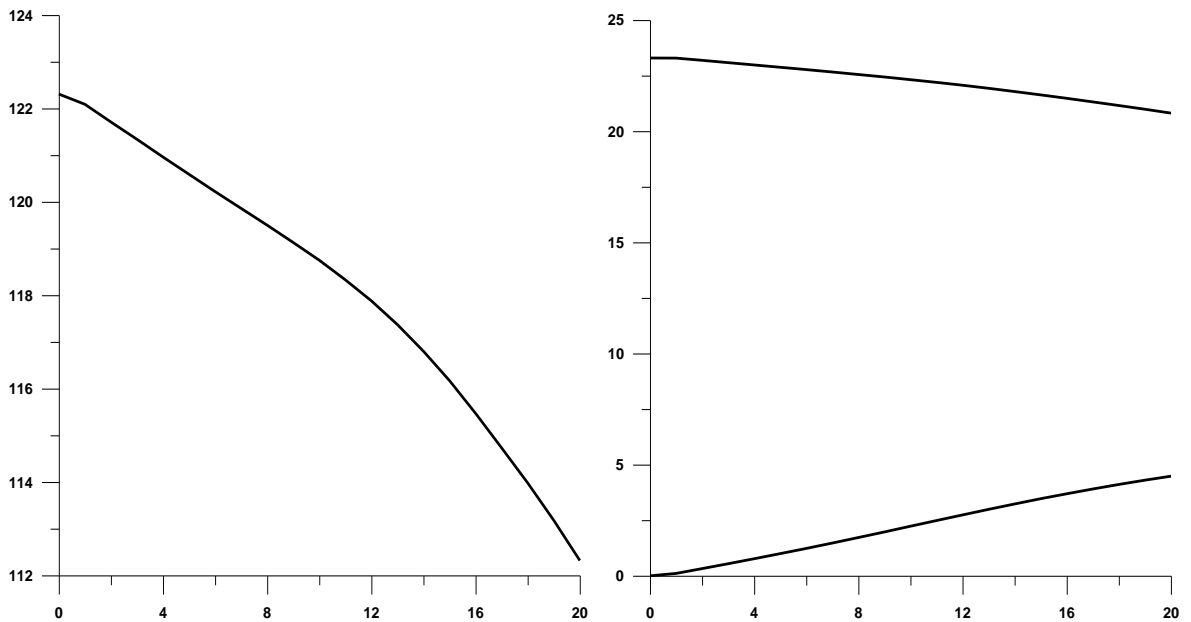


Рис.6. Изменение полной численности (млн. чел.) титульного населения (слева) и пришельцев (1) и средних метисов (2) (справа) за 20 лет.

К 2020 году численность основного населения уменьшится на 10 млн. чел., пришельцев – на 2,5 млн., но появятся средние метисы в количестве 4,5 млн., т.е. итоговое уменьшение численности составит 8 млн. Отметим, что имеется значительное отличие от двухгрупповой жесткой модели: численность титульного населения составит 112,5 млн. (против 106,5). Однако, если считать точность прогноза хотя бы до 1 млн. человек, то учет зависимости рождаемости и смертности от времени в собственно пятигрупповой модели не привел к заметным отличиям (те же 112,5 млн.). Это означает, что краткосрочные прогнозы имеет смысл строить в рамках более обоснованных моделей, рождаемость и смертность в которых постоянны для каждой группы населения. Даже для такой относительно простой пятигрупповой модели появился заметный эффект изменения полной рождаемости и смертности с течением времени. Долгосрочные же прогнозы требуют создания адекватных нелинейных моделей, основанных на подробной и достоверной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Ю.Н., Суслин В.М. Кинетические уравнения в нелинейных моделях демографии. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №47, 2001.
2. Народное хозяйство СССР в 1988г. Госкомстат СССР, 1989.
3. Галахов М.А., Орлов Ю.Н., Суслин В.М. Математические модели жизнеустройства. Демография. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 69, 2000.
4. Lotka A. J., Dublin L.I. On the true rate of natural increase. // J. American Stat. Association. 1925. V. 20. №150.
5. Российский статистический ежегодник. М.: Госкомстат, 1999.
6. Демографический ежегодник России. М.: Госкомстат, 1999.
7. Иванов К.П. Проблемы этнической географии. М., 1998.
8. Вите О.Т., Афанасьев М.П. Инфляция издержек и финансовая стабилизация. // Публикация Рабочего Центра экономических реформ при Правительстве РФ, 2000.
9. Ежегодник состояния загрязнения атмосферы по городам России, 1997.
10. Капица С. П. Общая теория роста человечества. М.: Наука, 1999.
11. Статистический Бюллетень Госкомстата РФ, 2000.
12. Оленев Н.Н., Решетцева Е.В., Саранча Д.А. Модель взаимодействия демографических и экономических процессов. // Сообщение по прикладной математике ВЦ РАН, 1997.