

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской Академии наук

В. В. Дубинин, С. Н. Банников, В. В. Лапшин

Теоретическое и экспериментальное
исследования удара материальной точки
по цилиндрической оболочке

Москва, 2001 г.

В. В. Дубинин, С. Н. Банников, В. В. Лапшин. Теоретическое и экспериментальное исследования удара материальной точки по цилиндрической оболочке.

Рассмотрена задача об ударе материальной точкой по цилиндрической оболочке. Местные деформации предполагаются упругими. В качестве зависимости упругого смятия материалов в месте контакта материальной точки и оболочки от величины силы удара используется закон Герца упругого смятия. Приведено аналитическое решение задачи и построен алгоритм для компьютерного расчета. Описана созданная программа для расчета. Приведено описание созданной экспериментальной установки для определения параметров колебаний оболочки после удара. Установка включает в себя программно-аппаратный комплекс на базе персонального компьютера. На установке выполнен ряд экспериментов, приводятся их результаты и сопоставление с полученными теоретическими данными.

Ключевые слова: удар, колебания.

V. V. Dubinin, S. N. Bannikov, V. V. Lapshin. The theoretical and experimental researches of an impact by a point on a cylindrical shell.

The problem about an impact by a material point on a cylindrical shell is considered. Local deformations are assumed to be elastic. For the dependence of elastic deformation of materials in the place of the contact of a material point and a shell from the size of force of the impact the Hertz's law of elastic deformation is used. The analytical solution of a problem is given and the algorithm for computer calculation is constructed. The created program for calculation is described. The description of the created experimental installation for determination of parameters of oscillations of a shell after the impact is given. The installation includes a hardware-software complex based on the personal computer. On the installation a number of experiments are executed, their results and the comparison to the received theoretical data are given.

Key words: impact, oscillations.

Введение

При разработке проблемы безопасности атомных электростанций (АЭС) одним из направлений работы является обеспечение безопасности АЭС при возможном ударе по оболочке полукотрвавшимся или свободным телом [1].

Задача в окончательном виде заключается в том, чтобы создать алгоритмы определения параметров удара по результатам измерений колебаний оболочек. Однако для окончательного решения обратной задачи необходимо решить прямую задачу о колебаниях оболочки после удара материальной точкой (телом).

В научной литературе имеются решения задач об упругом ударе точкой по цилиндрической и сферической оболочкам [2]. Нет ясности с решением подобных задач при упруго–пластическом ударе. Необходимость же решения обратных задач актуальна, но такие решения авторам неизвестны.

Весьма актуальна проверка достоверности решения подобных задач с помощью эксперимента, так как отклик оболочки на упругое воздействие является сложным сигналом.

В работе была поставлена задача о создании компактного измерительного комплекса с использованием АЦП (аналога-цифровых преобразователей) на базе персонального компьютера.

Подобраны соответствующие схемы и АЦП, проведена отладка схем, создан пакет программ для записи сигналов (колебаний) и их обработки.

Весь комплекс состоит из персонального компьютера с платой АЦП, соединительных проводов и испытуемого образца [3].

1. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка представляет собой программно-аппаратный комплекс, предназначенный для записи свободных колебаний оболочки после удара телом или материальной точкой (рис. 1).

Для фиксации ускорений используются пьезоэлектрические датчики KD-91. Ниже приведены индивидуальные технические характеристики использованного набора датчиков:

- Коэффициент передачи B_{ua} (125 Гц) = 0,52 мВ/мс⁻².
- Емкость в сочетании с кабелем $C_i + C_k = 0,58$ нФ
- Емкость кабеля $C_k = 0,15$ нФ (длина 1,5 метра)
- Резонансная частота (для массы 200 г) $f_R = 50,0$ кГц
- Коэффициент направленности $\Gamma_{90\max} = 10,0\%$
- Сопротивление изоляции $R_{is} > 1000$ МОм

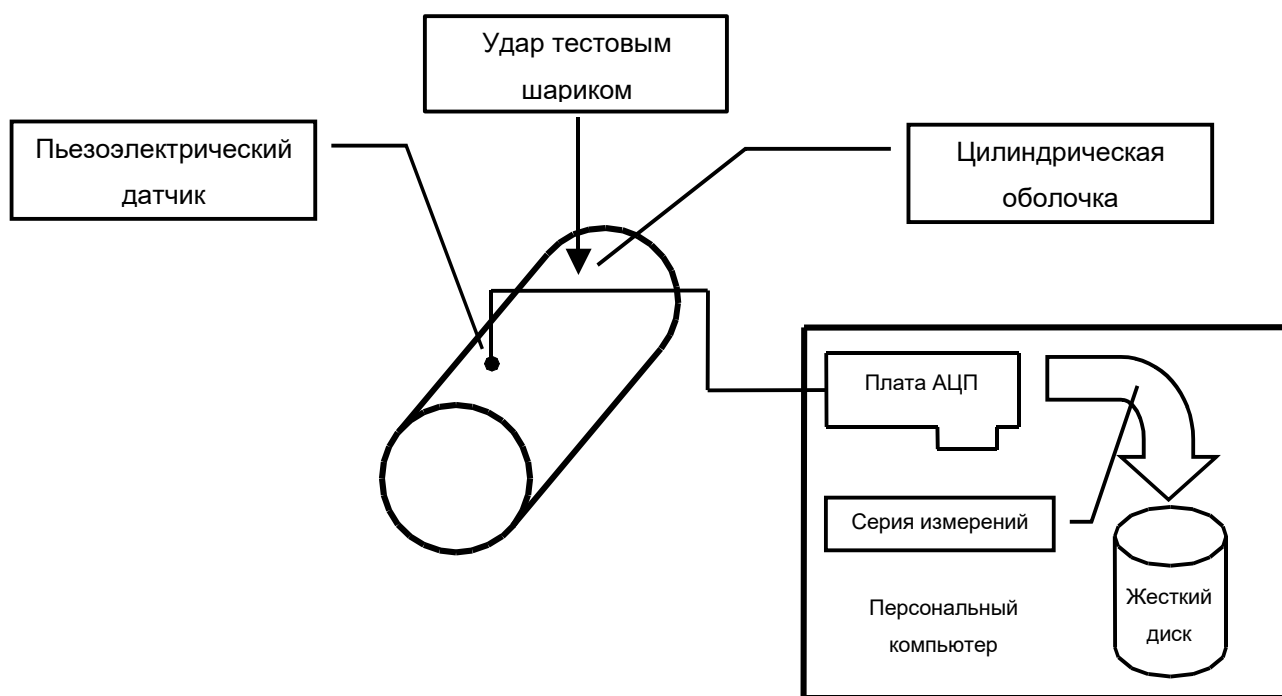


Рис. 1. Структурная схема экспериментальной установки

Формируемый электрический сигнал через специальный кабель, входящий в комплект датчиков, подается на вход платы АЦП. При создании установки был использован модуль аналогового ввода РСД-812 (производство компании «Демос»). Модуль предназначен для преобразования значений аналоговых сигналов напряжения, поступающих с внешнего разъема по шестнадцати каналам, в цифровой код. Конструктивно модуль представляет собой печатную плату для персонального компьютера типа IBM PC, выполненную для шины ISA.

Модуль содержит 16-тиканальный мультиплексор, устройство выборки-хранения и АЦП. Кроме этого, в модуле имеются два цифро-аналоговых преобразователя (ЦАП) которые не используются в данной работе. Выбор канала и запуск АЦП осуществляется программным способом. Имеется защита аналоговых входов от перегрузки.

Максимально допустимое напряжение: постоянное $U_{\text{пост}} < \pm 25 \text{ В}$; импульсное $U_{\text{имп}} < \pm 200 \text{ В}$ при $t_{\text{имп}} < 10 \text{ мкс}$.

Диапазон входных сигналов $\pm 5 \text{ В}$. Разрешение – 10 разрядов (старший разряд знаковый). Время преобразования – не более 50 мкс, таким образом, максимальная частота дискретизации сигналов составляет 20 кГц. Ток потребления: $+5 \text{ В} - 550 \text{ мА}$, $\pm 12 \text{ В} - 45 \text{ мА}$.

Программный компонент предназначен для управления платой АЦП, программируемым контроллером таймера, записи и последующего отображения оцифрованных сигналов с датчиков.

Программа для записи результатов эксперимента осуществляет следующие функции:

- Калибровка таймера
- Управление контроллером АЦП
- Замер времени
- Сохранение полученной серии данных
- Графическое воспроизведение серии данных

Под серией данных понимаются данные, снимаемые с датчиков экспериментальной установки в результате одного опыта. Серия состоит из некоторого фиксированного числа замеров, производимых через равные промежутки времени. В проводимой серии экспериментов принят размер серии в 2048 замеров, но он может быть легко изменен. Временной интервал между замерами обусловлен техническими ограничениями используемого АЦП и составляет величину порядка 50 мкс (время преобразования данных на АЦП согласно его техническим данным).

Структурная схема программы приведена на рис. 2.

Название диаграммы

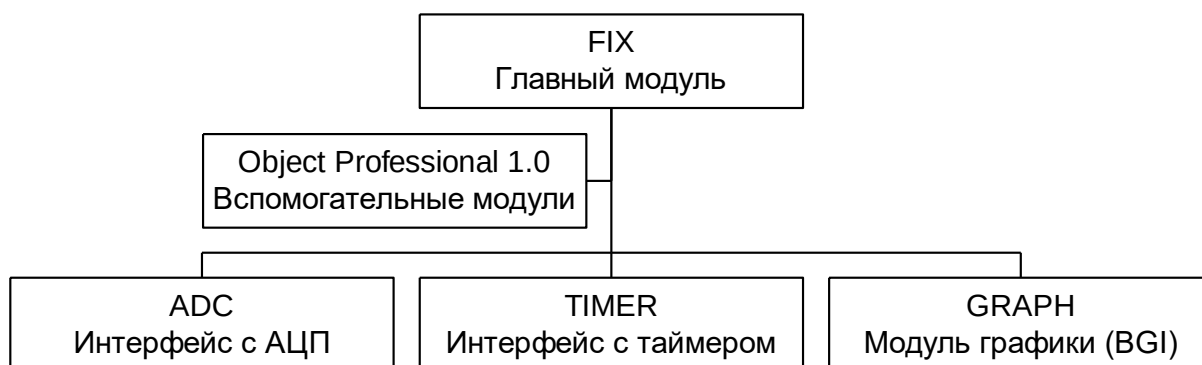


Рис. 2. Структурная схема программы

Программа реализована на языке Pascal (версия Borland Pascal 7.0) с применением графической библиотеки Graph и пакета Object Professional 1.0 (© Turbo Power Software).

Модуль ADC предназначен для управления платой АЦП на нижнем уровне. Модуль реализован на языке Assembler 80x86 (компилятор Turbo Assembler 1.0 © Borland), программный интерфейс представлен в виде модуля unit на языке Pascal.

Модуль Timer реализует управление встроенным таймером компьютера. Для отсчета времени используется второй канал таймера. Таймер работает на частоте 1.193 МГц.

Главный модуль программы (FIX) выполняет две основные операции. Первая – запись непрерывного потока данных заданной длины с одновременным отображением их на экране и сохранение полученных данных в файле на диске. Вторая – графическое воспроизведение сохраненных данных.

Каждая серия данных идентифицируется целочисленным номером и сохраняется в файле текстового формата под именем **HTnnnnn.DAT**, где *nnnnn* – номер серии данных.

Первая строка файла является комментарием. Вторая строка является заголовком и содержит в себе количество замеров данных, сделанных в этом эксперименте. Далее идут строки, содержащие данные. Первый столбец содержит время в мкс, второй столбец – данные, считанные с АЦП, в условных единицах. Величине 512 соответствует измеренный потенциал +5В, величине –512 соответствует измеренный потенциал –5В. Такой формат файла позволяет легко экспортировать данные для дальнейшего анализа в другие программы, например, Microsoft Excel.

В программе также предусмотрен отладочный режим калибровки по времени. Он предназначен для точного определения интервала времени между двумя измерениями. Определение интервала времени производится при помощи внутреннего таймера компьютера при выполнении 10000 замеров. Абсолютная погрешность определения времени при этом составляет величину порядка 10^{-8} с.

2. Работа установки

Пьезоэлектрический датчик, установленный на оболочке, фиксирует колебания оболочки и генерирует электрический сигнал, пропорциональный ускорению той точки оболочки, где он установлен. Сигнал поступает на вход платы АЦП, установленной в персональном компьютере.

Для определения начала колебательного процесса применена следующая программная схема. При запуске установки в течение 0.6 секунд (10000 измерений) происходит считывание показаний датчика и определение уровня помех (максимального и минимального значения, считанного с датчика за этот интервал времени). В качестве окончательного уровня помех берется модуль наибольшего из этих двух чисел.

После чего происходит непрерывное считывание состояния датчика. Как только будет считан сигнал, превышающий максимальный уровень помех в 1.5 раза, происходит запуск эксперимента. Счетчик времени устанавливается в ноль и выполняется серия из 2048 замеров. Интервал между замерами составляет 60.6 мкс. Из них 50 мкс уходит на выполнение преобразования сигнала в цифровую форму, а 10.6 мкс уходит на обработку данных процессо-

ром компьютера (использовался IBM-совместимый персональный компьютер с процессором Intel 386DX, тактовая частота 40 МГц). При использовании более быстродействующего компьютера время обработки можно было бы сократить, но это незначительно увеличит общее быстродействие схемы. Итоговая частота дискретизации составляет около 16.5 кГц при максимально возможной 20 кГц в идеальном случае.

Таким образом, алгоритм работы программы в режиме записи следующий:

1. запрашивается номер первой серии данных,
2. запрашивается количество серий данных,
3. производится определение уровня шумов,
4. производится ожидание начала ударного процесса,
5. производится серия из 2048 измерений,
6. производится отображение серии на экране в заданном виде,
7. производится вывод запроса на сохранение серии в файле на диске.

Серия может быть сохранена, измерение может быть повторено или может быть произведен выход из программы.

3. Программа обработки экспериментальных данных

Для статистической обработки массивов данных, получаемых в результате проведения экспериментов на описанной выше экспериментальной установке, создана отдельная программа на основе Microsoft Excel 97 и Visual Basic for Application (версия 5.0). При обработке определяется средний коэффициент пересчета значений, измеренных датчиком-акселерометром, в величины ускорения. Передаточная характеристика платы АЦП при этом принимается линейной. В качестве эталонных данных для получения передаточного коэффициента используются данные, полученные программой расчета, описанной ниже.

Кроме этого, программа строит зависимости средних и максимальных (пиковых) показателей ускорения от параметров эксперимента – скорости соударения шарика и оболочки, расстояния от датчика до места удара (разность линейных и угловых координат), массы шарика.

4. Расчет зависимостей перемещений, скоростей и ускорений от времени в различных точках полого цилиндра после удара по нему материальной точкой

Для проведения теоретического анализа вышеописанного эксперимента авторами решена задача и разработана программа расчета зависимостей пе-

ремещений, скоростей и ускорений от времени материальной точки и точки оболочки во время и после удара. Расчет производится в два этапа. Вначале происходит расчет ударного процесса в точке удара. После этого происходит расчет параметров колебаний в заданной точке полого цилиндра.

Рассмотрим удар материальной точки массой M с начальной скоростью V_0 по нормали к образующей полого цилиндра (цилиндрической оболочки). Датчики ускорения установлены так, что фиксируют радиальные ускорения оболочки. Уравнение движения материальной точки при ударе имеет вид

$$M \ddot{s} = -P(t) \quad (1)$$

Здесь $P(t)$ – нормальная сила взаимодействия материальной точки и оболочки в месте контакта, $P(t)$ – неизвестная функция. Координата s фиксирует движение точки по нормали к оболочке в процессе удара.

Начальные условия для движения точки при ударе: при $t=0$ $s=0$, $\dot{s}=V_0$.

Обозначим радиальное перемещение оболочки в точке, где производится удар, через w . Перемещение материальной точки s складывается из радиального перемещения точки оболочки w и величины «местного смятия» α оболочки и материальной точки:

$$s = w + \alpha \quad (2)$$

Местные деформации предполагаются упругими. Для зависимости упругого смятия материалов в месте контакта шарика и оболочки от величины силы удара используется закон Герца упругого смятия [4]. Для малых скоростей соударения использование закона Герца для упругого контакта допустимо, что подтверждается физическими тенденциями в эксперименте.

Для упругих деформаций величина нормальной контактной силы принимается равной

$$P = K\alpha^{3/2}, \quad (3)$$

где коэффициент K зависит от параметров соударяющихся тел:

$$K = \frac{4}{3} \frac{q_k}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}. \quad (4)$$

Величина q_k является функцией отношения A/B : $q_k = q_k(A/B)$. Для случая внешнего контакта цилиндрической оболочки радиуса R со сферой (материальной точкой) радиуса R_1 коэффициенты A и B примут вид:

$$A = \frac{1}{2R_1}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right). \quad (5)$$

Величины δ_1 и δ_2 характеризуют упругие свойства материалов соударяющихся тел (материальной точки и оболочки соответственно):

$$\delta_i = \frac{1 - \mu_i^2}{\pi E_i}, \quad (6)$$

где μ_i – коэффициент Пуассона, E_i – модуль упругости материала ($i=1$ для материальной точки, $i=2$ для оболочки) [4].

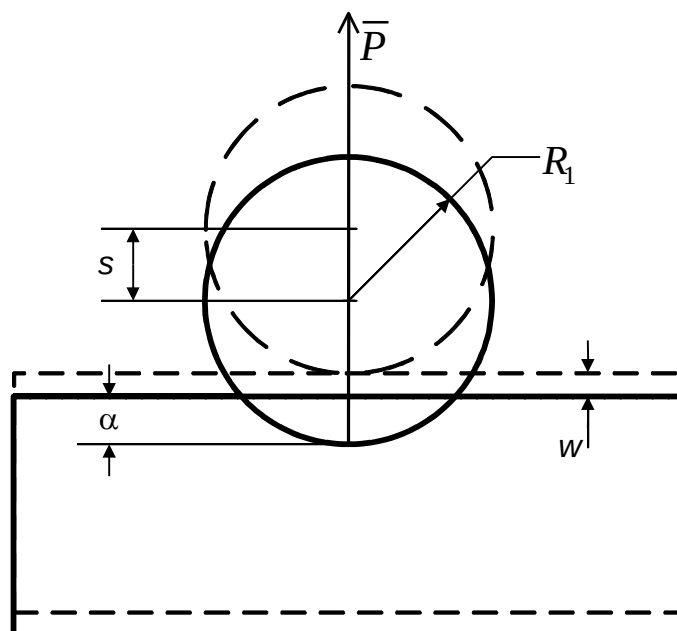


Рис. 3. Обозначения переменных

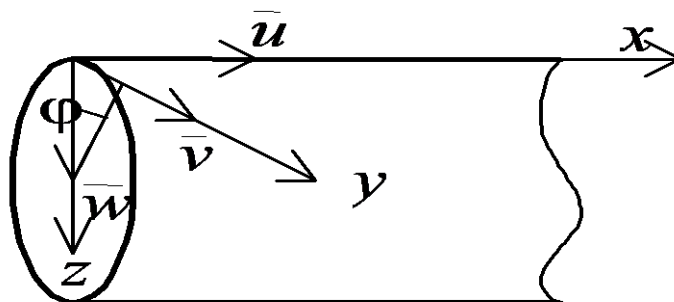


Рис. 4. Оси координат и составляющие перемещения точек оболочки

Величина w определяется из решения задачи о колебаниях цилиндрической оболочки под действием неизвестной контактной силы $P(t)$.

Решение будем искать в виде рядов по собственным функциям, для чего сначала определим собственные частоты оболочки. Не учитывая волновой характер распространения деформаций, и пренебрегая инерционными силами в направлениях u и v (по оси x и по касательной к оболочке ϕ , см. рис. 4) и нелинейными членами, получим дифференциальные уравнения движения цилиндрической оболочки в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \\
& \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0; \\
& \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - \beta \nabla^4 w = L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\beta = \frac{h^2}{12R^2}$, $L = \frac{1-\mu^2}{E} \rho R^2$, $\xi = \frac{x}{R}$, $\varphi = \frac{y}{R}$, $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2$, ρ , E ,

μ – плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; h – толщина оболочки [5].

Из системы (7) можно получить:

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 w + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{L}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w) = 0, \\
& \nabla^4 u = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\
& \nabla^4 v = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right],
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\nabla^8 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^4$.

Решив первое уравнение для w , затем из второго и третьего уравнений получим u и v .

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с граничными условиями Навье:

$v = w = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$ при $\xi = 0$, $\xi = \frac{l}{R}$ (где l – длина цилиндрической

оболочки). Решение ищем в рядах, где члены ряда имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_{n,m} &= A_{n,m} \cos \lambda_m \xi \cdot \cos n \varphi \cdot \cos \omega t, \\
v_{n,m} &= B_{n,m} \sin \lambda_m \xi \cdot \sin n \varphi \cdot \cos \omega t, \\
w_{n,m} &= C_{n,m} \sin \lambda_m \xi \cdot \cos n \varphi \cdot \cos \omega t,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi R}{l}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Определим собственные частоты колебаний оболочки при заданных граничных условиях, так как они далее используются в решении для радиальных перемещений w под действием силы $P(t)$.

Подставив третье выражение (9) в первое уравнение (8), получим решение для собственных частот оболочки

$$\frac{\beta}{1-\mu^2} (\lambda_m^2 + n^2)^4 + \lambda_m^4 = \frac{L}{1-\mu^2} \omega_{n,m}^2 (\lambda_m^2 + n^2)^2,$$

откуда получаем значения $\omega_{n,m}$:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\frac{\beta(\lambda_m^2 + n^2)^4 + \lambda_m^4(1-\mu^2)}{(\lambda_m^2 + n^2)^2 L}}. \quad (10)$$

Минимальная частота получается для $m = 1$ и $n = 6$.

Далее ищем решение уравнения движения оболочки в виде

$$\frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 w + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{L}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w) = \frac{L}{(1-\mu^2)\rho h} \nabla^4 q. \quad (11)$$

Здесь через q учитывается неизвестная нагрузка (сила), которая возникает при ударе. Применяя к уравнению (11) интегральное преобразование Лапласа, получим при нулевых начальных условиях:

$$\frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 \bar{w} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + \frac{L}{1-\mu^2} p^2 \nabla^4 \bar{w} = \frac{L}{(1-\mu^2)\rho h} \nabla^4 \bar{q}. \quad (12)$$

Здесь p – параметр преобразования Лапласа, черта над функциями w и q означает, что в уравнения входят изображения функций:

$$\bar{q}(\xi, \varphi, p) = \int_0^\infty e^{-pt} q(\xi, \varphi, t) dt, \quad \bar{w}(\xi, \varphi, p) = \int_0^\infty e^{-pt} w(\xi, \varphi, t) dt.$$

Функции $\bar{w}$, $\bar{q}$ разложим в ряды по собственным функциям $W_{n,m}(\xi, \varphi)$:

$$\bar{w}(\xi, \varphi, p) = \sum_{n,m}^\infty C_{n,m}(p) \cdot W_{n,m}(\xi, \varphi), \quad \bar{q}(\xi, \varphi, p) = \sum_{n,m}^\infty q_{n,m}(p) \cdot W_{n,m}(\xi, \varphi).$$

Пусть функции $W_{n,m}(\xi, \varphi)$ ортогональны, тогда

$$\begin{aligned}
C_{n,m}(p) &= \frac{1}{D_{n,m}} \int_0^{\frac{l}{R}} \int_0^{2\pi} \bar{w}(\xi, \varphi, p) \cdot W_{n,m}(\xi, \varphi) d\xi d\varphi, \\
q_{n,m}(p) &= \frac{1}{D_{n,m}} \int_0^{\frac{l}{R}} \int_0^{2\pi} \bar{q}(\xi, \varphi, p) \cdot W_{n,m}(\xi, \varphi) d\xi d\varphi, \\
D_{n,m} &= \int_0^{\frac{l}{R}} \int_0^{2\pi} W_{n,m}^2(\xi, \varphi) d\xi d\varphi.
\end{aligned} \tag{13}$$

Умножив уравнение (12) на $W_{n,m}(\xi, \varphi)$ и проинтегрировав по поверхности оболочки, а также учитывая, что $W_{n,m}(\xi, \varphi)$ отвечают уравнению

$$\frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 W_{n,m} + \frac{\partial^4 W_{n,m}}{\partial \xi^4} = \frac{L}{1-\mu^2} \omega_{n,m}^2 \nabla^4 W_{n,m},$$

получим

$$C_{n,m}(p) = \frac{q_{n,m}(p)}{\rho h (\omega_{n,m}^2 + p^2)}. \tag{14}$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned}
w(\xi, \varphi, t) &= \frac{1}{\rho h} \sum_{n,m} W_{n,m}(\xi, \varphi) \int_0^{\frac{l}{R}} \int_0^{2\pi} \frac{W_{n,m}(\eta, \zeta)}{D_{n,m}} \cdot \\
&\quad \int_0^t q(\eta, \zeta, \tau) \frac{\sin \omega_{n,m}(t - \tau)}{\omega_{n,m}} d\eta d\zeta d\tau.
\end{aligned} \tag{15}$$

При допущении о том, что сила давления при ударе в точке с координатами (ξ_1, φ_1) сосредоточена и зависит от времени, имеем

$$q(\xi, \varphi, t) = \frac{P(t)}{Rl} \delta(\xi - \xi_1) \cdot \delta(\varphi - \varphi_1). \tag{16}$$

Подставляя (16) в $w(\xi, \varphi, t)$, получим

$$\begin{aligned}
w(\xi, \varphi, t) &= \frac{1}{\rho h Rl} \sum_{n,m} \frac{W_{n,m}(\xi, \varphi) \cdot W_{n,m}(\xi_1, \varphi_1)}{\omega_{n,m} \cdot D_{n,m}} \cdot \\
&\quad \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{n,m}(t - \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{17}$$

Решение для уравнения (8) получено для условий Навье, т.е.

$$w(\xi, \varphi, t) = \sum_{n,m}^{\infty} C_{n,m}(t) \sin \lambda_m \xi \cdot \cos n\varphi \quad (18)$$

$$W_{n,m} = \sin \lambda_m \xi \cdot \cos n\varphi$$

Учитывая (18), для $D_{n,m}$ получим выражение

$$D_{n,m} = \frac{\pi}{2} \frac{l}{R}. \quad (19)$$

Поэтому выражение (17) запишется в виде:

$$w(\xi, \varphi, t) = \frac{2}{\pi \rho h l^2} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \xi \cdot \cos n\varphi \cdot \sin \lambda_m \xi_1 \cdot \cos n\varphi_1}{\omega_{n,m}} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{n,m}(t - \tau) d\tau. \quad (20)$$

По этому выражению рассчитывается прогиб в любой точке цилиндрической оболочки, если известен закон $P(t)$. В частности, в точке удара (ξ_1, φ_1) величина w примет вид:

$$w(\xi_1, \varphi_1, t) = \frac{2}{\pi \rho h l^2} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda_m \xi_1 \cdot \cos^2 n\varphi_1}{\omega_{n,m}} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{n,m}(t - \tau) d\tau. \quad (21)$$

Расчет ударной силы осуществляется по шагам. На первом шаге расчета перемещение оболочки в месте удара положим равным 0, а величину местной деформации определим из скорости движения материальной точки V_0 (рассматривается нормальный удар). Тогда:

$$\alpha_1 = V_0 \Delta t, \quad P_1 = K \alpha_1^{3/2}, \quad a_1 = -\frac{P_1}{M}, \quad (22)$$

где Δt – временной интервал первого шага расчета, a – ускорение материальной точки, M – масса материальной точки.

На всех последующих шагах расчета перемещения материальной точки и оболочки определяются по следующим формулам (см. (21)):

$$t_i = i \cdot \Delta t,$$

$$s_i = s_{i-1} + V_{i-1} \Delta t + \frac{a_{i-1} \Delta t^2}{2},$$

$$w_i = \frac{2}{\pi \rho h l^2} \sum_{n,m} \frac{\sin^2(\lambda_m \xi_1) \cos^2(n \varphi_1)}{\omega_{n,m}} \cdot \int_0^{t_i} P(\tau) \sin \omega_{n,m}(t_i - \tau) d\tau, \quad (23)$$

$$P_i = K(s_i - w_i)^{3/2}, \quad a_i = -\frac{P_i}{M}.$$

Результатом данного этапа расчета являются зависимости $s(t)$, $w(t)$, $P(t)$. Кроме этого определяются длительность ударного процесса τ_1 и максимальная величина нормальной контактной силы $P_{\max}$. Эти данные используются на втором этапе расчета, который производит определение перемещений, скоростей и ускорений заданных точек цилиндрической оболочки.

Для радиального перемещения точки цилиндрической оболочки с координатами ξ , φ при граничных условиях Навье используется формула (20). Для упрощения расчета в случае упругого удара зависимость $P(t)$ аппроксимирована синусоидой:

$$P(t) = P_{\max} \sin\left(\pi \frac{\tau}{\tau_1}\right). \quad (24)$$

При этом действие ударной силы ограничено временем удара τ_1 и прекращается при $t > \tau_1$.

Подставив (24) в (20) и взяв интеграл по времени, получим формулы для расчета величин перемещений. Дифференцируя, получаем выражения для скоростей и ускорений заданной точки оболочки:

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\pi \rho h l^2} \sum_{n,m} \frac{\sin(\lambda_m \xi) \sin(\lambda_m \xi_1) \cos(n \varphi) \cos(n \varphi_1)}{\omega_{n,m}} \cdot I, \\ I &= \begin{cases} \frac{P_{\max}}{k[1 - (\omega_{n,m}/k)^2]} \left(\sin \omega_{n,m} t - \frac{\omega_{n,m}}{k} \sin kt \right); & 0 \leq t \leq \tau_1 \\ \frac{2P_{\max}}{k[1 - (\omega_{n,m}/k)^2]} \cos\left(\omega_{n,m} \frac{\tau_1}{2}\right) \sin \omega_{n,m} \left(t - \frac{\tau_1}{2}\right); & \tau_1 < t \end{cases} \quad (25) \\ \dot{w} &= \frac{2}{\pi \rho h l^2} \sum_{n,m} \frac{\sin(\lambda_m \xi) \sin(\lambda_m \xi_1) \cos(n \varphi) \cos(n \varphi_1)}{\omega_{n,m}} \cdot \dot{I}, \end{aligned}$$

$$\dot{I} = \begin{cases} \frac{P_{\max}}{1 - (\omega_{n,m}/k)^2} \frac{\omega_{n,m}}{k} (\cos \omega_{n,m} t - \cos kt); & 0 \leq t \leq \tau_1 \\ \frac{2P_{\max}}{1 - (\omega_{n,m}/k)^2} \frac{\omega_{n,m}}{k} \cdot \cos\left(\omega_{n,m} \frac{\tau_1}{2}\right) \cos \omega_{n,m} \left(t - \frac{\tau_1}{2}\right); & \tau_1 < t \end{cases}; \quad (26)$$

$$\ddot{w} = \frac{2}{\pi \rho h l^2} \sum_{n,m}^{\infty} \sin(\lambda_m \xi) \sin(\lambda_m \xi_1) \cos(n\varphi) \cos(n\varphi_1) \cdot \ddot{I},$$

$$\ddot{I} = \begin{cases} \frac{-P_{\max}}{1 - (\omega_{n,m}/k)^2} \left(\frac{\omega_{n,m}}{k} \sin \omega_{n,m} t - \sin kt \right); & 0 \leq t \leq \tau_1 \\ \frac{-2P_{\max}}{1 - (\omega_{n,m}/k)^2} \frac{\omega_{n,m}}{k} \cdot \cos\left(\omega_{n,m} \frac{\tau_1}{2}\right) \sin \omega_{n,m} \left(t - \frac{\tau_1}{2}\right); & \tau_1 < t \end{cases}; \quad (27)$$

В (25), (26), (27) использовано обозначение $k = \frac{\pi}{\tau_1}$.

Из выражений для $w, \dot{w}, \ddot{w}$ видно, что ряды для $w, \dot{w}$ являются сходящимися, а ряд для $\ddot{w}$ – условно сходящимся. Поэтому расчеты рядов $w, \dot{w}$ стабилизируются при гораздо меньшем количестве членов (по n и m), чем расчеты ускорений $\ddot{w}$. При точности расчетов для перемещений и скоростей точек оболочки в 1%, точность расчетов по ускорению $\sim 10\%$ (при 1000–1500 членов ряда). В расчетах использовались 2550 ($m=1\dots 50, n=0\dots 50$) членов ряда для контактной задачи и 1020 ($m=1\dots 20, n=0\dots 50$) членов ряда для расчета перемещений, скоростей и ускорений точек оболочки.

Рассмотренное решение было доложено на нескольких научных конференциях [6–8].

В данную программу введена также возможность расчета упруго–пластического удара. При этом используются экспериментальные данные, а именно α_r – величина остаточного смятия после разделения соударяющихся тел. Закон изменения нормальной контактной силы при нагрузке имеет вид:

$$P = D\alpha^{3/2}, \quad (28)$$

где D – коэффициент, определяемый экспериментально (в отличие от расчетного коэффициента K – см. (4)).

В момент, когда скорость материальной точки V обращается в 0, определяется величина максимального смятия α_m и максимальное значение нормальной контактной силы $P_{\max}$. После этого наступает разгрузка, и закон изменения нормальной контактной силы приобретает вид:

$$P = P_{\max} \left(\frac{\alpha - \alpha_r}{\alpha_m - \alpha_r} \right)^{3/2}. \quad (29)$$

Программа имеет оконный интерфейс, а также режим пакетного счета, при котором возможно обработать несколько наборов исходных данных.

5. Эксперимент и сравнение с расчетом в задаче об ударе материальной точкой по цилиндрической оболочке

Проведение и обработка эксперимента

В эксперименте использовалась в качестве цилиндрической оболочки стальная труба длины $L=1520$ мм, радиуса $R=51$ мм и толщиной $h=2$ мм. Схема установки датчиков и места замеров указаны на рис. 5.

Труба в экспериментах была свободно оперта. В эксперименте в качестве материальных точек использовались стальные шарики диаметром $2r_1=28,6$ мм, $2r_2=22,3$ мм, $2r_3=12,2$ мм, $2r_4=9,6$ мм. Их массы соответственно равны $m_1=95,5$ г, $m_2=45,3$ г, $m_3=7,4$ г, $m_4=3,6$ г. Высота падения шарика обозначалась H и изменялась от 5 см до 20 см, что соответствовало изменению относительной скорости соударения шарика и трубы от 0,99 м/с до 1,98 м/с. Удар шариком осуществлялся под углом 90° к образующей трубы (нормальный удар). Основные эксперименты проводились при фиксации сигналов датчиком Д2 (см. Рис. 5). Место удара шариком изменялось фиксированно, т. е. замер сигнала производился в точках (позициях) $l_1=100$ мм, $l_2=300$ мм, $l_3=500$ мм, $l_4=600$ мм, $l_5=650$ мм, $l_6=700$ мм. Замер сигнала у датчика (позиция 0, $l_0=18$ мм) производился на некотором расстоянии от него. Это расстояние определялось из конструктивных возможностей.

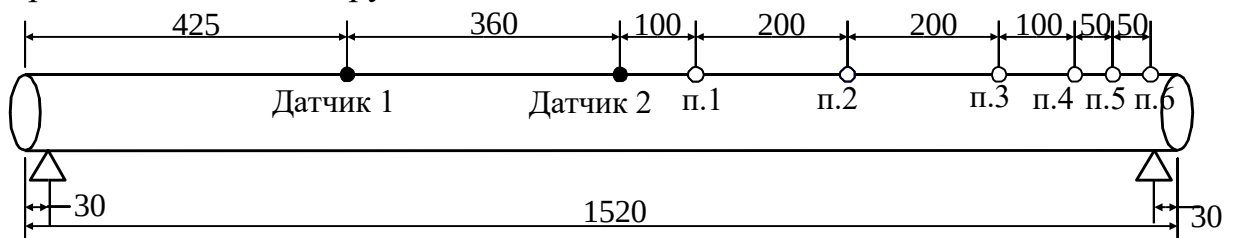


Рис. 5. Установка датчиков, позиции точек замера

Из визуального анализа экспериментальных кривых видно, что используемая частота дискретизации недостаточна для того, чтобы оценить форму колебаний и построить спектральные характеристики сигнала по частоте. Возможно оценить только их амплитуду. Попытка частотного анализа (на основе быстрого преобразования Фурье) пока не дала отчетливых результатов. Следует повторить эксперимент, используя более совершенную плату АЦП с частотой дискретизации не менее 100 кГц на канал при поддержке не менее 2 каналов.

Анализ экспериментальных данных был построен на базе рассмотрения средних значений модуля амплитуды сигнала за выбранный отрезок времени. В качестве временного отрезка выбирались 1, 1.5, 2 мс. Наилучшие результаты получены при рассмотрении отрезка 1 мс, так как колебательный процесс в основном сосредоточен в этом диапазоне. В 1 мс укладывается 18 измеренных показаний датчика. Экспериментальные данные были перенесены в Microsoft Excel, построены таблицы абсолютных значений показаний датчика и проведено их усреднение на задаваемом временном отрезке. На графиках (Рис. 7) приведены полученные результаты, вместе с ними построены сглаживающие кривые. Сглаживание проведено полиномом второго порядка по методу наименьших квадратов (использование встроенных возможностей Excel).

Величины среднего значения показаний датчика на графиках показаны как $|W|_i$. Так как в эксперименте использовалось 4 шарика различной массы, в качестве индекса выступает номер шарика.

Полученные экспериментальные данные нуждались в градуировке, так как точный передаточный коэффициент пьезоэлектрического датчика неизвестен. Для этого на основании имеющейся математической модели рассчитаны колебания оболочки при тех же начальных и граничных условиях и данных, какие были использованы при проведении эксперимента. Расчет проведен на временном интервале 1 мс с дискретностью 1 мкс. Следствием этого является большое количество точек к усреднению.

Определение средних значений модуля ускорения проведено аналогичным образом. Градуировка осуществлена на всем множестве экспериментальных данных путем линейной интерполяции зависимости $|w|$ ($|W|$) (то есть расчетного среднего ускорения от экспериментального среднего ускорения; если бы измеряемые в эксперименте значения были бы непосредственно ускорениями, то эта зависимость должна была бы иметь вид $|w| = |W|$). В результате получен единый для всего массива экспериментальных данных пе-

редаточный коэффициент K_w . С использованием передаточного коэффициента можно сравнивать экспериментальные и расчетные данные.

Экспериментальные данные сравнивались с расчетными, которые получены в результате решения задачи об ударе материальной точкой по цилиндрической оболочке. Оси координат выбраны были следующим образом – вдоль оси трубы x , перпендикулярно образующей трубы z и по касательной к образующей y ($y = R\varphi$, где φ – угловая координата). Для того, чтобы можно было представить, каковы параметры максимальной силы при ударе точкой по оболочке, на рис. 6 представлены зависимость максимальной силы удара от массы материальной точки при $H=10\text{см}$ ($V=1,4\text{ м/с}$).

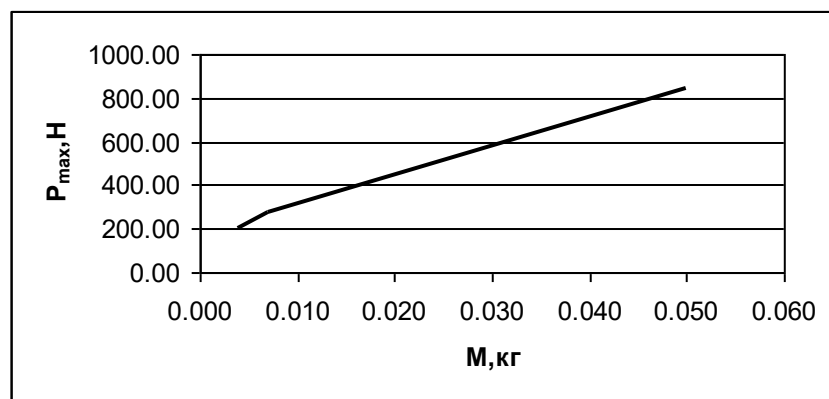


Рис. 6. Зависимость максимальной силы удара от массы точки



Рис. 7. Зависимость ускорения точки оболочки от времени

На рис. 7 представлена зависимость ускорения точки оболочки от времени ($\ddot{w} = \ddot{w}(t)$). Здесь рассматривается составляющая ускорения вдоль оси z . Именно эта составляющая фиксируется датчиками ускорений (инерционные

ми датчиками). На теоретическую кривую нанесены экспериментальные точки – ускорения, замеренные в эксперименте в соответствующие моменты времени. Указаны значения по пяти одинаковым экспериментам. Разброс в эксперименте при одинаковых условиях значителен, поэтому общую картину наложения экспериментальных данных на расчетную кривую следует признать удовлетворительной.

На рис. 8–9 представлены расчетная и экспериментальная зависимости ускорения точки оболочки от времени. Экспериментальная зависимость представлена отдельными точками, соединенными отрезками прямых. Зависимости построены при одинаковых параметрах удара в сходных позициях. Следует отметить одинаковые тенденции сдвига максимума ускорений вправо по оси времени с удалением точки удара от датчика, снижение уровня максимума ускорений в одинаковых пропорциях. Если проследить за смещением максимума по времени, то можно установить величину средней скорости распространения возмущения по трубе, равную ~ 1000 м/с.

Проведя обработку экспериментальных данных, определили среднее значение коэффициента пересчета экспериментальных данных в напряжения в числовые значения с размерностью ускорения. После обработки экспериментальных и расчетных данных и после определения среднего значения коэффициента пересчета для экспериментальных данных удалось построить ряд зависимостей и сравнить расчетные и экспериментальные данные. На рис. 10 представлены зависимости средних значений ускорений в точке замера на временном отрезке 1 миллисекунда от расстояния, которое занимает точка удара от датчика Д2 – точки замера. На рис. 11 представлены зависимости средних значений ускорений в точке замера в зависимости от скорости удара для шариков двух различных масс. На рис. 12 приведены значения среднего ускорения по окружности трубы. Удар производился в позиции $l_2=300$ при переменном угле φ . На рис. 13 представлены зависимости средних значений ускорения в точке замера от массы ударяющей материальной точки. Следует отметить весьма сложные механизмы замера и расчета средних ускорений. Поэтому представленные экспериментальные результаты можно считать удовлетворительно совпадающими с расчетными данными.

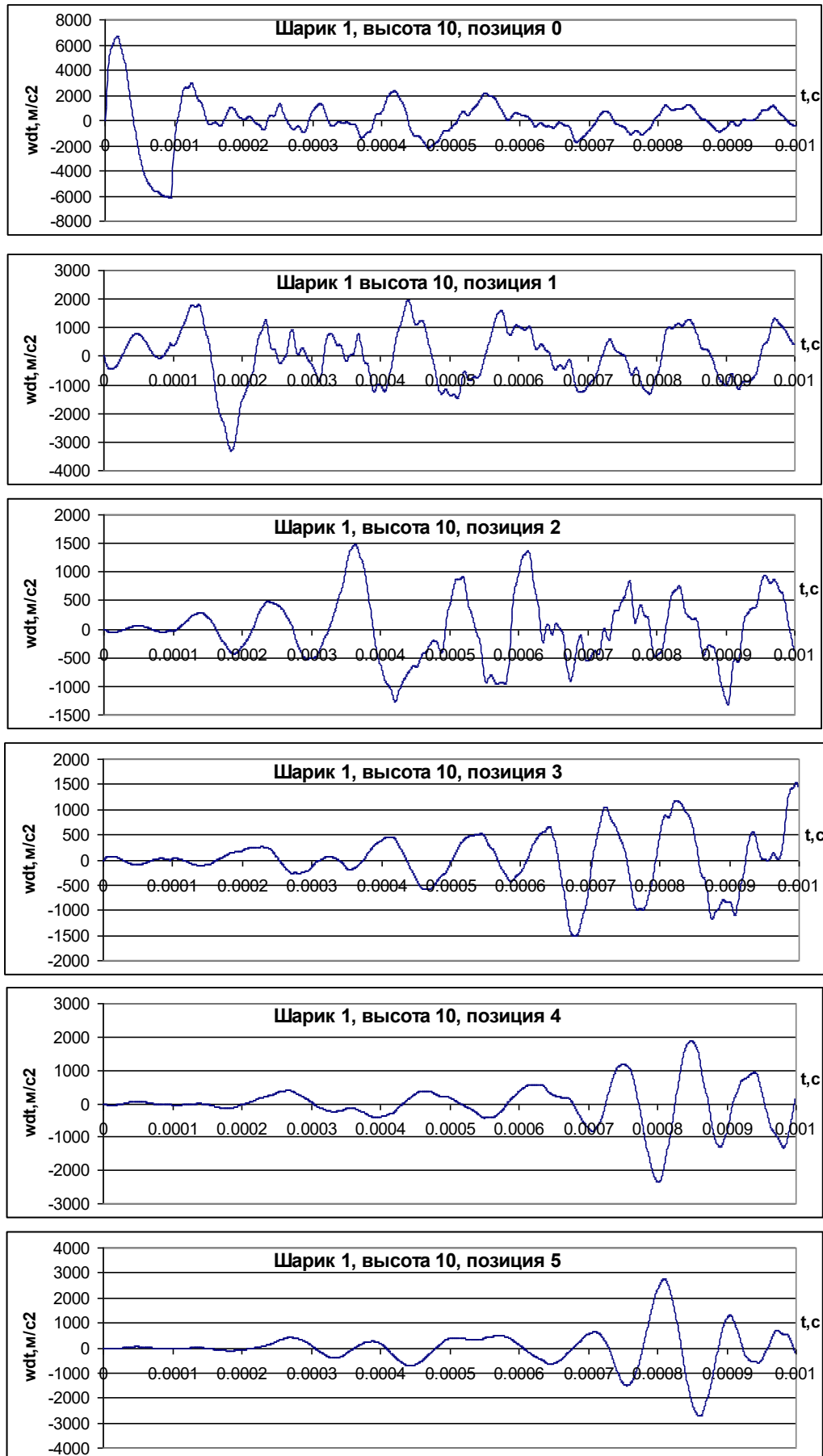


Рис. 8. Теоретическая зависимость $\ddot{w}(t)$

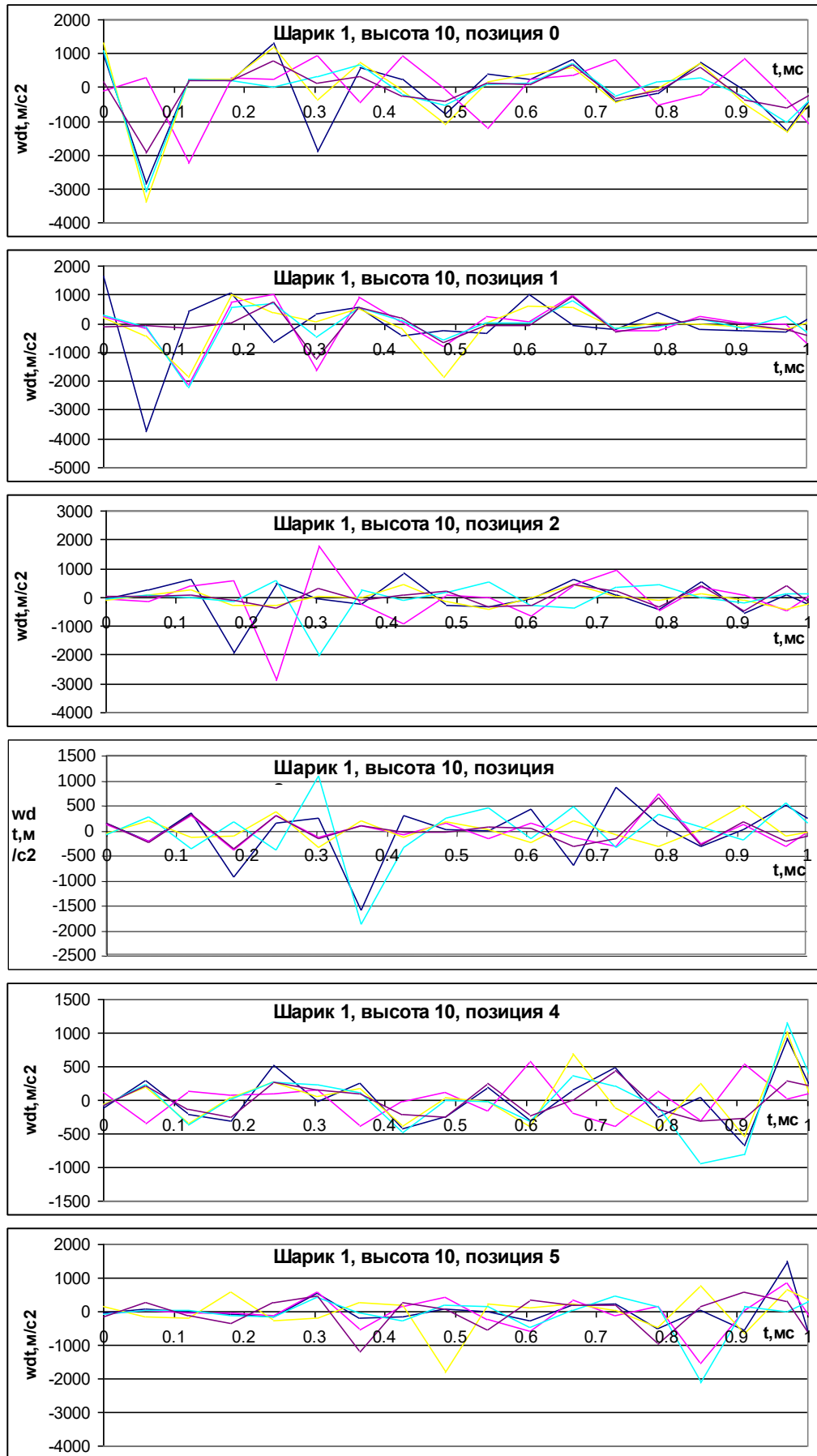


Рис. 9. Экспериментальная зависимость $\ddot{w}(t)$ (5 замеров на позицию)

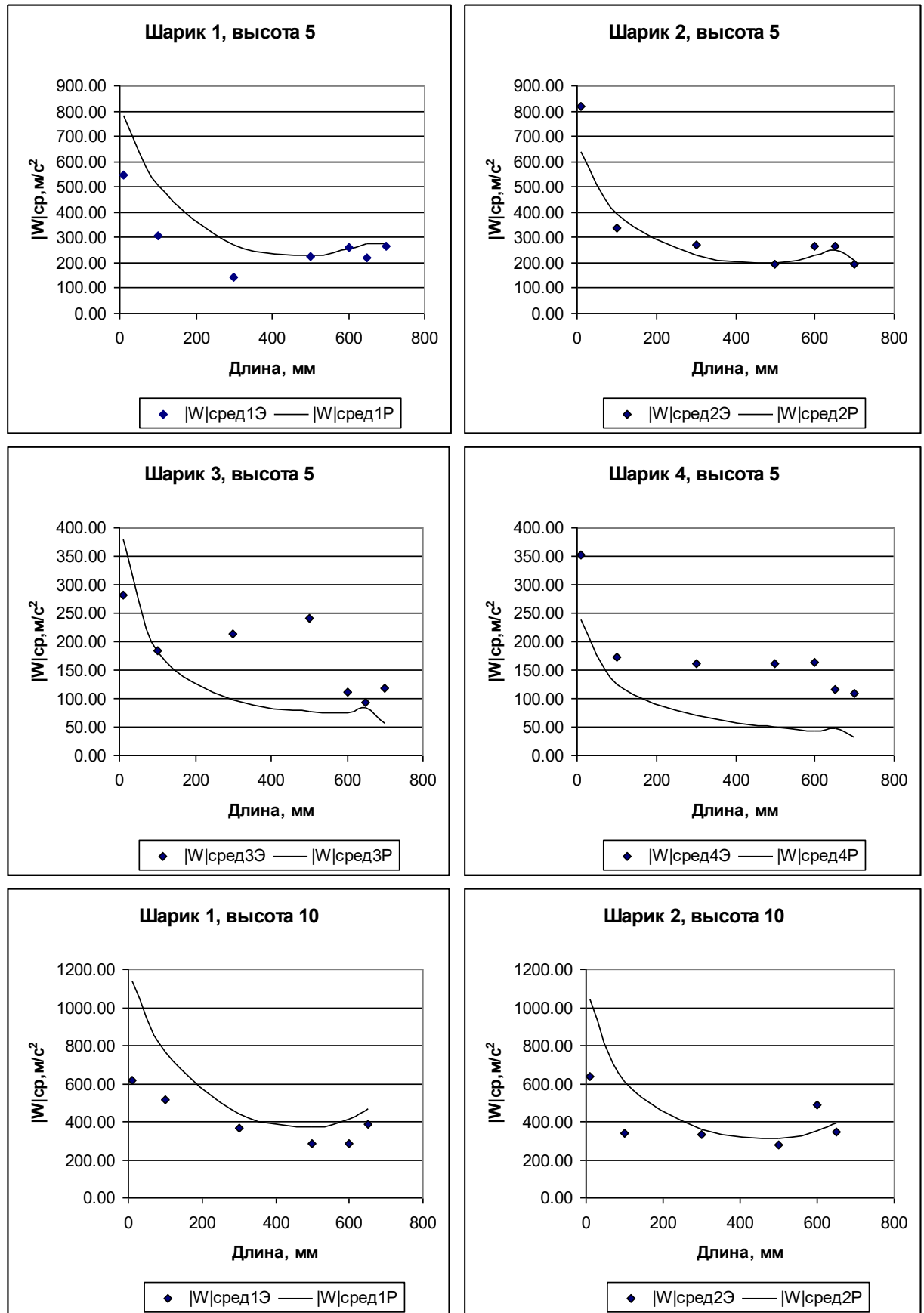


Рис. 10. Зависимость среднего ускорения от расстояния до датчика

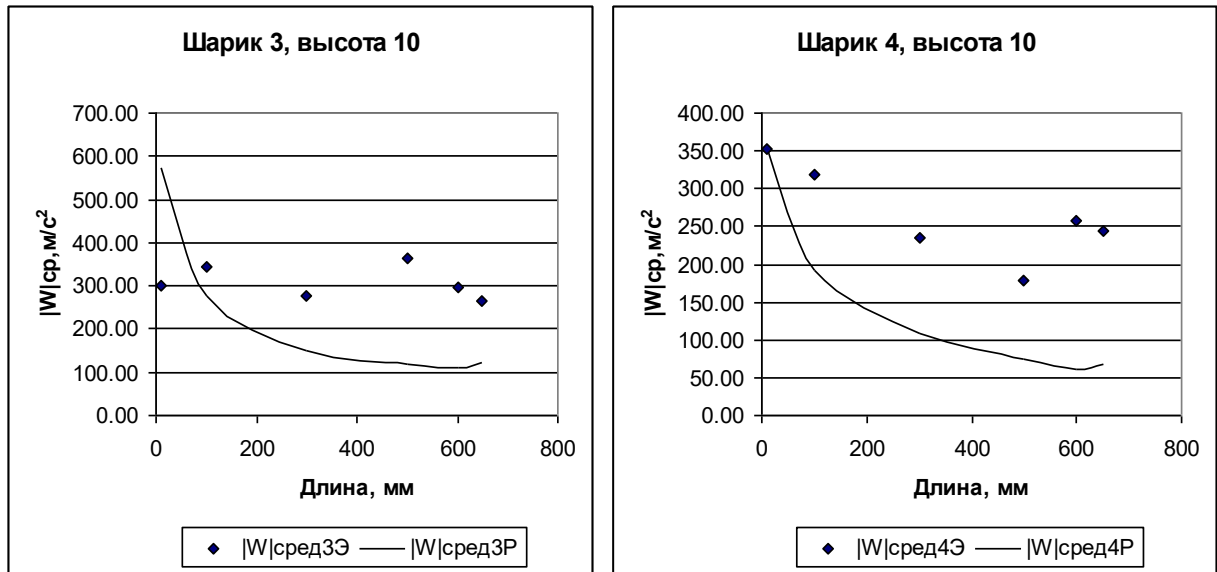


Рис. 10 (продолжение). Зависимость среднего ускорения от расстояния до датчика

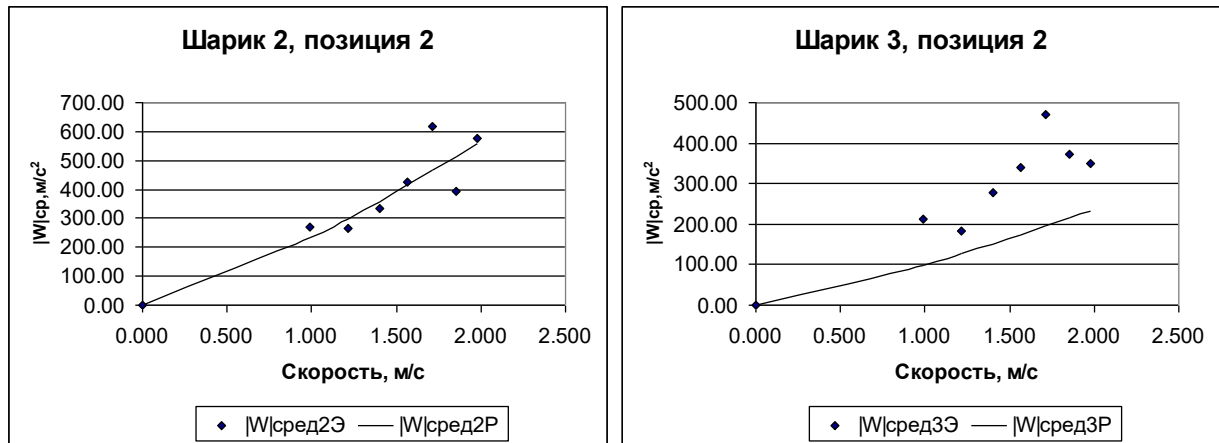


Рис. 11. Зависимость значений среднего ускорения от скорости удара

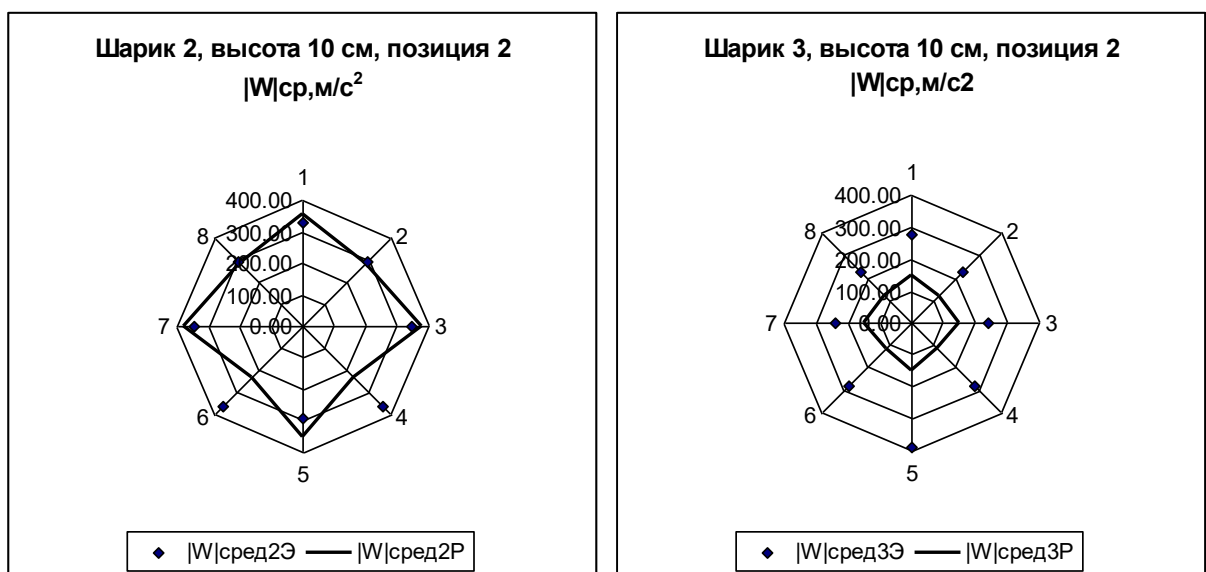


Рис. 12. Распределение значений среднего ускорения по окружности трубы

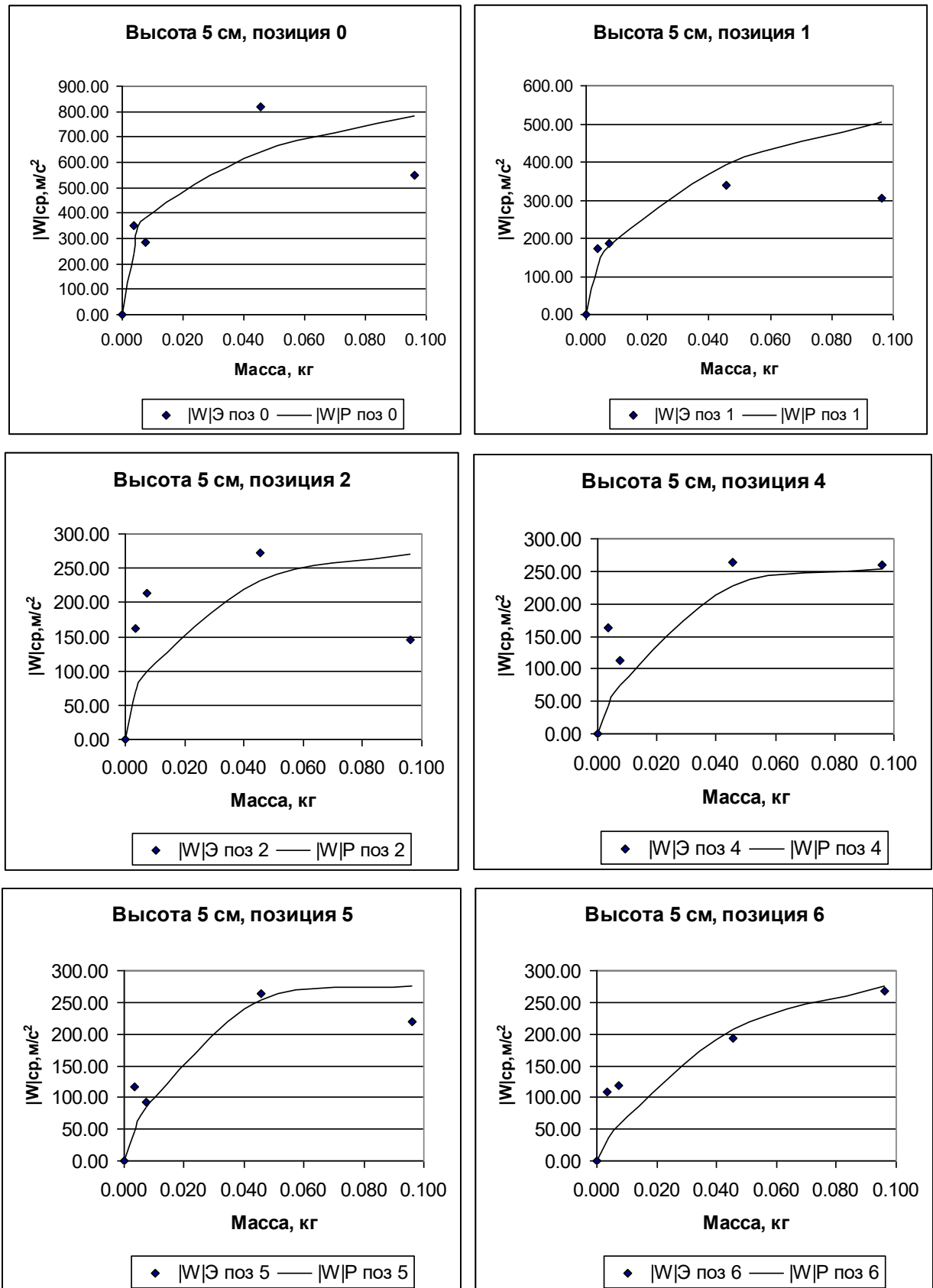


Рис. 13. Зависимость значений среднего ускорения от массы шарика

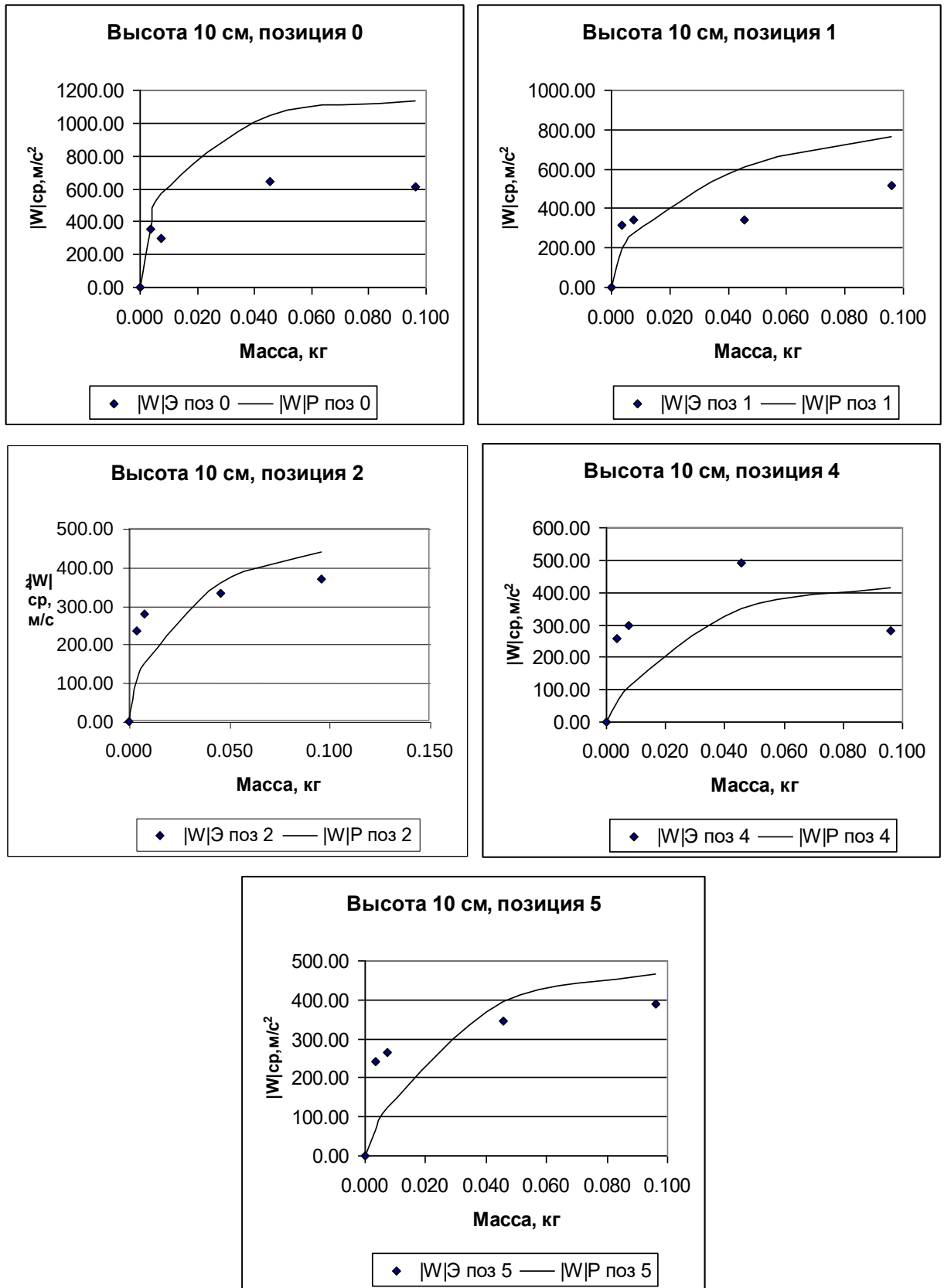


Рис. 13 (продолжение). Зависимость значений среднего ускорения от массы шарика

Заключение

Аналитически исследована задача об упругом нормальном ударе точкой по цилиндрической оболочке и упругих колебаниях оболочки после удара. Местные деформации учитываются по модели Герца. Представлен алгоритм расчета зависимостей ускорений точек оболочки от времени при различных параметрах удара (массе и скорости материальной точки, месте удара и т.д.). Результаты численных расчетов позволили построить теоретические зависимости ускорений в функции времени и интегральные теоретические зависимости средних ускорений точек оболочки от параметров удара.

Создана экспериментальная установка, оснащенная программно-аппаратным комплексом, позволяющим записывать и обрабатывать характеристики свободных колебаний оболочки после удара по оболочке телом (материальной точкой). Полученные теоретические зависимости удовлетворительно подтверждаются экспериментами и являются основой для решения обратной задачи.

Следует отметить простоту аппаратно-программного комплекса, позволяющего записывать и обрабатывать характеристики высокочастотных колебательных движений. Такие переносные легкие измерительные установки в ряде случаев имеют преимущество при автономном использовании по сравнению с традиционными стационарными весьма громоздкими измерительными установками.

Литература

1. B. J. Olma. Source location and mass estimation in loose parts monitoring of LWR's. Progress in Nuclear Energy, 1985, Vol. 15, pp.583–594. Printed in Great Britain.
2. И. Г. Кадомцев, М. Р. Фрейгейт (Ростов на Дону). Удар массивного тела по шарнирно опертому сферическому куполу. Проблемы прочности, 1991, №9, стр. 57–59.
3. В. В. Дубинин, С. Н. Банников, Е. М. Пашовкин. Разработка экспериментального метода определения параметров колебаний оболочки после удара материальной точкой. МГТУ им. Н.Э. Баумана. М. 1999 - 28 с. Деп. в ВИНТИ, № 2251-B99 от 09.07.99 г., БО-121, № 9, 1999 г.
4. В. Гольдсмит. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Изд-во литературы по строительству. М. 1965, 448 с.
5. В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Н. П. Подчасов. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. Головное изд-во издат. объединения «Выща школа». К. 1989, 208 с.
6. В. В. Дубинин, С. Н. Банников. Разработка экспериментального метода определения параметров колебаний оболочки после удара материальной точкой. Научно-методическая конференция, посвященная 35-летию факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н. Э. Баумана. Тезисы докладов. 20 декабря 1999 г. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. 140 с. (с.с. 66–68).
7. В. В. Дубинин, С. Н. Банников. Разработка экспериментального метода определения параметров колебаний оболочки после удара телом. Тезисы докладов научно-технической конференции. 21–23 ноября 2000 г. В 2 ч. Ч. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 160 с. (с. 38).
8. С. Н. Банников, В. В. Дубинин, Ю. Н. Жигулевцев. Развитие технологий обучения: обработка физического эксперимента и дистанционное образование. Восьмой всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23–29 августа 2001 г. Аннотации докладов. Екатеринбург. УрО РАН, 2001. (с. 72).