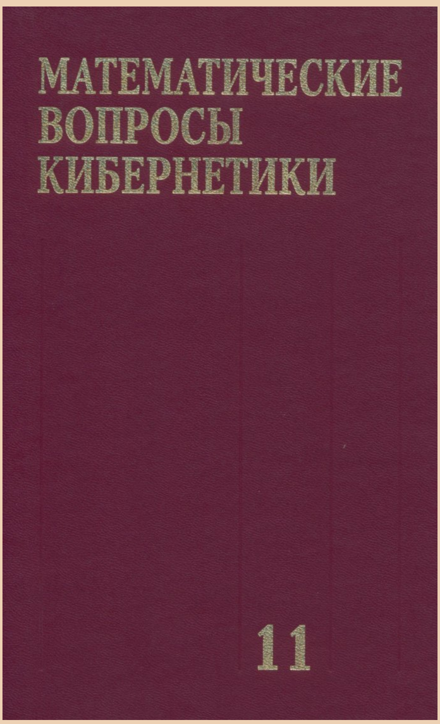

М. А. Алехина

Синтез и сложность надежных схем из ненадежных элементов

СИНТЕЗ И СЛОЖНОСТЬ НАДЕЖНЫХ СХЕМ ИЗ НЕНАДЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *)

М. А. АЛЁХИНА

(ПЕНЗА)

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [12]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, а именно, функциональный элемент E с приписанной ему булевой функцией $e(\widetilde{x})$ в неисправном состоянии реализует $\overline{e}(\widetilde{x})$. Эти же неисправности рассматривались затем в работах С. И. Ортюкова [10], Н. Пиппенджера [13], Д. Улига [14]. Речь идет о реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов в произвольном конечном базисе $Б=\{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \in \mathbb{N}$ [9]. Каждому элементу E_i базиса приписано положительное число $P(E_i)$ — вес данного элемента E_i. Сложность схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов и обозначается $L(S)$. Предполагается, что во всех элементах схемы независимым образом с вероятностью ε происходят сбои. Пусть $P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ — вероятность появления значения $\overline{f}(\widetilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\widetilde{x})$, при входном наборе $\widetilde{a}=(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $P(S)$ — максимальное из чисел $P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\widetilde{a}$. Назовем величину $P(S)$ ненадежностью схемы S. Вводится функция Шеннона

$$L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \min_S L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ с ненадежностью $P(S)$, не превосходящей p, а максимум — по всем булевым функциям f от n переменных. Нетрудно проверить, что $P(S) \geqslant \varepsilon$ при $\varepsilon \leqslant 1/2$ для любой схемы S.

Пусть $\rho = \min P(E_i)/(n(E_i) - 1)$; минимум берется по всем элементам E_i базиса, для которых $n(E_i) > 1$, где $n(E_i)$ — число существенных переменных функции e_i, реализуемой элементом $E_i, i = 1, 2, \ldots, m$. Для схем, реализующих булевы функции и состоящих только из надежных элементов (т. е. $\varepsilon=0$, $p=0$), О. Б. Лупанов [8] показал, что

$$L_{0,0}(n) \sim \rho 2^n/n.$$

Для построения надежных схем из ненадежных элементов Дж. Нейман (1956) предложил итерационный метод, позволяющий при некотором ограничении на ε с каждым шагом итерации уменьшать вероятность ошибки

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00053) и программы «Университеты России» (проект 04.01.003).

на выходе схемы, но сложность схемы при этом увеличивается примерно в 3 раза. Дж. Нейманом было найдено предельное значение $\eta=\eta(\varepsilon)$ для вероятности ошибки и показано, что любую булеву функцию можно реализовать схемой с вероятностью ошибки, сколь угодно близкой к предельному значению. Метод дает экспоненциальное увеличение сложности схемы (примерно в 3^k раз, где k — необходимое число итераций). В этом его главный недостаток, особенно при необходимости осуществления многократных итераций.

Именно сложности надежных схем уделялось главное внимание в работах следующих авторов. Задача синтеза схем, наилучших по надежности, ими не рассматривалась.

С. И. Ортюков (1981) показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется для схем из ненадежных элементов при степенном убывании вероятности сбоев с ростом n, а именно, если последовательности p_n и ε_n таковы, что $QL_g\varepsilon_n<p_n<1/2$, $0<\varepsilon_n<1/2$ и $\varepsilon_n=o(1/n^2)$, где $Q>1$, L_g — минимальная сложность схемы из надежных элементов в рассматриваемом базисе, реализующей функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$, то

$$L_{p_n,\,\varepsilon_n}(n)\sim\rho 2^n/n.$$

Из результатов Н. Пиппенджера (1985) следует, что при инверсных неисправностях любую булеву функцию от n переменных в базисе $\{\&, \vee, {}^-\}$ можно реализовать схемой S с вероятностью ошибки на выходе не более 18ε, $\varepsilon\leqslant 1/200$, и сложностью $L(S)\lesssim 170\cdot 2^n/n$ [8].

Д. Улиг (1987) для инверсных неисправностей с вероятностью ошибки не более ε показал, что для любых c, b ($c, b>0$) существует ε' ($\varepsilon'\in(0, 1/2)$) такое, что при ε ($0<\varepsilon<\varepsilon'$) и δ ($\delta\geqslant(1+b)\varepsilon L_g$) выполнено

$$L_{\delta,\,\varepsilon}(n)\lesssim(1+c)\rho 2^n/n.$$

Таким образом, асимптотика функции Шеннона сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к единице, и при этом вероятность сбоя ε ограничена константой.

Упомянутые авторы для булевых функций в классе инверсных неисправностей решали задачу синтеза схем, правильно функционирующих с заданной вероятностью (надежностью). С. И. Ортюков и Д. Улиг нашли методы синтеза схем, оптимальных по сложности и с заданным уровнем надежности. Задача на максимум надежности схем не ставилась.

В данной статье речь идет о реализации булевых функций схемами при однотипных константных неисправностях на входах или на выходах элементов в некоторых базисах. Рассматривается задача построения схем, функционирующих с асимптотически наибольшей надежностью. Показано, что в рассматриваемых базисах при однотипных константных неисправностях для почти всех булевых функций можно строить схемы, асимптотически наилучшие по надежности, причем их сложность имеем тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Введем необходимые понятия и определения.

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в конечном базисе Б [9]. Схема реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы произвольного набора $\widetilde{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ при отсутствии в ней неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\widetilde{a})$. Предполагается, что все элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, т. е. неисправности могут возникать в любом элементе схемы независимо от состояний других элементов, причем вероятность ошибки на каждом из наборов, вообще говоря, различна.

Будем считать, что базисные элементы подвержены однотипным константным неисправностям на входах (выходах) элементов. Определим эти неисправности.

Если неисправность элемента такова, что поступающий на его вход нуль остается нулем, а поступающая на его вход единица с вероятностью γ может превратиться в нуль, будем называть ее неисправностью типа 0 на входе элемента. Если же неисправность элемента такова, что поступающая на его вход единица остается единицей, а нуль с вероятностью γ может превратиться в единицу, будем называть ее неисправностью типа 1 на входе элемента.

Если неисправность такова, что элемент (реалиующий в исправном состоянии приписанную ему булеву функцию) в неисправном состоянии реализует константу 0, будем называть ее неисправностью типа 0 на выходе элемента. Если же элемент в неисправном состоянии реализует константу 1, будем называть эту неисправность неисправностью типа 1 на выходе элемента.

Ненадежность $P(S)$ схемы S, реализующей $f(\widetilde{x})$, для указанных неисправностей определяется так же, как и для инверсных неисправностей, т. е.

$$P(S) = \max_{\widetilde{a}} P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a}),$$

где $P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ — вероятность появления значения $\overline{f}(\widetilde{a})$ на выходе схемы S при входном (произвольном) наборе $\widetilde{a}$.

Надежность схемы равна $1 - P(S)$.

Будем считать веса всех элементов равными единице, и тогда сложность $L(S)$ схемы S — число функциональных элементов в ней.

Покажем, что в рассматриваемых базисах при однотипных константных неисправностях почти все булевы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать схемами S, асимптотически наилучшими по надежности $P(S) \leqslant a\gamma^t$, $P(S) \geqslant a\gamma^t - b\gamma^{t+1}$ $(\gamma \leqslant 1/600k)$, причем их сложность имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов, $L(S) \lesssim c \cdot 2^n/n$ (константы a, b, c, k, t положительны, зависят от базиса и типа неисправностей, $t \in \{1, 2\}$).

§ 1. Синтез и сложность надежных схем из ненадежных элементов x/y

Пусть базис Б состоит из одной функции x/у. Пусть p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе элемента (α, β, δ, $\tau < 1/2$), тогда функционирование базисного элемента можно описать следующей таблицей.

x	y	x/y	p_0	p_1
0	0	1	α	$1-\alpha$
0	1	1	β	$1-\beta$
1	0	1	δ	$1-\delta$
1	1	0	$1-\tau$	τ

Во всех дальнейших рассуждениях базис x/y будет играть основополагающую роль, а именно, все другие базисы, рассматриваемые здесь, при синтезе схем более высокой надежности будут редуцироваться именно к нему.

При этом в синтезе схем с интересующими нас свойствами особое место будет отведено двум операциям над схемами (одна из них, по существу, введена в работе [3], а другая использует схему G, реализующую функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$). Выбор схемы G обусловлен базисом и типом неисправностей, пока же важно только, что схема G реализует функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3)$.

Операция φ позволяет по произвольной схеме S, реализующей булеву функцию f, строить схему $\varphi(S)$, представленную на рис. 1 (через $S_/$ обозначена схема, реализующая функцию x/y). Результат n-кратного применения ($n \in \mathbb{N}$) операции φ к схеме S будем обозначать $\varphi^n(S)$.

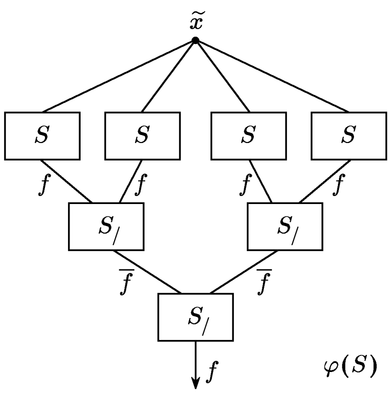

Рис. 1

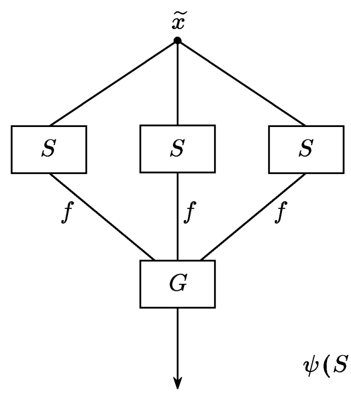

Рис. 2

Операция ψ по произвольной схеме S, реализующей булеву функцию f, строит схему $\psi(S)$, она приведена на рис. 2. Результат n-кратного применения ($n \in \mathbb{N}$) операции ψ к схеме S будем обозначать $\psi^n(S)$.

Очевидно, в результате применения (возможно, неоднократного) операций φ и ψ к схеме S, реализующей булеву функцию f, получаются схемы, реализующие ту же функцию f. Кроме того, применение этих операций к некоторым схемам S (при некоторых условиях на $P(S)$) приводит к схемам, имеющим более высокую надежность, чем исходная схема S.

Далее будут рассмотрены некоторые вспомогательные утверждения.

В работе [3] и всюду далее в этом параграфе в качестве схемы $S_/$ взят функциональный элемент x/y, функционирующий согласно приведенной выше таблице. В [3] доказано, что

$$\begin{aligned} P(\varphi(S)) \leqslant \max\{&2\alpha+\tau+2(\beta+\delta)P(S)+2P^2(S), \\ &\alpha+(\beta+\delta)(\tau+2P(S))+(\tau+2P(S))^2\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\mu = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$. Тогда из (1) следует, что

$$\begin{aligned} P(\varphi(S)) \leqslant \max\{&3\mu+4\mu P(S)+2P^2(S), \\ &\mu+2\mu(\mu+2P(S))+(\mu+2P(S))^2\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Перейдем к изложению метода построения надежных схем из ненадежных элементов x/y без существенного увеличения сложности схем.

Т е о р е м а 1. *При $\mu \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой S, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(S) \leqslant 7\mu, \qquad L(S) \lesssim 56 \cdot 2^n/n.$$

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1 [11]. *Если схема S допускает разбиение на не имеющие общих функциональных элементов подсхемы $S^1, \ldots, S^k$ (каждая из которых имеет один выход), в совокупности содержащие все элементы схемы S, то $P(S) \leqslant \sum_{i=1}^{k} P(S^i)$.*

Лемма 2. *Любую булеву функцию, зависящую не более чем от одной переменной x, можно реализовать схемой S такой, что $L(S) \leqslant 3$, $P(S) \leqslant 3\mu$.*

Действительно, на рис. 3 приведены схемы, для которых утверждение верно (см. лемму 1).

Замечание 1. Для реализации функций, зависящих не более чем от одной переменной x (функции $x, \overline{x}, 0, 1$; см. рис. 3), достаточно использовать шесть элементов.

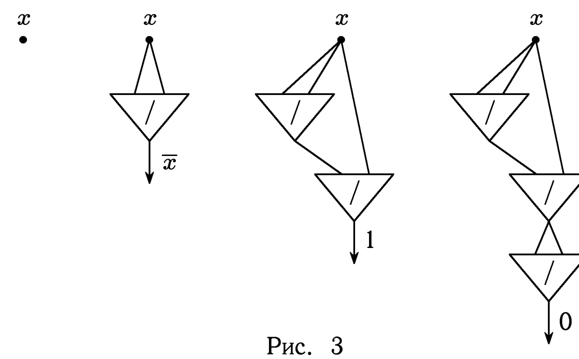

Рис. 3

Лемма 3. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\mu \leqslant 2/99$ можно реализовать схемой G_1 такой, что*

$$L(G_1) = 27, \qquad P(G_1) \leqslant 3\mu + 96\mu^2.$$

Доказательство. Схема S_g на рис. 4 реализует функцию g. Очевидно, что $L(S_g) = 6$, $P(S_g) \leqslant 6\mu$ (см. лемму 1).

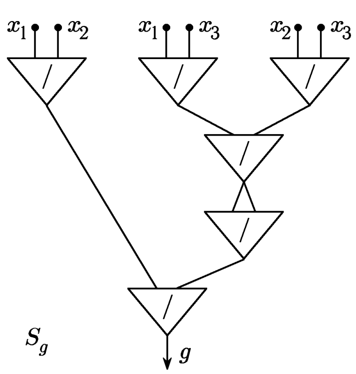

Рис. 4

Применим к схеме S_g операцию φ (рис. 1). Ясно, что схема $\varphi(S_g)$ имеет сложность 27, а ее ненадежность при $\mu \leqslant 2/99$ удовлетворяет неравенству (2): $P(\varphi(S_g)) \leqslant 3\mu + 96\mu^2$.

Схема $\varphi(S_g)$ есть схема G_1.

Лемма 4. *Пусть схема S реализует булеву функцию f, схема G — произвольная схема, реализующая функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3)$. Тогда $P(\psi(S)) \leqslant 3P^2(S) + P(G)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{a}$ — произвольный двоичный входной набор схемы S. Пусть p — вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\widetilde{a}$. Оценим вероятность ошибки P на выходе схемы $\psi(S)$ (рис. 2) на этом наборе:

$$P \leqslant P(G)(1-p)^3 + 3P(G)p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + p^3 = \\ = P(G)(1 - 3p^2 + 2p^3) + 3p^2 - 2p^3 \leqslant P(G) + 3p^2.$$

Следовательно, $P(\psi(S)) \leqslant 3P^2(S) + P(G)$.

Введем функции выбора (еще их называют селекторными функциями):

$$v_{2i}(x_1, x_2, \ldots, x_{2i}, y_0, y_1, \ldots, y_{2^{2i}-1}) = \bigvee_{\widetilde{a}} K_{\widetilde{a}}(\widetilde{x}) \,\&\, y_{|\widetilde{a}|},$$

где $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_{2i})$, $K_{\widetilde{a}}(\widetilde{x}) = x_1^{a_1} \& \ldots \& x_{2i}^{a_{2i}}$, $|\widetilde{a}| = \sum_{j=1}^{2i} a_i \cdot 2^{2i-j}$ (т. е. $|\widetilde{a}|$ — число, двоичной записью которого является набор $\widetilde{a}$). Поскольку $K_{\widetilde{a}}(\widetilde{b})$ обращается в нуль при $\widetilde{a} \neq \widetilde{b}$ и в единицу при $\widetilde{a} = \widetilde{b}$, то при подстановке $a_1, \ldots, a_{2i}$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_{2i}$ в функцию выбора эта функция обращается в $y_{|\widetilde{a}|}$.

Лемма 5. *Булеву функцию выбора $v_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, y_3)$ можно реализовать схемой выбора V_2 такой, что $L(V_2) = 11$, $P(V_2) \leqslant 8\mu$.*

Доказательство. Схема на рис. 5 реализует функцию v_2. Разобьем эту схему на подсхемы A, B, C. Если подсхема C исправна, то при реализации функции v_2 она использует выходное значение одной из схем A или B. Выбор схемы зависит от значения переменной x_1. Поэтому $P(V_2) \leqslant P(C) + \max\{P(A), P(B)\}$.

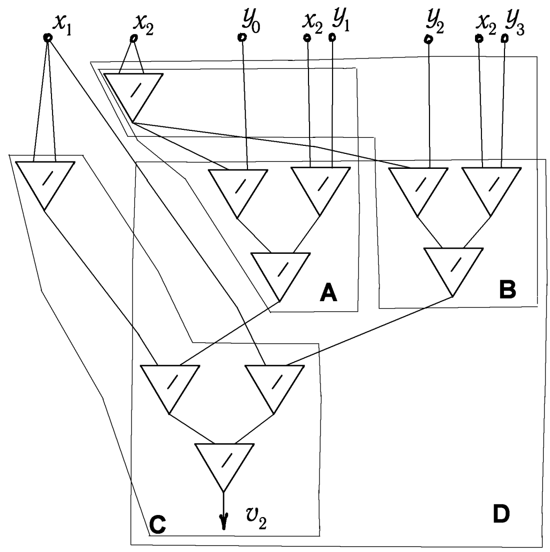

Рис. 5

Подсхема C состоит из четырех функциональных элементов, и по лемме 1 получаем $P(C) \leqslant 4\mu$.

Аналогично доказывается, что $P(A) \leqslant 4\mu$ и $P(B) \leqslant 4\mu$.

Следовательно, $P(V_2) \leqslant 8\mu$.

Всюду далее в этом параграфе в качестве схемы G используется схема G_1 из леммы 3.

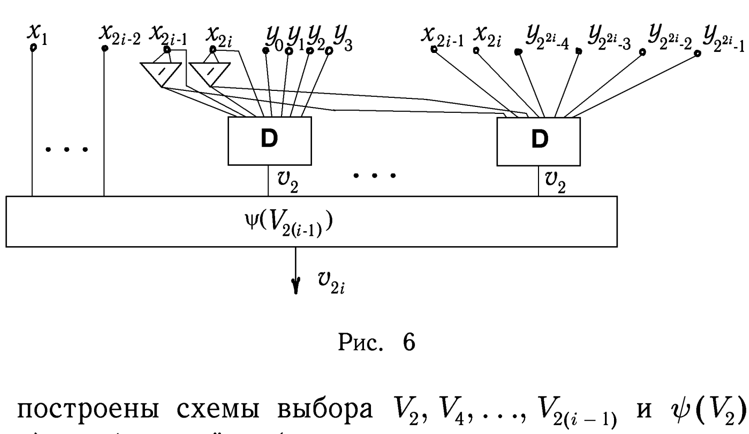

Рис. 6

Пусть построены схемы выбора $V_2, V_4, \ldots, V_{2(i-1)}$ и $\psi(V_2), \psi(V_4), \ldots \ldots, \psi(V_{2(i-1)})$ для функций выбора $v_2, v_4, \ldots, v_{2(i-1)}$ соответственно. Построим схему V_{2i}, реализующую функцию v_{2i}, как показано на рис. 6, используя схему $\psi(V_{2(i-1)})$, два функциональных элемента для реализации функций

$\overline{x}_{2i-1}$, $\overline{x}_{2i}$ и схемы D в количестве $2^{2(i-1)}$ штук. Схема D получается из схемы V_2 удалением двух элементов, реализующих функции $\overline{x}_{2i-1}$, $\overline{x}_{2i}$ (рис. 5).

Для схемы S_7, изображенной на рис. 7, подсхемы $S^0, \ldots, S^{2^{2i}-1}$ которой — произвольные схемы, верна

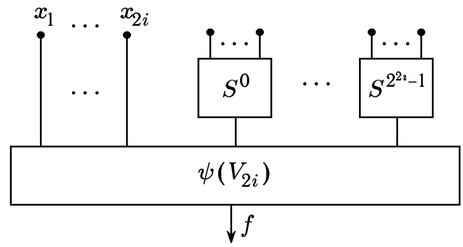

Рис. 7

Л е м м а 6. *Пусть подсхемы* $S^0, \ldots, S^{2^{2i}-1}$ *схемы* S_7 *на рис.* 7 *произвольны, тогда*

$$P(S_7) \leqslant P(\psi(V_{2i})) + \max\{P(S^0), \ldots, P(S^{2^{2i}-1})\}.$$

Действительно, если подсхема $\psi(V_{2i})$, реализующая булеву функцию v_{2i}, исправна, то значение на выходе зависит от выходного значения только одной из схем $S^0, \ldots, S^{2^{2i}-1}$, поэтому утверждение леммы верно.

Оценим сложность и ненадежность построенных схем выбора.

Л е м м а 7. *Пусть* $\mu \leqslant 1/600$. *Тогда*

$$L(\psi(V_{2i})) \leqslant 14 \cdot 2^{2i+1}, \qquad P(\psi(V_{2i})) \leqslant 3\mu + 528\mu^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукция по i.

Основание индукции: при $i = 1$, используя леммы 3 ($G = G_1$), 4 и 5, при $\mu \leqslant 1/600$ получаем

$$L(\psi(V_2)) = 3L(V_2) + L(G_1) = 33 + 27 = 60 < 14 \cdot 2^3,$$
$$P(\psi(V_2)) \leqslant 3P^2(V_2) + P(G_1) \leqslant 3\mu + 288\mu^2 \leqslant 3\mu + 528\mu^2 \leqslant 4\mu.$$

При $i = 2$, используя те же леммы, а также лемму 6, при $\mu \leqslant 1/600$ имеем

$$L(\psi(V_4)) = 3L(V_4) + L(G_1) = 3(2^2 L(D) + 2 + L(\psi(V_2))) + L(G_1) = \\ = 321 < 14 \cdot 2^5,$$
$$P(\psi(V_4)) \leqslant 3P^2(V_4) + P(G_1) \leqslant 3(P(\psi(V_2)) + P(V_2))^2 + P(G_1) \leqslant \\ \leqslant 3(4\mu + 8\mu)^2 + P(G_1) \leqslant 3\mu + 528\mu^2 \leqslant 4\mu.$$

При $i = 3$ ($\mu \leqslant 1/600$) имеем

$$L(\psi(V_6)) = 3L(V_6) + L(G_1) = 3(2^4 L(D) + 2 + L(\psi(V_4))) + L(G_1) = \\ = 1428 < 14 \cdot 2^7,$$
$$P(\psi(V_6)) \leqslant 3P^2(V_6) + P(G_1) \leqslant 3(P(\psi(V_4)) + P(V_2))^2 + P(G_1) \leqslant \\ \leqslant 3(4\mu + 8\mu)^2 + P(G_1) \leqslant 3\mu + 528\mu^2 \leqslant 4\mu.$$

Пусть утверждение леммы верно для схем $\psi(V_2), \psi(V_4), \ldots, \psi(V_{2(i-1)})$. Докажем его справедливость для схемы $\psi(V_{2i})$ при $i \geqslant 4$ ($\mu \leqslant 1/600$):

$$L(\psi(V_{2i})) = 3L(V_{2i}) + L(G_1) \leqslant 3(2^{2i-2} L(D) + 2 + L(\psi(V_{2i-2}))) + L(G_1) \leqslant \\ \leqslant 3(2^{2i-2} 9 + 2 + 14 \cdot 2^{2i-1}) + 27 \leqslant 14 \cdot 2^{2i+1},$$
$$P(\psi(V_{2i})) \leqslant 3P^2(V_{2i}) + P(G_1) \leqslant 3(P(\psi(V_{2i-2})) + P(V_2))^2 + P(G_1) \leqslant \\ \leqslant 3(4\mu + 8\mu)^2 + P(G_1) \leqslant 3\mu + 528\mu^2.$$

Лемма 8. *Любую булеву функцию f от k переменных при $\mu \leqslant 1/600$ можно реализовать схемой S такой, что*

$$L(S) \leqslant 224 \cdot 2^{2[k/2]+1} + 111, \qquad P(S) \leqslant 3\mu + 35\mu^2.$$

Доказательство. Положим $i = [k/2]$ и представим функцию f в виде $f(x_1, \ldots x_k) = \bigvee_{(a_1, \ldots, a_{2i})} x_1^{a_1} \& \ldots \& x_{2i}^{a_{2i}} \& y_{|\widetilde{a}|}$, где $y_{|\widetilde{a}|} = f(a_1, \ldots, a_{2i})$, если k четное, и $y_{|\widetilde{a}|} = f(a_1, \ldots, a_{2i}, x_k)$, если k нечетное.

Функцию f реализуем схемой S_7 (рис. 7), учитывая, что подсхема S^m $(m = 0, 1, 2, \ldots, 2^{2i} - 1)$ реализует функцию $y_m \in \{0, 1, x_k, \overline{x_k}\}$.

По леммам 7 и 2 имеем $L(S_7) \leqslant 14 \cdot 2^{2i+1} + 6$, поскольку шести элементов достаточно для реализации функций одной переменной x_k (см. замечание 1). Ссылаясь на леммы 6, 7 и 2, при $\mu \leqslant 1/600$ получаем

$$P(S_7) \leqslant P(\psi(V_{2i})) + \max\{P(S_0), \ldots, P(S_{2^{2i}-1})\} \leqslant$$
$$\leqslant 3\mu + 528\mu^2 + 3\mu = 6\mu + 528\mu^2 \leqslant 7\mu.$$

Применим к схеме S_7 операцию φ, тогда $L(\varphi(S_7)) = 4L(S_7) + 3 \leqslant \leqslant 56 \cdot 2^{2[k/2]+1} + 27$. При $\mu \leqslant 1/600$ из (2) следует $P(\varphi(S_7)) \leqslant 3\mu + 126\mu^2 \leqslant \leqslant 3.25\mu$.

Проделаем еще один шаг итерации, т. е. построим схему $\varphi^2(S_7)$, тогда $L(\varphi^2(S_7)) = 4L(\varphi(S_7)) + 3 \leqslant 224 \cdot 2^{2[k/2]+1} + 111$. При $\mu \leqslant 1/600$ из (2) следует $P(\varphi^2(S_7)) \leqslant 3\mu + 35\mu^2$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $i =](n - \log(n - 3\log n))[/2$. Тогда справедливы неравенства

$$2i < n - \log(n - 3\log n) + 1, \qquad n - 2i \leqslant \log(n - 3\log n), \tag{3}$$

$$2^{2i+1} < 4 \cdot 2^n/(n - 3\log n), \qquad 2^{n-2i} \leqslant n - 3\log n, \qquad 2^{2^{n-2i}} \leqslant 2^n/n^3. \tag{4}$$

Разложим булеву функцию f по первым $2i$ переменным:

$$f(\widetilde{x}) = \bigvee_{(a_1, \ldots, a_{2i})} x_1^{a_1} \& \ldots \& x_{2i}^{a_{2i}} \& f(a_1, \ldots, a_{2i}, x_{2i+1}, \ldots, x_n).$$

Схема S_7 (рис. 7), подсхемы $S^0, \ldots, S^{2^{2i}-1}$ которой реализуют функции $f(a_1, \ldots, a_{2i}, x_{2i+1}, \ldots, x_n)$ и удовлетворяют условиям леммы 8, реализует функцию f.

Используя леммы 6, 7, 8 и учитывая (3), (4), оценим сложность и ненадежность этой схемы $(\mu \leqslant 1/600)$:

$$L(S_7) \leqslant L(\psi(V_{2i})) + 2^{2^{n-2i}} L(f(a_1, \ldots, a_{2i}, x_{2i+1}, \ldots, x_n)) \leqslant$$
$$\leqslant 14 \cdot 2^{2i+1} + 2^{2^{n-2i}}(224 \cdot 2^{2[(n-2i)/2]+1} + 111) <$$
$$< 14 \cdot 4 \cdot 2^n/(n - 3\log n) + 2^n(544(n - 3\log n) + 111)/n^3 \lesssim 56 \cdot 2^n/n,$$
$$P(S_7) \leqslant P(\psi(V_{2i})) + \max_m P(S^m) \leqslant 3\mu + 528\mu^2 + 3\mu + 35\mu^2 =$$
$$= 6\mu + 563\mu^2 \leqslant 7\mu \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, 2^{2i} - 1).$$

Схема S_7 есть схема S, удовлетворяющая условиям теоремы.

Таким образом, в базисе $\{x/y\}$ любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой не более чем в 7 раз превышает ненадежность одного функционального элемента. При этом сложность построенной схемы имеет тот же порядок роста, что и сложность схемы, построенной только из надежных элементов.

Теорему 1 легко обобщить на случай произвольного конечного базиса, используя в качестве элемента x/y соответствующий блок из элементов нового базиса.

Теорема 2. *Пусть* $\text{Б} = \{e_1, \ldots, e_l\}$ *— произвольный базис,* $\mu = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_l\}$, *где* μ_i *— ненадежность базисного элемента* E_i, *которому приписана функция* e_i $(i = 1, \ldots, l)$, k *— сложность минимальной схемы, реализующей функцию* x/y. *Тогда при* $\mu \leqslant 1/600k$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* S *такой, что*

$$P(S) \leqslant 7k\mu, \qquad L(S) \lesssim 56k \cdot 2^n/n.$$

Замечание 2. В некоторых базисах ограничение на надежность ($\mu \leqslant 1/600k$) используемых элементов можно ослабить.

Полученные результаты позволяют в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на выходах или на входах элементов строить наилучшие по надежности схемы, сложность которых имеем тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

§ 2. Неисправности типа 0 на выходах элементов в различных базисах

Пусть базисные элементы независимо друг от друга с вероятностью γ ($\gamma < 1/2$) переходят в неисправные состояния.

Если неисправность такова, что элемент (реализующий в исправном состоянии приписанную ему булеву функцию) в неисправном состоянии реализует константу 0, будем называть ее неисправностью типа 0 на выходе элемента. Если же элемент в неисправном состоянии реализует константу 1, будем называть эту неисправность неисправностью типа 1 на выходе элемента.

1. Базис $\{x/y\}$. При неисправностях типа 0 на выходе функционального элемента x/y имеем $\alpha = \beta = \delta = \gamma$, $\tau = 0$, а $\mu = \gamma$. Возьмем в качестве схемы $S_/$ базисный элемент x/y, тогда (см. [3]) соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид:

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + 2P^2(S), \gamma + 4P^2(S)\}. \tag{5}$$

Далее в этом пункте в качестве схемы $S_/$ на рис. 1 всюду взят базисный элемент x/y.

Из теоремы 1 следует

Теорема 3. *При* $\gamma \leqslant 1/600$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_1, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_1) \leqslant 7\gamma, \qquad L(A_1) \lesssim 56 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 4. *При* $\gamma \leqslant 1/600$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_2, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_2) \leqslant 2\gamma + 98\gamma^2, \qquad L(A_2) \lesssim 224 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_1, удовлетворяющую условиям теоремы 3. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_1)) \lesssim 4 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 224 \cdot 2^n/n$. Из (5) следует $P(\varphi(A_1)) \leqslant 2\gamma + 98\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_1)$ есть схема A_2.

Лемма 9. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/600$ можно реализовать схемой A_3 такой, что*

$$L(A_3) = 111, \qquad P(A_3) \leqslant 2\gamma + 9\gamma^2.$$

Доказательство. Схема S_g на рис. 4 реализует функцию g. Очевидно, что $L(S_g) = 6$, $P(S_g) \leqslant 6\gamma$ (см. лемму 1).

Применим к схеме S_g операцию φ. Тогда $L(\varphi(S_g)) = 27$, из (5) следует, что $P(\varphi(S_g)) \leqslant 2\gamma + 72\gamma^2$.

К схеме $\varphi(S_g)$ применим операцию φ, тогда $L(\varphi^2(S_g)) = 4L(\varphi(S_g)) + 3 = 111$. При $\gamma \leqslant 1/600$ из (5) следует $P(\varphi^2(S_g)) \leqslant 2\gamma + 9\gamma^2$.

Схема $\varphi^2(S_g)$ есть схема A_3.

Теорема 5. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_4, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_4) \leqslant 2\gamma + 11\gamma^2, \qquad L(A_4) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_1, удовлетворяющую условиям теоремы 3. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_3 из леммы 9. Тогда

$$L(\psi(A_1)) \lesssim 3 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 168 \cdot 2^n/n.$$

По леммам 4 и 9 при $\gamma \leqslant 1/600$ имеем

$$P(\psi(A_1)) \leqslant 3P^2(A_1) + P(A_3) \leqslant 3(7\gamma)^2 + 2\gamma + 9\gamma^2 = 2\gamma + 156\gamma^2 \leqslant 2.26\gamma.$$

К схеме $\psi(A_1)$ применим операцию φ. Тогда (см. (5))

$$L(\varphi(\psi(A_1))) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n, \qquad P(\varphi(\psi(A_1))) \leqslant 2\gamma + 11\gamma^2.$$

Схема $\varphi(\psi(A_1))$ есть схема A_4.

Таким образом, в базисе $\{x/y\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [1], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

2. Базис $\{x \downarrow y\}$. Базисный элемент $x \downarrow y$ функционирует с вероятностями ошибок $p_0(00) = \gamma$, $p_1(01) = p_1(10) = p_1(11) = 0$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\tau = \gamma$. Тогда $\mu = \gamma$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{\gamma + 2P^2(S), (\gamma + 2P(S))^2\}. \tag{6}$$

Из теоремы 1 для базиса $\{x \downarrow y\}$ следует

Теорема 6. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_4, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_4) \leqslant 7\gamma, \qquad L(A_4) \lesssim 56 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 7. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_5, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_5) \leqslant \gamma + 98\gamma^2, \qquad L(A_5) \lesssim 224 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_4, удовлетворяющую условиям теоремы 6. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_4)) \lesssim 4 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 224 \cdot 2^n/n$. Из (6) следует $P(\varphi(A_4)) \leqslant \gamma + 98\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_4)$ есть схема A_5.

Лемма 10. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/600$ можно реализовать схемой A_6 такой, что*

$$L(A_6) = 111, \qquad P(A_6) \leqslant \gamma + 3\gamma^2.$$

Доказательство. Схема S_g на рис. 4 реализует функцию g, если заменить каждый элемент x/y на элемент $x \downarrow y$. Нетрудно проверить, что $L(S_g) = 6$, $P(S_g) \leqslant 2\gamma$.

К схеме S_g применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(S_g)) = 27$, из (6) следует, что $P(\varphi(S_g)) \leqslant \gamma + 8\gamma^2$.

К схеме $\varphi(S_g)$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi^2(S_g)) = 4L(\varphi(S_g)) + 3 = 111$. При $\gamma \leqslant 1/600$ из (6) следует $P(\varphi^2(S_g)) \leqslant \gamma + 3\gamma^2$.

Схема $\varphi^2(S_g)$ есть схема A_6.

Теорема 8. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_7, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_7) \leqslant \gamma + 4\gamma^2, \qquad L(A_7) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_4, удовлетворяющую условиям теоремы 6. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_6 (лемма 10). Тогда

$$L(\psi(A_4)) \lesssim 3 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 168 \cdot 2^n/n.$$

По леммам 4 и 10 при $\gamma \leqslant 1/600$ имеем

$$P(\psi(A_4)) \leqslant 3P^2(A_4) + P(A_6) \leqslant 3(7\gamma)^2 + \gamma + 3\gamma^2 = \gamma + 150\gamma^2 \leqslant 1.25\gamma.$$

К схеме $\psi(A_4)$ применим операцию φ. Тогда (см. (6))

$$L(\varphi(\psi(A_4))) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n,$$
$$P(\varphi(\psi(A_4))) \leqslant \gamma + 3.125\gamma^2 \leqslant \gamma + 4\gamma^2.$$

Схема $\varphi(\psi(A_4))$ есть схема A_7.

Таким образом, в базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [1], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{x/y\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

3. Базис $\{\&, ^{-}\}$. Моделируя формулу $\overline{x} \,\&\, \overline{y}$, построим схему из трех элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_0(00)=3\gamma-3\gamma^2+\gamma^3$, $P_1(01)=P_1(10)=P_1(11)=0$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_{/}$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha=\beta=\delta=0$, $\tau=3\gamma-3\gamma^2+\gamma^3$. Тогда $\mu=3\gamma-3\gamma^2+\gamma^3$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{3\gamma-3\gamma^2+\gamma^3+2P^2(S), (3\gamma-3\gamma^2+\gamma^3+2P(S))^2\}. \quad (7)$$

Из теоремы 2 для базиса $\{\&, ^{-}\}$ следует

Теорема 9. *При $\gamma \leqslant 1/1800$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_8, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_8) \leqslant 21\gamma, \qquad L(A_8) \lesssim 168 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 10. *При $\gamma \leqslant 1/1800$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_9, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_9) \leqslant 3\gamma+879\gamma^2+\gamma^3 \leqslant 3.5\gamma, \qquad L(A_9) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_8, удовлетворяющую условиям теоремы 9. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_8)) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n$. При $\gamma \leqslant 1/1800$ из (7) следует $P(\varphi(A_8)) \leqslant 3\gamma-3\gamma^2+\gamma^3+ 882\gamma^2 = 3\gamma+879\gamma^2+\gamma^3 \leqslant 3.5\gamma$.

Схема $\varphi(A_8)$ есть схема A_9.

Лемма 11. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/1800$ можно реализовать схемой A_9 такой, что*

$$L(A_9)=333, \qquad P(A_9) \leqslant 3\gamma+24\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 11. *При $\gamma \leqslant 1/1800$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{10}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{10}) \leqslant 3\gamma+26\gamma^2, \qquad L(A_{10}) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_8, удовлетворяющую условиям теоремы 9. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G

схему A_9 (лемма 11). Тогда $L(\psi(A_8)) \lesssim 3 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 504 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 11 при $\gamma \leqslant 1/1800$ имеем $P(\psi(A_8)) \leqslant 3P^2(A_8) + P(A_9) \leqslant 3(21\gamma)^2 + 3\gamma + 24\gamma^2 = 3\gamma + 1347\gamma^2 \leqslant 3.75\gamma$.

К схеме $\psi(A_8)$ применим операцию φ. Тогда при $\gamma \leqslant 1/1800$ (см. (7))

$$L(\varphi(\psi(A_8))) \lesssim 4 \cdot 504 \cdot 2^n/n = 2016 \cdot 2^n/n,$$
$$P(\varphi(\psi(A_8))) \leqslant 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3 + 2(3.75\gamma)^2 \leqslant 3\gamma + 26\gamma^2.$$

Схема $\varphi(\psi(A_8))$ есть схема A_{10}.

Таким образом, в базисе $\{\&, {}^-\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [1], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\vee, {}^-\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

4. Базис $\{\not\to, \sim\}$. Моделируя формулу $(x \not\to y) \sim y$, построим схему из двух элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$ с вероятностями ошибок $P_0(00) = \gamma$, $P_1(01) = 0$, $P_1(10) = \gamma(1-\gamma)$, $P_1(11) = 0$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = 0$, $\beta = \gamma(1-\gamma)$, $\delta = 0$, $\tau = \gamma$. Тогда $\mu = \gamma$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{\gamma + 2\gamma P(S) + 2P^2(S), 2\gamma^2 + 6\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \qquad (8)$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\not\to, \sim\}$ следует

Теорема 12. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{11}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{11}) \leqslant 7\gamma, \qquad L(A_{11}) \lesssim 112 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 13. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{12}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{12}) \leqslant \gamma + 122\gamma^2, \qquad L(A_{12}) \lesssim 448 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{11}, удовлетворяющую условиям теоремы 12. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{11})) \lesssim 4 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 448 \cdot 2^n/n$. Из (8) следует $P(\varphi(A_{11})) \leqslant \gamma + 122\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{11})$ есть схема A_{12}.

Лемма 12. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/600$ можно реализовать схемой A_{13} такой, что*

$$L(A_{13}) = 207, \qquad P(A_{13}) \leqslant \gamma + 5\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 14. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{14}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{14}) \leqslant \gamma + 6\gamma^2, \qquad L(A_{14}) \lesssim 1344 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{11}, удовлетворяющую условиям теоремы 12. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{13} (лемма 12). Тогда $L(\psi(A_{11})) \lesssim 3 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 336 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 12 имеем $P(\psi(A_{11})) \leqslant 3P^2(A_{11}) + P(A_{13}) \leqslant 3(7\gamma)^2 + \gamma + 5\gamma^2 = \gamma + 152\gamma^2$.

К схеме $\psi(A_{11})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{11}))) \lesssim 4 \cdot 336 \cdot 2^n/n = 1344 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/600$ (см. (8)) $P(\varphi(\psi(A_{11}))) \leqslant \gamma + 6\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{11}))$ есть схема A_{14}.

Таким образом, в базисе $\{\not\to, \sim\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [5], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\to, \oplus\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

5. Базис $\{\not\to, \bar{\ }\}$. Моделируя формулу $\bar{x} \not\to y$, построим схему из двух элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$ с вероятностями ошибок $P_0(00) = 2\gamma - \gamma^2$, $P_1(01) = P_1(10) = P_1(11) = 0$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_{/}$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\tau = 2\gamma - \gamma^2$. Тогда $\mu = 2\gamma - \gamma^2$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma - \gamma^2 + 2P^2(S), (2\gamma - \gamma^2 + 2P(S))^2\}. \tag{9}$$

Из теоремы 2 для базиса $\{\not\to, \bar{\ }\}$ следует

Теорема 15. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{15}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{15}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{15}) \lesssim 112 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 16. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{16}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{16}) \leqslant 2\gamma + 391\gamma^2, \qquad L(A_{16}) \lesssim 448 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{15}, удовлетворяющую условиям теоремы 15. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{15})) \lesssim 4 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 448 \cdot 2^n/n$. Из (9) следует $P(\varphi(A_{15})) \leqslant 2\gamma + 391\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{15})$ есть схема A_{16}.

Лемма 13. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ *при* $\gamma \leqslant 1/1200$ *можно реализовать схемой* A_{17} *такой, что*

$$L(A_{17}) = 207, \qquad P(A_{17}) \leqslant 2\gamma + 10\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 17. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{18}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{18}) < 2\gamma + 12\gamma^2, \qquad L(A_{18}) \lesssim 1344 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{15}, удовлетворяющую условиям теоремы 15. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{17} (лемма 13). Тогда $L(\psi(A_{15})) \lesssim 3 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 336 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 13 имеем $P(\psi(A_{15})) \leqslant 3P^2(A_{15}) + P(A_{17}) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 10\gamma^2 = 2\gamma + 598\gamma^2$.

К схеме $\psi(A_{15})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{15}))) \lesssim 4 \cdot 336 \cdot 2^n/n = 1344 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/1200$ (см. (9)) $P(\varphi(\psi(A_{15}))) \leqslant 2\gamma - \gamma^2 + 2(2\gamma + 598\gamma^2)^2 \leqslant 2\gamma + 12\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{15}))$ есть схема A_{18}.

Таким образом, в базисе $\{\not\to, ^-\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [5], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\to, ^-\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

6. Базис $\{\not\to, 1\}$. Моделируя формулу $(1 \not\to x) \not\to y$, построим схему из трех элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_0(00) = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$, $P_1(01) = P_1(10) = P_1(11) = 0$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\tau = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$. Тогда $\mu = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3 + 2P^2(S), (3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3 + 2P(S))^2\}.$$

Из теоремы 2 для базиса $\{\&, ^-\}$ следует

Теорема 18. *При* $\gamma \leqslant 1/1800$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{19}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{19}) \leqslant 21\gamma, \qquad L(A_{19}) \lesssim 168 \cdot 2^n/n.$$

Учитывая вышесказанное и результаты п. 3 этого параграфа, убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Теорема 19. *При* $\gamma \leqslant 1/1800$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{20}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{20}) \leqslant 3\gamma + 879\gamma^2 + \gamma^3 \leqslant 3.5\gamma, \qquad L(A_{20}) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Лемма 14. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ *при* $\gamma \leqslant 1/1800$ *можно реализовать схемой* A_{21} *такой, что*

$$L(A_{21}) = 333, \qquad P(A_{21}) \leqslant 3\gamma + 24\gamma^2.$$

Теорема 20. *При* $\gamma \leqslant 1/1800$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{22}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{22}) \leqslant 3\gamma + 26\gamma^2, \qquad L(A_{22}) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Таким образом, в базисе $\{\not\to, 1\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [7], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\to, 0\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

§ 3. Неисправности типа 0 на входах элементов в различных базисах

Пусть базисные элементы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния на входах, причем вероятность неисправности каждого входа равна γ ($\gamma < 1/2$).

Если неисправность элемента такова, что поступающий на его вход нуль остается нулем, а поступающая на его вход единица с вероятностью γ может превратиться в нуль, будем называть ее неисправностью типа 0 на входе элемента. Если же неисправность элемента такова, что поступающая на его вход единица остается единицей, а нуль с вероятностью γ может превратиться в единицу, будем называть ее неисправностью типа 1 на входе элемента.

1. Базис $\{x/y\}$. При неисправностях типа 0 на входах функционального элемента x/y имеем $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\tau = 2\gamma - \gamma^2$, а $\mu = 2\gamma - \gamma^2$. Соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + 2P^2(S), 4(\gamma + P(S))^2\}. \tag{10}$$

Из теоремы 1 следует

Теорема 21. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{23}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{23}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{23}) \lesssim 56 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 22. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{24}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{24}) \leqslant 2\gamma + 392\gamma^2, \qquad L(A_{24}) \lesssim 224 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{23}, удовлетворяющую условиям теоремы 21. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{23})) \lesssim 4 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 224 \cdot 2^n/n$. Из (10) следует $P(\varphi(A_{23})) \leqslant 2\gamma + 392\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{23})$ есть схема A_{24}.

Лемма 15. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ *при* $\gamma \leqslant 1/1200$ *можно реализовать схемой* A_{25} *такой, что*

$$L(A_{25}) = 111, \qquad P(A_{25}) \leqslant 2\gamma + 10\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 23. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{26}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{26}) \leqslant 2\gamma + 13\gamma^2, \qquad L(A_{26}) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{23}, удовлетворяющую условиям теоремы 21. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{25} (лемма 15). Тогда $L(\psi(A_{23})) \lesssim 3 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 168 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 15 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем $P(\psi(A_{23})) \leqslant 3P^2(A_{23}) + P(A_g) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 10\gamma^2 = 2\gamma + 598\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma$.

К схеме $\psi(A_{23})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{23}))) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/1200$ (см. (10)) $P(\varphi(\psi(A_{23}))) \leqslant 2\gamma + 13\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{23}))$ есть схема A_{26}.

Таким образом, в базисе $\{x/y\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов все булевы функции, кроме, быть может, константы 1, можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

2. Базис $\{x \downarrow y\}$. Базисный элемент $x \downarrow y$ функционирует с вероятностями ошибок $p_0(00) = 0$, $P_1(01) = P_1(10) = \gamma$, $P_1(11) = \gamma^2$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \gamma^2$, $\beta = \delta = \gamma$, $\tau = 0$. Тогда $\mu = \gamma$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2(\gamma + P(S))^2, (\gamma + 2P(S))^2\}. \tag{11}$$

Из теоремы 1 для базиса $\{x \downarrow y\}$ следует

Теорема 24. *При* $\gamma \leqslant 1/600$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{27}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{27}) \leqslant 7\gamma, \qquad L(A_{27}) \lesssim 56 \cdot 2^n/n.$$

Лемма 16. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ *при* $\gamma \leqslant 1/600$ *можно реализовать схемой* A_{28} *такой, что*

$$L(A_{28}) = 447, \qquad P(A_{28}) \leqslant 2\gamma^2 + 14\gamma^3.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 25. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{29}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{29}) \leqslant 2\gamma^2 + 9\gamma^3, \qquad L(A_{29}) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{27}, удовлетворяющую условиям теоремы 24. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{28} (лемма 16). Тогда $L(\psi(A_{27})) \lesssim 3 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 168 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 16 при $\gamma \leqslant 1/600$ имеем $P(\psi(A_{27})) \leqslant 3P^2(A_{27}) + P(A_{28}) \leqslant 3(7\gamma)^2 + 2\gamma^2 + 14\gamma^3 = 149\gamma^2 + 14\gamma^3 \leqslant 0.25\gamma$.

К схеме $\psi(A_{27})$ применим операцию ψ. Тогда $L(\psi^2(A_{27})) \lesssim 3 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 504 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 16 при $\gamma \leqslant 1/600$ имеем $P(\psi^2(A_{27})) \leqslant 3P^2(\psi(A_{27})) + P(A_{28}) \leqslant 3(0.25\gamma)^2 + 2\gamma^2 + 14\gamma^3 \leqslant 2.22\gamma^2$.

Применим к схеме $\psi^2(A_{27})$ операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi^2(A_{27}))) \lesssim 4 \cdot 504 \cdot 2^n/n = 2016 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/600$ (см. (11)) $P(\varphi(\psi^2(A_{27}))) \leqslant 2\gamma^2 + 9\gamma^3$.

Схема $\varphi(\psi^2(A_{27}))$ есть схема A_{29}.

Таким образом, в базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{x/y\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

3. Базис $\{\&, ^{-}\}$. Моделируя формулу $\overline{x} \,\&\, \overline{y}$, построим схему из трех элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_0(00) = 2\gamma - \gamma^2$, $P_1(01) = P_1(10) = \gamma(1-\gamma)^2$, $P_1(11) = \gamma^2(1-\gamma)^2$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_{/}$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \gamma^2(1-\gamma)^2$, $\beta = \delta = \gamma(1-\gamma)^2$, $\tau = 2\gamma - \gamma^2$. Тогда $\mu = 2\gamma - \gamma^2$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + \gamma^2 + 4\gamma P(S) + 2P^2(S), 9\gamma^2 + 12\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (12)$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\&, ^{-}\}$ следует

Теорема 26. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{30}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{30}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{30}) \lesssim 168 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 27. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{31}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{31}) \leqslant 2\gamma + 449\gamma^2, \qquad L(A_{31}) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{30}, удовлетворяющую условиям теоремы 26. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{30})) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n$. Из (12) следует $P(\varphi(A_{30})) \leqslant 2\gamma + 449\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{30})$ есть схема A_{31}.

Лемма 17. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ *при* $\gamma \leqslant 1/1200$ *можно реализовать схемой* A_{32} *такой, что*

$$L(A_{32}) = 333, \qquad P(A_{32}) \leqslant 2\gamma + 21\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 28. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{33}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{33}) \leqslant 2\gamma + 24\gamma^2, \qquad L(A_{33}) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{30}, удовлетворяющую условиям теоремы 26. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{32} (лемма 17). Тогда $L(\psi(A_{30})) \lesssim 3 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 504 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 17 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем $P(\psi(A_{30})) \leqslant 3P^2(A_{30}) + P(A_{32}) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 21\gamma^2 = 2\gamma + 609\gamma^2 \leqslant 2.51\gamma$.

К схеме $\psi(A_{30})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{30}))) \lesssim 4 \cdot 504 \cdot 2^n/n = 2016 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/1200$ (см. (12)) $P(\varphi(\psi(A_{30}))) \leqslant 2\gamma + \gamma^2 + 4\gamma 2.51\gamma + 2(2.51\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 24\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{30}))$ есть схема A_{33}.

Таким образом, в базисе $\{\&, {}^-\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\vee, {}^-\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

4. Базис $\{\not\to, {}^-\}$. Моделируя формулу $\overline{x} \not\to y$, построим схему из двух элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_0(00) = \gamma$, $P_1(01) = P_1(10) = \gamma(1-\gamma)$, $P_1(11) = \gamma^2(1-\gamma)^2$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \gamma^2(1-\gamma)$, $\beta = \delta = \gamma(1-\gamma)$, $\tau = \gamma$. Тогда $\mu = \gamma$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{\gamma + 2\gamma^2 + 4\gamma P(S) + 2P^2(S), 4\gamma^2 + 8\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (13)$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\not\to, {}^-\}$ следует

Теорема 29. *При* $\gamma \leqslant 1/600$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{34}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{34}) \leqslant 7\gamma, \qquad L(A_{34}) \lesssim 112 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 30. *При* $\gamma \leqslant 1/600$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{35}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{35}) \leqslant 2\gamma + 128\gamma^2, \qquad L(A_{35}) \lesssim 448 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{34}, удовлетворяющую условиям теоремы 29. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{34})) \lesssim \lesssim 4\cdot 112\cdot 2^n/n = 448\cdot 2^n/n$. Из (13) следует $P(\varphi(A_{34})) \leqslant \gamma + 128\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{34})$ есть схема A_{35}.

Лемма 18. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/600$ можно реализовать схемой A_{36} такой, что*

$$L(A_{36}) = 207, \qquad P(A_{36}) \leqslant \gamma + 9\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 31. *При $\gamma \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{37}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{37}) \leqslant \gamma + 11\gamma^2, \qquad L(A_{37}) \lesssim 1344 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{34}, удовлетворяющую условиям теоремы 29. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{36} (лемма 18). Тогда $L(\psi(A_{34})) \lesssim 3\cdot 112\cdot 2^n/n = 336\cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 18 имеем $P(\psi(A_{34})) \leqslant 3P^2(A_{34}) + P(A_{36}) \leqslant 3(7\gamma)^2 + \gamma + 9\gamma^2 = \gamma + + 156\gamma^2$.

К схеме $\psi(A_{34})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{34}))) \lesssim \lesssim 4\cdot 336\cdot 2^n/n = 1344\cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/600$ (см. (13)) $P(\varphi(\psi(A_{34}))) \leqslant \gamma + +2\gamma^2 + 4\gamma(\gamma + 156\gamma^2) + (\gamma + 156\gamma^2)^2 \leqslant \gamma + 11\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{34}))$ есть схема A_{37}.

Таким образом, в базисе $\{\not\to, {}^-\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов все булевы функции, кроме, быть может, констант, можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\to, {}^-\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

5. Базис $\{\to, \not\to\}$. Моделируя формулу $(x \to (x \not\to x)) \not\to y$, построим схему из трех элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_0(00) = \gamma$, $P_1(01) = \gamma(1-\gamma)$, $P_1(10) = 2\gamma - -5\gamma^2 + 6\gamma^3 - 4\gamma^4 + \gamma^5$, $P_1(11) = \gamma(2\gamma - 5\gamma^2 + 6\gamma^3 - 4\gamma^4 + \gamma^5)$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\tau = \gamma$, $\delta = \gamma(1-\gamma)$, $\beta = 2\gamma - 5\gamma^2 + 6\gamma^3 - 4\gamma^4 + \gamma^5$, $\alpha = \gamma(2\gamma - 5\gamma^2 + 6\gamma^3 - 4\gamma^4 + \gamma^5)$. Тогда $\mu \leqslant \gamma$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{\gamma + 2\gamma^2 + 6\gamma P(S) + 2P^2(S), 6\gamma^2 + 10\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (14)$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\to, \not\to\}$ следует

Теорема 32. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{38}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{38}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{38}) \lesssim 168 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 33. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{39}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{39}) \leqslant 2\gamma + 478\gamma^2, \qquad L(A_{39}) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{38}, удовлетворяющую условиям теоремы 32. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{38})) \lesssim 4\cdot 168\cdot 2^n/n = 672\cdot 2^n/n$. Из (14) следует $P(\varphi(A_{38})) \leqslant \gamma + 478\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{38})$ есть схема A_{39}.

Лемма 19. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/1200$ можно реализовать схемой A_{40} такой, что*

$$L(A_{40}) = 333, \qquad P(A_{40}) \leqslant \gamma + 18\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 34. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{41}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{41}) \leqslant \gamma + 16\gamma^2, \qquad L(A_{41}) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{38}, удовлетворяющую условиям теоремы 32. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{40} (лемма 19). Тогда $L(\psi(A_{38})) \lesssim 3 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 504 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 19 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем $P(\psi(A_{38})) \leqslant 3P^2(A_{38}) + P(A_{40}) \leqslant 3(14\gamma)^2 + \gamma + 918\gamma^2 = \gamma + 606\gamma^2 \leqslant 1.505\gamma$.

К схеме $\psi(A_{38})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{38}))) \lesssim 4 \cdot 504 \cdot 2^n/n = 2016 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/1200$ (см. (14)) $P(\varphi(\psi(A_{38}))) \leqslant \gamma + 2\gamma^2 + 6\gamma(1.505\gamma) + (1.505\gamma)^2 \leqslant \gamma + 16\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{38}))$ есть схема A_{41}.

Таким образом, в базисе $\{\to, \not\to\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов все булевы функции, кроме, быть может, констант, можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\not\to, \to\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

6. Базис $\{\sim, \&, 0\}$. Моделируя формулу $(x \sim 0)\ \&\ (y \sim 0)$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_0(00) = 2\gamma - \gamma^2$, $P_1(01) = P_1(10) = \gamma(1-\gamma)^2$, $P_1(11) = \gamma^2(1-\gamma)^2$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \gamma^2(1-\gamma)^2$, $\beta = \delta = \gamma(1-\gamma)^2$, $\tau = 2\gamma - \gamma^2$. Тогда $\mu = 2\gamma - \gamma^2$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + \gamma^2 + 4\gamma P(S) + 2P^2(S),\ 9\gamma^2 + 12\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (15)$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\sim, \&, 0\}$ следует

Теорема 35. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{42}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{42}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{42}) \lesssim 224 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 36. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{43}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{43}) \leqslant 2\gamma + 449\gamma^2, \qquad L(A_{43}) \lesssim 896 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{42}, удовлетворяющую условиям теоремы 35. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{42})) \lesssim 4 \cdot 224 \cdot 2^n/n = 896 \cdot 2^n/n$. Из (15) следует $P(\varphi(A_{42})) \leqslant 2\gamma + 449\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{42})$ есть схема A_{43}.

Лемма 20. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/1200$ можно реализовать схемой A_{44} такой, что*

$$L(A_{44}) = 399, \qquad P(A_{44}) \leqslant 2\gamma + 21\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 37. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{45}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{45}) \leqslant 2\gamma + 24\gamma^2, \qquad L(A_{45}) \lesssim 2688 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{42}, удовлетворяющую условиям теоремы 35. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{44} (лемма 20). Тогда $L(\psi(A_{42})) \lesssim 3 \cdot 224 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 20 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем $P(\psi(A_{42})) \leqslant 3P^2(A_{42}) + P(A_{44}) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 21\gamma^2 = 2\gamma + 609\gamma^2 \leqslant 2.51\gamma$.

К схеме $\psi(A_{42})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{42}))) \lesssim 4 \cdot 672 \cdot 2^n/n = 2688 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/1200$ (см. (15)) $P(\varphi(\psi(A_{42}))) \leqslant 2\gamma + \gamma^2 + 4\gamma 2.51\gamma + 2(2.51\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 24\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{42}))$ есть схема A_{45}.

Таким образом, в базисе $\{\sim, \&, 0\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\oplus, \vee, 1\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

7. Базис $\{\not\to, 1\}$. Моделируя формулу $(1 \not\to x) \not\to y$, построим схему из трех элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_0(00) = 2\gamma - \gamma^2$, $P_1(01) = P_1(10) = \gamma(1-\gamma)^2$, $P_1(11) = \gamma^2(1-\gamma)^2$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны, следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1, считая, что имеем схему $S_/$, реализующую x/y (функция x/y

двойственна функции $x \downarrow y$) с вероятностями ошибок $\alpha = \gamma^2(1-\gamma)^2$, $\beta = \delta = \gamma(1-\gamma)^2$, $\tau = 2\gamma - \gamma^2$. Тогда $\mu = 2\gamma - \gamma^2$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + \gamma^2 + 4\gamma P(S) + 2P^2(S), 9\gamma^2 + 12\gamma P(S) + 4P^2(S)\}.$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\not\to, 1\}$ следует

Теорема 38. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{46}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{46}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{46}) \lesssim 168 \cdot 2^n/n.$$

Учитывая вышесказанное и результаты п. 3 этого параграфа, убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Теорема 39. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{47}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{47}) \leqslant 2\gamma + 449\gamma^2, \qquad L(A_{47}) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Лемма 21. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ *при* $\gamma \leqslant 1/1200$ *можно реализовать схемой* A_{48} *такой, что*

$$L(A_{48}) = 333, \qquad P(A_{48}) \leqslant 2\gamma + 21\gamma^2.$$

Теорема 40. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{49}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{49}) \leqslant 2\gamma + 24\gamma^2, \qquad L(A_{49}) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Таким образом, в базисе $\{\not\to, 1\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\to, 0\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

8. Базис $\{\to, {}^-\}$. Моделируя формулу $x \not\to \overline{y}$, построим схему из двух элементов, реализующую функцию x/y. Вычислим вероятности ошибок для этой схемы: $\alpha = \beta = 0$, $\delta = \gamma(1-\gamma)$, $\tau = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3$. Тогда $\mu = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + 2\gamma P(S) + 2P^2(S), 6\gamma^2 + 10\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (16)$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\to, {}^-\}$ следует

Теорема 41. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать схемой* A_{50}, *ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{50}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{50}) \lesssim 112 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 42. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{51}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{51}) \leqslant 2\gamma + 420\gamma^2, \qquad L(A_{51}) \lesssim 448 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{50}, удовлетворяющую условиям теоремы 41. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{50})) \lesssim \lesssim 4 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 448 \cdot 2^n/n$. Из (16) следует $P(\varphi(A_{50})) \leqslant 2\gamma + 420\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{50})$ есть схема A_{51}.

Лемма 22. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/1200$ можно реализовать схемой A_{52} такой, что*

$$L(A_{52}) = 111, \qquad P(A_{52}) \leqslant 2\gamma + 15\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 43. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{53}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{53}) \leqslant 2\gamma + 18\gamma^2, \qquad L(A_{53}) \lesssim 1344 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{50}, удовлетворяющую условиям теоремы 41. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{52} (лемма 22). Тогда $L(\psi(A_{50})) \lesssim 3 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 336 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 22 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем $P(\psi(A_{50})) \leqslant 3P^2(A_{50}) + P(A_{52}) \leqslant 3(14\gamma)^2 + + 2\gamma + 15\gamma^2 = 2\gamma + 603\gamma^2 \leqslant 2.51\gamma$.

К схеме $\psi(A_{50})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{50}))) \lesssim \lesssim 4 \cdot 336 \cdot 2^n/n = 1344 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/1200$ (см. (16)) $P(\varphi(\psi(A_{50}))) \leqslant \leqslant 2\gamma + 2\gamma 2.51\gamma + (2.51\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 18\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{50}))$ есть схема A_{53}.

Таким образом, в базисе $\{\rightarrow, {}^{-}\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\not\rightarrow, {}^{-}\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

9. Базис $\{\rightarrow, 0\}$. Моделируя формулу $x \rightarrow (y \rightarrow 0)$, построим схему из трех элементов, реализующую функцию x/y. Вычислим вероятности ошибок для этой схемы: $\alpha = \beta = 0$, $\delta = \gamma(1-\gamma)$, $\tau = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3$. Тогда $\mu = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + 2\gamma P(S) + 2P^2(S), 6\gamma^2 + 10\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (17)$$

Из теоремы 1 для базиса $\{\rightarrow, 0\}$ следует

Теорема 44. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{54}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{54}) \leqslant 14\gamma, \qquad L(A_{54}) \lesssim 168 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 45. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{55}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{55}) \leqslant 2\gamma + 420\gamma^2, \qquad L(A_{55}) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{54}, удовлетворяющую условиям теоремы 44. Применим к ней операцию φ, тогда $L(\varphi(A_{54})) \lesssim \lesssim 4\cdot 168\cdot 2^n/n = 672\cdot 2^n/n$. Из (17) следует $P(\varphi(A_{54})) \leqslant 2\gamma + 420\gamma^2$.

Схема $\varphi(A_{54})$ есть схема A_{55}.

Лемма 23. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/1200$ можно реализовать схемой A_{56} такой, что*

$$L(A_{56}) = 333, \qquad P(A_{56}) \leqslant 2\gamma + 15\gamma^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Теорема 46. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой A_{57}, ненадежность и сложность которой удовлетворяют неравенствам*

$$P(A_{57}) \leqslant 2\gamma + 18\gamma^2, \qquad L(A_{57}) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A_{54}, удовлетворяющую условиям теоремы 44. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему A_{56} (лемма 23). Тогда $L(\psi(A_{54})) \lesssim 3 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 504 \cdot 2^n/n$. По леммам 4 и 23 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем $P(\psi(A_{54})) \leqslant 3P^2(A_{54}) + P(A_{56}) \leqslant 3(14\gamma)^2 + + 2\gamma + 15\gamma^2 = 2\gamma + 603\gamma^2 \leqslant 2.51\gamma$.

К схеме $\psi(A_{54})$ применим операцию φ. Тогда $L(\varphi(\psi(A_{54}))) \lesssim \lesssim 4 \cdot 504 \cdot 2^n/n = 2016 \cdot 2^n/n$, и при $\gamma \leqslant 1/1200$ (см. (17)) $P(\varphi(\psi(A_{54}))) \leqslant \leqslant 2\gamma + 2\gamma 2.51\gamma + (2.51\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 18\gamma^2$.

Схема $\varphi(\psi(A_{54}))$ есть схема A_{57}.

Таким образом, в базисе $\{\to, 0\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими по надежности [4, 6], причем сложность построенных схем имеет тот же порядок роста, что и сложность схем, построенных только из надежных элементов.

Ненадежности двойственных схем равны [2], поэтому утверждения этого пункта справедливы в базисе $\{\not\to, 1\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

В заключение автор благодарит профессора Н. П. Редькина за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алёхина М. А. О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. — 1993. — Т. 5, вып. 2. — С. 59–94.
2. Алёхина М. А. О надежности двойственных схем // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.), Ч. 1. — М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. — С. 6–8.
3. Алёхина М. А. О надежности схем из ненадежных элементов x/y // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.), Ч. 1. — М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. — С. 9–14.
4. Алёхина М. А. Верхние оценки ненадежности схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 29 января–2 февраля 2001 г.), Ч. 1. — М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. — С. 49–52.
5. Алёхина М. А. О надежности схем в базисах $\{\not\to, \sim\}$, $\{\not\to, {}^{-}\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Материалы XII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Пенза, 15–21 октября 2001 г.), Ч. 1. — М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. — С. 9–13.

6. Алёхина М. А. Нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2002. — Т. 9, № 3. — С. 3–28.
7. Алёхина М. А. О надежности схем в базисе $\{\not\to, 1\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Труды Международной научно-технической конференции «Методы и средства измерения в системах контроля и управления» (Пенза, 9–10 сентября 2002 г.). — Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. — С. 193–197.
8. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 120–140.
9. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. Ортюков С. И. Метод синтеза асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем, исправляющих близкую к линейной долю ошибок // Проблемы передачи информации. — 1981. — Т. 17, вып. 4. — С. 84–97.
11. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
12. von Neuman J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies. — Princeton Univ. Press, 1956. [Имеется перевод: Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 68–139.]
13. Pippenger N. On networks of Noisy Gates // 26 Symposium on Foundation on Computer science (Portland, 21–23.10.1985) — P. 30–38.
14. Uhlig D. Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity // Lecture Notes in Comp. Sci. — 1987. — V. 278. — P. 462–469.

Поступило в редакцию 15 II 2002