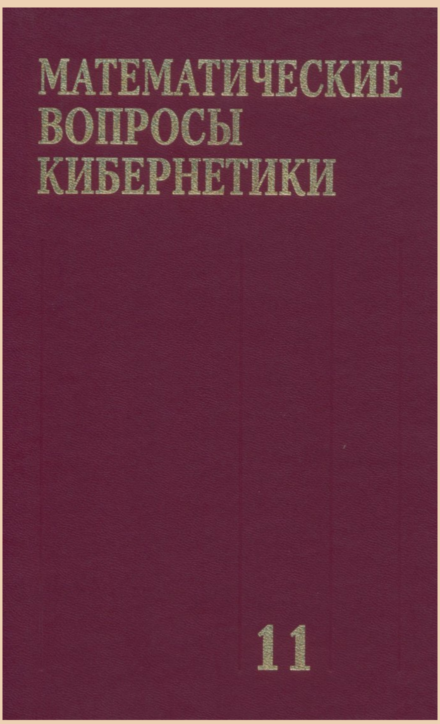


Г. А. Кочергина

О сложности реализации элементарных конъюнкций и дизъюнкций схемами в некоторых полных базисах

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КОНЪЮНКЦИЙ И ДИЗЪЮНКЦИЙ СХЕМАМИ В НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ БАЗИСАХ

Г. А. КОЧЕРГИНА

(МОСКВА)

В работе рассматривается вопрос о сложности реализации элементарных конъюнкций $K^n_{\widetilde{\sigma}} = x_1^{\sigma_1} \ldots x_1^{\sigma_1}$ и элементарных дизъюнкций $D^n_{\widetilde{\sigma}} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_1^{\sigma_1}$ схемами из функциональных элементов (определение схем из функциональных элементов и других используемых здесь понятий есть, например, в [2]) в некоторых полных базисах, в частности, в базисах $B^{\vee}_{kl} = \{x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \overline{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \overline{x}_{k+l}, \overline{x}\}$, $k+l \geqslant 2$.

Очевидно, что при $k+l \geqslant 2$ базис $B^{\vee}_{kl}$ является полным. Отметим, что базис $B^{\vee}_{02}$ с точки зрения сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов полностью соответствует базису $B^{\text{ш}} = \{x|y\}$, в котором Е. П. Сопруненко [4] и Е. С. Горелик [1] изучали сложность реализации конъюнкций и дизъюнкций. Сопруненко доказала, что

$$L_{B^{\text{ш}}}(K^n_{\widetilde{1}}) = 2n-2 \quad \text{и} \quad L_{B^{\text{ш}}}(D^n_{\widetilde{1}}) = 3n-3.$$

Горелик дал более простое доказательство этих фактов и обобщил их, доказав, что

$$L_{B^{\text{ш}}}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) = 3n-2-\|\widetilde{\sigma}\| \quad \text{и} \quad L_{B^{\text{ш}}}(D^n_{\widetilde{\sigma}}) = 2n-3+\|\widetilde{\sigma}\|,$$

где $\|\widetilde{\sigma}\|$ равно числу единиц в наборе $\widetilde{\sigma}$.

Основные результаты данной работы можно считать дальнейшим обобщением результатов Сопруненко и Горелика. Найдены точные значения сложности реализации $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ и $D^n_{\widetilde{\sigma}}$ в произвольном базисе $B^{\vee}_{kl}$ ($B^{\&}_{kl}$), при этом в частном случае $k=0$, $l=2$ даны новые доказательства упомянутых фактов. Предложен один подход к доказательству точных оценок сложности реализации $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ и $D^n_{\widetilde{\sigma}}$ в произвольном базисе $B \in \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — множество всех (полных) базисов, элементы которых принадлежат множеству функций

$$\{x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \overline{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \overline{x}_{k+l},\ x_1 \& \ldots \& x_k \& \overline{x}_{k+1} \& \ldots \& \overline{x}_{k+l},\ |\ k+l \geqslant 2\} \cup \{\overline{x}\}.$$

Кроме того, этот подход обобщен на более широкий класс базисов (правда, точная оценка, вообще говоря, не сохраняется, но верхняя оценка отличается от нижней не более чем на величину, равную сложности реализации констант в этом базисе).

Дадим некоторые определения. Элементы любой схемы S в произвольном базисе $B \in \mathfrak{B}$, соответствующие базисным функциям вида

$x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \overline{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \overline{x}_{k+l}$, будем называть $\vee$-*элементами* (кроме случая, когда $k=0$ и все входы элемента отождествлены). Элементы схемы S, соответствующие базисным функциям вида $x_1 \,\&\ldots\&\, x_k \,\&\, \overline{x}_{k+1} \,\&\ldots\&\, \overline{x}_{k+l}$, будем называть &-*элементами* (кроме случая, когда $k=0$ и все входы элемента отождествлены). Элементы схемы S, не являющиеся $\vee$-элементами и &-элементами будем называть *инверторами*.

Первые k входов $\vee$-элемента (&-элемента), соответствующего базисной функции $x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \overline{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \overline{x}_{k+l}$ ($x_1 \& \ldots \& x_k \& \overline{x}_{k+1} \& \ldots \& \overline{x}_{k+l}$), будем называть $(+)$-*входами*, а последние l входов — $(-)$-*входами*. Отметим, что без ограничения общности можно считать, что у любого инвертора только один вход.

В дальнейшем будем считать, что элементы всех рассматриваемых здесь схем пронумерованы в естественном порядке, т. е. таким образом, что выход элемента с бо́льшим номером не может подаваться на вход элемента с меньшим номером.

Перед тем как перейти к утверждению 1, напомним определение минимальной схемы. Схема S, реализующая функцию f в базисе B, называется *минимальной*, если $L_B(S) = L_B(f)$. Очевидно, что, во-первых, минимальная схема не содержит висячих элементов (т. е. элементов, выходы которых не подаются на входы других элементов схемы), кроме элемента, выход которого является выходом схемы, и, во-вторых, в минимальной схеме все элементы реализуют разные функции.

Утверждение 1. *При $n \geqslant 2$ для любого набора $\widetilde{\sigma} \in \{0,1\}^n$ в произвольном базисе $B_{k,l}^{\vee}$ справедливо равенство*

$$L_{B_{k,l}^{\vee}}(D_{\widetilde{\sigma}}^n) = L_{B_{k,l}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^n) - 1.$$

Доказательство. Очевидно, что $L_{B_{k,l}^{\vee}}(D_{\widetilde{\sigma}}^n) \geqslant L_{B_{k,l}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^n) - 1$, так как если выход произвольной минимальной схемы, реализующей $D_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{k,l}^{\vee}$, подать на вход инвертора, то получится схема, реализующая $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{k,l}^{\vee}$.

Докажем, что $L_{B_{k,l}^{\vee}}(D_{\widetilde{\sigma}}^n) \leqslant L_{B_{k,l}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^n) - 1$. Пусть S_m — минимальная схема для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{k,l}^{\vee}$. Если последний элемент схемы S_m — инвертор, то доказываемое неравенство очевидно. Если последним является $\vee$-элемент, то тогда на всех наборах $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\sigma}$, на все $(+)$-входы этого элемента подаются нули, а на все $(-)$-входы — единицы. На наборе $\widetilde{\overline{\sigma}}$ ни на какой $(+)$-вход этого элемента не может подаваться единица, так как иначе в схеме S_n существует еще один элемент, на выходе которого реализуется $K_{\widetilde{\overline{\sigma}}}^n$ — противоречие с минимальностью схемы S_n. Поэтому у последнего элемента найдется $(-)$-вход, на который при входном наборе $\widetilde{\overline{\sigma}}$ подается ноль. Тогда на этот вход подается выход элемента, реализующего функцию $K_{\widetilde{\overline{\sigma}}}^n = D_{\widetilde{\sigma}}^n$. Поэтому,

$$L_{B_{k,l}^{\vee}}(D_{\widetilde{\sigma}}^n) = L_{B_{k,l}^{\vee}}(S_m) - 1 = L_{B_{k,l}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^n) - 1.$$

Утверждение 1 доказано.

Таким образом в базисах $B_{k,l}^{\vee}$ задача о сложности реализации произвольной элементарной дизъюнкции сводится к задаче о сложности реализации некоторой элементарной конъюнкции. Заметим, что сложность реализации произвольной элементарной дизъюнкции в базисе $B \in \mathfrak{B}$ равна сложности реализации двойственной ей конъюнкции в базисе $B^* \in \mathfrak{B}$, состоящем из функций, двойственных функциям из B.

Прежде чем дать ключевое для данной работы определение «правильной» схемы, рассмотрим в качестве примера задачу о реализации конъюнкции $K_{\widetilde{1}}^n = x_1 x_2 \ldots x_n$ в наиболее простых базисах $B_{2,0}^{\vee}$, $B_{1,1}^{\vee}$ и $B_{0,2}^{\vee}$, уделив особое внимание строению минимальных схем.

Утверждение 2. *При* $n \geqslant 2$ *справедливо равенство*

$$L_{B^{\vee}_{2,0}}(K_{\tilde{1}}^{n}) = 2n.$$

Доказательство. Схема S, показанная на рис. 1, реализует $K_{\tilde{1}}^{n}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$. Поэтому

$$L_{B^{\vee}_{2,0}}(K_{\tilde{1}}^{n}) \leqslant L_{B^{\vee}_{2,0}}(S) = 2n.$$

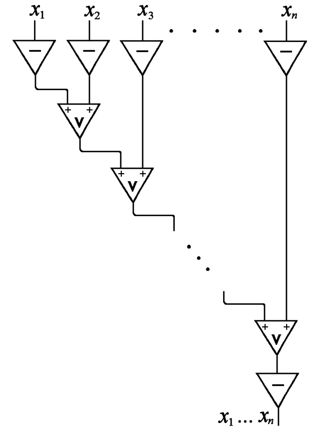


Рис. 1

Очевидно, что в любой минимальной схеме, реализующей $K_{\tilde{1}}^{n}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$, последний элемент — инвертор (если бы это был $\vee$-элемент, то хотя бы на один из его входов подавалась бы функция $K_{\tilde{1}}^{n}$ — противоречие с минимальностью исходной схемы).

Докажем, что любая минимальная схема, реализующая $K_{\tilde{1}}^{n}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$, состоит из $n-1$ $\vee$-элементов и $n+1$ инверторов, один из которых является выходом схемы, а на остальные подаются входные переменные. Для этого, учитывая, что любая схема, реализующая $K_{\tilde{1}}^{n}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$, содержит, как минимум, $n-1$ $\vee$-элементов, достаточно показать, что входные переменные произвольной минимальной схемы для $K_{\tilde{1}}^{n}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$ подаются на входы инверторов. Докажем это индукцией по n.

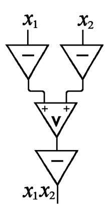


Рис. 2

При $n=2$, очевидно, $L_{B^{\vee}_{2,0}}(K_{\tilde{1}}^{2}) = 4$, и существует единственная минимальная схема, показанная на рис. 2.

Пусть для $n = m-1$ доказано, что в произвольной минимальной схеме для $K_{\tilde{1}}^{m-1}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$ все входные переменные подаются на входы инверторов и, следовательно, $L_{B^{\vee}_{2,0}}(K_{\tilde{1}}^{m-1}) = 2(m-1)$.

Докажем это для $n = m$. Рассмотрим произвольную минимальную схему S_M, реализующую $K_{\tilde{1}}^{m}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$. Предположим, что в схеме S_M есть вход, который подается на вход инвертора (без ограничения общности можно считать, что это вход x_n). Учитывая, что при $x_n = 1$ схема реализует функцию $K_{\tilde{1}}^{m-1}$, из схемы S_M легко можно построить схему, реализующую $K_{\tilde{1}}^{m-1}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$, удалив из схемы S_M, по крайней мере, три первых элемента в произвольном пути от входа x_n к выходу схемы. Но тогда $L_{B^{\vee}_{2,0}}(K_{\tilde{1}}^{m-1}) \leqslant L_{B^{\vee}_{2,0}}(S_M) - 3 = L_{B^{\vee}_{2,0}}(K_{\tilde{1}}^{m}) - 3 \leqslant 2m - 3 = 2(m-1) - 1$. Тем самым получаем противоречие с предположением индукции.

Таким образом, в произвольной минимальной схеме для $K_{\tilde{1}}^{m}$ в базисе $B^{\vee}_{2,0}$ каждый вход схемы подается на инвертор и, следовательно, $L_{B^{\vee}_{2,0}}(K_{\tilde{1}}^{m}) \geqslant 2n$.

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *При любом* n *справедливо равенство*

$$L_{B^{\vee}_{0,2}}(K_{\tilde{1}}^{n}) = 2n - 2.$$

Этот факт доказан в работах [1, 4]. Кроме того, это утверждение является частным случаем доказываемой здесь теоремы 2.

Утверждение 4. *При* $n \geqslant 2$ *справедливо равенство*

$$L_{B^{\vee}_{1,1}}(K_{\tilde{1}}^{n}) = n + 1.$$

Доказательство. Верхняя оценка. Схема S, показанная на рис. 3, реализует $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{1,1}^{\vee}$.

Поэтому

$$L_{B_{1,1}^{\vee}}(K_{\tilde{1}}^n) \leqslant L_{B_{1,1}^{\vee}}(S) = n+1.$$

Нижняя оценка. Очевидно, что число $\vee$-элементов в произвольной схеме, реализующей $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{1,1}^{\vee}$, не менее $n-1$.

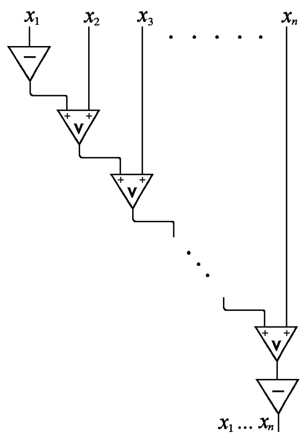


Рис. 3

Докажем, что никакая схема S из $n-1$ или n элементов не может реализовывать $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{1,1}^{\vee}$. Обозначим функцию, реализуемую схемой S, через f_S.

Случай 1. Схема S состоит только из $\vee$-элементов.

Обозначим через N_f множество всех наборов, на которых функция f равна 1. Индукцией по глубине (т. е. максимальной длине цепи от входа схемы к ее выходу) легко показать, что тогда $|N_{f_S}| \geqslant 2^{n-1}$. Поэтому при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $|N_{f_S}| > |N_{K_{\tilde{1}}^n}|$ и, следовательно, $f_S \neq K_{\tilde{1}}^n$.

Случай 2. Схема S состоит из одного инвертора и $n-1$ $\vee$-элемента.

Если первый элемент схемы S является $\vee$-элементом, на $(+)$-вход которого подается переменная x_i, а на $(-)$-вход — переменная x_j, то $i \neq j$, так как в схеме S число двувходовых элементов на единицу меньше числа входов, а выход схемы существенно зависит от каждого переменной. Тогда, учитывая, что от каждого входа схемы к ее выходу существует ровно один путь, получаем: $f_S(\widetilde{\sigma}) = f_S(\widetilde{1})$, где $\widetilde{\sigma}$ — набор, у которого на всех местах, кроме j-го, стоят единицы. Следовательно, $f_S \neq K_{\tilde{1}}^n$.

Если первый элемент — инвертор, то индукцией по глубине легко показать, что $|N_{f_S}| \geqslant 2^{n-1}$. Поэтому при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $|N_{f_S}| > |N_{K_{\tilde{1}}^n}|$ и, следовательно, $f_S \neq K_{\tilde{1}}^n$.

Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Существует единственная* (*с точностью до перестановки входов*) *минимальная схема для* $K_{\tilde{1}}^n$ *в базисе* $B_{1,1}^{\vee}$

Доказательство. Из доказательства утверждения 4 следует, что любая минимальная схема для $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{1,1}^{\vee}$ либо состоит из одного инвертора и n $\vee$-элементов, либо из двух инверторов и $n-1$ $\vee$-элемента. Покажем, что первого варианта быть не может.

Пусть S — схема, реализующая $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{1,1}^{\vee}$ и состоящая из n $\vee$-элементов и инвертора.

Если последний элемент схемы S является инвертором, то найдется такой вход x_i, для которого существует путь к инвертору, проходящий только через $(+)$-входы $\vee$-элементов. Тогда при $x_i = 1$ схема S выдаст значение 0 вне зависимости от того, что подается на другие входы — противоречие с тем, что схема S реализует $K_{\tilde{1}}^n$.

Таким образом, последним элементом схемы может быть только $\vee$-элемент. Тогда на его $(+)$-вход подается константа 0 (если бы подавалась функция $K_{\tilde{1}}^n$, то схема S была бы не минимальна), а на $(-)$-вход — функция $\overline{K_{\tilde{1}}^n} = D_{\tilde{0}}^n$. Обозначим элемент схемы S, реализующий функцию $D_{\tilde{0}}^n$, через E. Заметим, что в минимальной схеме над базисом $B_{1,1}^{\vee}$ константа 0 может быть реализована только на выходе инвертора. Таким образом, никакой вход схемы не подается на вход инвертора. Следовательно первый элемент является $\vee$-элементом. От любого входа x_i схемы S к элементу E существует ровно один путь, так как элемент E реализует функцию $D_{\tilde{0}}^n$, существенно зависящую от n переменных, «используя» только $n-1$ двувходовых элементов и, быть может, инвертор. Пусть на $(+)$-вход первого элемента схемы S подается переменная x_i, а на $(-)$-вход — переменная x_j. Тогда, в силу сказанного выше, $i \neq j$ и на наборах $(1\ldots1\underset{x_i}{1}1\ldots1\underset{x_j}{0}1\ldots1)$ и $(1\ldots1)$ выход элемента E находится в одном и том же состоянии — противоречие с тем, что элемент E реализует функцию $D_{\tilde{0}}^n$.

Итак, доказано, что произвольная минимальная схема S_M для $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{1,1}^{\vee}$ состоит из двух инверторов и $n-1$ $\vee$-элементов. Очевидно, что последний элемент схемы S_M — инвертор, так как иначе бы на один вход $\vee$-элемента подавалась бы функция, существенно зависящая от n переменных, для реализации которой достаточно двух инверторов и $n-2$ $\vee$-элементов. Далее, на $(+)$-вход произвольного $\vee$-элемента схемы S_M не может подаваться вход схемы, так как иначе бы опять, учитывая, что от каждого входа схемы S_M существует ровно один путь к выходу, нашелся неединичный набор, на котором выход схемы находился в том же состоянии, что и на единичном наборе. В частности, первый элемент схемы S_M — инвертор, а для третьего элемента есть только две возможности — как показано на рис. 4,*а*) и 4,*б*).

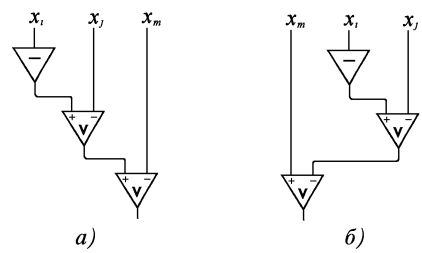


Рис. 4

Но в случае *б*) выход схемы на наборах $(1\ldots1\underset{x_i}{1}1\ldots1\underset{x_j}{0}1\ldots1\underset{x_m}{1}1\ldots1)$ и $(1\ldots1)$ находился бы в одном и том же состоянии — противоречие с тем, что схема реализует $K_{\tilde{1}}^n$.

И далее $\vee$-элементы могут присоединяться друг к другу только аналогично правилу *а*). Последний элемент схемы S_M — инвертор.

Утверждение 5 доказано.

Утверждение о единственности (с точностью до перестановки входов) минимальной схемы для $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{0,2}^{\vee}$, вообще говоря, неверно, — см., например, рис. 5,*а*) и 5,*б*).

Утверждение о единственности (с точностью до перестановки входов) минимальной схемы для $K_{\tilde{1}}^n$ в базисе $B_{2,0}^{\vee}$, вообще говоря, тоже неверно. Но в этом случае, как показано при доказательстве утверждения 2, все минимальные схемы для $K_{\tilde{1}}^n$ имеют естественную, «правильную» структуру — все входы схемы подаются только на инверторы, затем с помощью $\vee$-элементов «собирается» функция $D_{\tilde{0}}^n = \overline{K_{\tilde{1}}^n}$ (это можно делать, используя минимально возможное число $\vee$-элементов, по-разному), которая подается в свою очередь на вход инвертора — последнего элемента схемы.

Оказывается, что роль таких «правильных» схем для изучения сложности реализации $K_{\tilde{\sigma}}^n$ в базисах $B \in \mathfrak{B}$ велика. Дадим строгое определение правильной схемы.

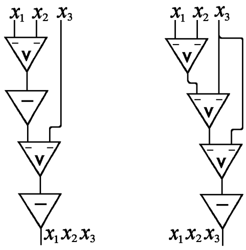
Определение 1. Схема S, реализующая функцию $K_{\tilde{\sigma}}^n$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$, называется *правильной схемой для $K_{\tilde{\sigma}}^n$ в базисе B*, если:

а) на наборе $\tilde{\sigma}$ выходы всех $\vee$-элементов схемы находятся в состоянии 0, а выходы всех &-элементов — в состоянии 1;

б) в схеме S нет висячих элементов;

в) в схеме S все элементы реализуют разные функции.

Например, схема, показанная на рис. 5,a) является правильной схемой для K_1^3 в базисе $B_{02}^{\vee}$, а схема, показанная на рис. 5,$б$) — нет.



а) б)

Рис. 5

Очевидно, что для любых конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ и базиса $B \in \mathfrak{B}$ можно построить правильную схему для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$.

Укажем некоторые свойства правильных схем.

Свойство 1. *Если S_p — правильная схема для произвольной конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$, то никакой элемент схемы не реализует константу.*

Доказательство. Пусть это не так. Обозначим через E элемент схемы S_p с наименьшим среди элементов, реализующих константы, номером. Очевидно, что элемент E — не инвертор.

Если элемент E реализует константу 0, то, в силу правильности схемы S_p, E — $\vee$-элемент. Но тогда на все входы элемента E подаются константы — противоречие с тем, что E — элемент с наименьшим номером среди элементов, реализующих константы.

Если элемент E реализует константу 1, то, в силу правильности схемы S_p, E — &-элемент. Но тогда на все входы элемента E подаются константы — противоречие.

Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Если S_p — правильная схема для произвольной конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$, то*

1) *выход любого $\vee$-элемента схемы S_p может подаваться только на $(+)$-входы $\vee$-элементов, $(-)$-входы &-элементов и инвертор, выход которого может подаваться только на $(-)$-входы $\vee$-элементов и $(+)$-входы &-элементов;*

2) *выход любого &-элемента схемы S_p может подаваться только на $(-)$-входы $\vee$-элементов, $(+)$-входы &-элементов и инвертор, выход которого может подаваться только на $(+)$-входы $\vee$-элементов и $(-)$-входы &-элементов.*

Это свойство очевидно.

Свойство 3. *Пусть S_p — правильная схема для произвольной конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$. Тогда если вместо выхода какого-либо элемента схемы S_p подать значение, противоположное состоянию выхода этого элемента на наборе $\widetilde{\sigma}$, то выход схемы будет находиться в состоянии* 0. *В частности, схема S_p на наборе $\widetilde{\sigma}$ чувствительна к сбою в работе любого ее элемента.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь от этого элемента к выходу схемы. Такой путь существует, так как в схеме S_p нет висячих элементов. В силу определения и свойства 2 правильных схем выход каждого элемента этого пути будет находиться в состоянии, противоположном состоянию выхода этого элемента на наборе $\widetilde{\sigma}$. В частности, выход последнего элемента этого пути, являющийся выходом схемы, находится в состоянии 0.

Свойство 3 доказано.

Замечание. Свойства 2 и 3 остаются справедливыми для элементов с номерами больше r произвольной схемы S, реализующей $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$, у которой часть схемы, содержащая все элементы с номерами больше r, удовлетворяет условиям а), б) и в) определения схемы, правильной для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$. Кроме того, свойство 3 остается справедливым и для элемента такой схемы S с номером r.

Прежде, чем сформулировать следующее свойство правильных схем, дадим еще одно определение.

Определение. Пусть $K_{\widetilde{\sigma}}^{n} = x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$. Тогда произвольную конъюнкцию вида $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \ldots x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, будем называть *подконъюнкцией* конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$.

Особо отметим, что константы 0 и 1 не являются подконъюнкциями ни для какой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$.

Свойство 4. *Пусть S_p — правильная схема для произвольно взятой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$. Тогда на выходе любого элемента схемы S_p реализуется либо некоторая подконъюнкция конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$, либо отрицание некоторой подконъюнкции конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по номеру элемента.

Для первого элемента схемы S_p доказываемое утверждение устанавливается просто.

Пусть для всех элементов схемы S_p с номерами меньшими r утверждение доказано. Рассмотрим элемент E, имеющий номер r.

Случай 1. E — инвертор. Тогда утверждение для элемента E очевидно.

Случай 2. E — &-элемент. Тогда элемент E реализует некоторую подконъюнкцию конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$, так как, в силу предположения индукции и правильности схемы S_p, на $(+)$-входы элемента E подаются некоторые подконъюнкции конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$, а на $(-)$-входы — отрицания некоторых подконъюнкций конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$.

Случай 3. E — $\vee$-элемент. Тогда элемент E реализует отрицание некоторой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$, так как, в силу предположения индукции и правильности схемы S_p, на $(+)$-входы элемента E подаются отрицания некоторых подконъюнкций конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$, а на $(-)$-входы — некоторые подконъюнкции конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$.

Свойство 4 доказано.

Свойство 5. *Пусть S_p — правильная схема для произвольно взятой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$. Тогда последний элемент схемы S_p — либо инвертор, либо &-элемент.*

Это свойство очевидно, так как в правильной схеме для $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ выход любого $\vee$-элемента на наборе $\widetilde{\sigma}$ должен находиться в состоянии 0, в то время как $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}(\sigma) = 1$.

Теперь докажем основную лемму.

Лемма 1 (основная). *Среди минимальных схем, реализующих произвольную конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$, есть правильная схема.*

Доказательство. Пусть S_m — минимальная схема, реализующая $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$. Заметим, что в силу минимальности в схеме S_m нет висячих элементов (кроме выхода схемы), и все элементы схемы S_m реализуют различные функции. Если схема S_m не является правильной для $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$, то преобразуем эту схему в схему S'_m следующим образом.

Обозначим через E элемент схемы S_m, имеющий наибольший номер среди $\vee$-элементов и &-элементов, выходы которых на наборе $\widetilde{\sigma}$ находятся в состояниях 1 и 0, соответственно. Пусть элемент E имеет в схеме S_m номер r. Выделим некоторый вход элемента E, «обеспечивающий» это состояние (т. е. вход элемента E, на который при наборе $\widetilde{\sigma}$ подается «забивающее» значение).

Обозначим через E_0 элемент схемы S_m, выход которого подается на выделенный вход элемента E.

Если выделенный вход элемента E является (+)-входом, то удалим из схемы S_m элемент E, а на входы элементов, на которые в схеме S_m подавался выход элемента E, подадим выход элемента E_0. Если же выделенный вход элемента E является (−)-входом, то удалим из схемы S_m элемент E, а на входы элементов, на которые в схеме S_m поступал выход элемента E, подадим выход инвертора, на вход которого поступает выход элемента E_0 (если в схеме такого инвертора нет, то включим его в схему).

Покажем, что полученная схема S'_m тоже реализует $K^n_{\widetilde{\sigma}}$.

В схеме S'_m обозначим через E' элемент E_0 или инвертор, на вход которого подается выход элемента E_0, — в зависимости от того, чем является выделенный вход элемента E схемы S_m, — (+)-входом или (−)-входом.

1) Пусть на произвольном наборе $\widetilde{\alpha}$ выход элемента E' схемы S'_m находится в том же состоянии, что и выход элемента E схемы S_m. Тогда на этом наборе выходы всех элементов схемы S'_m находятся в тех же состояниях, что и выходы соответствующих им элементов схемы S_m. Следовательно, выходы схем S_m и S'_m на наборе $\widetilde{\alpha}$ находятся в одинаковых состояниях.

2) Пусть на произвольном наборе $\widetilde{\alpha}$ выход элемента E' схемы S'_m находится в состоянии, противоположном состоянию элемента E схемы S_m. (Очевидно, что тогда $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\sigma}$ и, следовательно, надо показать, что на наборе $\widetilde{\alpha}$ выход схемы S'_m находится в состоянии 0.) Это предположение может быть выполнено только в том случае, когда выход элемента E схемы S_m на наборе $\widetilde{\alpha}$ находится в том же состоянии, что и на наборе $\widetilde{\sigma}$, а выход элемента E' схемы S'_m на наборе $\widetilde{\alpha}$ — в состоянии, противоположном состоянию выхода элемента E схемы S_m на наборе $\widetilde{\sigma}$. Тогда схему S'_m на наборе $\widetilde{\alpha}$ можно представить как схему S_m на наборе $\widetilde{\alpha}$, у которой состояние выхода элемента E изменено на противоположное. Это измененное состояние противоположно состоянию элемента E схемы S_m на наборе $\widetilde{\sigma}$. Тогда в силу замечания к свойству 3 правильных схем получаем, что на наборе $\widetilde{\alpha}$ после изменения состояния выхода элемента E на противоположное, выход схемы S_m будет находиться в состоянии 0.

Таким образом, схема S'_m реализует $K^n_{\widetilde{\sigma}}$, причем $L_B(S'_m) \leqslant L_B(S_m)$. Учитывая, что схема S_m минимальная, получаем, что $L_B(S'_m) = L_B(S_m)$ и, следовательно, S'_m — минимальная схема. Кроме того, в схеме S'_m элемент с номером r не противоречит определению минимальной схемы для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$.

Проделав аналогичные преобразования нужное число раз, получим минимальную схему S_p, являющуюся правильной для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B.

Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е. В доказательстве леммы 1 при преобразовании схемы S_m в схему S'_m, реализующую ту же функцию, в силу минимальности схемы S_m, вместо элемента E схемы S_m в схему S'_m должен быть включен инвертор, а из этого, в свою очередь, следует, что выделенный вход элемента E схемы S_m является (−)-входом.

З а м е ч а н и е. Особо следует отметить, что лемма 1 остается справедливой для схем из функциональных элементов с весами (см., например, [2]), если среди базисных элементов нет таких, что их вес меньше веса инвертора.

Из леммы 1 следует, что для нахождения сложности реализации произвольной конъюнкции $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе $B \in \mathfrak{B}$ достаточно среди всех правильных схем для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B найти схему, имеющую наименьшую сложность. Такой подход дает надежду на успех, так как класс правильных схем для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B существенно меньше класса всех схем, реализующих $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B, и, самое главное, согласно свойствам 1)–4), содержит схемы только очень простой структуры.

Используя этот подход (или, строго говоря, лемму 1), найдем сложность реализации конъюнкции $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в произвольном базисе $B^{\vee}_{kl}$, $k+l \geqslant 2$.

Теорема 1. *При $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ для любой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ справедливо равенство*

$$L_{B_{k0}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^{n}) = \left]\frac{n-1}{k-1}\right[+ \|\widetilde{\sigma}\| + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B_{k0}^{\vee}$ (такая схема существует в силу леммы 1). Если при некотором i выполняется условие $\sigma_i = 1$, то в силу определения правильной схемы вход x_i схемы S_p должен быть подан на вход инвертора. Таким образом, в схеме S_p в точности $\|\widetilde{\sigma}\|$ входов подаются на входы инверторов. Заметим, что в силу свойства 5 правильных схем, элемент, выход которого является выходом схемы S_p, — инвертор. Кроме того, в схеме S_p должно быть не менее $\left]\frac{n-1}{k-1}\right[$ $\vee$-элементов. Поэтому

$$L_{B_{k0}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^{n}) = L_{B_{k0}^{\vee}}(S_p) \geqslant \left]\frac{n-1}{k-1}\right[+ \|\widetilde{\sigma}\| + 1.$$

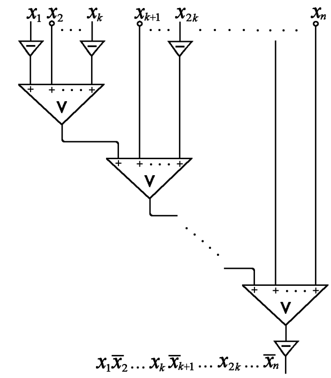


Рис. 6

С другой стороны, для произвольного набора $\widetilde{\sigma}$ и $k \geqslant 2$ по аналогии с рис. 6 легко построить схему, реализующую $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B_{k0}^{\vee}$ (кружками помечены входы, соответствующие тем переменным, которые входят в конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ с отрицанием) и содержащую ровно $\left]\frac{n-1}{k-1}\right[+ \|\widetilde{\sigma}\| + 1$ элементов.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и утверждения 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 1′. *При $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ для любой дизъюнкции $D_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ справедливо равенство*

$$L_{B_{k0}^{\vee}}(D_{\widetilde{\sigma}}^{n}) = \left]\frac{n-1}{k-1}\right[+ n - \|\widetilde{\sigma}\|.$$

Теорема 2. *При $n \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ для любой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ справедливо равенство*

$$L_{B_{0l}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^{n}) = n + 2\left]\frac{n-1}{l-1}\right[- \|\widetilde{\sigma}\|.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B_{0l}^{\vee}$ (такая схема существует в силу леммы 1). Если при некотором i выполняется условие $\sigma_i = 0$, то в силу определения правильной схемы вход x_i схемы S_p должен быть подан на вход инвертора. Таким образом, в схеме S_p в точности $n - \|\widetilde{\sigma}\|$ входов подаются на входы инверторов. Кроме того, в схеме S_p должно быть не менее $\left]\frac{n-1}{l-1}\right[$ $\vee$-элементов, выходы которых, в свою очередь, в силу определения и свойства 5 правильных схем, должны подаваться на входы инверторов. Поэтому

$$L_{B_{0l}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^{n}) = L_{B_{0l}^{\vee}}(S_p) \geqslant n + 2\left]\frac{n-1}{l-1}\right[- \|\widetilde{\sigma}\|.$$

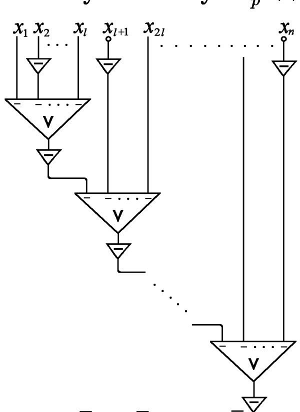


Рис. 7

С другой стороны, для произвольного набора $\widetilde{\sigma}$ и $l \geqslant 2$ по аналогии с рис. 7 легко построить схему, реализующую $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в базисе $B_{0l}^{\vee}$ (кружками помечены входы, соответствующие тем переменным, которые входят в конъюнкцию $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ с отрицанием) и содержащую ровно $n+2\left]\dfrac{n-1}{l-1}\right[-\|\widetilde{\sigma}\|$ элементов.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Данная теорема является обобщением теорем 1 и 2 из [1]. Однако необходимо отметить, что ее можно доказать, обобщив метод из [1] на случай $l>2$ как это сделано в [3].

Из теоремы 2 и утверждения 1 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 2′. *При $n\geqslant 2$, $l\geqslant 2$ для любой дизъюнкции $D^n_{\widetilde{\sigma}}$ справедливо равенство*

$$L_{B^{\vee}_{0l}}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=2\left]\frac{n-1}{l-1}\right[+\|\widetilde{\sigma}\|-1.$$

Т е о р е м а 3. *При $n\geqslant 2$, $l\geqslant 1$ для любой конъюнкции $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ справедливо равенство*

$$L_{B^{\vee}_{1l}}(K^n_{\widetilde{\sigma}})=\left]\frac{n-1}{l}\right[+\Big|n-1-\|\widetilde{\sigma}\|\Big|+1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе $B^{\vee}_{1l}$ (такая схема существует в силу леммы 1). В силу свойства 5 правильных схем последним элементом схемы S_p является инвертор. Кроме того, заметим, что в схеме S_p должно быть не менее $\left]\dfrac{n-1}{l}\right[$ $\vee$-элементов. Отдельно рассмотрим два случая.

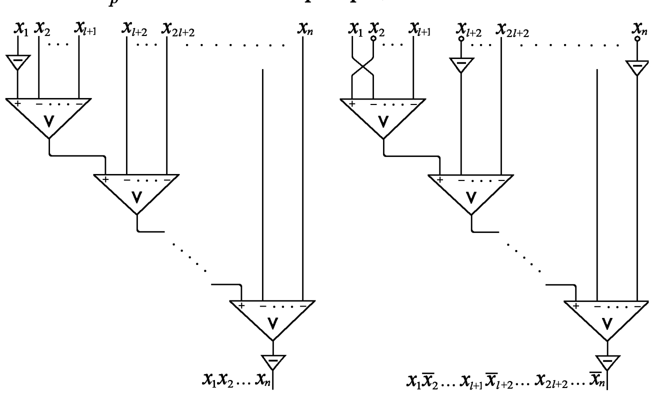
С л у ч а й 1. $\|\widetilde{\sigma}\|=n$.

В этом случае, в силу произвольности схемы S_p, на $(+)$-вход первого $\vee$-элемента схемы S_p не может подаваться вход схемы. Следовательно, в схеме S_p помимо инвертора, являющегося выходом схемы, есть еще хотя бы один инвертор. Поэтому,

$$L_{B^{\vee}_{1l}}(S_p)\geqslant\left]\frac{n-1}{l}\right[+2.$$

С другой стороны, на рис. 8,a) показана схема, реализующая $K^n_{\widetilde{1}}$ в базисе $B^{\vee}_{1l}$ и содержащая ровно $\left]\dfrac{n-1}{l}\right[+2$ элементов. Следовательно,

$$L_{B^{\vee}_{1l}}(K^n_{\widetilde{1}})=\left]\frac{n-1}{l}\right[+2.$$



а) *б)*

Рис. 8

С л у ч а й 2. $\|\widetilde{\sigma}\|\leqslant n-1$.

Докажем, что тогда схема S_p содержит не менее $n-\|\widetilde{\sigma}\|$ инверторов.

Обозначим через d число $\vee$-элементов в схеме S_p, а через s — число $\vee$-элементов схемы S_p, у которых на $(+)$-вход подаются входные переменные. Тогда выходы не более, чем $d-s$ $\vee$-элементов подаются на $(+)$-входы $\vee$-элементов. Выходы остальных $\vee$-элементов (а их не менее s) подаются на входы инверторов, так как в силу правильности схемы S_p, на $(-)$-входы $\vee$-элементов выходы $\vee$-элементов подаваться не могут.

Кроме того, если $s<n-\|\widetilde{\sigma}\|$, то, по крайней мере, $n-\|\widetilde{\sigma}\|-s$ входов схемы S_p подаются на входы инверторов, так как, в силу правильности схемы S_p, $n-\|\widetilde{\sigma}\|$ ее входов подаются на $(+)$-входы $\vee$-элементов и через

инверторы — на $(-)$-входы $\vee$-элементов, причем не более s из них — только на $(+)$-входы $\vee$-элементов.

Таким образом, в случае 2 схема S_p обязательно содержит не менее $n-\|\widetilde{\sigma}\|$ инверторов. Учитывая, что $d \geqslant](n-1)/l[$, получаем:

$$L_{B_{1l}^{\vee}}(S_p) \geqslant \left]\frac{n-1}{l}\right[+ n - \|\widetilde{\sigma}\|.$$

С другой стороны, для произвольного набора $\widetilde{\sigma}$, $\|\widetilde{\sigma}\| \leqslant n-1$, и $l \geqslant 1$ по аналогии с рис. 8,*б*) легко построить схему, реализующую $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{1l}^{\vee}$ (кружками помечены входы, соответствующие тем переменным, которые входят в конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ с отрицанием) и содержащую ровно $n + \left]\frac{n-1}{l}\right[- \|\widetilde{\sigma}\|$ элементов.

Следовательно, $L_{B_{1l}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^n) = \left]\frac{n-1}{l}\right[+ n - \|\widetilde{\sigma}\|$.

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 и утверждения 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3′. *При $n \geqslant 2$, $l \geqslant 1$ для любой дизъюнкции $D_{\widetilde{\sigma}}^n$ справедливо равенство*

$$L_{B_{1l}^{\vee}}(D_{\widetilde{\sigma}}^n) = \left]\frac{n-1}{l}\right[+ \Big|\|\widetilde{\sigma}\| - 1\Big| + 1.$$

Лемма 2. *При $k \geqslant 2$, $l \geqslant 1$ для любой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ существует минимальная правильная схема для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, в которой выход $\vee$-элемента с наибольшим номером подается на вход инвертора, а выходы остальных $\vee$-элементов — только на $(+)$-входы $\vee$-элементов.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$ (такая схема существует в силу леммы 1). В силу свойства 5 правильных схем последним элементом схемы S_p является инвертор. Поэтому выход $\vee$-элемента с наибольшим номером подается на вход инвертора.

Если среди остальных $\vee$-элементов есть такие, выходы которых подаются на входы инверторов (на $(-)$-входы $\vee$-элементов в силу правильности схемы S_p они подаваться не могут), то обозначим через E_0 тот из них, который имеет наибольший номер, через E — инвертор, на вход которого подается выход элемента E_0, а через $E_1, \ldots, E_t$ — $\vee$-элементы (в порядке возрастания номеров), на входы которых подается выход инвертора E. Заметим, что в силу правильности схемы S_p выход инвертора E подается на $(-)$-входы элементов $E_1, \ldots, E_t$.

Преобразуем схему S_p в схему S_p' как показано на рис. 9.

Покажем, что схема S_p' также является правильной для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$.

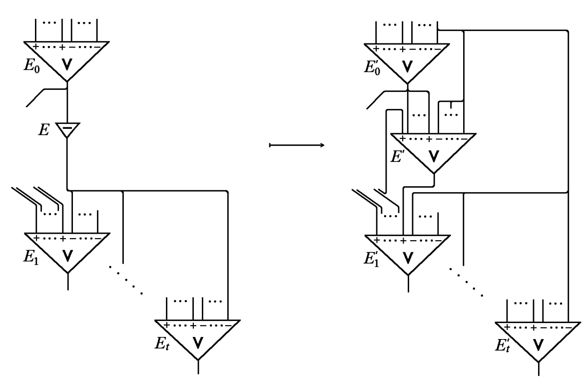


Рис. 9

Если на произвольном наборе $\widetilde{\alpha}$ выходы элементов $E_0, E_1, \ldots, E_t$ схемы S_p находятся в состоянии 0, то и выходы элементов $E_0', E_1', \ldots, E_t'$ схемы S_p' будут находиться в состоянии 0, и, следовательно, состояния выходов всех остальных элементов (в том числе и являющегося выходом) схемы S_p' совпадают с состояниями выходов соответствующих им элементов схемы S_p.

Если же на наборе $\widetilde{\alpha}$ в схеме S_p среди элементов $E_0, E_1, \ldots, E_t$ найдется элемент E_i, выход которого находится в состоянии 1, то, во-первых, $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\sigma}$, а, во-вторых, элемент$E_i'$ в схеме S_p' тоже находится в состоянии 1. Но тогда, в силу строения схемы S_p' выход последнего $\vee$-элемента схемы S_p' будет находиться тоже в состоянии 1, а, следовательно, выход схемы S_p' — в состоянии 0.

Таким образом, схема S_p' является правильной для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$. Кроме того, она минимальна, так как $L_{B_{kl}^{\vee}}(S_p') = L_{B_{kl}^{\vee}}(S_p)$.

Проделав аналогичные преобразования нужное число раз, получим минимальную правильную схему для $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, в которой выходы всех $\vee$-элементов, кроме последнего, подаются только на $(+)$-входы $\vee$-элементов.

Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $l \geqslant 1$. *Тогда:*

I. *если* $\|\widetilde{\sigma}\| \neq 0$, $\|\widetilde{\sigma}\| \neq n$, *то*

$$L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^n) = \begin{cases} \left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[+1, & \textit{если } \left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \dfrac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1} \textit{ и } \left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \dfrac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l}; \\ \left]\dfrac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l}\right[+1, & \textit{если } \dfrac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1} \leqslant \left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[< \dfrac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l}; \\ \left]\dfrac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1}\right[+1, & \textit{если } \dfrac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l} \leqslant \left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[< \dfrac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1}; \end{cases}$$

II. $L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\widetilde{1}}^n) = \left]\dfrac{n-1}{l}\right[+2;$

III. $L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\widetilde{0}}^n) = \left]\dfrac{n-2}{k-1}\right[+2.$

З а м е ч а н и е. Неравенства

$$\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[< \frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1} \quad \text{и} \quad \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[< \frac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l}$$

одновременно выполняться не могут, так как тогда выполнялись бы соотношения

$$n-\|\widetilde{\sigma}\| \geqslant (k-1)\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+1 \quad \text{и} \quad \|\widetilde{\sigma}\| > l\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+1,$$

а, следовательно, и неравенства

$$n > (k+l-1)\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+1 \geqslant n.$$

Получили противоречие.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через p и q соответственно число нулей и единиц в наборе $\widetilde{\sigma}$, т. е. $p = n - \|\widetilde{\sigma}\|$, $q = \|\widetilde{\sigma}\|$. Без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\sigma} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{q})$.

Рассмотрим множество $\mathbf{S}$ всех схем, реализующих конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$ и удовлетворяющих условиям а) и б) определения правильной схемы, в которых, кроме того, выход $\vee$-элемента с наибольшим номером подается на вход инвертора, а выходы остальных $\vee$-элементов — только на $(+)$-входы $\vee$-элементов. Из леммы 2 следует, что $\mathbf{S} \neq \varnothing$.

Обозначим через $\mathbf{S}_d$ множество всех схем из $\mathbf{S}$, содержащих ровно d $\vee$-элементов.

Так как любая схема, реализующая конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, содержит не менее $\left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[$ $\vee$-элементов, то

$$\mathbf{S} = \bigcup_{d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} \mathbf{S}_d.$$

Легко показать, что при $d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[$ множество $\mathbf{S}_d$ непусто.

При $d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[$ положим

$$h(d) = \min_{S \in \mathbf{S}_d} L_{B_{kl}^{\vee}}(S).$$

Тогда, в силу леммы 2,

$$L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\tilde{1}}^{n}) = \min_{S \in \mathbf{S}} L_{B_{kl}^{\vee}}(S) = \min_{d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d).$$

Пусть d — произвольное целое число, удовлетворяющее неравенству $d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[$. Тогда $d(k-1)+1+dl \geqslant n = p+q$. Поэтому выполняются условия одного из трех случаев:

Случай 1. $p \leqslant d(k-1)+1$, $q \leqslant dl$, (т. е. $d \geqslant \frac{p-1}{k-1}$, $d \geqslant q/l$);

Случай 2. $p \leqslant d(k-1)+1$, $q < dl$, (т. е. $d \geqslant \frac{p-1}{k-1}$, $d < q/l$);

Случай 3. $p > d(k-1)+1$, $q \leqslant dl$, (т. е. $d < \frac{p-1}{k-1}$, $d \geqslant q/l$);

Отдельное рассмотрим все эти случаи.

Случай 1. $p \leqslant d(k-1)+1$, $q \leqslant dl$.

Если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то для любой схемы $S \in \mathbf{S}_d$ выполняется неравенство $L_{B_{kl}^{\vee}}(S) \geqslant d+1$.

С другой стороны, существует схема $\widetilde{S} \in \mathbf{S}_d$ такая, что $L_{B_{kl}^{\vee}}(\widetilde{S}) = d+1$ (см. рис. 10,*а*)).

Если $p=0$ или $q=0$, то, легко понять, что для любой схемы $S \in \mathbf{S}_d$ выполняется неравенство $L_{B_{kl}^{\vee}}(S) \geqslant d+2$, так как помимо d $\vee$-элементов и последнего элемента — инвертора, в схеме S должен быть еще хотя бы один инвертор, выход которого при $p=0$ подается на $(+)$-входы первого $\vee$-элемента, а при $q=0$ — на $(-)$-входы $\vee$-элементов.

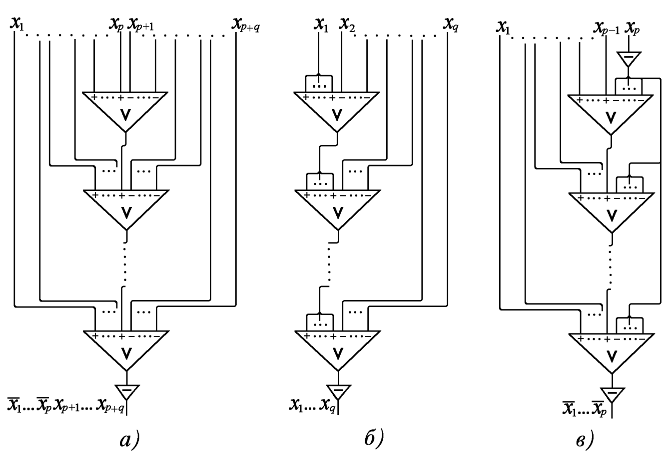


Рис. 10.

С другой стороны, при $p=0$ или $q=0$ существует схема $\widetilde{S} \in \mathbf{S}_d$ такая, что $L_{B_{kl}^{\vee}}(\widetilde{S}) = d+2$ (см. рис. 10,*б*) или 10,*в*) соответственно).

Случай 2. $p \leqslant d(k-1)+1$, $q > dl$.

Легко понять, что в этом случае в любой схеме $S \in \mathbf{S}_d$ среди входов схемы $x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}$ не более dl могут быть поданы на $(-)$-входы $\vee$-элементов. Поэтому, в силу того, что схема S удовлетворяет условию а) определения правильной схемы, то, по крайней мере, $q-dl$ входов схемы должны подаваться на входы инверторов. Поэтому $L_{B_{kl}^{\vee}}(S) \geqslant d+1+q-dl$.

С другой стороны, существует схема $\widetilde{S} \in \mathbf{S}_d$ такая, что $L_{B_{kl}^{\vee}}(\widetilde{S}) = d + 1 + q - dl$ (см. рис. 11).

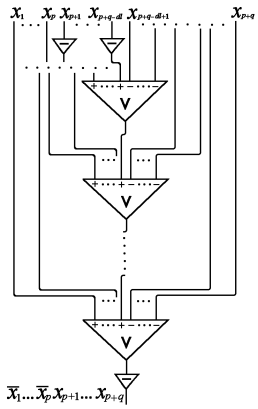


Рис. 11.

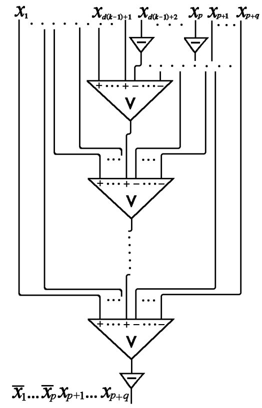


Рис. 12.

Случай 3. $p > d(k-1)+1$, $q \leqslant dl$.

Легко понять, что в этом случае в любой схеме $S \in \mathbf{S}_d$ среди входов схемы $x_1, \ldots, x_p$ не более $dk - (d-1) = d(k-1)+1$ могут быть поданы на $(+)$-входы $\vee$-элементов. Поэтому, в силу того, что схема S удовлетворяет условию а) определения правильной схемы, то, по крайней мере, $p - (d(k-1)+1)$ входов схемы должны подаваться на входы инверторов. Поэтому $L_{B_{kl}^{\vee}}(S) \geqslant d+1+p-(d(k-1)+1)$.

С другой стороны, существует схема $\widetilde{S} \in \mathbf{S}_d$ такая, что $L_{B_{kl}^{\vee}}(\widetilde{S}) = d + 1 + p - (d(k-1)+1)$ (см. рис. 12).

I. Пусть $p \neq 0$, $q \neq 0$. Тогда, учитывая результаты изучения случаев 1–3, получаем:

$$L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\widetilde{\sigma}}^{n}) = \min_{d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d),$$

где при $d \geqslant \left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[$ величина $h(d)$ определяется следующим образом:

$$h(d) = \begin{cases} d+1, & \text{если } d \geqslant \frac{p-1}{k-1} \text{ и } d \geqslant \frac{q}{l}; \\ d+1+q-ld, & \text{если } \frac{p-1}{k-1} \leqslant d < \frac{q}{l}; \\ d+1+p-(d(k-1)+1), & \text{если } \frac{q}{l} \leqslant d < \frac{p-1}{k-1}. \end{cases}$$

Найдем $\min\limits_{d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d)$.

а) Если $\left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \dfrac{p-1}{k-1}$ и $\left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \dfrac{q}{l}$, то

$$\min_{d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d) = \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+ 1.$$

б) Если $\dfrac{p-1}{k-1} \leqslant \left]\dfrac{n-1}{k+l-1}\right[< \dfrac{q}{l}$, то

$$\min_{d \geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d) = \begin{cases} d+1, & \text{если } d \geqslant \frac{q}{l}; \\ d+1+q-ld, & \text{если } d < \frac{q}{l}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\min_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d) &= \min\left(\left]\tfrac{q}{l}\right[+1, \left]\tfrac{q}{l}\right[-1+1+q-l\left(\left]\tfrac{q}{l}\right[-1\right)\right) = \\ &= \min\left(\left]\tfrac{q}{l}\right[+1, \left]\tfrac{q}{l}\right[+q+l-l\left]\tfrac{q}{l}\right[\right).\end{aligned}$$

Так как $\left]\frac{q}{l}\right[l+1-(q+l)<\left(\frac{q}{l}+1\right)l+1-(q+l)=1$, то $\left]\frac{q}{l}\right[l+1-(q+l)\leqslant 0$ и, поэтому,

$$\min_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d) = \left]\frac{q}{l}\right[+1.$$

в) Если $\frac{q}{l}\leqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[<\frac{p-1}{k-1}$, то

$$\min_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d) = \begin{cases} d+1, & \text{если } d\geqslant \frac{p-1}{k-1};\\ d+1+p-(d(k-1)+1), & \text{если } d<\frac{p-1}{k-1}.\end{cases}$$

Поэтому

$$\min_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d)=\min\left(\left]\frac{p-1}{k-1}\right[+1, \left]\frac{p-1}{k-1}\right[+p-\left(\left(\left]\frac{p-1}{k-1}\right[-1\right)(k-1)+1\right)\right).$$

Так как $\left(\left]\frac{p-1}{k-1}\right[-1\right)(k-1)+1+1-p<\frac{p-1}{k-1}(k-1)+2-p=1$, то $\left(\left]\frac{p-1}{k-1}\right[-1\right)(k-1)+2-p\leqslant 0$ и, поэтому,

$$\min_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d) = \left]\frac{p-1}{k-1}\right[+1.$$

Таким образом, если $\|\widetilde{\sigma}\|\neq 0$ и $\|\widetilde{\sigma}\|\neq n$, то

$$L_{B^{\vee}_{kl}}(K^n_{\widetilde{\sigma}})=\begin{cases} \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+1, & \text{если } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1} \text{ и } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \frac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l};\\ \left]\frac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l}\right[+1, & \text{если } \frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1}\leqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[<\frac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l};\\ \left]\frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1}\right[+1, & \text{если } \frac{\|\widetilde{\sigma}\|}{l}\leqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[<\frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1}.\end{cases}$$

II. Пусть $p=0$ (т. е. $q=n$, $\widetilde{\sigma}=\widetilde{1}$). Тогда, учитывая результаты изучения случаев 1–3, получаем:

$$L_{B^{\vee}_{kl}}(K^n_{\widetilde{1}}) = \min_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d),$$

где при $d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[$ величина $h(d)$ определяется следующим образом:

$$h(d)=\begin{cases} d+2, & \text{если } d\geqslant \frac{q}{l};\\ d+1+q-ld, & \text{если } d<\frac{q}{l}.\end{cases}$$

Найдем $\min\limits_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d)$.

а) Если $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \frac{q}{l}$, то

$$\min_{d\geqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d) = \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+2.$$

б) Если $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[<\frac{q}{l}$, то

$$\min_{d\geqslant\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d)=\min\left(\left]\frac{q}{l}\right[+2, \left]\frac{q}{l}\right[+q-l\left(\left]\frac{q}{l}\right[-1\right)\right)=\left]\frac{q-1}{l}\right[+2=\left]\frac{n-1}{l}\right[+2.$$

Таким образом, получаем:

$$L_{B^{\vee}_{kl}}(K^n_{\widetilde{1}})=\begin{cases}\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+2, & \text{если } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant\frac{n}{l};\\ \left]\frac{n-1}{l}\right[+2, & \text{если } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant\frac{n}{l}.\end{cases}$$

Запишем этот результат одной формулой. Для этого покажем, что если $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant\frac{n}{l}$, то $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[=\left]\frac{n-1}{l}\right[$. Действительно, если это не так, то $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\leqslant\left]\frac{n-1}{l}\right[-1$. С другой стороны, $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant\frac{n}{l}$. Поэтому $\left]\frac{n-1}{l}\right[-$ $-1\geqslant\frac{n}{l}$ и, следовательно, $\left]\frac{n-1}{l}\right[\geqslant\frac{n}{l}+1>\frac{n-1}{l}+1$. Получили противоречие.

Окончательно имеем:

$$L_{B^{\vee}_{kl}}(K^n_{\widetilde{1}})=\left]\frac{n-1}{l}\right[+2.$$

III. Пусть $q=0$ (т. е. $p=n$, $\widetilde{\sigma}=\widetilde{0}$). Тогда, учитывая результаты изучения случаев 1–3, получаем:

$$L_{B^{\vee}_{kl}}(K^n_{\widetilde{0}})=\min_{d\geqslant\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d),$$

где при $d\geqslant\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[$ величина $h(d)$ определяется следующим образом:

$$h(d)=\begin{cases} d+2, & \text{если } d\geqslant\frac{p-1}{k-1};\\ d+1+p-(d(k-1)+1), & \text{если } d<\frac{p-1}{k-1}.\end{cases}$$

Найдем $\min\limits_{d\geqslant\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d)$.

а) Если $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant\frac{p-1}{k-1}$, то

$$\min_{d\geqslant\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d)=\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+2.$$

б) Если $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[<\frac{p-1}{k-1}$, то

$$\min_{d\geqslant\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[} h(d)=\min\left(\left]\frac{p-1}{k-1}\right[+2, \left]\frac{p-1}{k-1}\right[+p-\left(\left(\left]\frac{p-1}{k-1}\right[-1\right)(k-1)+1\right)\right)=$$
$$=\left]\frac{p-2}{k-1}\right[+2=\left]\frac{n-2}{k-1}\right[+2.$$

Таким образом, получаем:

$$L_{B^{\vee}_{kl}}(K^n_{\widetilde{0}})=\begin{cases}\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[+2, & \text{если } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant\frac{n-1}{k-1};\\ \left]\frac{n-1}{l}\right[+2, & \text{если } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant\frac{n-1}{k-1}.\end{cases}$$

Запишем этот результат одной формулой. Для этого покажем, что если $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \frac{n-1}{k-1}$, то $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[= \left]\frac{n-2}{k-1}\right[$. Действительно, если это не так, то $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\leqslant \left]\frac{n-2}{k-1}\right[-1$. С другой стороны, $\left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \frac{n-1}{k-1}$. Поэтому $\left]\frac{n-2}{k-1}\right[-1 \geqslant \frac{n-1}{k-1}$ и, следовательно, $\left]\frac{n-2}{k-1}\right[\geqslant \frac{n-1}{k-1}+1 > \frac{n-2}{k-1}+1$. Получили противоречие.

Окончательно имеем:

$$L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\widetilde{0}}^{n}) = \left]\frac{n-2}{k-1}\right[+ 2.$$

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 и утверждения 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 4′. *Пусть* $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $l \geqslant 1$. *Тогда:*

I. *если* $\|\widetilde{\sigma}\| \neq 0$, $\|\widetilde{\sigma}\| \neq n$, *то*

$$L_{B_{kl}^{\vee}}(D_{\widetilde{\sigma}}^{n}) = \begin{cases} \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[, & \textit{если } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \frac{\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1} \textit{ и } \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[\geqslant \frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|}{l}; \\ \left]\frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|}{l}\right[, & \textit{если } \frac{\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1} \leqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[< \frac{n-\|\widetilde{\sigma}\|}{l}; \\ \left]\frac{\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1}\right[, & \textit{если } \frac{\|n-\widetilde{\sigma}\|}{l} \leqslant \left]\frac{n-1}{k+l-1}\right[< \frac{\|\widetilde{\sigma}\|-1}{k-1}; \end{cases}$$

II. $L_{B_{kl}^{\vee}}(D_{\widetilde{1}}^{n}) = \left]\frac{n-2}{k-1}\right[+ 1;$

III. $L_{B_{kl}^{\vee}}(D_{\widetilde{0}}^{n}) = \left]\frac{n-1}{l}\right[+ 1.$

Итак, теоремы 1–4 устанавливают точное значение сложности любой конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^{n}$, а теоремы 1′–4′ — точное значение сложности любой дизъюнкции $D_{\widetilde{\sigma}}^{n}$ в произвольном базисе $B_{kl}^{\vee}$, $k+l \geqslant 2$.

Вернемся теперь к вопросу о структуре минимальных схем, реализующих $K_{\widetilde{1}}^{n}$ в произвольном базисе $B_{kl}^{\vee}$, $k+l \geqslant 2$.

Лемма 3. *При* $k \geqslant 1$ *в любой минимальной правильной схеме для конъюнкции* $K_{\widetilde{1}}^{n}$ *в базисе* $B_{kl}^{\vee}$, $k+l \geqslant 2$, *выход* $\vee$*-элемента с наибольшим номером подается на вход инвертора, а выходы остальных* $\vee$*-элементов — только на* $(+)$*-входы* $\vee$*-элементов.*

Доказательство. В силу свойства 5 правильных схем в произвольной минимальной правильной схемы S_p для $K_{\widetilde{1}}^{n}$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$ последним элементом является инвертор. Поэтому выход $\vee$-элемента с наибольшим номером подается на вход инвертора.

Далее отдельно рассмотрим два случая: $k=1$ и $k \geqslant 2$.

I. Пусть $k=1$. Если в схеме S_p есть еще один $\vee$-элемент, выход которого подается на вход инвертора, то

$$L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\widetilde{1}}^{n}) = L_{B_{kl}^{\vee}}(S_p) \geqslant \left]\frac{n-1}{l}\right[+ 3,$$

так как тогда в схеме S_p не менее $\left]\frac{n-1}{l}\right[$ $\vee$-элементов, не менее двух инверторов, на входы которых подаются выходы $\vee$-элементов и, по крайней мере, один инвертор, на вход которого подается вход схемы, так как, в силу правильности схемы S_p, на $(+)$-вход первого $\vee$-элемента не может являться входом схемы. Но, по теореме 3, $L_{B_{kl}^{\vee}}(K_{\widetilde{1}}^{n}) = \left]\frac{n-1}{l}\right[+ 2$. Получили противоречие.

Значит в схеме S_p только последний $\vee$-элемент подается на вход инвертора. Но в силу правильности схемы S_p выход $\vee$-элемента не может подаваться на (−)-вход другого ∨-элемента. Поэтому выходы всех, кроме последнего, ∨-элементов схемы S_p подаются только на (+)-входы ∨-элементов.

II. Пусть $k \geqslant 2$. Как уже показано, в схеме S_p выход ∨-элемента с наибольшим номером подается на вход инвертора. Если среди остальных ∨-элементов есть такие, что их выходы подаются на входы инверторов (на (−)-входы ∨-элементов, в силу правильности схемы S_p, они подаваться не могут), то обозначим через E_0 тот из них, который имеет наименьший номер, через E — инвертор, на вход которого подается выход элемента E_0, а через $E_1, \ldots, E_t$ — ∨-элементы, на входы которых подается выход инвертора E. (Заметим, что выход элемента E в силу правильности схемы S_p подается на (−)-входы элементов $E_1, \ldots, E_t$. В частности, при $l = 0$ элемент E висячий, но не является выходом схемы — противоречие с правильностью схемы S_p. Поэтому считаем, что $l \geqslant 1$.) Кроме того, последовательно (пока не дойдем до инвертора) обозначим через E_{-i} $(i \geqslant 1)$ элемент, выход которого подается на первый (+)-вход элемента $E_{-(i-1)}$ (см. рис. 13).

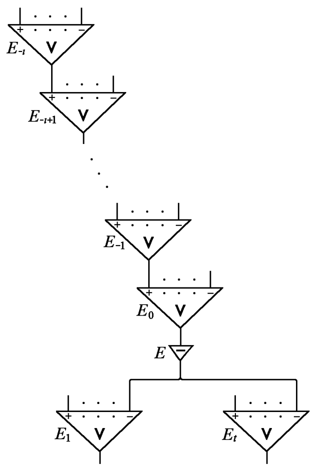


Рис. 13

Преобразуем правильную схему S_p в правильную схему S'_p с теми же элементами, но в которой выход элемента E подается на входы только элементов $E_2, \ldots, E_t$.

Рассмотрим три возможных случая.

С л у ч а й 1. Пусть существует два или больше путей от элемента E_0 к элементу E_1.

Преобразуем схему S_p в схему S'_p как показано на рис. 14.

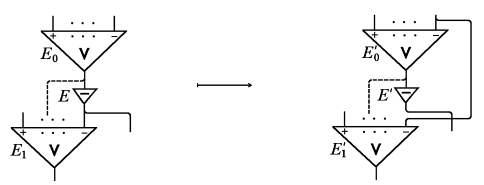


Рис. 14

Нетрудно понять, что полученная схема S'_p является правильной для $K^n_{\widetilde{1}}$ в базисе $B^{\vee}_{kl}$.

С л у ч а й 2. Пусть существует $j \geqslant 1$ такое, что выполняются следующие условия:

1) для любого i, $0 \leqslant i < j$, существует ровно один путь от элемента E_{-i} к элементу E_{-i+1};

2) существует не менее двух путей от элемента E_{-j} к элементу E_{-j+1}.

Преобразуем схему S_p в схему S'_p как показано на рис. 15.

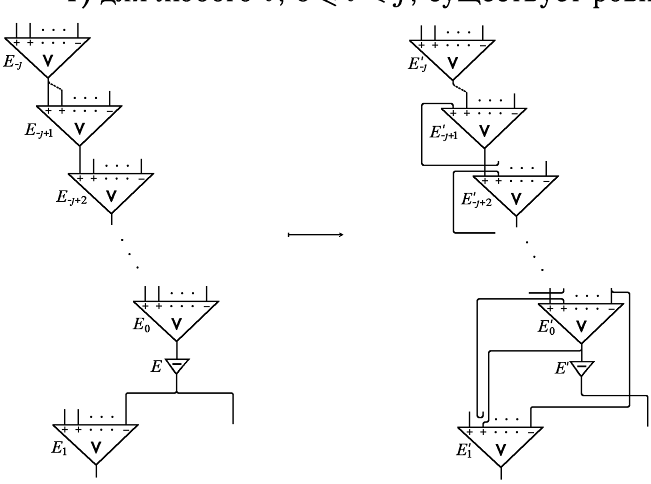


Рис. 15

В полученной схеме S'_p нет ориентированных циклов — следовательно это действительно схема из функциональных элементов. Покажем, что схема S'_p — правильная для $K^n_{\widetilde{1}}$ в базисе $B^{\vee}_{kl}$.

Если выходы всех ∨-элементов схемы S_p, указанных на рис. 15, на произвольном наборе $\widetilde{\alpha}$ находятся в состоянии 0, то и выходы всех ∨-элементов схемы S'_p, указанных на рис. 15, на наборе $\widetilde{\alpha}$ будут находиться в состоянии 0 (это легко проверить последовательно для элементов E'_{-j}, $E'_{-j+1}, \ldots, E'_0, E'_1$). Поэтому и выходы всех остальных элементов схемы S'_p находятся в том же состоянии, что и выходы соответствующих им элементов схемы S_p. В частности, состояния выходов схем S'_p и S_p будут совпадать.

Если среди $\vee$-элементов схемы S_p, указанных на рис. 15, найдется элемент E_i, выход которого на наборе $\widetilde{\alpha}$ находятся в состоянии 1 (тогда $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{1}$), то элемент E'_i схемы S'_p на наборе $\widetilde{\alpha}$ будет находиться в состоянии 1, а тогда, как нетрудно понять, выход схемы S'_p будет находиться в состоянии 0.

Случай 3. Пусть существует $j \geqslant 1$ такое, что выполняются следующие условия:

1) для любого i, $0 \leqslant i < j$, существует ровно один путь от элемента E_{-i} к элементу E_{-i+1};

2) элемент E_{-j} — инвертор.

Заметим, что если не выполняются условия случаев 1 и 2, то обязательно выполняются условия случая 3, так как в правильной схеме для $K^n_{\widetilde{1}}$ (существенно, что $\widetilde{\sigma} = \widetilde{1}$) в базисе $B^{\vee}_{kl}$ вход схемы не может непосредственно подаваться на (+)-вход $\vee$-элемента (а только через инвертор).

Преобразуем схему S_p в схему S'_p как показано на рис. 16.

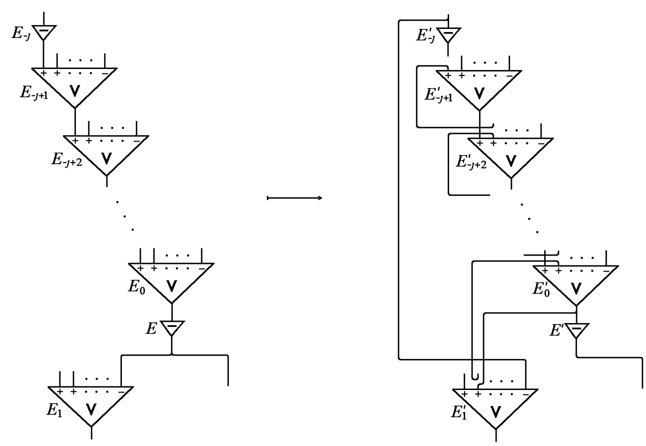


Рис. 16

В полученной схеме S'_p нет ориентированных циклов — следовательно, это действительно схема из функциональных элементов. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям в случае 2, можно показать, что S'_p — правильная схема для $K^n_{\widetilde{1}}$ в базисе $B^{\vee}_{kl}$.

Таким образом во всех трех случаях после преобразования получается минимальная правильная схема S'_p для $K^n_{\widetilde{1}}$ в базисе $B^{\vee}_{kl}$, в которой $\vee$-элемент E'_0 имеет наименьший номер среди всех $\vee$-элементов, выходы которых подаются на входы инверторов. В схеме S'_p выход инвертора E' подается на входы $t-1$ элементов, в то время как выход инвертора E схемы S_p подавался на входы t элементов.

Проделав еще $t-1$ раз аналогичные преобразования, получим минимальную правильную схему $S^{(t)}_p$, в которой элемент $E^{(t)}$ является висячим — противоречие с минимальностью схемы $S^{(t)}_p$.

Таким образом, и в случае $k \geqslant 2$ в схеме S_p только последний $\vee$-элемент подается на выход инвертора. А так как в силу правильности схемы S_p выход $\vee$-элемента не может подаваться и на (−)-входы другого $\vee$-элемента, то выходы всех $\vee$-элементов схемы S_p, кроме последнего, подаются только на (+)-входы $\vee$-элементов.

Лемма 3 доказана.

Теорема 5. *При $k \geqslant 1$ любая минимальная схема, реализующая конъюнкцию $K_{\widetilde{1}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, $k+l \geqslant 2$, является правильной, причем выход $\vee$-элемента с наибольшим номером подается на вход инвертора, а выходы остальных $\vee$-элементов — только на $(+)$-входы $\vee$-элементов.*

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно показать, что произвольная минимальная схема S_m, реализующая $K_{\widetilde{1}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, $k+l \geqslant 2$, является правильной.

Покажем сначала, что последний элемент схемы S_m — инвертор. Пусть это не так, т. е. последним элементом является $\vee$-элемент. Тогда на его $(+)$-входы, в силу минимальности схемы S_m, подается константа 0. Обозначим через E_1 элемент, реализующий константу 0. Очевидно, что элемент E_1 — инвертор. Через E обозначим элемент, выход которого подается на вход инвертора E_1. Нетрудно понять, что элемент E является $\vee$-элементом, причем его выход на единичном наборе находится в состоянии 1.

Будем постепенно преобразовывать схему S_m аналогично тому, как это проделывалось при доказательстве леммы 1. Тогда после преобразования, связанного с удалением элемента E, в силу замечания к лемме 1, в схему будет включен инвертор, выход которого будет, в свою очередь, подаваться на вход инвертора E_1, что противоречит минимальности схемы. Следовательно последний элемент схемы S_m — инвертор.

Предположим, что схема S_m не является правильной схемой для $K_{\widetilde{1}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$. Тогда через $\widetilde{E}$ обозначим $\vee$-элемент, имеющий наибольший номер среди $\vee$-элементов, выходы которых на единичном наборе находятся в состоянии 1.

Рассмотрим минимальную правильную схему S_p для $K_{\widetilde{1}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, полученную из схемы S_m последовательными преобразованиями, аналогичными преобразованиям из доказательства леммы 1. Тогда уже после первого преобразования в силу замечания к лемме 1 вместо удаленного элемента $\widetilde{E}$ в схему будет включен инвертор, который, как нетрудно понять, будет и в окончательной схеме S_p. Обозначим его через $\widehat{E}$.

Тогда:

1) выход инвертора $\widehat{E}$ не может быть выходом схемы, так как выход элемента $\widetilde{E}$ не был выходом в схеме S_m;

2) на вход инвертора $\widehat{E}$ схемы S_p не может подаваться вход схемы, так как тогда бы в силу замечания к лемме 1 выделенный $(-)$-вход элемента $\widetilde{E}$ схемы S_m на единичном наборе находился бы в состоянии 0, что не соответствует определению выделенного входа;

3) на вход инвертора $\widehat{E}$ схемы S_p не может подаваться, в силу минимальности схемы S_p, выход другого инвертора.

Таким образом, в минимальной правильной схеме S_p для $K_{\widetilde{1}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, (где $k \geqslant 1$), на вход инвертора, не являющегося выходом схемы, подается выход некоторого $\vee$-элемента — противоречие с леммой 3.

Поэтому схема S_m является правильной схемой для $K_{\widetilde{1}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$.

Теорема 5 доказана.

Замечание. В случае базиса $B_{0l}^{\vee}$ минимальная схема, реализующая конъюнкцию $K_{\widetilde{1}}^n$ в этом базисе, вообще говоря, может и не быть правильной (см., например, схему на рис. 5,*б*).

Замечание. В случае реализации произвольной конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в базисе $B_{kl}^{\vee}$, $k \geqslant 1$, минимальная схема, реализующая $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в этом базисе, тоже, вообще говоря, может и не быть правильной (см., например, схемы на рис. 17,a) и 17,$б$), минимальность которых следует, соответственно из теорем 3 и 4).

Теперь в качестве иллюстрации как можно использовать лемму 1 для получения точных значений сложности реализации элементарных конъюнкций в базисах из $\mathfrak{B}$, содержащих и $\vee$-элементы, и &-элементы, найдем сложность реализации произвольной конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в следующих естественных базисах.

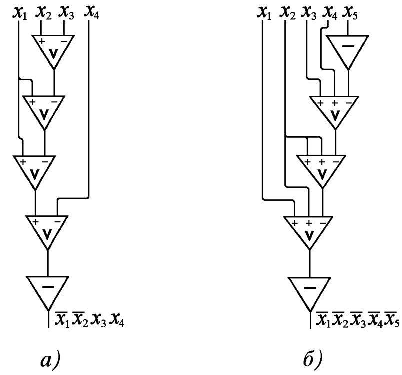


Рис. 17

$$B_1=\{x\,y,\,x\vee y,\,\overline{x}\},\quad B_2=\{x\,y,\,x\vee \overline{y},\,\overline{x}\},$$
$$B_3=\{x\,y,\,\overline{x}\vee \overline{y},\,\overline{x}\},\quad B_4=\{x\,\overline{y},\,x\vee y,\,\overline{x}\},$$
$$B_5=\{x\,\overline{y},\,x\vee \overline{y},\,\overline{x}\},\quad B_6=\{x\,\overline{y},\,\overline{x}\vee \overline{y},\,\overline{x}\},$$
$$B_7=\{\overline{x}\,\overline{y},\,x\vee y,\,\overline{x}\},\quad B_8=\{\overline{x}\,\overline{y},\,x\vee \overline{y},\,\overline{x}\},\quad B_9=\{\overline{x}\,\overline{y},\,\overline{x}\vee \overline{y},\,\overline{x}\}.$$

Заметим, что исключение из базисов B_3, B_6, B_7, B_8, B_9 функции $\overline{x}$ не ведет к изменению сложности реализуемых функций.

Т е о р е м а 6. *При $n\geqslant 2$ для сложности реализации произвольной конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ справедливы равенства:*

1) $L_{B_1}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=\begin{cases} n-1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|=n,\\ n, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|\neq n;\end{cases}$

2) $L_{B_2}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=2n-\|\widetilde{\sigma}\|-1;$

3) $L_{B_3}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=2n-\|\widetilde{\sigma}\|-1;$

4) $L_{B_4}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=n-1+\big|\|\widetilde{\sigma}\|-1\big|;$

5) $L_{B_5}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=\begin{cases} n-1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|\neq 0 \text{ и } \|\widetilde{\sigma}\|\neq n,\\ n, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|=0 \text{ или } \|\widetilde{\sigma}\|=n;\end{cases}$

6) $L_{B_6}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=\begin{cases} n-1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\| \text{ нечетно},\\ n, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\| \text{ четно};\end{cases}$

7) $L_{B_7}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=n+\|\widetilde{\sigma}\|-1;$

8) $L_{B_8}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=\begin{cases} n-1, & \text{если } n-\|\widetilde{\sigma}\| \text{ четно и } \|\widetilde{\sigma}\|\neq n,\\ n, & \text{если } n-\|\widetilde{\sigma}\| \text{ нечетно},\\ n+1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|=n;\end{cases}$

9) $L_{B_9}(K_{\widetilde{\sigma}}^n)=\begin{cases} n-1, & \text{если } n+\|\widetilde{\sigma}\|\equiv 2 \pmod 3,\\ n, & \text{если } n+\|\widetilde{\sigma}\|\not\equiv 2 \pmod 3.\end{cases}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во всех девяти случаях легко строятся схемы соответствующей сложности, которые и дают нужные верхние оценки.

Переходя к нижней оценке, обозначим через p и q соответственно число нулей и число единиц в наборе $\widetilde{\sigma}$, т. е. $p=n-\|\widetilde{\sigma}\|$, $q=\|\widetilde{\sigma}\|$. Без ограничения общности можно считать, что в наборе $\widetilde{\sigma}$ первые p элементов — нули, а оставшиеся q — единицы.

Заметим, что в каждом из упомянутых базисов любая схема, реализующая $K_{\widetilde{\sigma}}^n$, содержит $\vee$-элементов и &-элементов, по крайней мере, $n-1$.

Найдем нижнюю оценку сложности реализации $K_{\widetilde{\sigma}}^n$ в каждом базисе отдельно.

1) $B_1=\{x\,y,\,x\vee y,\,\overline{x}\}$.

С л у ч а й 1. $\|\widetilde{\sigma}\|=n$.

Очевидно, что в этом случае $L_{B_1}(K_{\widetilde{1}}^n)\geqslant n-1$.

С л у ч а й 2. $\|\widetilde{\sigma}\|\neq n$.

В этом случае конъюнкция $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ не является монотонной и, следовательно, для ее реализации требуется хотя бы один инвертор. Поэтому $L_{B_1}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) \geqslant n$.

2) $B_2 = \{x\,y,\, x \vee \overline{y},\, \overline{x}\}$.

Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_2 (такая схема существует в силу леммы 1). Обозначим через E $\vee$-элемент схемы S_p, имеющий наибольший номер. В силу свойства 5 правильных схем, выход элемента E не является выходом схемы. Так как схема S_p — правильная, учитывая определение элемента E, получаем, что выход элемента E подается на вход инвертора.

Преобразуем схему S_p в схему S'_p, заменив элемент E и следующий за ним инвертор на цепочку из инвертора (на вход которого подается то же самое, что и на (+)-вход элемента E исходной схемы) и &-элемента. Легко понять, что полученная схема S'_p будет минимальной правильной схемой для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_2.

Проделав аналогичные преобразования нужное число раз, получим минимальную правильную схему S^0_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_2, состоящую из только из &-элементов и инверторов. В силу правильности схемы S^0_p первые p входов схемы подаются только на входы инверторов. Поэтому

$$L_{B_2}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) = L_{B_2}(S_p) = L_{B_2}(S^0_p) \geqslant n - 1 + p.$$

3) $B_3 = \{x\,y,\, \overline{x} \vee \overline{y},\, \overline{x}\}$ $(B_3 = \{x\,y,\, \overline{x} \vee \overline{y}\})$.

Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_3 (такая схема существует в силу леммы 1). В силу правильности схемы S_p первые p входов схемы подаются только на входы инверторов. Поэтому

$$L_{B_3}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) = L_{B_3}(S_p) \geqslant n - 1 + p.$$

4) $B_4 = \{x\,\overline{y},\, x \vee y,\, \overline{x}\}$.

Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_4 (такая схема существует в силу леммы 1).

Случай 1. $\|\widetilde{\sigma}\| = 0$.

Докажем, что в схеме S_p есть хотя бы один инвертор. В силу свойства 5 правильных схем последний элемент схемы — либо инвертор (тогда требуемое доказано), либо &-элемент. Если последним является &-элемент, то на (+)-вход &-элемента с наименьшим среди всех &-элементов номером в силу правильности схемы S_p подается выход инвертора. Таким образом,

$$L_{B_4}(K^n_{\widetilde{0}}) = L_{B_4}(S_p) \geqslant n - 1 + 1 = n.$$

Случай 2. $\|\widetilde{\sigma}\| \geqslant 1$.

Обозначим через k число &-элементов в схеме S_p. Последние q входов схемы и выходы всех &-элементов, кроме, быть может, последнего, в силу правильности схемы S_p подаются только на (+)-входы &-элементов и инверторы. Но (+)-входов у &-элементов всего k. Поэтому в схеме S_p есть, по крайней мере, $q + k - 1 - k$ инверторов (на их входы подаются входы схемы и выходы &-элементов). Таким образом,

$$L_{B_4}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) = L_{B_4}(S_p) \geqslant n - 1 + q - 1 = n + q - 2.$$

5) $B_5 = \{x\,\overline{y},\, x \vee \overline{y},\, \overline{x}\}$.

Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_5 (такая схема существует в силу леммы 1).

Случай 1. $n-\|\widetilde{\sigma}\|\geqslant 1, \|\widetilde{\sigma}\|\geqslant 1$.

В этом случае достаточно тривиальной оценки $L_{B_5}(K^n_{\widetilde{\sigma}})\geqslant n-1$.

Случай 2. $\|\widetilde{\sigma}\|=0$.

Обозначим через E элемент схемы S_p с наименьшим номером среди всех элементов, не являющихся инверторами. Тогда в силу правильности схемы S_p на один из входов элемента E (если E — $\vee$-элемент, то на $(-)$-вход, а если E — &-элемент, то на $(+)$-вход) подается выход инвертора. Таким образом, $L_{B_5}(K^n_{\widetilde{0}})=L_{B_5}(S_p)\geqslant n-1+1=n$.

Случай 3. $\|\widetilde{\sigma}\|=n$.

Обозначим через E элемент схемы S_p с наименьшим номером среди всех элементов, не являющихся инверторами. Тогда в силу правильности схемы S_p на один из входов элемента E (если E — $\vee$-элемент, то на $(+)$-вход, а если E — &-элемент, то на $(-)$-вход) подается выход инвертора. Таким образом, $L_{B_5}(K^n_{\widetilde{1}})=L_{B_5}(S_p)\geqslant n-1+1=n$.

6) $B_6=\{x\,\overline{y},\, \overline{x}\vee\overline{y},\, \overline{x}\}$ $(B_6=\{x\,\overline{y},\, \overline{x}\vee\overline{y}\})$.

Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_6 (такая схема существует в силу леммы 1).

Случай 1. Число $\|\widetilde{\sigma}\|$ нечетно.

В этом случае достаточно тривиальной оценки $L_{B_6}(K^n_{\widetilde{\sigma}})\geqslant n-1$.

Случай 2. Число $\|\widetilde{\sigma}\|$ четно.

Предположим, что $L_{B_6}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) = n-1$. Тогда в схеме S_p нет инверторов, и, поэтому, в силу свойства 5 правильных схем последним является &-элемент. Кроме того, тогда каждый вход схемы S_p и выход каждого элемента, кроме последнего, подается на вход только одного элемента, причем в силу правильности схемы S_p на входы $\vee$-элементов и на $(+)$-входы &-элементов подаются последние q входов схемы и выходы всех, кроме последнего, &-элементов, и только они. Обозначив через d и k соответственно число $\vee$-элементов и &-элементов в схеме S_p, получаем, что $2d+k=q+k-1$. Отсюда следует, что $\|\widetilde{\sigma}\|=q=2d-1$, что противоречит четности числа $\|\widetilde{\sigma}\|$.

7) $B_7=\{\overline{x}\,\overline{y},\, x\vee y,\, \overline{x}\}$ $(B_7=\{\overline{x}\,\overline{y},\, x\vee y\})$.

Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_7 (такая схема существует в силу леммы 1). В силу правильности схемы S_p последние q входов схемы подаются только на входы инверторов. Поэтому $L_{B_7}(K^n_{\widetilde{\sigma}})=L_{B_7}(S_p)\geqslant n-1+q$.

8) $B_8=\{\overline{x}\,\overline{y},\, x\vee\overline{y},\, \overline{x}\}$ $(B_8=\{\overline{x}\,\overline{y},\, x\vee\overline{y}\})$.

Рассмотрим произвольную минимальную правильную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_8 (такая схема существует в силу леммы 1).

Случай 1. Число $n-\|\widetilde{\sigma}\|$ четно, $\|\widetilde{\sigma}\|\neq n$.

В этом случае достаточно тривиальной оценки $L_{B_8}(K^n_{\widetilde{\sigma}})\geqslant n-1$.

Случай 2. Число $n-\|\widetilde{\sigma}\|$ нечетно.

Предположим, что $L_{B_8}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) = n-1$. Тогда в схеме S_p нет инверторов, и, поэтому, в силу свойства 5 правильных схем последним является &-элемент. Кроме того, тогда каждый вход схемы S_p и выход каждого элемента, кроме последнего, подается на вход только одного элемента, причем в силу правильности схемы S_p на входы &-элементов и на $(+)$-входы $\vee$-элементов подаются первые p входов схемы и выходы всех $\vee$-элементов, и только они. Обозначив через d и k соответственно число $\vee$-элементов и &-элементов в схеме S_p, получаем, что $d+2k=p+d$. Отсюда следует, что $p=n-\|\widetilde{\sigma}\|=2k$, что противоречит нечетности числа $\|\widetilde{\sigma}\|$.

Случай 3. $\|\widetilde{\sigma}\|=n$.

Докажем, что $L_{B_8}(S_p)\geqslant n+1$. Обозначим через E элемент схемы S_p с наименьшим номером среди всех элементов, не являющихся инверторами. Тогда в силу правильности схемы S_p на один из входов элемента E (если E — $\vee$-элемент, то на $(+)$-вход, а если E — &-элемент, то на оба входа) подается выход некоторого инвертора E_0, на вход которого подается входная переменная. Без ограничения общности можно считать, что это переменная x_1.

Если вход схемы S_p, соответствующий переменной x_1, подается не только на вход инвертора E_0, то, легко понять, справедливо неравенство $L_{B_8}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) \geqslant n+1$.

Если вход схемы S_p, соответствующий переменной x_1, подается только на вход инвертора E_0, то удалив из схемы инвертор E_0 и подав вместо его выхода вход схемы, соответствующий переменной x_1, получим схему S'_p, реализующую конъюнкцию $\overline{x}_1 x_2 \ldots x_n$. Учитывая доказанное в случае 2, имеем:

$$L_{B_8}(S_p) = L_{B_8}(S'_p) + 1 \geqslant L_{B_8}(\overline{x}_1 x_2 \ldots x_n) + 1 \geqslant n+1.$$

9) $B_9 = \{\overline{x}\,\overline{y},\ \overline{x} \vee \overline{y},\ \overline{x}\}$ $(B_9 = \{\overline{x}\,\overline{y},\ \overline{x} \vee \overline{y}\})$.

Случай 1. $n + \|\widetilde{\sigma}\| \equiv 2 \pmod 3$.

В этом случае достаточно тривиальной оценки $L_{B_9}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) \geqslant n-1$.

Случай 2. $n + \|\widetilde{\sigma}\| \not\equiv 2 \pmod 3$.

Индукцией по длине конъюнкции покажем, что в этом случае $L_{B_9}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) \geqslant n$.

Для наборов $\widetilde{\alpha}$ длины 2, удовлетворяющих условию $2 + \|\widetilde{\alpha}\| \not\equiv 2 \pmod 3$, неравенство $L_{B_9}(K^n_{\widetilde{2}}) \geqslant 2$ очевидно.

Пусть доказано, что для любого набора $\widetilde{\alpha}$ длины $n-1$, удовлетворяющего условию $n - 1 + \|\widetilde{\alpha}\| \not\equiv 2 \pmod 3$, справедливо неравенство $L_{B_9}(K^{n-1}_{\widetilde{\alpha}}) \geqslant n-1$.

Рассмотрим произвольную минимальную схему S_p для $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе B_9. Обозначим первый элемент схемы через E.

а) Если элемент E — инвертор, то, очевидно, что $L_{B_9}(K^n_{\widetilde{\sigma}}) = L_{B_9}(S_p) \geqslant n$.

б) Пусть элемент E является $\vee$-элементом. Предположим, что $L_{B_9}(S_p) = n-1$. В силу правильности схемы S_p на входы элемента E подаются входы схемы, соответствующие переменным, входящим в $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ без отрицания. Без ограничения общности можно считать, что это переменные x_{p+1} и x_{p+2}. В силу предположения о сложности схемы S_p каждый вход схемы подается на вход только одного элемента. Следовательно, включив в схему вход y вместо элемента E и входов x_{p+1} и x_{p+2}, получим схему S'_p, реализующую конъюнкцию $\overline{x_1} \ldots \overline{x_p}\,\overline{y}\, x_{p+3} \ldots x_{p+q}$.

Поэтому

$$L_{B_9}(S_p) = L_{B_9}(S'_p) + 1 \geqslant L_{B_9}(\overline{x_1} \ldots \overline{x_p}\,\overline{y}\, x_{p+3} \ldots x_{p+q}) + 1.$$

Учитывая, что $(p+q-1) + (q-2) \not\equiv 2 \pmod 3$, в силу предположения индукции получаем, что

$$L_{B_9}(\overline{x_1} \ldots \overline{x_p}\,\overline{y}\, x_{p+3} \ldots x_{p+q}) \geqslant p+q-1 = n-1.$$

Поэтому $L_{B_9}(S_p) \geqslant n$, что противоречит предположению.

в) Пусть элемент E является &-элементом. Предположим, что $L_{B_9}(S_p) = n-1$. В силу правильности схемы S_p на входы элемента E подаются входы схемы, соответствующие переменным, входящим в $K^n_{\widetilde{\sigma}}$ с отрицанием. Без ограничения общности можно считать, что это переменные x_{p-1}

и x_p. В силу предположения о сложности схемы S_p каждый вход схемы подается на вход только одного элемента. Следовательно, включив в схему вход y вместо элемента E и входов x_{p-1} и x_p, получим схему S'_p, реализующую конъюнкцию $\overline{x_1}\ldots\overline{x_{p-2}}yx_{p+1}\ldots x_{p+q}$.

Поэтому

$$L_{B_9}(S_p)=L_{B_9}(S'_p)+1\geqslant L_{B_9}(\overline{x_1}\ldots\overline{x_{p-2}}yx_{p+1}\ldots x_{p+q})+1.$$

Учитывая, что $(p+q-1)+(q+1)\not\equiv 2 \pmod 3$, в силу предположения индукции получаем, что

$$L_{B_9}(\overline{x_1}\ldots\overline{x_{p-2}}yx_{p+1}\ldots x_{p+q})\geqslant p+q-1=n-1.$$

Поэтому $L_{B_9}(S_p)\geqslant n$, что противоречит предположению.

Таким образом, установлено, что в условиях случая 2 справедливо неравенство $L_{B_9}(K^n_{\widetilde{\sigma}})\geqslant n$.

Теорема 6 доказана.

Из теоремы 6 и соображений двойственности вытекает следующая теорема.

Теорема 6′. *При $n\geqslant 2$ для сложности реализации произвольной дизъюнкции $D^n_{\widetilde{\sigma}}$ справедливы равенства:*

1) $L_{B_1}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=\begin{cases} n-1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|=n, \\ n, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|\neq n; \end{cases}$

2) $L_{B_2}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=n-1+\big|\|\widetilde{\sigma}\|-1\big|;$

3) $L_{B_3}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=n+\|\widetilde{\sigma}\|-1;$

4) $L_{B_4}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=2n-\|\widetilde{\sigma}\|-1;$

5) $L_{B_5}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=\begin{cases} n-1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|\neq 0 \text{ и } \|\widetilde{\sigma}\|\neq n, \\ n, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|=0 \text{ или } \|\widetilde{\sigma}\|=n; \end{cases}$

6) $L_{B_6}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=\begin{cases} n-1, & \text{если } n-\|\widetilde{\sigma}\| \text{ четно и } \|\widetilde{\sigma}\|\neq n, \\ n, & \text{если } n-\|\widetilde{\sigma}\| \text{ нечетно}, \\ n+1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\|=n; \end{cases}$

7) $L_{B_7}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=2n-\|\widetilde{\sigma}\|-1;$

8) $L_{B_8}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=\begin{cases} n-1, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\| \text{ нечетно}, \\ n, & \text{если } \|\widetilde{\sigma}\| \text{ четно}; \end{cases}$

9) $L_{B_9}(D^n_{\widetilde{\sigma}})=\begin{cases} n-1, & \text{если } n+\|\widetilde{\sigma}\|\equiv 2 \pmod 3, \\ n, & \text{если } n+\|\widetilde{\sigma}\|\not\equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$

Во всех предыдущих утверждениях речь шла о сложности реализации элементарных конъюнкций и дизъюнкций в базисах, состоящих только из элементарных конъюнкций и дизъюнкций. Однако, подход, использованный в основной лемме, может быть обобщен на существенно более широкий класс базисов. Прежде чем сделать это, введем дополнительные обозначения.

Через F обозначим множество всех отличных от констант булевых функций, которые принимают значение 1 либо на одном наборе существенных переменных, либо на всех наборах, кроме одного. Таким образом, множество F состоит из элементарных конъюнкций и дизъюнкций.

Тогда класс базисов $\mathfrak{B}$ можно определить как класс всех (полных) базисов B, удовлетворяющих условию $B\subset F$.

Для произвольного полного базиса B обозначим через $\widehat{B}$ множество всех функций из F, которые можно получить из функций базиса B подстановкой констант и переименованием (в том числе отождествлением) переменных.

Определим более широкий, чем $\mathfrak{B}$ класс базисов $\mathfrak{B}_1$. Базис B принадлежит классу $\mathfrak{B}_1$, если он полный и для любой функции $f \in B$ и для любого набора $\widetilde{\alpha}$ существенных переменных функции f выполняются условия

а) если $f(\widetilde{\alpha})=1$, то найдется конъюнкция $K_{f,\widetilde{\alpha}} \in \widehat{B}$, такая, что для любого набора $\widetilde{x}$ выполняется неравенство $K_{f,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}) \leqslant f(\widetilde{x})$, причем $K_{f,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\alpha})=1$;

б) если $f(\widetilde{\alpha})=0$, то найдется дизъюнкция $D_{f,\widetilde{\alpha}} \in \widehat{B}$, такая, что для любого набора $\widetilde{x}$ выполняется неравенство $D_{f,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}) \geqslant f(\widetilde{x})$, причем $D_{f,\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\alpha})=0$.

Теорема 7. *Если $B \in \mathfrak{B}_1$, то*

$$L_{\widehat{B}}(K_{\widetilde{\sigma}}) \leqslant L_B(K_{\widetilde{\sigma}}) \leqslant L_{\widehat{B}}(K_{\widetilde{\sigma}}) + L_B(0) + L_B(1).$$

Доказательство. Верхняя оценка оценка очевидна.

Нижняя оценка. Пусть S — минимальная схема в базисе B, реализующая конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}$. Преобразуем схему S в схему $\widehat{S}$ над базисом $\widehat{B}$ следующим образом. Последовательно, начиная с элемента, имеющего наибольший номер (выхода схемы S), заменим каждый элемент из B на элемент из $\widehat{B}$ так, чтобы реализуемая схемой функция не изменилась, и преобразованная часть схемы удовлетворяла бы условиям а), б) и в) определения правильной схемы для $K_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе $\widehat{B}$.

Пусть элемент E_f, реализующий функцию $f \in B$, имеет наибольший номер среди элементов, еще не подвергнутых преобразованиям. Заменим элемент E_f на элемент, реализующий функцию из $\widehat{B}$.

Обозначим через $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(\widetilde{\sigma})$ набор, который подается на входы элемента E_f схемы S в том случае, если на входы схемы S подается набор $\widetilde{\sigma}$.

Случай 1. Пусть $f(\widetilde{\alpha})=1$. Тогда заменяем элемент E_f на элемент $E_{K_{f,\widetilde{\alpha}}}$, реализующий конъюнкцию $K_{f,\widetilde{\alpha}} \in \widehat{B}$. Покажем теперь, что если до этого преобразования схема реализовывала конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}$, то и после преобразования полученная схема реализует конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma}}$. Действительно, пусть при подаче на входы схемы набора $\widetilde{\delta}$ элемент E_f схемы до преобразования и элемент $E_{K_{f,\widetilde{\alpha}}}$ схемы после преобразования выдают на своих выходах разные значения, причем, в силу определения конъюнкции $K_{f,\widetilde{\alpha}}$, на выходе элемента E_f будет значение 1, а на выходе элемента $E_{K_{f,\widetilde{\alpha}}}$ — значение 0. Тогда, учитывая, что при подаче на входы схемы набора $\widetilde{\sigma}$ элемент $E_{K_{f,\widetilde{\alpha}}}$ выдает значение 1, и применяя замечание к свойству 3 правильных схем, получаем, что выход преобразованной схемы на наборах $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\delta}$ будет выдавать разные значения, т. е. преобразованная схема и на наборе $\widetilde{\delta}$ будет выдавать нужное значение.

Случай 2. Пусть $f(\widetilde{\alpha})=0$. Тогда заменяем элемент E_f на элемент $E_{D_{f,\widetilde{\alpha}}}$, реализующий дизъюнкцию $D_{f,\widetilde{\alpha}} \in \widehat{B}$. Доказательство корректности замены аналогично случаю 1.

Кроме такого легко сделать, если потребуется, дополнительное преобразование схемы (удаление одного элемента), такое что все элементы, начиная (элементы схемы пронумерованы) с элемента $E_{K_{f,\widetilde{\alpha}}}$ (или, соответственно, $E_{D_{f,\widetilde{\alpha}}}$), будут удовлетворять и условиям б) и в) определения правильной схемы.

Проделав такие преобразования нужное число раз (а именно, $L_B(S)$ раз), получим схему S_p, являющуюся правильной для конъюнкции $K_{\widetilde{\sigma}}$ в базисе $\widehat{B}$ и удовлетворяющую условию $L_{\widehat{B}}(S_p) \leqslant L_B(S)$. Следовательно,

$$L_B(K_{\tilde{\sigma}}) \geqslant L_{\widehat{B}}(K_{\tilde{\sigma}}).$$

Теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда «доступны» не все элементы из множества $\widehat{B}$, а только какая-то часть, то нижняя оценка теоремы 7 все равно сохраняется. Поэтому справедлива

Теорема 8. *Если функция $K_{\tilde{\sigma}}$ выражается через некоторое множество M, и справедливо включение $M \subset \widehat{B}$ для некоторого базиса B, то выполняется неравенство*

$$L_M(K_{\tilde{\sigma}}) \leqslant L_B(K_{\tilde{\sigma}}).$$

Из теорем 7 и 8, а также соображений двойственности вытекают следующие теоремы.

Теорема 7′. *Если $B \in \mathfrak{B}_1$, то*

$$L_{\widehat{B}}(D_{\tilde{\sigma}}) \leqslant L_B(D_{\tilde{\sigma}}) \leqslant L_{\widehat{B}}(D_{\tilde{\sigma}}) + L_B(0) + L_B(1).$$

Теорема 8′. *Если функция $D_{\tilde{\sigma}}$ выражается через некоторое множество M, и справедливо включение $M \subset \widehat{B}$ для некоторого базиса B, то выполняется неравенство*

$$L_M(D_{\tilde{\sigma}}) \leqslant L_B(D_{\tilde{\sigma}}).$$

Приведем пример применения теоремы 7.

Докажем, что $L_B(K^{n}_{\tilde{1}}) = n-1$, где $B = \{xy \vee \overline{x}z, \overline{x}\}$.

Легко понять, что множество $\widehat{B}$ будет состоять, с точностью до переименования переменных, из функций вида $\overline{x}$, xy, $x \vee y$, $\overline{x}y$, $\overline{x} \vee y$.

Покажем, что $B \in \mathfrak{B}_1$. Для этого достаточно проверить выполнение условий вхождения базиса B в класс $\mathfrak{B}_1$ для функции $f = xy \vee \overline{x}z$. Положим

$$D_{f,(0,0,0)} = x \vee z,\ K_{f,(0,0,1)} = \overline{x}z, \quad D_{f,(0,1,0)} = x \vee z,\ K_{f,(0,1,1)} = \overline{x}z,$$
$$D_{f,(1,0,0)} = \overline{x} \vee y,\ D_{f,(1,0,1)} = \overline{x} \vee y,\ K_{f,(1,1,0)} = xy, \quad K_{f,(1,1,1)} = xy.$$

Эти функции удовлетворяют нужным условиям и содержатся в множестве $\widehat{B}$. Следовательно, $B \in \mathfrak{B}_1$.

Применяя теорему 7 и используя тривиальную нижнюю оценку, получаем:

$$L_B(K^{n}_{\tilde{1}}) \geqslant L_{\widehat{B}}(K^{n}_{\tilde{1}}) \geqslant n-1.$$

С другой стороны, на рис. 18 показана схема, реализующая $K^{n}_{\tilde{1}}$ в базисе B и содержащая ровно $n-1$ элементов. Следовательно, $L_B(K^{n}_{\tilde{1}}) = n-1$.

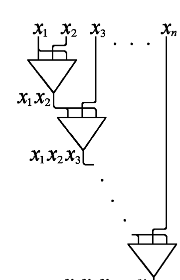


Рис. 18

Теперь, в качестве еще одного примера применения теорем 7 и 8, исследуем сложность реализации конъюнкции $K^{n}_{\tilde{1}}$ в базисах, состоящих из одной функции шефферовского типа, существенно зависящей не более чем от трех переменных.

Таких функций (а, следовательно, и базисов) 16:

$$f_1 = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}, \quad f_2 = \overline{x}\,\overline{y}, \quad f_3 = \overline{x}\,(y \oplus z \oplus 1), \quad f_4 = \overline{x}\,(\overline{y} \vee \overline{z}),$$
$$f_5 = (x \oplus y \oplus z \oplus 1)\,(\overline{x} \vee \overline{y}), \quad f_6 = \overline{x}\,(y \vee \overline{z}), \quad f_7 = \overline{x}\,\overline{y} \vee x\,y\,\overline{z}, \quad f_8 = x\,y \oplus x\,z \oplus z \oplus 1,$$
$$f_9 = x\,y \oplus y \oplus z \oplus 1, \quad f_{10} = \overline{x} \vee \overline{y}\,\overline{z}, \quad f_{11} = (x \oplus y \oplus z \oplus 1) \vee \overline{x}\,\overline{y}, \quad f_{12} = \overline{x} \vee y\,\overline{z},$$
$$f_{13} = (\overline{x} \vee \overline{y})(x \vee y \vee \overline{z}), \quad f_{14} = \overline{x}(y \oplus z), \quad f_{15} = \overline{x} \vee \overline{y}, \quad f_{16} = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}.$$

Простым применением основной леммы легко получается, что

$$L_{\{f_1\}}(K_{\tilde{1}}^n) = n + 2\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil - 1, \qquad L_{\{f_2\}}(K_{\tilde{1}}^n) = 3n - 3.$$

В силу теоремы 2 имеем:

$$L_{\{f_{15}\}}(K_{\tilde{1}}^n) = 2n - 2, \qquad L_{\{f_{16}\}}(K_{\tilde{1}}^n) = 2\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Используя теорему 7, получаем:

$$L_{\{f_4\}}(K_{\tilde{1}}^n) = L_{\{\overline{x},\ \overline{x}\,\overline{y},\ \overline{x} \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_6\}}(K_{\tilde{1}}^n) = L_{\{\overline{x},\ \overline{x}\,\overline{y},\ x\,\overline{y},\ x \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{10}\}}(K_{\tilde{1}}^n) = L_{\{\overline{x},\ \overline{x}\,\overline{y},\ \overline{x} \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{12}\}}(K_{\tilde{1}}^n) = L_{\{\overline{x},\ x\,\overline{y},\ x \vee \overline{y},\ \overline{x} \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1).$$

Теперь, применяя теорему 8, получаем такие нижние оценки:

$$L_{\{f_8\}}(K_{\tilde{1}}^n) \geqslant L_{\{x\,\overline{y},\ \overline{x}\,\overline{y},\ x \vee y,\ x \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_9\}}(K_{\tilde{1}}^n) \geqslant L_{\{x\,y,\ \overline{x}\,\overline{y},\ x \vee y,\ x \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{11}\}}(K_{\tilde{1}}^n) \geqslant L_{\{x\,y,\ \overline{x}\,\overline{y},\ x \vee y,\ \overline{x} \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{13}\}}(K_{\tilde{1}}^n) \geqslant L_{\{x\,y,\ \overline{x}\,\overline{y},\ x \vee \overline{y}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{14}\}}(K_{\tilde{1}}^n) \geqslant L_{\{x\,y,\ x\,\overline{y},\ x \vee y\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1).$$

С другой стороны, подставляя в базисные функции константы, имеем:

$$L_{\{f_8\}}(K_{\tilde{1}}^n) \leqslant L_{\{\overline{x} \vee z\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_9\}}(K_{\tilde{1}}^n) \leqslant L_{\{\overline{x} \vee y\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{11}\}}(K_{\tilde{1}}^n) \leqslant L_{\{x \vee \overline{z}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{13}\}}(K_{\tilde{1}}^n) \leqslant L_{\{y \vee \overline{z}\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1),$$
$$L_{\{f_{14}\}}(K_{\tilde{1}}^n) \leqslant L_{\{\overline{x} \vee y\}}(K_{\tilde{1}}^n) + O(1) = n + O(1).$$

Таким образом, для 13 из 16 шефферовских базисов найдены точные (с точностью до констант, которые несложно вычисляются) значения, хотя только для четырех из них формально можно применить основную лемму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелик Е. С. О сложности реализации элементарных конъюнкций и дизъюнкций в базисе $\{x \mid y\}$ // Проблемы кибернетики. Вып. 26. — М.: Наука, 1973. — С. 27–36.
2. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Новиков С. В., Комиссаров В. Э., Супрун В. П. Минимальная реализация функции $f = x_1 x_2 \ldots x_n$ схемами из элементов шефферовского типа // Вестник Белорус. ун-та. — 1975. — Сер. 1, № 2. — С. 13–17.
4. Сопруненко Е. П. О минимальной реализации некоторых функций схемами из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 15. — М.: Наука, 1965. — С. 117–134.

Поступило в редакцию 23 IX 2002