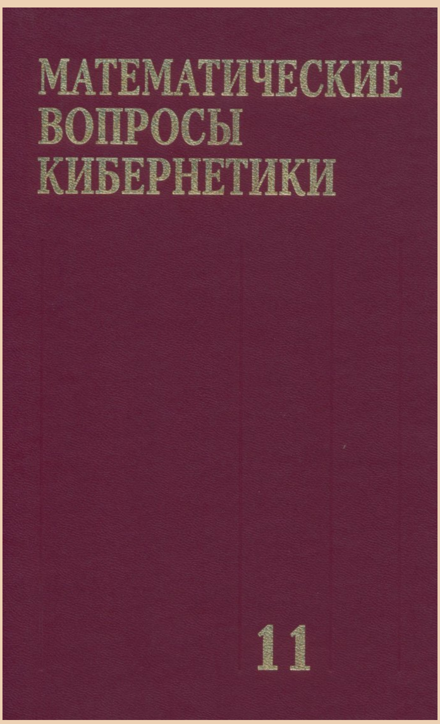

А. И. Проскуряков

О сложности реализации некоторых функций сетями из элементов, осуществляющих аналитические операции

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Проскуряков А. И. О сложности реализации некоторых функций сетями из элементов, осуществляющих аналитические операции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 262–269. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2002-262

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ СЕТЯМИ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИХ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ *)

А. И. ПРОСКУРЯКОВ

(МОСКВА)

В работе исследуется вопрос о сложности реализации функций действительного переменного с помощью сетей из интеграторов и сумматоров, рассмотренных в работе К. Шеннона [4]. Удалось получить точные нижние оценки сложности реализации индивидуальных функций и указать функции, имеющие сколь угодно высокую заданную сложность реализации.

§ 1. Введение

Изучение дифференциального анализатора мотивировано тем, что он является важным примером устройств (моделей), позволяющих реализовать функции действительного переменного через некоторые заданные функции с помощью аналитических операций (интегрирования, суммирования и др.). Рассмотрим механическую модель, приводящую к понятию сети из интеграторов и сумматоров — механический дифференциальный анализатор, предназначенный для численного решения систем дифференциальных уравнений. Такая модель рассматривалась первоначально, в том числе и в работе [4]. Существуют электронные и цифровые реализации интеграторов и сумматоров, которые математически описываются аналогично.

В механическом дифференциальном анализаторе значения переменных задаются углами поворота валов (от начального положения). Валы связаны между собой через устройства, обеспечивающие выполнение определенных математических соотношений между углами поворота связанных валов. С помощью этих устройств для соответствующих валов обеспечивается выполнение соотношений, определяемых данной системой уравнений. Например, если в системе сумма двух членов равна третьему члену, то соответствующие валы анализатора связываются суммирующим устройством. Начальные условия системы вводятся в анализатор посредством начальных установок его элементов.

Вращение вала, представляющего независимое переменное, влечёт за собой вращение других валов в соответствии с уравнениями, по которым построен анализатор (если система при данных начальных условиях однозначно разрешима, иначе поведение анализатора не определено).

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00985) и Программы поддержки ведущих научных школ РФФИ (код проекта 00–15–96103).

Предполагается, что в дифференциальном анализаторе используются устройства двух видов.

1. *Интеграторы.* Для данных двух валов u и v интегратор вынуждает третий вал вращаться в соответствии с соотношением $y = \int\limits_{x_0}^{x} u\,dv$, где x — независимая переменная. Поскольку всюду далее будет рассматриваться только вопрос о сложности в смысле числа интеграторов, то в дальнейшем предполагается $x_0 = 0$ и при необходимости к выходу интегратора прибавляется константа $\int\limits_{x_0}^{0} u\,dv$.

2. *Сумматоры.* Для данных двух валов u и v сумматор вынуждает третий вал вращаться, реализуя $u + v$. Соединяя последовательно простые сумматоры, можно реализовать выражение $\sum\limits_i u_i$.

К. Шенноном в [4] указано необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция могла быть реализована дифференциальным анализатором — такая функция f не должна быть гипертрансцендентной (см. [4]).

В настоящей работе исследуется вопрос о сложности реализации индивидуальных функций. В частности, удалось получить точную оценку сложности для функций вида $e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}$.

§ 2. Основные понятия

В работе используются известные понятия и факты из области алгебры [1].

Будем обозначать поле действительных чисел как $\mathbb{R}$, а кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами как $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Дифференциальный анализатор можно записать в виде системы интегральных уравнений с независимой переменной, соответствующей независимому валу, в которой уравнения естественным образом соответствуют элементам сети. Это оправдывает следующее определение.

Назовем *сетью из интеграторов и сумматоров* систему из уравнений вида $u_k = \int\limits_0^x u_i\,du_j$ и $u_k = u_i + u_j$, где u_k обозначает одну из переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а u_i и u_j — одну из $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ или действительную константу. Эти константы считаются входными параметрами сети. Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ должны входить в левые части уравнений ровно по одному разу и для любого набора входных констант данная система должна быть либо неразрешима, либо иметь единственное (непродолжаемое) решение.

Уравнения первого вида соответствуют интеграторам, а второго — сумматорам.

Будем говорить, что функция одного переменного $y = f(x)$ *реализуема*, если существует сеть из интеграторов и сумматоров такая, что при некотором наборе входных констант в её решении некоторая из зависимых переменных (например, y_n) равняется (как функция от x) $f(x)$, причем область изменения x содержит область определения функции f.

В качестве примера функции, реализуемой сетью из интеграторов и сумматоров и отличной от многочлена, можно привести $\sin x$. Реализующая его сеть имеет вид

$$\begin{cases} y_1(x) = \int y_2(x)\,dx, \\ y_2(x) = y_4(x) + y_3(x), \\ y_3(x) = y_2(x) + y_2(x), \\ y_4(x) = \int y_1(x)\,dx. \end{cases}$$

При начальных условиях $y_1(0)=1$, $y_2(0)=0$, $y_3(0)=0$, $y_4(0)=0$ имеем решение

$$\begin{cases} y_1(x) = \cos x, \\ y_2(x) = -\sin x, \\ y_3(x) = -2\sin x, \\ y_4(x) = \sin x. \end{cases}$$

Сложностью сети будем называть число использованных в ней интеграторов.

В рассмотренном примере сложность сети равна двум. Нетрудно доказать, что с меньшей сложностью реализовать $\sin x$ нельзя.

§ 3. Условие реализуемости функции

Функция $y = f(x)$ называется *гипертрансцендентной*, если она не обращает тождественно в нуль никакой нетривиальный дифференциальный многочлен, иначе говоря, если ни при каких значениях $A_j \in \mathbb{R}$ и $n_{ij}, n_j, m, N \in \mathbb{N}$ (где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $N \neq 0$, не все A_j равны 0) не может выполняться соотношение

$$\sum_{j=1}^{N} A_j x^{n_j} f^{n_{0j}} (f')^{n_{1j}} \ldots (f^{(m)})^{n_{mj}} \equiv 0 \tag{1}$$

на области определения f.

Функция может быть реализована тогда и только тогда, когда она не является гипертрансцендентной [4]. Из часто встречающихся аналитических функций гипертрансцендентными являются гамма-функция и дзета-функция Римана:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\,dx; \quad \zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Пусть функция f не является гипертрансцендентной, т. е. обращает на своей области определения тождественно в нуль некоторый нетривиальный дифференциальный многочлен. Обозначим минимальный порядок такого многочлена как $m(f)$.

Тогда из доказательства условия реализуемости в [4] следует, что сложность реализации f не меньше, чем $m(f)$ — в противном случае можно было бы построить для f уравнение меньшего порядка. Это свойство будет использовано для получения нижних оценок сложности индивидуальных функций.

§ 4. Башни из экспонент

Будем рассматривать функции одной действительной переменной

$$e_1(x) = e^x,\ e_2(x) = e^{e^x},\ \ldots,\ e_{k+1}(x) = e^{e_k(x)},\ \ldots$$

Функция e_n называется *башней* из экспонент *высоты* n.

Функции e_n определены на всей действительной прямой и являются аналитическими.

Лемма 1. *Функция $e_1(x) = e^x$ не обращает тождественно в ноль никакой нетривиальный дифференциальный многочлен порядка* 0.

Доказательство. Предположим противное: e_1 удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=1}^{N} A_j x^{n_j} f^{n_{0j}} \equiv 0.$$

Выделим в нём члены с наибольшей степенью по переменной f, а среди них член с наибольшей степенью по переменной x. Его абсолютная величина растёт быстрее, чем абсолютная величина суммы остальных членов, что противоречит предположению.

Лемма доказана.

Для доказательства нижних оценок сложности башен из экспонент рассмотрим функции более общего вида. Из оценок сложности для них будет следовать нужный результат для башен из экспонент. А именно, рассмотрим одночлены, составленные из башен e_n, т. е. выражения вида:

$$e_1^{r_1} e_2^{r_2} \ldots e_k^{r_k},$$

где r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — целые числа, $r_i \geqslant 0$.

Введём на множестве таких одночленов лексикографическое упорядочение: положим $Q \prec R$, если наибольший номер n функции e_n, входящей в R, больше, чем в Q, или если они равны, и есть такое $n_0 \leqslant n$, что степень e_{n_0} в R больше, чем в Q, а при $k > n_0$ степени e_k у них равны.

Лемма 2. *Если одночлен f больше g лексикографически, то и по порядку (т. е. $|f/g| \to \infty$ при $x \to +\infty$).*

Доказательство. Действительно, рассмотрим их отношение. Это произведение вида

$$e_1^{m_1} e_2^{m_2} \ldots e_n^{m_n},$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$, причём $m_n > 0$. Преобразуем его к виду

$$\prod_{i<n} \left(e_i^{m_i} e_n^{m_n/(n-1)}\right).$$

Поскольку e_n растёт быстрее, чем любая степень e_i при $i < n$, каждый из сомножителей является неограниченно возрастающей при $x \to \infty$ функцией.

Лемма доказана.

Замечание. Если один такой одночлен больше другого асимптотически, то, очевидно, больше и по порядку. Поскольку лексикографическое упорядочение задаёт на них структуру линейно упорядоченного множества, верно и такое утверждение: если один из них асимптотически больше, то он больше и лексикографически.

Лемма 3. *Любой многочлен R, $R \in \mathbb{R}[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ либо тождественно равен константе, либо стремится к бесконечности при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Если этот многочлен является константой, то утверждение леммы выполнено. Иначе, рассмотрим его лексикографически наибольший член $e_1^{r_1} e_2^{r_2} \ldots e_k^{r_k}$, входящий в него с некоторым ненулевым множителем c. Он стремится к бесконечности при $x \to +\infty$, а все остальные члены имеют меньший порядок роста (лемма 2; наличие множителей не влияет на порядок роста). Значит, $R \to \infty$ при $x \to +\infty$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Множество функций e_i алгебраически независимо.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любое его конечное подмножество вида $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ алгебраически независимо. Действительно, тождество, устанавливающее алгебраическую зависимость всего множества башен из экспонент, включает в себя лишь конечное число различных башен.

Из леммы 1 следует, что $e_1(x) = e^x$ не является алгебраической функцией. Таким образом, множество, состоящее из одной функции e_1, алгебраически независимо.

Пусть n минимальное такое, что $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — алгебраически зависимое множество. Рассмотрим многочлен R, устанавливающий его алгебраическую зависимость. Без ограничения общности можно считать его приведённым, т. е. не содержащим подобных членов. Выделим в нём слагаемые, куда e_n входит в наибольшей степени k:

$$R = e_n^k \underbrace{\sum \alpha_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} e_1^{k_1} e_2^{k_2} \ldots e_{n-1}^{k_{n-1}}}_{S} + R_0.$$

Сумма S представляет собой ненулевой многочлен. А поскольку множество $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ по предположению алгебраически независимо, S не может быть и равно нулю тождественно. Значит, либо S тождественно равно ненулевой константе, либо стремится к бесконечности при $x \to +\infty$ (лемма 3). Следовательно, $e_n^k S$ по порядку не меньше e_n^k. Но все остальные слагаемые меньше по порядку (лемма 2), откуда следует противоречие с тем, что многочлен R тождественно равен нулю. Тем самым, ни при каком n множество $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ не может быть алгебраически зависимо, что доказывает утверждение леммы.

Лемма 5. *Производная любого порядка одночлена $R = e_1^{r_1} e_2^{r_2} \ldots e_k^{r_k}$ является суммой одночленов такого же вида с целыми коэффициентами, причём все входящие в неё одночлены лексикографически не меньше R. Кроме того, во все эти одночлены e_k входит в одной и той же степени r_k.*

Доказательство. Из определения функций e_i легко получаем

$$e_i' = e_1 e_2 \ldots e_i.$$

Поэтому

$$R' = (e_1^{r_1})' e_2^{r_2} \ldots e_k^{r_k} + e_1^{r_1} (e_2^{r_2})' \ldots e_k^{r_k} + \ldots + e_1^{r_1} e_2^{r_2} \ldots (e_k^{r_k})' =$$
$$= r_1 e_1^{r_1} e_2^{r_2} \ldots e_k^{r_k} + r_2 e_1^{r_1+1} e_2^{r_2} \ldots e_k^{r_k} + \ldots + r_k e_1^{r_1+1} e_2^{r_2+1} \ldots e_{k-1}^{r_{k-1}+1} e_k^{r_k}.$$

Все слагаемые здесь имеют описанный вид, и утверждение леммы легко получается индукцией по порядку производной.

§ 5. Получение нижних оценок сложности

Доказательство нижних оценок сложности будет опираться на следующее утверждение.

Теорема 1. *Никакая функция вида* $e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_m^{k_m}$, $k_m > 0$, *не может тождественно обращать в ноль нетривиальный дифференциальный многочлен порядка ниже* m.

Доказательство. База индукции. Из леммы 1 следует, что e_1^k не обращает в ноль никакой нетривиальный дифференциальный многочлен порядка 0.

Индуктивный переход. Пусть утверждение теоремы верно для $m < n$, и функция $f = e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_n^{k_n}$, $k_n > 0$, обращает в ноль нетривиальный дифференциальный многочлен P порядка не выше $n-1$. Рассмотрим его как многочлен от переменных $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ над $\mathbb{R}[x]$. Степенью одночлена от этих переменных будем называть сумму степеней, с которыми в него входят f и её производные. Для краткости по-прежнему будем записывать подстановку f и её производных в многочлен как $P(f)$.

Выделим в этом многочлене однородную компоненту $P_{\max}$ наивысшей степени N — нетривиальный однородный дифференциальный многочлен. Поскольку в любую производную f функция e_n входит в одной и той же степени k_n (лемма 5), при подстановке $f = e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_n^{k_n}$ в $P_{\max}$ все члены содержат $e_n^{Nk_n}$:

$$P_{\max}(f) = e_n^{Nk_n} \sum \alpha_{m_1, m_2, \dots, m_{n-1}} e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_{n-1}^{m_{n-1}}.$$

Сумма в правой части должна быть тождественно равна нулю, потому что иначе оказалось бы, что $P_{\max}$ по порядку не меньше $e_n^{Nk_n}$, а все остальные члены в P по порядку меньше, и P не может обращаться в ноль при подстановке функции f. Итак, $P_{\max}(f) \equiv 0$.

Рассмотрим функцию $z = f'/f$. Для неё имеем

$$z = \frac{k_1 e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_n^{k_n} + k_2 e_1^{k_1+1} e_2^{k_2} \dots e_n^{k_n} + \dots + k_n e_1^{k_1+1} e_2^{k_2+1} \dots e_{n-1}^{k_{n-1}+1} e_n^{k_n}}{e_1^{k_1} e_2^{k_2} \dots e_n^{k_n}} =$$
$$= k_1 + k_2 e_1 + k_3 e_1 e_2 + \dots + k_n e_1 e_2 \dots e_{n-1}.$$

Эта функция обращает в ноль нетривиальный дифференциальный многочлен Q порядка не выше $n-2$ (см. [2]). Пусть он равен $Q_{\max} + \widetilde{Q}$, где $Q_{\max}$ это его старшая однородная компонента (некоторой степени M).

Докажем, что $Q_{\max}(k_n e_1 e_2 \dots e_{n-1}) \equiv 0$. Для этого подставим в Q значение

$$z = k_1 + k_2 e_1 + k_3 e_1 e_2 + \dots + k_n e_1 e_2 \dots e_{n-1}$$

и найдём все члены, содержащие e_{n-1} в максимальной степени M. Имеем

$$Q(z) = \sum_{j_1 + \dots + j_{n-2} \leqslant M} c_{j_1, j_2, \dots, j_{n-2}} \prod_{i \leqslant n-2} (z^{(i)})^{j_i}.$$

Преобразуем $z^{(i)}$:

$$z^{(i)} = (k_1 + k_2 e_1 + \dots + k_n e_1 e_2 \dots e_{n-1})^{(i)} =$$
$$= (k_1 + k_2 e_1 + \dots + k_{n-1} e_1 e_2 \dots e_{n-2})^{(i)} + (k_n e_1 e_2 \dots e_{n-1})^{(i)} =$$
$$= q_{i, k_1, k_2, \dots, k_{n-2}}(e_1, e_2, \dots, e_{n-2}) + (k_n e_1 e_2 \dots e_{n-1})^{(i)}.$$

Поскольку в первое слагаемое не входит e_{n-1}, при возведении этой суммы в степень j_i члены наивысшей по e_{n-1} степени будут составлять в точности $((k_n e_1 e_2 \ldots e_{n-1})^{(i)})^{j_i}$. Таким образом,

$$Q(z) = \sum_{k_1 + \ldots + k_{n-2} \leqslant M} c_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}} \prod_{i \leqslant n-2} ((k_n e_1 e_2 \ldots e_{n-1})^{(i)})^{j_i} + \\ + Q_1(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}),$$

где степень Q_1 по e_{n-1} строго меньше M.

Далее, о слагаемых при $k_1 + \ldots + k_{n-2} < M$ также известно (лемма 5), что их степень по e_{n-1} строго меньше M. Получено представление

$$Q(z) = \sum_{j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-2} = M} c_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}} \prod_{i \leqslant n-2} ((k_n e_1 e_2 \ldots e_{n-1})^{(i)})^{j_i} + \\ + Q_2(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}) = \\ = Q_{\max}(k_n e_1 e_2 \ldots e_{n-1}) + Q_2(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}),$$

где степень Q_2 по e_{n-1} строго меньше M.

Поскольку во все слагаемые, составляющие $Q_{\max}(k_n e_1 e_2 \ldots e_{n-1})$, входит e_{n-1}^M (лемма 5), и все слагаемые, составляющие $Q_2(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$, по порядку меньше e_{n-1}^M (лемма 2), то тождественное равенство нулю функции $Q(z)$ влечёт за собой тождественное равенство нулю функции $Q_{\max}(k_n e_1 e_2 \ldots e_{n-1})$. Поскольку $Q_{\max}$ однороден, отсюда следует, что и $e_1 e_2 \ldots e_{n-1}$ также обращает его в ноль, но это противоречит предположению индукции.

Теорема доказана.

Теорема 2. *При любом $m \geqslant 0$ сложность реализации функции вида $e_1^{k_1} e_2^{k_2} \ldots e_m^{k_m}$, $k_m > 0$, сетью из интеграторов и сумматоров не меньше m.*

Доказательство. По теореме 1, эта функция не обращает в ноль никакой нетривиальный дифференциальный многочлен порядка ниже m. Из доказательства условия реализуемости тогда следует, что сложность её реализации не меньше m, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *При любом $n \geqslant 0$ сложность реализации башни e_n сетью из интеграторов и сумматоров равна n.*

Доказательство. Нижнюю оценку сложности даёт теорема 2. Для доказательства верхней оценки построим сеть, реализующую e_n.

$$\begin{cases} y_1(x) = \int y_1(x)\,dx, \\ y_2(x) = \int y_2(x)\,dy_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = \int y_n(x)\,dy_{n-1}(x). \end{cases}$$

Положив $y_i(0) = e_i(0)$, получим решение $y_i \equiv e_i$, в частности, $y_n \equiv e_n$.

Теорема доказана.

Замечание. Другое доказательство теоремы 3 можно получить, опираясь на результаты работы [3], где методами дифференциальной алгебры доказано, в частности, что башня из экспонент высоты n не может быть решением нетривиального алгебраического дифференциального уравнения порядка меньше n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976.
2. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 4-е изд., М.: Наука, 1974.
3. Babakhanian A. Exponentials in differentially algebraic extension fields // Duke Math. J. — 1973. — 40. — P. 455–458.
4. Shannon C. E. Mathematical theory of the differential analyzer // J. Math. and Phys. — 1941. — V. 20, № 4. — P. 337–354. [Русский перевод: Математическая теория дифференциального анализатора // В кн. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963.]

Поступило в редакцию 11 IX 2002