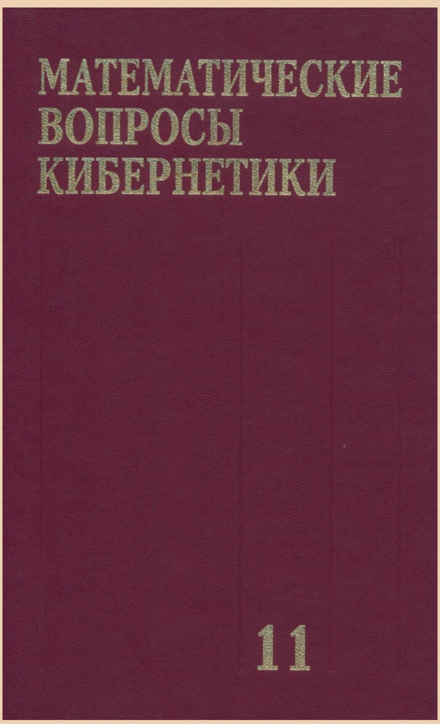
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 11



Ю. И. Янов

Модальные логики и арифметика. II

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Янов Ю. И. Модальные логики и арифметика. II // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 49–62. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2002-49

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ И АРИФМЕТИКА. II *)

Ю. И. ЯНОВ

(МОСКВА)

Модальные логики первоначально предназначались для формализации языковых модальностей, но в последнее время это понятие стало включать любые расширения классической логики дополнительными операциями, играющими роль логических связок. Для таких логик в первую очередь решаются задачи построения моделей, проблема разрешимости и другие внутренние задачи. Однако, кроме этих задач, большой интерес представляет вопрос о выразительных возможностях пропозициональных модальных логик. Разумеется, в любом бесконечном языке можно выразить сколь угодно сложные понятия и отношения, но для этого может потребоваться сложная и неестественная интерпретация. Поэтому, когда мы говорим о выразительных возможностях пропозициональных языков, то мы имеем в виду только содержательно естественные интерпретации. Начало этой проблематики восходит к Гёделю, который использовал модальную логику как модель интуиционистской логики, а также для представления предиката доказуемости в арифметике. Представление арифметических предикатов в пропозициональных модальных логиках основано на том, что некоторые характеристические свойства предикатов могут быть сформулированы в пропозициональном языке. В работе [2] рассмотрен один из возможных способов представления систем предикатов в пропозициональных модальных логиках. Формулы таких логик мы назвали свойствами, поскольку они описывают определенные характеристики представляемых предикатов. Эти свойства не обязательно определяют нужные предикаты однозначно, как например, неоднозначно представлен в логике Гёделя-Лёба предикат доказуемости. Вопрос о возможности однозначного представления, т. е. о полноте характеризующих свойств, представляет самостоятельный интерес и в значительной мере зависит от особенностей рассматриваемой теории. В модальных логиках, описанных в [2], отсутствуют средства представления термов и кванторов, без чего трудно рассчитывать на полноту описания предикатов в достаточно богатых теориях. Прежде чем говорить об описании свойств термов в пропозициональных модальных логиках, необходимо уточнить, какие языки и логики мы можем называть пропозициональными. По-видимому, главным признаком пропозициональности языка является отсутствие других переменных, кроме пропозициональных, имеющих двуэлементную (в общем случае — конечную) область значений. В таком случае

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00930).

© Ю. И. Янов, 2002

даже использование кванторов по этим переменным не нарушает пропозициональности языка. Что касается интерпретаций, то на них не накладывается никаких ограничений. Так в реляционных моделях пропозициональных модальных логик шкалы фактически являются предметными областями, а такие операторы, как $\Box$ и $\Diamond$ могут рассматриваться как кванторы.

В [2] мы ввели синтаксическое понятие пропозиционального свойства в произвольной предикатной сигнатуре. Эти свойства мы интерпретировали в теориях $\mathcal{T}$, являющихся, как правило, непротиворечивыми расширениями арифметики $\mathcal{A}$. Интерпретациями, или как мы назвали — *конкретизациями* свойств, являются арифметические предикаты на множестве гёделевских номеров формул. В то же время такие свойства можно рассматривать как модальные формулы, а соответствующие модальные логики — как модальные аналоги теории $\mathcal{T}$. Однако тот факт, что в этих логиках могут быть представлены только предикаты и притом только на множестве гёделевских номеров формул, а не на всей предметной области, является нежелательным ограничением. В дальнейшем мы расширим указанный язык так, чтобы в нем были выразимы термы и кванторы. Но сначала мы распространим этот подход на предикаты на всей предметной области.

§ 1. Представление свойств предикатов на всей предметной области

Пусть $\overline{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ — произвольная сигнатура. Мы скажем, что набор формул (или термов) $\overline{B} = (B_1, \ldots, B_m)$ *согласован* с сигнатурой $\overline{\Phi}$, если число свободных переменных в формуле (терме) B_i, $i = 1, \ldots, m$, совпадает с арностью символа Φ_i.

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — пропозициональные переменные. Понятие *свойства* в предикатной сигнатуре $\overline{\Phi}$ определим как и в [2];

С1. пропозициональная переменная p_i является свойством 1-го типа,

С2. если $Y_1, Y_2, \ldots$ — свойства 1-го типа, то $\neg Y_1$, $Y_1 \to Y_2$, $\Phi_i(Y_1, \ldots, Y_n)$ — свойства 1-го типа, $i = 1, \ldots, m$;

С3. если $Y_1, \ldots, Y_{k+1}$ — свойства 1-го типа, то $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$ — свойство 2-го типа;

С4. свойство — это свойство 1-го или 2-го типа.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые вспомогательные понятия. Пусть Y — свойство 1-го типа и X — какое-либо его подсвойство (т. е. подслово, являющееся свойством). Вхождение свойства X в свойство Y назовем *формульным*, если это вхождение является в Y аргументом логической связки $\neg$ или $\to$, либо, если $X = Y$. Во всех остальных случаях вхождение X в Y назовем *термальным*.

Пропозициональную переменную p_i назовем *термальной* в Y, если все вхождения p_i в Y являются термальными. В противном случае переменную p_i назовем *формульной* в Y.

Несколько иначе, чем в [2] , определим понятие *конкретизации* свойства Y в сигнатуре $\overline{\Phi}$ набором предикатов $\overline{B} = (B_1, \ldots, B_m)$ (согласованным с сигнатурой $\overline{\Phi}$), на последовательности $C_1, C_2, \ldots$ формул теории $\mathcal{T}$. Обозначим такую конкретизацию Y^*.

К1. Если $Y = p_k$, то $Y^* = C_k$.

К2. Пусть для свойств 1-го типа $Y_1, Y_2, \ldots$ определены конкретизации $Y_1^*, Y_2^*, \ldots$ тогда:

К2.1. если $Y = \neg Y_1$, то $Y^* = \neg Y_1^*$;

К2.2. если $Y = Y_1 \to Y_2$, то $Y^* = Y_1^* \to Y_2^*$;

К2.3. если $Y=\Phi_i(Y_1,\ldots,Y_n)$, то $Y^*=B_i(X_1,\ldots,X_n)$, где $X_j=x_k$ (x_k — предметная переменная теории $\mathcal{T}$), если $Y_j=p_k$ и переменная p_k — термальная в Y, в остальных случаях — $X_j=\ulcorner Y_j^*\urcorner$.

К3. Если Y — свойство 2-го типа: $Y_1,\ldots,Y_k\vdash Y_{k+1}$, то Y^* есть правило $Y_1^*,\ldots,Y_k^*\vdash Y_{k+1}^*$.

Например, если $Y=\Phi_i(Y_1,p_1,p_2)$ и переменные p_1, p_2 — термальные в Y_1, то $Y^*=B_i(\ulcorner Y_1^*\urcorner, x_1, x_2)$. Но если $Y=\Phi_i(p_1\to Y_1,p_1,p_2)$, то при том же условии $Y^*=B_i(\ulcorner C_1\to Y_1^*\urcorner, \ulcorner C_1\urcorner, x_2)$.

§ 2. Представление свойств предикатов и термов

Подобным образом можно представлять свойства не только формул, но и термов. Для этого выделим в сигнатуре часть символов, обозначим их $\tau_1,\ldots,\tau_n$, и назовем *термальными* : $\overline{\Phi}=(\Phi_1,\ldots,\Phi_m,\tau_1,\ldots,\tau_n)$. Вместе с понятием свойства мы определим понятие *пратерма*.

С1'. Пропозициональные переменные $p_1,p_2,\ldots$ являются свойствами 1-го типа. Выражения вида $\tau_i(p_1,\ldots,p_r)$ — пратермы.

С2'. Если Y_1,Y_2 — свойства 1-го типа, то $\neg Y_1$, $Y_1\to Y_2$ — свойства 1-го типа.

С3'. Если каждое из $X_1,X_2,\ldots$ есть свойство 1-го типа или пратерм, то выражение $\Phi_i(X_1,\ldots,X_s)$ — свойство 1-го типа, а выражение $\tau_j(X_1,\ldots,X_r)$ — пратерм.

С4'. Если $Y_1,\ldots,Y_{k+1}$ — свойства 1-го типа, то $Y_1,\ldots,Y_k\vdash Y_{k+1}$ — свойство 2-го типа.

С5'. Свойство — это свойство 1-го или 2-го типа.

Множество всех свойств и пратермов в сигнатуре $\overline{\Phi}$ обозначим $U(\overline{\Phi})$. Понятие конкретизации свойств и пратермов можно варьировать в зависимости от потребности (вариант см. в § 5). Мы остановимся пока на следующем.

Распространим определение формульных и термальных вхождений также и на пратермы, т. е. в определении этих понятий в § 1 под X и Y можно понимать как свойства, так и пратермы. Единственное добавление, которое необходимо сделать, состоит в том, что если $X=Y$, то вхождение X в Y является формульным только тогда, когда X — свойство. Определение формульных и термальных переменных в выражении Y не изменяется. Заметим, что в силу этого определения пратерм не может иметь формульных вхождений ни в свойство, ни в другой пратерм (в частности — в самого себя).

Пусть свойство Y 1-го типа (пратерм) в сигнатуре $\Phi=(\Phi_1,\ldots,\Phi_m,\tau_1,\ldots,\tau_n)$ содержит пропозициональные переменные из множества $\{p_1,p_2,\ldots\}$. Определим *конкретизацию* Y^* свойства (пратерма) Y *набором формул* и *термов* $\overline{B}=(B_1,\ldots,B_m,t_1,\ldots,t_n)$, согласованным с сигнатурой $\overline{\Phi}$, на *последовательности формул* $C_1,C_2,\ldots$, следующим образом.

К1'. Если $Y=p_i$, то $Y^*=C_i$. Если $Y=\tau_j(p_1,\ldots,p_r)$, то $Y^*=t_j(x_1,\ldots,x_r)$, где $x_1,\ldots,x_r$ — предметные переменные теории $\mathcal{T}$.

К2'. Если для свойств Y_1,Y_2 определены конкретизации Y_1^*,Y_2^*, то $(\neg Y_1)^*=\neg Y_1^*$, $(Y_1\to Y_2)^*=Y_1^*\to Y_2^*$.

К3'. Пусть $Y=\Phi_i(X_1,\ldots,X_s)$ ($Y=\tau_j(X_1,\ldots,X_r)$), где каждое из $X_1,\ldots,X_s$ ($X_1,\ldots,X_r$) есть свойство 1-го типа или пратерм, и $X_1^*,\ldots,X_s^*$ ($X_1^*,\ldots,X_r^*$) определены. Тогда $Y^*=B_i(Z_1,\ldots,Z_s)$ ($Y^*=t_j(Z_1,\ldots,Z_r)$), где $Z_h=x_k$, если $X_h=p_k$ и переменная p_k — термальная в Y, в противном случае: $Z_h=\ulcorner X_h^*\urcorner$, если X_h — свойство, и $Z_h=X_h^*$, если X_h — пратерм. Здесь $h=1,\ldots,s$ ($h=1,\ldots,r$), x_k — предметная переменная в языке теории $\mathcal{T}$.

К4'. Если Y — свойство 2-го типа: $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$, то Y^* есть правило $Y_1^*, \ldots, Y_k^* \vdash Y_{k+1}$.

Достаточно очевидно, что конкретизациями свойств 1-го типа являются формулы, а конкретизациями пратермов — термы в языке теории $\mathcal{T}$.

Если иметь в виду процедуру, то конкретизацию произвольного свойства (пратерма) Y можно получить из Y, применяя следующие операции *замены*.

1) Все вхождения каждой термальной переменной p_i заменяются предметной переменной x_i.

2) Все формульные вхождения каждой формульной переменной p_j заменяются формулой C_j, а все термальные вхождения формульной переменной p_j заменяются гёделевским номером $\ulcorner C_j \urcorner$ формулы C_j.

3) Выражения вида $\tau_k(X_1, \ldots, X_r)$, где каждое X_h $(1 \leqslant h \leqslant r)$ есть либо терм, либо гёделевский номер формулы в языке теории $\mathcal{T}$, заменяются термами $t_k(X_1, \ldots, X_r)$.

4) Формульные вхождения выражений вида $\Phi_i(X_1, \ldots, X_s)$, где X_h, $h = 1, \ldots, s$, — такие же, как и в 3), заменяются формулами $B_i(X_1, \ldots, X_s)$.

5) Термальные вхождения выражений вида $\Phi_i(X_1, \ldots, X_s)$, где X_h, $h = 1, \ldots, s$, — такие же, как и в 3), заменяются гёделевскими номерами $\ulcorner B_i(X_1, \ldots, X_s) \urcorner$ формул $B_i(X_1, \ldots, X_s)$.

Каждая из замен 1)–5) производится до тех пор, пока это возможно.

С помощью индукции по конструкции свойства Y (пратерма T) нетрудно доказать, что окончательный результат не зависит от порядка производимых замен и является формулой Y^* (термом T^*) в языке теории $\mathcal{T}$.

§ 3. Модальные логики, порождаемые множествами свойств

Как и в [2], мы рассматриваем свойства 1-го типа как модальные формулы, а свойства 2-го типа — как правила вывода. Множество $\mathfrak{S}$ свойств, рассматриваемое как множество аксиом и правил вывода, добавленных к классическому исчислению высказываний (ИВ), образует модальную логику $M\mathfrak{S}$. Это понятие, однако, нуждается в уточнении в связи с наличием в сигнатуре $\overline{\Phi}$ термальных символов. Логике $M\mathfrak{S}$ принадлежат все те и только те свойства, которые выводимы из $\mathfrak{S}$ и пропозициональных тавтологий с помощью правил MP (modus ponens), свойств 2-го типа из $\mathfrak{S}$ и подстановок вместо пропозициональных переменных либо свойств, либо пратермов — в зависимости от характера вхождения этих переменных. В соответствии с нашим определением конкретизации свойств следует допустить подстановку пратермов вместо термальных переменных и — свойств — вместо любых пропозициональных переменных. Логику $M\mathfrak{S}$, которая является замыканием $[\mathfrak{S}]$ множества $\mathfrak{S} \cup$ИВ с помощью вышеуказанных правил вывода, мы называем *модальным представлением* реализующих ее предикатов (формул) и термов теории $\mathcal{T}$.

Напомним, что набор формул $\overline{B}$ и термов $\bar{t}$ *реализует* в теории $\mathcal{T}$ свойство Y, если конкретизация Y^* набором $(\overline{B}, \bar{t})$ на любой последовательности формул $C_1, C_2, \ldots$ доказуема в $\mathcal{T}$ или является допустимым правилом в $\mathcal{T}$, если Y — свойство 2-го типа. Набор $(\overline{B}, \bar{t})$ релизует множество свойств $\mathfrak{S}$, если он реализует любое свойство из $\mathfrak{S}$. Множество $\mathfrak{S}$ *реализуемо* в $\mathcal{T}$, если существует набор, который его реализует. Мы говорим также, что набор $(\overline{B}, \bar{t})$ *обладает* свойством Y (множеством свойств $\mathfrak{S}$) в теории $\mathcal{T}$, если он реализует свойство Y (множество $\mathfrak{S}$) в теории $\mathcal{T}$.

В [2] мы обозначили в виде $\mathfrak{S}(\overline{B}\colon \mathcal{T})$ множество всех свойств, которыми обладает набор $\overline{B}$ в теории $\mathcal{T}$. Распространим это обозначение и на случай смешанной сигнатуры.

Обозначим: $\mathfrak{S}^* = \{Y^*\colon\ Y \in \mathfrak{S}\}$, где подразумевается множество всех конкретизаций каким-либо фиксированным набором на всевозможных последовательностях формул в языке расматриваемой теории $\mathcal{T}$.

Еще одно обозначение: $Y[p_i\colon\ = X]$ — результат подстановки вместо всех вхождений переменной p_i в Y выражения X.

Для определенного выше понятия логики $M\mathfrak{S}$ докажем следующую лемму.

Лемма. *Если набор* $(\bar{\mathrm{B}}, \bar{t})$ *реализует в теории* $\mathcal{T}$ *множество свойств* $\mathfrak{S}$, *то он реализует и логику* $M\mathfrak{S}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathcal{T}$ и $Y \in M\mathfrak{S}$. Покажем, что $Y^* \in \mathcal{T}$ (или, что то же, $\mathcal{T} \vdash Y^*$), где Y^* обозначает конкретизацию свойства Y набором $(\overline{B}, \bar{t})$ на произвольной последовательности $C_1, C_2, \ldots$ формул в языке теории $\mathcal{T}$. Рассмотрим какой-либо вывод $Y_1, \ldots, Y_n, Y$ свойства Y из $\mathfrak{S}$ и пропозициональных тавтологий с помощью правила MP, свойств 2-го типа из $\mathfrak{S}$, подстановок свойств вместо любых пропозициональных переменных, и — пратермов — вместо термальных. Применим индукцию по длине вывода. Если $n=0$, то $Y \in \mathfrak{S} \cup$ИВ и утверждение тривиально. Предположим, что $n > 0$ и утверждение верно для $Y_1, \ldots, Y_n$, докажем его для Y. Возможны следующие случаи.

1. Y получается из Y_j и Y_k $(j, k \leqslant n)$ с помощью правила MP. Пусть, например, $Y_k = Y_j \to Y$. Поскольку $Y_k^* = Y_j^* \to Y^*$, и в силу индукционной посылки $Y_j^*, Y_k^* \in \mathcal{T}$, то и $Y^* \in \mathcal{T}$.

2. Y получается из $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n)$ с помощью свойства X 2-го типа из $\mathfrak{S}$: $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k} \vdash Y$. По предположению набор $(\overline{B}, \bar{t})$ реализует свойства $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$, т. е. $Y_{i_1}^*, \ldots, Y_{i_k}^* \in \mathcal{T}$. А так как $X \in \mathfrak{S}$, то правило $Y_{i_1}^*, \ldots, Y_{i_k}^* * \vdash Y^*$ допустимо в $\mathcal{T}$, и следовательно, $Y^* \in \mathcal{T}$.

3. Y получается из Y_k $(k \leqslant n)$ подстановкой выражения X вместо переменной p_i, где X — либо свойство, либо пратерм:

$$Y = Y_k[p_i\colon\ = X] \tag{1}$$

Возможны следующие случаи.

3.1. X есть пропозициональная переменная p_j. Если $p_j = p_i$, то $Y = Y_k$ и утверждение тривиально. Поэтому далее считаем, что $p_j \neq p_i$.

3.1.1. p_j не входит в Y_k.Тогда Y получается из Y_k переименованием переменной p_i на p_j. Возможны следующие случаи.

3.1.1.1. Переменная p_i в Y_k — термальная. Тогда и p_j в Y — термальная и потому Y^* получается из Y_k^* переименованием переменной x_i на x_j, и следовательно $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.1.1.2. Переменная p_i в Y_k — формульная. Тогда и переменная p_j в Y — формульная. Поэтому Y^* на произвольной последовательности

$$C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots \tag{2}$$

будет совпадать с Y_k^* на последовательности

$$C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, \tag{3}$$

отличающейся от последовательности (2) только тем, что в ней на i-м месте стоит формула C_j. Поскольку конкретизация Y_k^* на любой последовательности формул принадлежит $\mathcal{T}$, то и $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.1.2. p_j входит в Y_k.

3.1.2.1. Переменные p_i и p_j в Y_k — термальные. В этом случае Y^* получается из Y_k^* отождествлентем переменных x_i и x_j, что не выводит за пределы теории $\mathcal{T}$, и следовательно $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.1.2.2. Переменная p_i в Y_k — термальная, а p_j — формульная. Тогда и в Y переменная p_j — формульная. Поскольку переменная p_i в Y_k — термальная, то конкретизация Y_k^* на произвольной последовательности (2) вместо вхождений в Y_k переменной p_i имеет вхождения переменной x_i, а вместо вхождений переменной p_j — формулу C_j или ее гёделевского номера $\ulcorner C_j \urcorner$. Поэтому Y^* получается из Y_k^* подстановкой вместо предметной переменной x_i гёделевского номера $\ulcorner C_j \urcorner$, и следовательно, $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.1.2.3. Переменная p_i в Y_k — формульная, а переменная p_j — термальная. Тогда в Y_k^* на произвольной последовательности (2) вместо вхождений p_i в Y_k будет вхождение формулы C_i или гёделевского номера $\ulcorner C_i \urcorner$, а вместо вхождений p_j — вхождение предметной переменной x_j. Поскольку переменная p_i в Y_k — формульная, то и переменная p_j в Y — формульная. Поэтому конкретизация Y^* на произвольной последовательности (2) совпадает с результатом подстановки в конкретизацию Y_k^* на последовательности (3) вместо переменной x_j гед. номера формулы C_j, и потому $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.1.2.4. Переменные p_i, p_j — формульные в Y_k. Тогда Y^* на последовательности (2) совпадает с Y_k^* на последовательности (3), и потому $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.2. Выражение X отлично от переменной.

3.2.1. Переменная p_i — термальная в Y_k. Тогда при получении Y_k^* из Y_k все вхождения переменной p_i заменяются предметной переменной x_i, и следовательно, $Y^* = Y_k^*[x_i := Z]$, где $Z = X^*$, если X — пратерм, и $Z = \ulcorner X^* \urcorner$, если X — свойство. Поскольку в $\mathcal{T}$ любая подстановка вместо предметной переменной допустима, то $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.2.2. Переменная p_i — формульная в Y_k. Тогда X может быть только свойством. Имеются следующие возможности.

3.2.2.1. X не содержит переменную p_i. Тогда в силу (1) Y не содержит переменную p_i, и потому Y^* на любой последовательности (2) не зависит от формулы C_i (т. е. Y^* одно и то же на любых последовательностях, отличающихся только i-й формулой). Поскольку Y отличается от Y_k только тем, что в Y вместо всех вхождений переменной p_i содержатся вхождения свойства X, то Y^* на произвольной последовательности (2) совпадает с Y_k^* на последовательности

$$C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i', C_{i+1}, \ldots, \tag{4}$$

где $C_i' = X^*$, и следовательно, $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.2.2.2. X содержит p_i, (причем $X \neq p_i$).

3.2.2.2.1. Переменная p_i в X — термальная. Тогда в X^* она заменена предметной переменной x_i. Поскольку в Y, так же как и в Y_k, переменная p_i — формульная, то в силу (1) Y^* на последовательности (2) получается из Y_k^* на той же последовательности заменой вхождений формулы C_i или ее гёделевского номера $\ulcorner C_i \urcorner$, соответствующих вхождениям p_i в Y_k, формулой $D = X^*[x_i := \ulcorner C_i \urcorner]$ или ее гёделевским номером (заметим, что переменная x_i в X^* заменяется именно гёделевским номером формулы C_i, поскольку вхождения p_i в X даже и в свойстве Y являются термальными). Это означает, что Y^* на последовательности (2) совпадает с Y_k^* на последовательности (4), где $C_i' = D$, т. е. $Y^* \in \mathcal{T}$.

3.2.2.2.2. Переменная p_i в X — формульная. Тогда Y^* на последовательности (2) получается из Y_k^* на той же последовательности заменой вхождений формулы C_i или ее геделевского номера формулой X^* или ее геделевским номером. Таким образом, Y^* на последовательности (2) совпадает с Y_k^* на последовательности (4), где $C_i' = X^*$ на последовательности (2), и потому $Y^* \in \mathcal{T}$.

Следствие. $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}((\overline{B}, \bar{t})\colon \mathcal{T}) \Leftrightarrow M\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}((\overline{B}, \bar{t})\colon \mathcal{T})$.

§ 4. Применение к бескванторной арифметике

Теперь мы рассмотрим на примере арифметики, каковы возможности описанного выше языка для представления свойств арифметических предикатов и термов. Естественно, что наиболее полное описание может быть достигнуто только в сигнатуре, соответствующей сигнатуре теории (или еще более широкой). Сужение же сигнатуры упрощает модальную логику, но может привести к уменьшению выразительных возможностей.

Рассмотрим, например, арифметику $\mathcal{A}$ в сигнатуре, содержащеей предикатный символ равенства $=$ и термальные символы 0, s, $+$ и $\cdot$ (см., например, [5]). Арифметика $\mathcal{A}$ определяется аксиомами A1–A9 из [5]:

A1. $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$
A2. $x_1 = x_2 \to (sx_1 = sx_2)$
A3. $0 \neq sx_1$
A4. $sx_1 = sx_2 \to x_1 = x_2$
A5. $x_1 + 0 = x_1$
A6. $x_1 + sx_2 = s(x_1 + x_2)$
A7. $x_1 \cdot 0 = 0$
A8. $x_1 \cdot sx_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1$
A9. $A(0) \to ((A(x_1) \to A(sx_1)) \to A(x_2))$.

(Последнюю аксиому — схему аксиом индукции — мы записали в бескванторной форме, чтобы иметь возможность непосредственного перевода ее в модальный язык). Мы рассмотрим модальную логику, сигнатура которой соответствует сигнатуре арифметики $\mathcal{A}$, и аксиомами которой являются прямые аналоги аксиом A1–A9. Пусть $\Sigma = (\equiv, \varnothing, /, \oplus, \otimes)$, где $\equiv$ — бинарный предикатный символ (аналог предиката равенства), $\varnothing$ — 0-арный, $/$ — унарный, $\oplus$ и $\otimes$ — бинарные термальные символы. Аналогами аксиом A1–A9 являются следующие свойства Z_1–Z_9:

$\boldsymbol{Z}_1$: $p_1 \equiv p_2 \to (p_1 \equiv p_3 \to p_2 \equiv p_3)$
$\boldsymbol{Z}_2$: $p_1 \equiv p_2 \to /p_1 \equiv /p_2$
$\boldsymbol{Z}_3$: $\neg(\varnothing \equiv /p_1)$
$\boldsymbol{Z}_4$: $/p_1 \equiv p_2 \to p_1 \equiv p_2$
$\boldsymbol{Z}_5$: $(p_1 \oplus \varnothing) \equiv p_1$
$\boldsymbol{Z}_6$: $(p_1 \oplus /p_2) \equiv /(p_1 \oplus p_2)$
$\boldsymbol{Z}_7$: $(p_1 \otimes \varnothing) \equiv \varnothing$
$\boldsymbol{Z}_8$: $(p_1 \otimes /p_2) \equiv (p_1 \otimes p_2) \oplus p_1$
$\boldsymbol{Z}_9$: $Y(\varnothing) \to ((Y(p_1) \to Y(/p_1)) \to Y(p_2))$.

Здесь $Y(p_1)$ обозначает произвольное свойство в сигнатуре Σ, содержащее термальную переменную p_1. Обозначим: $\mathfrak{S}_0 = \{Z_1, \ldots, Z_9\}$, $\mathcal{A}_0 = \{\text{A}1, \ldots, \text{A}9\}$.

В свойствах Z_1–Z_9 все вхождения переменных p_1, p_2, p_3 — термальные, поэтому их конкретизации не зависят от выбора последовательности формул $C_1, C_2, \ldots$. Нетрудно убедиться, что конкретизациями свойств $Z_1, \ldots, Z_9$ набором $\overline{B} = (=, 0, sx, x+y, x\cdot y)$ являются аксиомы A1–A9, т. е.

$$\mathfrak{S}_0^* = \mathcal{A}_0 \tag{5}$$

(В аксиоме Z_9 переменная p_1 в свойстве $Y(p_1)$ — термальная, поскольку в свойстве $Y(\varnothing)$ вхождение $\varnothing$ может быть только термальным).

В идеальном случае модальный аналог должен описывать всевозможные свойства сигнатурных предикатов и термов теории. Однако в $M\mathfrak{S}_0$ отсутствуют средства представления кванторов, поэтому мы рассмотрим фрагмент арифметики, являющийся замыканием системы $\mathscr{A}_0$ и тавтологий в сигнатуре $\overline{B}$ правилами MP и подстановками, без правил введения кванторов. Обозначим этот фрагмент $\mathscr{A}_0$ и назовем его *бескванторной арифметикой*. Необходимо только уточнить понятие языка $\mathscr{A}_0$. Если рассматривать $\overline{B}$ как сигнатуру, то пусть $U_0(\overline{B})$ обозначает множество всех формул и термов, построенных по обычным правилам из сигнатурных знаков, логических знаков $\neg, \to$ и предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$ без использования кванторов и пропозициональных и предикатных переменных. Язык $U_0(\overline{B})$ мы и считаем языком бескванторной арифметики $\mathscr{A}_0$. В отличие от этого язык $U_0(\Sigma)$ логики $M\mathfrak{S}_0$ строится из сигнатурных знаков и логических знаков $\neg$ и $\to$ с исползованием только пропозициональных переменных $p_1, p_2, \ldots$ Обозначим $\mathscr{A}_{00}$ — множество тавтологий из $\mathscr{A}_0 \subseteq U_0(\overline{B})$.

Из определения конкретизации ясно, что $(M\mathfrak{S}_0)^* \subseteq U_0(\overline{B})$, поэтому из (5) и леммы следует:

$$(M\mathfrak{S}_0)^* \subseteq \mathscr{A}_0 \qquad (6)$$

Ниже мы докажем обратное включение, что означает полноту модального представления $M\mathfrak{S}_0$ бескванторной арифметики $\mathscr{A}_0$. Определим вспомогательное понятие *перевода* $^*A$ ($^*t$) произвольной формулы A (терма t) из U_0 $(\overline{B})$ в формулу (пратерм) из $U_0(\Sigma)$:

1. $^*x_i = p_i, {}^*0 = \varnothing$.

2. Пусть для формул A_1, A_2, и термов t_1, t_2 из $U_0(\overline{B})$ определены $^*A_1, {}^*A_2, {}^*t_1, {}^*t_2$. Тогда $^*(\neg A_1) = \neg {}^*A_1$, $^*(A_1 \to A_2) = ^* A_1 \to ^* A_2$, $^*(t_1 = t_2) = ^*$ $= ^* t_1 \equiv ^* t_2$, $^*(st_1) = / ^* t_1$, $^*(t_1 + t_2) = ^* t_1 \oplus ^* t_2$, $^*(t_1 \cdot t_2) = ^* t_1 \otimes ^* t_2$.

Теорема. $(M\mathfrak{S}_0)^* = \mathscr{A}_0$.

Доказательство. В силу (6) достаточно доказать, что $(M\mathfrak{S}_0)^* \supseteq$ $\supseteq \mathscr{A}_0$, т. е. для любой формулы А из $\mathscr{A}_0$ существует свойство Y из $M\mathfrak{S}_0$ такое, что $Y^* = A$, где Y^* — конкретизация Y на какой-либо последовательности формул

$$C_1, C_2, \ldots \qquad (7)$$

из $U_0(\overline{B})$. Пусть $A_1, \ldots, A_n, A$ — вывод формулы A в $\mathscr{A}_0$. Если $n = 0$, то A является одной из аксиом А$i \in \mathscr{A}_0$ или тавтологией. Если $A =$ Аi, то аксиома Z_i удовлетворяет условию: $Z_i^* =$ Аi. Если A — тавтология из $\mathscr{A}_{00}$, то она получается из некоторой пропозициональной тавтологии Y путем замены всех пропозициональных переменных формулами из $U_0(\overline{B})$ и потому $A = Y^*$ на некоторой последовательности (7). Предположим, что $n > 0$ и утверждение верно для формул $A_1, \ldots, A_n$, т. е. существуют свойства $Y_1, \ldots, Y_n$ из $M\mathfrak{S}_0$ такие, что $Y_1, \ldots, Y_n$ — вывод в $M\mathfrak{S}_0$ и $Y_1^* = A_1, \ldots, Y_n^* = A_n$. Покажем, что существует Y из $\mathrm{M}\mathfrak{S}_0$ такое, что $Y^* = A$. (Здесь конкретизации $Y_1^*, \ldots, Y_n^*$ могут быть на разных последовательностях формул из $U_0(\overline{B})$). Возможны следующие случаи.

1. A получается из A_i и A_j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ с помощью правила MP. Пусть, например, $A_j = A_i \to A$. Тогда $^*A_j = {}^*A_i \to {}^*A$, т. е. $Y_j = Y_i \to Y$, где $Y^* = A$. Поскольку Y получается из Y_i и Y_j с помощью правила MP, то $Y_1, \ldots, Y_n, Y$ — вывод свойства Y в $\mathrm{M}\mathfrak{S}_0$, где $Y^* = A$.

2. Пусть А получается, например, из A_n подстановкой терма t вместо предметной переменной x_i:

$$A = A_n[x_i := t]. \tag{8}$$

Если A_n не содержит переменной x_i, то $A = A_n$ и утверждение тривиально. Поэтому будем считать, что A_n содержит переменную x_i и тогда ${}^*A_n = Y_n$ содержит вхождение термальной переменной p_i, которая в конкретизации $Y_n^* = A_n$ замещена предметной переменной x_i. Рассмотрим следующие случаи.

2.1. Терм t является переменной x_j.

2.1.1. x_j не содержится в A_n. Тогда p_j не является термальной переменной в свойстве Y_n, т. е. либо не входит в Y_n, либо является в нем формульной переменной. В первом случае $Y = {}^*A$ получается из Y_n путем замены пропозициональной переменной p_i на p_j и следовательно, $Y \in M\mathfrak{S}_0$. Во втором случае, заменив в Y_n переменную p_j на некоторую переменную p_k, не входящую в Y_n, и затем — переменную p_i на p_j, мы получим свойство $Y \in M\mathfrak{S}_0$ такое, что $Y^* = A$ на некоторой последовательности формул, отличающейся от последовательности (7), на которой $Y_n^* = A_n$, только тем, что ее k-й член совпадает с C_j.

2.1.2. x_j содержится в A_n. Тогда Y_n содержит термальную переменную p_j. Поскольку мы считаем, что x_i содержится в A_n, то Y_n содержит термальную переменную p_i, поэтому подстановке (8) соответствует отождествление переменных x_i и x_j в A_n, чему в Y_n соответствует отождествление переменных p_i и p_j, что не выводит за пределы $M\mathfrak{S}_0$.

2.2. Терм t отличен от переменной. Тогда подстановке (8) соответствует подстановка в Y_n вместо термальной переменной p_i пратерма ${}^*t$: $Y = Y_n[p_i: = {}^*t] = {}^*A$. Такая подстановка допустима в $\mathrm{M}\mathfrak{S}_0$, т. е. $Y \in M\mathfrak{S}_0$.

Поскольку других правил вывода в $\mathscr{A}_0$ нет, то $\mathscr{A}_0 \subseteq M\mathfrak{S}_0$.

Следствие. $M\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(\overline{B}: \mathscr{A}_0)$, *т. е. логика* $\mathrm{M}\mathfrak{S}_0$ *является полной* [2] *для набора* $\overline{B}$ *в теории* $\mathscr{A}_0$.

Замечание. Продолжая в том же духе, мы можем расширить синтаксис модального языка кванторами по термальным переменным, которые в модальной логике по-прежнему являются пропозициональными переменными. Соответствующее расширение аксиоматики приведет к тому, что любая первопорядковая теория будет выразима в таком модальном языке, который мы все еще можем рассматривать как пропозициональный. Обычно неполнота представлений связана не с языком, а с тем, что базис модальной логики недостаточен для определения нужных понятий. Например, отношение нестрогого линейного порядка $\leqslant$ может быть определено в логике в сигнатуре $(\leqslant)$, а такой предикат, как $\pi(x)$=“x есть простое число” в сигнатуре (π) — определен быть не может. Более подробно этот вопрос рассматривается в § 6.

§ 5. Вариант основных понятий

До сих пор мы предполагали наличие определенной арифметизации теории $\mathscr{T}$, поскольку использовали гёделевскую нумерацию формул в языке теории $\mathscr{T}$. Однако для определения большинства теоретико-числовых понятий нет необходимости привлекать гёделевскую нумерацию. Поэтому мы рассмотрим вариант понятий свойства и пратерма, в конкретизациях которых не будут участвовать геделевские номера формул.

Понятия свойства и пратерма в сигнатуре $\overline{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ определим следующим образом.

С1''. Переменные $p_1, p_2, \ldots$ — свойства 1-го типа. Выражения $\tau_j(p_{i_1}, \ldots \ldots, p_{i_r})$ — пратермы.

С2''. Если Y_1, Y_2 — свойства 1-го типа, то $\neg Y_1$, $Y_1 \to Y_2$ — свойства 1-го типа.

С3''. Выражение вида $\Phi_i(T_1, \ldots, T_s)$, где T_h — пратерм или переменная p_k $(h = 1, \ldots, s)$ — свойство 1-го типа. Выражение вида $\tau_j(T_1, \ldots, T_r)$, где T_h — пратерм или переменная p_k $(h = 1, ..., r)$ — пратерм.

С4''. Если $Y_1, \ldots, Y_{k+1}$ — свойства 1-го типа, то $Y_1, \ldots, Yk \vdash Y_{k+1}$ — свойство 2-го типа.

С5''. Свойство — это свойство 1-го или 2-го типа.

Таким образом, мы сузили понятия свойства и пратерма, допустив подстановку на аргументные места предикатных и термальных символов только пратермов и пропозициональных переменных. Это более соответствует понятиям формулы и терма в языках 1-го порядка, и кроме того, позволяет интерпретировать свойства и пратермы, не прибегая к гёделевской нумерации формул теории $\mathcal{T}$.

В этом случае понятие конкретизации свойств и пратермов в сигнатуре $\overline{\Phi}$ набором $\overline{B} = (B_1, \ldots, B_m, t_1, \ldots, t_n)$, согласованным с сигнатурой $\overline{\Phi}$ на последовательности формул $C_1, C_2, \ldots$ приобретает следующий вид.

К1''. $p_i^* = C_i$, $\tau_j(p_{i_1}, \ldots, p_{i_r})^* = t_j(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ — предметные переменные теории $\mathcal{T}$.

К2''. Если Y_1, Y_2 — свойства 1-го типа и определены Y_1^*, Y_2^*, то $(\neg Y_1)^* = \neg Y_1^*$, $(Y_1 \to Y_2)^* = Y_1^* \to Y_2^*$.

К3''. $\Phi_i(T_1, \ldots, T_s)^* = B_i(T_1^*, \ldots, T_s^*)$, $\tau_j(T_1, \ldots, T_r)^* = t_j(T_1^*, \ldots, T_r^*)$, где в случае, если $T_h = p_k$, T_h^* обозначает x_k $(1 \leqslant h \leqslant s$ или $1 \leqslant h \leqslant r)$.

К4''. Если Y — свойство 2-го типа: $Y_1, \ldots, Y_k \vdash Y_{k+1}$, то Y^* есть $Y_1^*, \ldots \ldots, Y_k^* \vdash Y_{k+1}^*$.

Короче можно сказать, что конкретизации свойств и пратермов получаются путем замены формульных вхождений переменных $p_1, p_2, \ldots$ формулами $C_1, C_2, \ldots$, термальных вхождений переменных $p_1, p_2, \ldots$ — предметными переменными $x_1, x_2, \ldots$, символов Φ_i, τ_j, соответственно, — формулами B_i и термами t_j.

Пусть $U'(\overline{\Phi})$ обозначает множество всех свойств и пратермов в сигнатуре $\overline{\Phi}$ в смысле вышеприведенного определения. Очевидно, что $U'(\overline{\Phi}) \subset U(\overline{\Phi})$, в частности, $U'(\Sigma) \subset U(\Sigma)$, при этом ясно, что $\mathfrak{S}_0 \subset U'(\Sigma)$. Нетрудно убедиться, что для таких понятий свойства, пратерма и их конкретизаций остаются верными лемма из § 3 и теорема из § 4. Более того, последний вариант становится более широким, чем прежний, если в сигнатуру $\overline{\Phi}$ ввести специальный одноместный символ Γ как модальный аналог функции $gn(W) = \ulcorner W \urcorner$, и при этом считать, что в выражении $\Gamma(p_i)$ вхождение переменной p_i — формульное, т. е. $\Gamma(p_i)^* = \ulcorner C_i \urcorner$. По этой причине естественно допустить подстановку на аргументное место символа Γ не только пратермов, но и свойств, т. е. выражение $\Gamma(X)$ — пратерм, если X есть свойство или пратерм. При этом полагаем: $\Gamma(X)^* = \ulcorner X^* \urcorner$. Чтобы получить эквивалент понятий свойства и пратерма, определенных в § 2, достаточно на аргументные места предикатных и термальных символов вместо подстановки свойств $Y_1, Y_2, \ldots$ сделать подстановку пратермов $\Gamma(Y_1), \Gamma(Y_2), \ldots$, что приводит к совпадению конкретизаций в прежнем и новом смысле. Использование выражений вида $\Gamma(T)$, где T — пратерм, делает новые понятия свойства и пратерма более широкими, чем определенные в § 2, поскольку дает возможность в конкретизациях иметь геделевские номера не только формул, но и термов.

§ 6. Определимость

Мы рассмотрим теперь вопрос о возможности представления предикатов и функций ограниченными средствами. Эти ограничения касаются не типа языка, а его семантики, т. е. либо предметной области, либо сигнатурных операций, либо того и другого. Фактически эта проблематика относится к теории моделей, поэтому для возможности независимого чтения мы напомним основные понятия (см., например, [1, 4, 6]).

Как обычно, алгебраической системой (а.с.) мы называем совокупность $\boldsymbol{M} = (M, \Sigma)$, где M — произвольное множество — носитель а.с. $\boldsymbol{M}$, Σ — множество предикатов $P_1, P_2, \ldots$ на M произвольной конечной ненулевой арности $m_1, m_2, \ldots$ и функций $f_1, f_2, \ldots$ произвольной конечной арности $n_1, n_2, \ldots$ на M со значениями из M. В частности, 0-арные функции рассматриваются как элементы множества M. Набор обозначений $\Sigma = (P_1, P_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots)$ называется *сигнатурой* а.с. $\boldsymbol{M}$. По традиции мы обозначаем одинаковыми буквами как символы сигнатуры, так и соответствующие им предикаты и функции конкретных а.с. В тех случаях, когда необходимо различать одноименные предикаты и функции разных а.с., мы указываем принадлежность их а.с. $\boldsymbol{M}$ либо с помощью индекса: P_M, f_M, либо в виде $P(\boldsymbol{M})$, $f(\boldsymbol{M})$ и т. п. Для краткости сигнатурные предикаты и функции произвольной а.с. будем называть *операторами* данной а.с. Две а.с., имеющие одинаковые сигнатуры, называются *однотипными*.

Всякое множество $\mathcal{T}$ формул 1-го порядка в сигнатуре Σ, логически замкнутое (т. е. содержащее ИП в сигнатуре Σ и замкнутое относительно логических правил вывода) называется *теорией* в сигнатуре Σ. Поскольку всякое множество S в сигнатуре Σ однозначно определяет теорию $[S]$, являющуюся логическим замыканием множества S, то произвольные множества формул в сигнатуре Σ мы также будем называть теориями, имея в виду их логические замыкания.

Если $\boldsymbol{M}$ — а.с. в сигнатуре Σ, то обозначим $Te(\boldsymbol{M})$ — множество всех формул 1-го порядка в сигнатуре Σ, истинных в $\boldsymbol{M}$. Если K — класс однотипных а.с., то $Te(K) = \cap Te(\boldsymbol{M})$ — для всех $\boldsymbol{M} \in K$. $Te(\boldsymbol{M})$ $(Te(K))$ называется (*элементарной*) теорией а.с. $\boldsymbol{M}$ (класса K).

Любую а.с. в сигнатуре Σ мы называем *интерпретацией* любой теории в сигнатуре Σ. Интерпретация $\boldsymbol{M}$ теории $\mathcal{T}$ называется *моделью* теории $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T} \subseteq Te(\boldsymbol{M})$. Если $\mathcal{T} = Te(\boldsymbol{M})$, то модель $\boldsymbol{M}$ называется *точной* моделью теории $\mathcal{T}$.

Если $\mathcal{T}$ — множество формул, то обозначим МОД$(\mathcal{T}) = \{\boldsymbol{M}\colon \mathcal{T} \subseteq$ $\subseteq Te(\boldsymbol{M})\}$ — множество всех моделей теории $\mathcal{T}$.

Однотипные а.с. $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ называются *элементарно эквивалентными*, что обозначается $\boldsymbol{M} \equiv \boldsymbol{N}$, если $Te(\boldsymbol{M}) = Te(\boldsymbol{N})$.

Пусть $\mathcal{T}$ — множество формул в сигнатуре Σ. Замкнутая формула A называется *семантическим следствием* *) множества $\mathcal{T}$, что обозначается: $\mathcal{T} \models A$, если A истинна в любой модели множества $\mathcal{T}$, т. е. $A \in Te($МОД$(\mathcal{T}))$. Если А истинна в а.с. $\boldsymbol{M}$, то будем писать $\boldsymbol{M} \models A$.

Множество формул $\mathcal{T}$ называется *совместным* или *непротиворечивым*, если множество МОД$(\mathcal{T})$ не пусто. Совместное множество $\mathcal{T}$ называется *элементарно полным* (в дальнейшем — просто *полным*), если для всякой замкнутой формулы A той же сигнатуры, либо $\mathcal{T} \models A$, либо $\mathcal{T} \models \neg A$.

---

*) В некоторых публикациях это понятие называется «логическим следствием», однако этот термин мы употребляем в смысле выводимости из $\mathcal{T}$ в ИП.

Очевидно, что для любой а.с. $\boldsymbol{M}$ теория $Te(\boldsymbol{M})$ — полная. Нетрудно доказать, что все модели полной теории элементарно эквивалентны.

Всякую теорию $\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ можно рассматривать как описание свойств, характеризующих сигнатурные предикаты и функции в моделях теории $\mathcal{T}$. При этом нас могут интересовать не все операторы, а лишь некоторые выделенные, в то время как остальные играют вспомогательную роль. Поэтому возникает вопрос, когда и в какой степени можно избавиться от этих вспомогательных средств, не искажая свойств выделенных операторов. Другими словами, когда такую же или близкую характеристику можно получить в языке обедненной сигнатуры. Например, если в арифметике в сигнатуре $(=,0,1,+,\cdot)$ выбросить операцию $x \cdot y$, то в обедненной таким образом теории операция $x+y$ будет определена по-прежнему. Но в некоторых случаях оставшиеся операторы могут потерять часть своих характеристик. Признаком утраты каких-либо свойств рассматриваемых операторов может служить появление моделей теории в обедненной сигнатуре, неизоморфных подмоделям исходной теории. Для уточнения сказанного определим ряд понятий.

Пусть K — множество а.с. в сигнатуре Σ. Если F — операторный символ из Σ, то обозначим: $F(K) = \{F_M \colon \boldsymbol{M} \in K\}$, т. е. $F(K)$ — это множество всех операторов, одноименных F, из а.с., принадлежащих K. Если $\sigma \subseteq \Sigma$, то обозначим: $\sigma(K) = \{F(K) \colon F \in \sigma\}$. В частности, если K состоит из одной а.с. $\boldsymbol{M}$, то $\sigma(K) = \sigma(\boldsymbol{M}) = \{F_M \colon F \in \sigma\}$. Если $\mathcal{T}$ — теория в сигнатуре Σ и $\mathrm{K} = \text{МОД}(\mathcal{T})$, то множество $\sigma(K)$ обозначим $\sigma(\mathcal{T})$.

Пусть K_1, K_2 — классы а.с. в сигнатуре Σ и $\sigma \subseteq \Sigma$. Будем обозначать: $\sigma(K_1) \subseteq \sigma(K_2)$, если для любого оператора F из σ $F(K_1) \subseteq F(K_2)$. Ясно, что если $K_1 \subseteq K_2$, то $\sigma(K_1) \subseteq \sigma(K_2)$.

Пусть $\mathcal{T}$ — теория в сигнатуре Σ, $\Sigma \subseteq \Sigma'$ и S — множество формул в сигнатуре Σ'. Тогда теория $\mathcal{T}' = [\mathcal{T} \cup S]$, если она совместна, называется *расширением* или *обогащением* теории $\mathcal{T}$ до сигнатуры Σ', а теория $\mathcal{T}$ называется *обеднением* теории $\mathcal{T}'$ до сигнатуры Σ. Очевидно, что в этом случае $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'/\Sigma$, где $\mathcal{T}'/\Sigma$ — множество всех формул теории $\mathcal{T}'$ в сигнатуре Σ. Следовательно, $\text{МОД}(\mathcal{T}'/\Sigma) \subseteq \text{МОД}(\mathcal{T})$. Расширение $\mathcal{T}'$ теории $\mathcal{T}$ называется *консервативным*, если $\mathcal{T}'/\Sigma = \mathcal{T}$.

Очевидно, что теория $\mathcal{T}$ — полная тогда и только тогда, когда всякое ее расширение консервативно.

Аналогично, если имеется а.с. $\boldsymbol{M} = (M, \Sigma)$ и $\Sigma \subseteq \Sigma'$, то всякая а.с. $\boldsymbol{M}' = (M, \Sigma')$, в которой операторы из $\Sigma(\boldsymbol{M}')$ совпадают с одноименными операторами из $\boldsymbol{M}$, называется *обогащением* а.с. $\boldsymbol{M}$ до сигнатуры Σ', а $\boldsymbol{M}$ называется *обеднением* а.с. $\boldsymbol{M}'$ до сигнатуры Σ. Обозначим такое обеднение $\boldsymbol{M}'/\Sigma$. Если K — какое-либо множество а.с. в сигнатуре Σ и $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, то K/Σ_1 обозначает множество $\{\boldsymbol{M}/\Sigma_1 \colon \boldsymbol{M} \in K\}$ всех обеднений а.с. из K до сигнатуры Σ_1.

Отметим, что для произвольной теории $\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ в общем случае существует множество различных обогащений до какой-либо расширенной сигнатуры, и существует множество различных обеднений до одной и той же подсигнатуры. При этом обеднение $\mathcal{T}/\Sigma_1$, где $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, является максимальным среди обеднений до сигнатуры Σ_1 в том смысле, что для любого обеднения $\mathcal{T}_1$ до сигнатуры Σ_1 $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}/\Sigma_1$. Таким образом, $\mathcal{T}$ является консервативным расширением только обеднения $\mathcal{T}/\Sigma_1$. Для а.с. $\boldsymbol{M} = (M, \Sigma)$ существует множество различных обогащений до расширенной сигнатуры, но имеется ровно одно обеднение $\boldsymbol{M}/\Sigma_1$ до фиксированной подсигнатуры Σ_1. Заметим, что если $\boldsymbol{M}$ — а.с. в сигнатуре Σ и $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, то $Te(\boldsymbol{M})$ является консервативным расширением $Te(\boldsymbol{M}/\Sigma_1)$, и потому $Te(\boldsymbol{M}/\Sigma_1) = Te(\boldsymbol{M})/\Sigma_1$.

Операторы F_1, F_2, соответственно на множествах M_1, M_2 назовем изоморфными ($F_1 \sim F_2$), если существует биекция φ, отображающая M_1 на M_2 так, что:

1. если F_1, F_2 — предикаты $P_1(x_1, \ldots, x_k)$, $P_2(x_1, \ldots, x_k)$, то для любых $a_1, \ldots, a_k$ из M_1 выполняется $P_1(a_1, \ldots, a_k) = P_2(a_1, \ldots, a_k)$ (т. е. совпадают их истинностные значения) и

2. если F_1, F_2 — функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n)$, то для всяких $a_1, \ldots, a_n$ из M_1 выполняется $\varphi f_1(a_1, \ldots, a_n) = f_2(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n)$.

Два множества $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ операторов одной сигнатуры назовем *изоморфными* ($\boldsymbol{F}_1 \sim \boldsymbol{F}_2$), если для всякого оператора одного множества в другом найдется изоморфный ему одноименный оператор — при общей для всех операторов биекции φ.

Если $\boldsymbol{F}$ — множество операторов сигнатуры Σ и $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{F}_i\colon i \in J\}$, где для всякого i из J $\boldsymbol{F}_i$ — множество операторов сигнатуры Σ, то $\boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{G}$ обозначает, что для всякого i из J $\boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{F}_i$.

Две однотипные а.с. $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ изоморфны ($\boldsymbol{M}_1 \sim \boldsymbol{M}_2$), если изоморфны множества их операторов.

Очевидно, что изоморфные а.с. элементарно эквивалентны. Ниже, чтобы не вводить новые обозначения, выражением МОД($Te(\boldsymbol{M})$) будем обозначать класс моделей теории $Te(\boldsymbol{M})$, имеющих носители той же мощности, что и носитель а.с. $\boldsymbol{M}$.

Пусть а.с. $\boldsymbol{M} = (M, \Sigma)$ и $\sigma \subseteq \Sigma$. Если $\sigma(\boldsymbol{M}) \sim \sigma($МОД$(Te(\boldsymbol{M}/\sigma)))$, то операторы из $\sigma(\boldsymbol{M})$ будем называть *самоопределимыми.*

Рассмотрим два простых примера.

1.Пусть имеется а.с. $\boldsymbol{M} = (N, =, \leqslant)$, где $\leqslant$ — (нестрогий) дискретный линейный порядок на множестве N натуральных чисел. Пусть, например, это — отношение естественного порядка на множестве N. $Te(\boldsymbol{M})$ содержит аксиомы равенства и аксиомы порядка, включая аксиому линейности: $\forall x, y(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$. При этом все аксиомы порядка, в том числе и линейность, формулируются в обеднении $\boldsymbol{M}_1 = (N, \leqslant)$. Если обозначить: $\sigma = (\leqslant)$, то это означает, что $\sigma(\boldsymbol{M}) \sim ($МОД$(Te(\boldsymbol{M}_1)))$, и следовательно, предикат $\leqslant(\boldsymbol{M})$ является самоопределимым.

2. Рассмотрим теперь а.с. $\boldsymbol{N} = (N, =, <)$, где N — множество натуральных чисел, $<$ — отношение строгого естественного порядка. Рассмотрим обеднение $\boldsymbol{N}_1 = (N, <)$. Нетрудно убедиться, что все аксиомы порядка, кроме аксиомы линейности, т. е. сравнимости любых двух различных элементов, формулируются в сигнгатуре $(<)$. Аксиома линейности порядка $<$ в сигнатуре $\Sigma = (=, <)$ может быть сформулирована, например, так: $\forall x, y(x < y \vee y < x \vee x = y)$. Покажем, что в сигнатуре $\sigma = (<)$ невозможно сформулировать линейность порядка $<$, что равносильно существованию моделей $Te(\boldsymbol{N}_1)$, у которых отношение $<$ является нелинейным частичным порядком, и потому не может быть $\sigma(\boldsymbol{N}) = \sigma($МОД$(Te(\boldsymbol{N}/\sigma)))$.

Рассмотрим а.с. $\boldsymbol{N}' = (N', <)$, где $N' = N \cup \{0'\}$, отношение $<$ на множестве N такое же, что и в $\boldsymbol{N}_1$, т. е. естественный порядок, а дополнительный элемент $0'$ удовлетворяет следующим условиям: $0' < 1$, $\neg 0' < 0$, $\neg 0 < 0'$. Покажем, что $\boldsymbol{N}_1 \equiv \boldsymbol{N}'$, т. е. $Te(\boldsymbol{N}_1) = Te(\boldsymbol{N}')$. Пусть А — произвольная замкнутая формула в сигнатуре $\sigma = (<)$. Нужно доказать, что $\boldsymbol{N}_1 \models A \Leftrightarrow \boldsymbol{N}' \models A$. Можно считать, что A находится в предваренной нормальной форме. Применим индукцию по длине кванторной приставки. Поскольку в сигнатуре $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}'$ нет констант, то A содержит хотя бы один квантор.

1. $A = QxB(x)$, где $Q \in \{\exists, \forall\}$ и $B(x)$ — бескванторная формула, не содержащая переменных, отличных от x.

1.1. Пусть $A = \exists x B(x)$. Если $\boldsymbol{N}_1 \models A$, то ясно, что и $\boldsymbol{N}' \models A$. Пусть $\boldsymbol{N}' \models A$, т. е. для некоторого $a \in N'$ формула $B(a)$ истинна в $\boldsymbol{N}'$. Если $a \in N$, то ясно, что $\boldsymbol{N}_1 \models A$. Пусть $a = 0'$, т. е. $\boldsymbol{N}' \models B(0')$. Поскольку $B(0')$ — замкнутая бескванторная формула, не содержащая констант, отличных от $0'$, то $B(0')$ — пропозициональная тавтология, построенная из формул вида $0' < 0'$ и $\neg 0' < 0'$. Но тогда для любого a из N формула $B(a)$ истинна в $\boldsymbol{N}_1$, и следовательно, $\boldsymbol{N}_1 \models \exists x B(x)$.

1.2. Пусть $\mathrm{A} = \forall \mathrm{x} B(\mathrm{x})$. Если $\boldsymbol{N}' \models A$, то ясно, что и $\boldsymbol{N}_1 \models A$. Пусть $\boldsymbol{N}_1 \models A$. Так как $B(x)$ не содержит ни констант, ни переменных, отличных от x, и $\boldsymbol{N}_1 \models A$, то $B(x)$ является тавтологией, построенной из формул вида $x < x$ и $\neg x < x$, и потому $\boldsymbol{N}' \models A$.

2. Предположим, что утверждение верно для формул с n кванторами и A — формула с $n+1$ квантором.

2.1. Пусть $A = \exists x B(x)$, где $B(x)$ — формула в предваренной нормальной форме с n кванторами. Если $\boldsymbol{N}_1 \models A$, то для некоторого a из N $\boldsymbol{N}' \models B(a)$, и поскольку формула $B(a)$ имеет n кванторов, то $\boldsymbol{N}' \models B(a)$, т. е. $\boldsymbol{N}' \models A$.

Предположим теперь, что $\boldsymbol{N}' \models A$. Тогда существует $a \in N'$ такое, что $\boldsymbol{N}' \models B(a)$. Если $a \in N$, то ясно, что $\boldsymbol{N}_1 \models A$. Пусть $a = 0'$, т. е. $\boldsymbol{N}' \models B(0')$. Матрица формулы $B(0')$ построена из атомарных формул вида $y < z$, $0' < y$, $y < 0'$, любые замыкания которых, как нетрудно убедиться, одинаково истинны или ложны, если заменить $0'$ на 0. Это означает, что $\boldsymbol{N}' \models B(0)$, а потому и $\boldsymbol{N}_1 \models B(0)$, т. е. $\boldsymbol{N}_1 \models A$.

2.2. Пусть $A = \forall x B(x)$. Если $\boldsymbol{N}' \models A$, то ясно, что $\boldsymbol{N}_1 \models A$. Пусть $\boldsymbol{N}_1 \models A$. Чтобы доказать, что $\boldsymbol{N}' \models A$, достаточно показать, что $\boldsymbol{N}' \models B(0')$. Формула $B(0)$ истинна в $\boldsymbol{N}_1$, а потому в силу индуктивной посылки $\boldsymbol{N}' \models B(0)$. Матрица этой формулы построена из атомарных формул вида $y < z$, $0 < y$, $y < 0$, логическая оценка которых не изменяется при замене 0 на $0'$, и следовательно, $\boldsymbol{N}' \models B(0')$.

Таким образом, $Te(\boldsymbol{N}_1) = Te(\boldsymbol{N}')$, а это означает, что $Te(\boldsymbol{N}_1)$ имеет нелинейные модели, и следовательно, предикат $<$ строгого линейного порядка не является самоопределимым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
2. Янов Ю. И. Модальные логики и арифметика. I // Математические вопросы кибернетики. Вып. 9. М.: Физматлит, 2000. — С. 17–24.
3. Boolos G., Jeffrey R. C. Computability and logic. — Cambrige University Press, 1989. [Русский перевод: Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994.]
4. Handbook of mathematical logic. J. Barwise (ed). North-Holland Publ.Comp. Amsterdam, New York, Oxford, 1977. [Русский перевод: Справочная книга по математической логике. Под редакцией Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. — М.: Наука, 1982.]
5. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. D. van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, Toronto, New York, London. [Русский перевод: Метдельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1971.]
6. Robinson A. Introduction to model theorie and to the metamathematics of algebra. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1963. [Русский перевод: Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.]

Поступило в редакцию 1 IX 2002