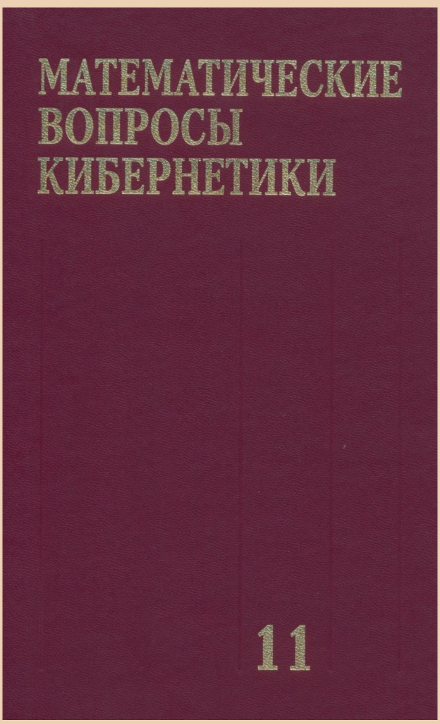

Р. М. Колпаков

О многозначных преобразованиях одноэлементных множеств бинарных распределений с рациональными вероятностями

О МНОГОЗНАЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ОДНОЭЛЕМЕНТНЫХ МНОЖЕСТВ БИНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ВЕРОЯТНОСТЯМИ *)

Р. М. КОЛПАКОВ

(МОСКВА)

1. Введение

Преобразования вероятностных распределений играют важную роль в вопросах реализации случайностей, имеющих большое значение для многих областей математической кибернетики (см. [1, 16]). Базовым для исследований в этой области понятием является понятие преобразователя вероятностных распределений. Одним из наиболее важных как с теоретической, так и с практической точки зрения типов преобразователей вероятностных распределений представляется преобразователь, который выдает значение моделируемой им случайной величины ζ_0, исходя из значений имеющихся в его распоряжении случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$. Такой преобразователь естественным образом может рассматриваться как функция из $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k$ в Ω_0, где Ω_i — множество значений случайной величины ζ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$. В частности, если случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ являются булевыми, т. е. принимают только два различных значения, например, 0 и 1, а случайная величина ζ_0 принимает h различных значений, например, $0, 1, \ldots, h-1$, то данный преобразователь задается некоторой функцией $f(x_1, \ldots, x_k)$ из $\{0, 1\}^k$ в $\{0, 1, \ldots, h-1\}$ (в работе мы будем называть такую функцию h-значной псевдобулевой функцией). Отметим, что распределение вероятностей случайной величины ζ_0 задается h-мерным стохастическим вектором **) $(d_1; \ldots; d_h)$, i-я компонента d_i которого равна вероятности $P\{\zeta_0 = i-1\}$ принятия случайной величиной ζ_0 значения $i-1$. Пусть случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ независимы и вероятность принятия значения 1 случайной величиной ζ_j равна ρ_j, $j = 1, \ldots, k$. Тогда мы обозначаем вектор $(d_1; \ldots; d_h)$ через $P\{f(\rho_1, \ldots, \rho_k)\}$. Для любого подмножества E единичного куба $\{0, 1\}^k$ обозначим через $P_E(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ вероятность того, что набор $(\sigma_1; \ldots; \sigma_k)$ значений величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ содержится в E. Эта вероятность выражается формулой ***):

$$P_E(\rho_1, \ldots, \rho_k) = \sum_{(\sigma_1; \ldots; \sigma_k) \in E} (\rho_1)_{\sigma_1} \ldots (\rho_k)_{\sigma_k}, \tag{1}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 00–15–96103, 02–01–00985).

**) *h-мерным стохастическим вектором* называется упорядоченный набор из h неотрицательных чисел, сумма которых равна 1.

***) В случае $E = \varnothing$ мы естественным образом полагаем сумму (1) равной 0.

где $(\rho)_1=\rho$ и $(\rho)_0=1-\rho$. Через $\mathcal{N}_i(f)$ мы будем обозначать множество всех наборов из $\{0,1\}^k$, на которых функция f принимает значение i. Используя эти обозначения, мы можем определить i-ю компоненту вектора $P\{f(\rho_1,\ldots$ $\ldots,\rho_k)\}$ следующим образом:

$$d_i=P_{\mathcal{N}_{i-1}(f)}(\rho_1,\ldots,\rho_k),\quad i=1,\ldots,h. \tag{2}$$

Исследования взаимозависимости между компонентами вектора $P\{f(\rho_1,\ldots$ $\ldots,\rho_k)\}$ и величинами $\rho_1,\ldots,\rho_k$ были начаты еще в середине XIX века известным английским математиком Дж. Булем, получившим ряд фундаментальных результатов в этой области (см. [14]).

Пусть H — множество чисел из интервала $(0,1)$. Мы говорим, что стохастический вектор $\mathcal{D}$ *порождается* множеством H, если существует псевдобулева функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ такая, что $\mathcal{D}=P\{f(\rho_1,\ldots,\rho_k)\}$ для некоторых $\rho_1,\ldots,\rho_k$ из H. Через $\langle H\rangle$ мы обозначаем замыкание множества H, т. е. множество всех стохастических векторов, порождаемых множеством H. Будем также говорить, что множество A стохастических векторов *порождается* множеством H, если $A\subseteq\langle H\rangle$. Для произвольного множества натуральных чисел T и натурального k мы обозначаем через T^{-k} множество всех чисел из T, больших k. Для любого натурального числа n обозначим через $\mathcal{I}(n)$ множество всех простых делителей n. Кроме того, в работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел;

$(x_1,\ldots,x_n)$ — наибольший общий делитель чисел $x_1,\ldots,x_n$;

B_i^k — i*-й слой* единичного куба $\{0,1\}^k$, т. е. множество всех наборов из $\{0,1\}^k$, имеющих ровно i единичных компонент;

$|A|$ — число элементов множества A.

Изучение различных аспектов данного порождения стохастических векторов является важным направлением исследований в области синтеза преобразователей вероятностных распределений. В частности, большой интерес представляет задача описания замыканий произвольных множеств чисел из интервала $(0,1)$. Естественным подходом к решению этой задачи является изучение замыканий множеств, состоящих из чисел, образующих в совокупности некоторое всюду плотное подмножество интервала $(0,1)$. Наиболее подходящим примером таких чисел представляются рациональные числа из интервала $(0,1)$. Множество всех рациональных чисел из интервала $(0,1)$ мы обозначаем через $Q(0,1)$. Из формул (2) и (1) нетрудно заметить, что множества чисел из $Q(0,1)$ могут порождать только стохастические векторы с рациональными компонентами. Множество всех таких векторов мы будем обозначать через SQ. Для любого непустого множества Π различных простых чисел мы выделяем из SQ подмножество $G[\Pi]$ всех стохастических векторов, все компоненты которых выражаются дробями со знаменателями, являющимися произведениями степеней чисел из Π:

$$\left\{ (d_1;\ldots;d_h) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{h} d_i=1,\ d_i=\dfrac{m_i}{n},\ m_i\in\mathbb{Z}^+,\ i=1,\ldots,h \\ n\in\mathbb{N},\ \mathcal{I}[n]\subseteq\Pi \end{array} \right\}.$$

Исследования данного порождения стохастических векторов начались, по-видимому, с рассмотрения случая двумерных векторов*). В [12, 13]

---

*) Поскольку двумерный стохастический вектор однозначно определяется какой-либо одной из его компонент, в работах, посвященных порождению двумерных векторов, как правило, вместо векторов рассматриваются числа, являющиеся вторыми компонентами этих векторов.

было показано, что множества всех двумерных стохастических векторов из $G[\{2\}]$ и $G[\{3\}]$ порождаются системами чисел $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ соответственно. В [8, 11] данные результаты были обобщены на случай множества всех двумерных стохастических векторов из $G[\Pi]$ для произвольного П. Была также полностью установлена структура решетки, образуемой этими множествами. Аналогичные результаты для случая стохастических векторов произвольной размерности получены в [9, 10]. Некоторые аспекты приближенного порождения двумерных стохастических векторов рассматривались в [6, 13]. Данное исследование является продолжением работы [5], в которой было дано явное описание замыканий всех конечных множеств чисел из $Q(0, 1)$ в классе всех двумерных стохастических векторов. В настоящей работе мы даем явное описание замыканий всех одноэлементных множеств чисел из $Q(0, 1)$. Это описание позволяет для любого заданного стохастического вектора и любого заданного числа из $Q(0, 1)$ легко определить, порождается ли данный вектор множеством, единственным элементом которого является данное число.

2. Вспомогательные определения и результаты

Стохастический вектор будем называть *вырожденным*, если он содержит компоненту, равную 1. Мы естественным образом можем считать, что все вырожденные стохастические векторы порождаются пустым множеством и поэтому содержатся в замыкании любого множества чисел. Для любого стохастического вектора $\mathcal{D}$ будем обозначать через $\mathcal{D}^+$ стохастический вектор, получающийся из $\mathcal{D}$ удалением всех нулевых компонент. Множество M стохастических векторов назовем *позитивно замкнутым*, если для любого вектора $\mathcal{D}$ из M вектор $\mathcal{D}^+$ также содержится в M. Заметим, что стохастический вектор $\mathcal{D}$ порождается множеством чисел тогда и только тогда, когда это множество порождает вектор $\mathcal{D}^+$. Поэтому мы имеем следующий факт.

Утверждение 1. *Позитивно замкнутое множество M стохастических векторов порождается множеством чисел A тогда и только тогда, когда A порождает любой невырожденный вектор из M с ненулевыми компонентами.*

Отметим одно очевидное свойство величины $P_E(\rho_1, \ldots, \rho_k)$.

Утверждение 2. *Пусть $E_1, \ldots, E_s$ — непересекающиеся подмножества единичного куба $\{0, 1\}^k$. Тогда*

$$P_{\bigcup\limits_{i=1}^{s} E_i}(\rho_1, \ldots, \rho_k) = \sum_{i=1}^{s} P_{E_i}(\rho_1, \ldots, \rho_k)$$

для любых $\rho_1, \ldots, \rho_k$ из интервала $(0, 1)$.

Отметим также, что в стохастическом векторе $\mathcal{D} = (d_1; \ldots; d_h)$ компонента d_h однозначно определяется компонентами $d_1, \ldots, d_{h-1}$. Поэтому имеет место

Утверждение 3. *Для любого стохастического вектора $\mathcal{D} = (d_1; \ldots; d_h)$ и любой h-значной псевдобулевой функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ соотношение $\mathcal{D} = P\{f(\rho_1, \ldots, \rho_k)\}$ выполняется тогда и только тогда, когда равенства* (2) *справедливы для* $i = 1, \ldots, h-1$.

Отметим еще одно свойство вектора $P\{f(\rho_1, \ldots, \rho_k)\}$.

Утверждение 4. *Для любой псевдобулевой функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ и любого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1; \ldots; \sigma_k)$ из $\{0, 1\}^k$ выпоняется соотношение*

$$P\{f(\rho_1, \ldots, \rho_k)\} = P\left\{f_{\widetilde{\sigma}}\left((\rho_1)_{\sigma_1}, \ldots, (\rho_k)_{\sigma_k}\right)\right\},$$

где $f_{\widetilde{\sigma}}(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_k^{\sigma_k})$.

Из утверждения 4 нетрудно получить

Следствие 1. *Для любого числа ρ из интервала* $(0, 1)$ *справедливо соотношение $\langle\{\rho\}\rangle = \langle\{1-\rho\}\rangle$.*

В дальнейшем мы также используем следующий известный теоретико-числовой факт (см., например, [2]).

Утверждение 5. *Если $(n, m) = 1$ и x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то $nx + b$, где b — любое целое, тоже пробегает полную систему вычетов по модулю m.*

Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются *попарно простыми*, если каждое из этих чисел взаимно просто с любым другим из них. Множество чисел из $\mathbb{N}^{-1}$ будем называть *разделимым*, если если оно содержит меньше двух чисел, либо все его числа попарно просты. Будем также называть множество натуральных чисел *взаимно простым* с натуральным числом n, если любое число из этого множества взаимно просто с n. Пустое множество считается взаимно простым с любым натуральным числом. Если множество натуральных чисел A конечно, мы обозначаем через $\|A\|$ произведение всех чисел множества A. Для пустого множества мы полагаем $\|\varnothing\| = 1$. Отметим следующий очевидный факт.

Утверждение 6. *Величина $\|A\|$ взаимно проста с любым натуральным числом, взаимно простым с множеством A.*

Пусть Π — произвольное непустое множество различных простых чисел, T — конечное разделимое множество натуральных чисел, взаимно простых со множеством Π. Обозначим через $G[\Pi; T]$ следующее подмножество множества $G[\Pi]$ *):

$$\left\{ (d_1; \ldots; d_h) \;\middle|\; \begin{array}{r} \sum\limits_{i=1}^{h} d_i = 1,\ d_i = \frac{m_i}{n},\ m_i \in \mathbb{Z}^+,\ i = 1, \ldots, h,\ n \in \mathbb{N}, \\ \mathscr{I}[n] \subseteq \Pi,\ \exists T_1 \ldots, T_{h-1},\ T \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_{h-1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} m_j \equiv 0 \pmod{\|T_i\|},\ i = 1, \ldots, h-1, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} m_j \equiv n \pmod{\|T \setminus T_i\|},\ i = 1, \ldots, h-1 \end{array} \right\}.$$

В случае $T = \varnothing$ мы полагаем $G[\Pi; \varnothing] = G[\Pi]$. Заметим, что согласно утверждению 6 для любого подмножества T_i множества T числа $\|T_i\|$ и $\|T \setminus T_i\|$ являются взаимно простыми с любым числом из Π. Тем самым эти числа являются взаимно простыми с любым делителем натурального числа n такого, что $\mathscr{I}[n] \subseteq \Pi$. Поэтому для любого целого m сравнения $m \equiv 0 \pmod{\|T_i\|}$ и $m \equiv n \pmod{\|T \setminus T_i\|}$ выполняются тогда и только тогда, когда для любого общего делителя l чисел m и n выполняются сравнения $m/l \equiv 0 \pmod{\|T_i\|}$ и $m/l \equiv n/l \pmod{\|T \setminus T_i\|}$. Таким образом, принадлежность вектора $(d_1; \ldots; d_h)$ множеству $G[\Pi; T]$ не зависит в нашем определении от выбора общего знаменателя n его компонент, т. е. данное нами определение множества $G[\Pi; T]$ является корректным.

---

*) Рассматриваемые в данном определении подмножества $T_1 \ldots, T_{h-1}$ множества T могут быть пустыми или совпадать с T.

Отметим, что любое множество $G[\Pi; T]$ является позитивно замкнутым и содержит все вырожденные стохастические векторы.

3. Замыкания одноэлементных множеств

Основной целью данной работы является описание замыканий одноэлементных множеств чисел из $Q(0,1)$. Без ограничения общности мы будем рассматривать числа из $Q(0,1)$, представленные в виде несократимых дробей. Пусть $\frac{l}{n}$ — несократимая дробь из интервала $(0;1)$. Тогда $(l, n-l)=(l, n)=(n-l, n)=1$, поэтому мы можем рассмотреть множество $G[\mathcal{I}(n); \{l, n-l\}^{-1}]$.

Лемма 1. *Для любой несократимой дроби* $\frac{l}{n}$ *из* $Q(0,1)$ *справедливо соотношение* $\left\langle\left\{\frac{l}{n}\right\}\right\rangle \subseteq G[\mathcal{I}(n); \{l, n-l\}^{-1}]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}=\left(d_1;\ldots;d_h\right)$ — произвольный стохастический вектор из $\left\langle\left\{\frac{l}{n}\right\}\right\rangle$. Это означает, что для некоторой h-значной псевдобулевой функции $f(x_1,\ldots,x_k)$ выполняется соотношение $\mathcal{D}=P\left\{f\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right)\right\}$, т. е. для каждого $i=1,\ldots,h$ справедливо равенство

$$d_i = P_{\mathcal{N}_{i-1}(f)}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right). \tag{3}$$

Для любого множества U наборов из $\{0,1\}^k$ обозначим через $\mathcal{M}(U)$ число $n^k P_U\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right)$. Из (1) вытекает, что

$$\mathcal{M}(U)=\sum_{(\sigma_1;\ldots;\sigma_k)\in U} l_{\sigma_1}\ldots l_{\sigma_k}, \tag{4}$$

где $l_0=n-l$ и $l_1=l$. Таким образом, для любого $U\subseteq\{0,1\}^k$ величина $\mathcal{M}(U)$ является целым числом, и согласно равенствам (3) для каждого $i=1,\ldots,h$ число d_i представимо дробью $\frac{\mathcal{M}(\mathcal{N}_{i-1}(f))}{n^k}$. Заметим, что для любого набора $(\sigma_1;\ldots;\sigma_k)$ из $\{0,1\}^k$, отличного от $(0;\ldots;0)$, соответствующее этому набору слагаемое $l_{\sigma_1}\ldots l_{\sigma_k}$ в сумме (4) содержит сомножитель $l_1=l$. Поэтому величина $\mathcal{M}(U)$ кратна числу l для любого множества U, не содержащего набора $(0;\ldots;0)$. Аналогичным образом убеждаемся, что величина $\mathcal{M}(U)$ кратна числу $l_0=n-l$ для любого множества U, не содержащего набора $(1;\ldots;1)$.

Пусть $f(0,\ldots,0)=i_0$ и $f(1,\ldots,1)=i_1$. Для $i=1\ldots,h-1$ обозначим через T_i подмножество множества $\{l, n-l\}^{-1}$, содержащее число l в том и только том случае, когда $l>1$ и $i\leqslant i_0$, и содержащее число $n-l$ в том и только том случае, когда $n-l>1$ и $i\leqslant i_1$. Пусть $i\in\{1\ldots,h-1\}$ и множество T_i содержит число l. Это означает, что $i\leqslant i_0$. Следовательно, любое множество $\mathcal{N}_j(f)$, где $j<i$, не содержит набора $(0;\ldots;0)$. Поэтому в случае $j<i$ любая величина $\mathcal{M}(\mathcal{N}_j(f))$ является кратной числу l. Тем самым сумма $\sum\limits_{j=1}^{i}\mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f))$ также является кратной числу l. Аналогичным образом мы можем доказать, что, если T_i содержит число $n-l$, то сумма $\sum\limits_{j=1}^{i}\mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f))$ кратна числу $n-l$. Поскольку $(l, n-l)=1$, то в

случае, если T_i содержит оба числа l и $n-l$, получаем тогда, что сумма $\sum\limits_{j=1}^{i} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f))$ кратна числу $l(n-l) = \|T_i\|$. Таким образом, в любом случае для T_i справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{i} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f)) \equiv 0 \pmod{\|T_i\|}. \tag{5}$$

Предположим теперь, что $l \in \{l, n-l\}^{-1} \setminus T_i$. Это означает, что $i > i_0$. Следовательно, любое множество $\mathscr{N}_j(f)$, где $j \geqslant i$, не содержит набора $(0; \ldots; 0)$. Поэтому в случае $j \geqslant i$ любая величина $\mathscr{M}(\mathscr{N}_j(f))$ является кратной числу l. Тем самым сумма $\sum\limits_{j=i+1}^{h} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f))$ также является кратной числу l. Аналогичным образом мы можем доказать, что, если $n-l \in \{l, n-l\}^{-1} \setminus T_i$, то сумма $\sum\limits_{j=i+1}^{h} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f))$ кратна числу $n-l$. В случае, если оба числа l, $n-l$ принадлежат $\{l, n-l\}^{-1} \setminus T_i$, учитывая, что $(l, n-l) = 1$, получаем тогда, что сумма $\sum\limits_{j=i+1}^{h} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f))$ кратна числу $l(n-l) = \|\{l, n-l\}^{-1} \setminus T_i\|$. Таким образом, в любом случае справедливо соотношение

$$\sum_{j=i+1}^{h} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f)) \equiv 0 \pmod{\|\{l, n-l\}^{-1} \setminus T_i\|}. \tag{6}$$

Из справедливого для стохастического вектора $\mathscr{D}$ равенства $\sum\limits_{j=1}^{h} d_j = 1$ вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{h} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f)) = n^k$, поэтому из (6) получаем, что

$$\sum_{j=1}^{i} \mathscr{M}(\mathscr{N}_{j-1}(f)) \equiv n^k \pmod{\|\{l, n-l\}^{-1} \setminus T_i\|}. \tag{7}$$

Кроме того, из алгоритма построения множеств $T_1, \ldots, T_{h-1}$ следует, что

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_{h-1}. \tag{8}$$

В силу соотношений (5), (7) и (8) стохастический вектор

$$\mathscr{D} = \left(\frac{\mathscr{M}(\mathscr{N}_0(f))}{n^k}; \frac{\mathscr{M}(\mathscr{N}_1(f))}{n^k}; \ldots; \frac{\mathscr{M}(\mathscr{N}_{h-1}(f))}{n^k}\right)$$

принадлежит $G[\mathscr{I}(n); \{l, n-l\}^{-1}]$. Таким образом, $\left\langle\left\{\frac{l}{n}\right\}\right\rangle$ содержится в $G[\mathscr{I}(n); \{l, n-l\}^{-1}]$.

Для получения нашего основного результата рассмотрим сначала простейший случай множества $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Заметим, что, если $\mathscr{D} = \left(\frac{m_1}{2^k}; \ldots; \frac{m_h}{2^k}\right)$ — произвольный стохастический вектор из $G[\{2\}]$, все компоненты которого приведены к общему знаменателю 2^k, то, очевидно, $\mathscr{D} = P\left\{f\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\}$, где $f(x_1, \ldots, x_k)$ — произвольная h-значная псевдобулева функция такая, что $|\mathscr{N}_{i-1}(f)| = m_i$, $i = 1, \ldots, h$. Поэтому получаем

Утверждение 7. $G[\{2\}]\subseteq\left\langle\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\rangle$.

В общем случае справедлива

Лемма 2. *Для любой несократимой дроби* $\frac{l}{n}$ *из* $Q(0,1)$ *справедливо соотношение* $G[\mathscr{I}(n);\{l,n-l\}^{-1}]\subseteq\left\langle\left\{\frac{l}{n}\right\}\right\rangle$.

Доказательство. В случае $\frac{l}{n}=\frac{1}{2}$ утверждение леммы совпадает с утверждением 7, поэтому мы можем полагать $\frac{l}{n}\neq\frac{1}{2}$. Более того, согласно следствию 1 без ограничения общности мы можем предполагать $\frac{l}{n}>\frac{1}{2}$, т. е. $l>n-l$. В этом случае мы имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{n-l}{l}\right)^{j}=\frac{1}{1-\frac{n-l}{l}}=\frac{l}{2l-n}\leqslant l. \tag{9}$$

Пусть $\mathscr{D}=\left(\frac{m_1}{n_1};\ldots;\frac{m_h}{n_h}\right)$ — произвольный невырожденный стохастический вектор из $G[\mathscr{I}(n);\{l,n-l\}^{-1}]$ с ненулевыми компонентами. Покажем, что $\mathscr{D}\in\left\langle\left\{\frac{l}{n}\right\}\right\rangle$. Это соотношение вытекает из леммы 6 [5] в случае $h=2$, поэтому будем предполагать $h\geqslant 3$. Положим $\Delta=\min\left(\frac{m_1}{n_1},\ldots,\frac{m_h}{n_h}\right)$. В качестве k выберем достаточно большое натуральное число такое, что все числа $n_1,\ldots,n_h$ являются делителями n^k и выполнены неравенства

$$k\geqslant(h-1)l(n-l), \tag{10}$$

$$\left(\frac{l}{n}\right)^{k}<\frac{\Delta}{2l(n-l)}. \tag{11}$$

Будем также предполагать $k\geqslant 3$. Приведем дроби $\frac{m_1}{n_1},\ldots,\frac{m_h}{n_h}$ к знаменателю n^k и обозначим числители получившихся дробей через $\widehat{m}_1,\ldots,\widehat{m}_h$ соответственно. Положим $T_0=\{l,n-l\}^{-1}$, $\mu_0=0$ и $\mu_i=\sum_{j=1}^{i}\widehat{m}_j$ для $i=1,\ldots,h-1$. Так как $\mathscr{D}\in G[\mathscr{I}(n);T_0]$, то существуют множества $T_1,\ldots,T_{h-1}$ такие, что справедливы соотношения

$$\mu_i\equiv 0\pmod{\|T_i\|},\qquad \mu_i\equiv n^k\pmod{\|T_0\setminus T_i\|},\qquad i=0,1,\ldots,h-1, \tag{12}$$

$$T_0\supseteq T_1\supseteq\ldots\supseteq T_{h-1}. \tag{13}$$

Построим h-значную псевдобулеву функцию $f(x_1,\ldots,x_k)$ такую, что

$$\mathscr{D}=P\left\{f\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right)\right\}. \tag{14}$$

Для этого мы последовательно построим непересекающиеся подмножества $\mathscr{N}_0(f),\mathscr{N}_1(f),\ldots,\mathscr{N}_{h-2}(f)$ единичного куба $\{0,1\}^k$, удовлетворяющие равенствам

$$P_{\mathscr{N}_i(f)}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right)=\frac{m_{i+1}}{n_{i+1}},\quad i=0,1,\ldots,h-2. \tag{15}$$

В процессе построения этих множеств будем дополнительно требовать, чтобы для любого $i=0,\ldots,h-2$ выполнялись неравенства

$$\left|B_s^k\setminus\bigcup_{j<i}\mathscr{N}_j(f)\right|\geqslant((h-1)-i)l,\quad s=1,\ldots,k-2, \tag{16}$$

$$\left|B_{k-1}^k\setminus\bigcup_{j<i}\mathscr{N}_j(f)\right|\geqslant((h-1)-i)l(n-l). \tag{17}$$

Отметим, что при $i=0$ имеем $\left|B_s^k \setminus \bigcup\limits_{j<i} \mathcal{N}_j(f)\right| = |B_s^k \setminus \varnothing| = |B_s^k| = \binom{k}{s} \geqslant k$ для любого $s=1,\ldots,k-1$, поэтому в этом случае соотношения (16) и (17) следуют из неравенства (10).

Для любого множества U наборов из $\{0,1\}^k$ через $\mathcal{M}(U)$ обозначим $n^k P_U\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right)$. Тогда равенства (15) эквивалентны равенствам

$$\mathcal{M}\left(\mathcal{N}_i(f)\right) = \widehat{m}_{i+1}, \quad i=0,1,\ldots,h-2. \tag{18}$$

Исходя из формулы (1), можно получить, что

$$\mathcal{M}(U) = \sum_{i=0}^{k} |U \cap B_i^k| l^i (n-l)^{k-i}. \tag{19}$$

Из формулы (19) вытекает, что для любых двух множеств U, V наборов из $\{0,1\}^k$ справедливо равенство

$$\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(U) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i l^i (n-l)^{k-i}. \tag{20}$$

где $\lambda_i = |V \cap B_i^k| - |U \cap B_i^k|$, $i=0,1,\ldots,k$.

Отметим, что $l>1$ и, следовательно, $l \in T_0$. Поэтому среди множеств $T_0, T_1, \ldots, T_{h-1}$, содержащих число l, найдется множество с максимальным порядковым индексом. Обозначим через $i(0)$ порядковый индекс этого множества. Аналогично, если $n-l>1$, обозначим через $i(1)$ максимальный порядковый индекс множеств $T_0, T_1, \ldots, T_{h-1}$, содержащих число $n-l$. В случае $n-l=1$ положим $i(1)=0$.

Пусть $i \in \{0,1,\ldots,h-2\}$ и в случае $i>0$ уже построены искомые множества $\mathcal{N}_0(f),\ldots,\mathcal{N}_{i-1}(f)$. Для удобства обозначим через Θ множество $\bigcup\limits_{j<i} \mathcal{N}_j(f)$. Построим последовательность множеств $U_1,\ldots,U_{k-1}$ таких, что для каждого $s=1,\ldots,k-1$ выполняются соотношения

$$U_s \subseteq \left(\bigcup_{j=0}^{s-1} B_j^k \cup B_k^k\right) \setminus \Theta, \tag{21}$$

$$\mathcal{M}(U_s) \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{l^s(n-l)}. \tag{22}$$

В качестве U_1 возьмем множество, содержащее набор $(0,\ldots,0)$ в случае $i=i(0)$, набор $(1,\ldots,1)$ в случае $i=i(1)$ и не содержащее никаких других наборов. Заметим, что U_1 удовлетворяет соотношению (21). Согласно (19) имеем $\mathcal{M}(U_1) = \delta(i-i(0))(n-l)^k + \delta(i-i(1))l^k$, где $\delta(x)=1$ при $x=0$ и $\delta(x)=0$ при $x \neq 0$. Покажем, что $\mathcal{M}(U_1) \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{l}$. Для этого выделим три возможных случая.

а) Пусть $i<i(0)$. Тогда из соотношений (13) вытекает $l \in T_{i(0)} \subseteq T_{i+1} \subseteq T_i$, поэтому согласно соотношениям (12) имеем $\mu_i \equiv 0 \pmod{l}$ и $\mu_{i+1} \equiv 0 \pmod{l}$. Следовательно, $\widehat{m}_{i+1} = \mu_{i+1} - \mu_i \equiv 0 \pmod{l}$. Таким образом, $\mathcal{M}(U_1) = \delta(i-i(1))l^k \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{l}$.

б) Пусть $i=i(0)$. Тогда $l \in T_i$ и $l \in T_0 \setminus T_{i+1}$, поэтому согласно соотношениям (12) имеем $\mu_i \equiv 0 \pmod{l}$ и $\mu_{i+1} \equiv n^k \pmod{l}$. Следовательно, $\widehat{m}_{i+1} = \mu_{i+1} - \mu_i \equiv n^k \pmod{l}$. С другой стороны, $\mathcal{M}(U_1) = (n-l)^k + \delta(i-i(1))l^k \equiv n^k \pmod{l}$. Таким образом, $\mathcal{M}(U_1) \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{l}$.

в) Пусть $i > i(0)$. Тогда из соотношений (13) вытекает $l \in T_0 \setminus T_{i(0)+1} \subseteq \subseteq T_0 \setminus T_i \subseteq T_0 \setminus T_{i+1}$, поэтому согласно (12) имеем $\mu_i \equiv n^k \pmod{l}$ и $\mu_{i+1} \equiv \equiv n^k \pmod{l}$. Следовательно, $\widehat{m}_{i+1} = \mu_{i+1} - \mu_i \equiv 0 \pmod{l}$, и $\mathcal{M}(U_1) = \delta(i - - i(1))l^k \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{l}$.

Аналогичным образом можно показать, что $\mathcal{M}(U_1) \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{n - - l}$. Поэтому, учитывая, что $(l, n-l) = 1$, получаем, что U_1 удовлетворяет соотношению (22).

Предположим теперь, что для некоторого $s > 1$ уже построено искомое множество U_{s-1}. Обозначим через b число $(\widehat{m}_{i+1} - \mathcal{M}(U_{s-1}))/l^{s-1}(n-l)$, которое является целым в силу соотношения (22) для U_{s-1}. Так как $(l, n - - l) = 1$ и тем самым $(l, (n-l)^{k-s}) = 1$, то согласно утверждению 5 в полной системе вычетов $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ по модулю l найдется такое число a, что будет выполнено соотношение $a(n-l)^{k-s} \equiv b \pmod{l}$. Домножив обе части и модуль данного сравнения на $l^{s-1}(n-l)$, получим

$$\widehat{m}_{i+1} - \mathcal{M}(U_{s-1}) \equiv al^{s-1}(n-l)^{k-s+1} \pmod{l^s(n-l)}. \tag{23}$$

Из справедливости соотношений (16) для i вытекает неравенство $|B^k_{s-1} \setminus \Theta| \geqslant l > a$, поэтому в слое B^k_{s-1} найдутся a наборов, не содержащихся в Θ и в силу соотношения (21) для U_{s-1} не содержащихся также в U_{s-1}. Возьмем в качестве U_s объединение множества U_{s-1} с этими наборами. Заметим, что из соотношения (21) для U_{s-1} следует справедливость этого соотношения для U_s. Используя (20), имеем $\mathcal{M}(U_s) = \mathcal{M}(U_{s-1}) + al^{s-1}(n-l)^{k-s+1}$, поэтому из (23) получаем, что U_s удовлетворяет соотношению (22).

Теперь построим конечную последовательность $W_0, W_1, \ldots, W_q$ подмножеств множества $\left(\bigcup\limits_{j=0}^{k-2} B^k_j \cup B^k_k\right) \setminus \Theta$, удовлетворяющих для каждого $t = 0, 1, \ldots, q$ соотношениям

$$\left|B^k_s \setminus \left(\Theta \cup W_t\right)\right| \geqslant ((h-1) - (i+1))l, \quad s = 1, \ldots, k-2, \tag{24}$$

$$\mathcal{M}(W_t) \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{l^{k-1}(n-l)}. \tag{25}$$

В качестве W_0 возьмем множество U_{k-1}. Из способа построения множества U_{k-1} вытекают соотношения

$$|W_0 \cap B^k_{k-1}| = 0, \quad |W_0 \cap B^k_s| < l, \quad s = 1, \ldots, k-2, \tag{26}$$

поэтому неравенства (24) для W_0 следуют из неравенств (16) для i. Соотношение (25) для W_0 непосредственно вытекает из (22) для U_{k-1}. Кроме того, из (26), используя (19) и неравенство (9), получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(W_0) &< (n-l)^k + l^k + \sum_{j=1}^{k-2} l(l^j(n-l)^{k-j}) < \\
&< l(n-l)^k + l^k(n-l) + \sum_{j=1}^{k-2} l(l^j(n-l)^{k-j}) = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} l^{j+1}(n-l)^{k-j} = l^{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-l}{l}\right)^{k-j} = \\
&= l^{k+1} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{n-l}{l}\right)^{j} < l^k(n-l) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n-l}{l}\right)^{j} \leqslant \\
&\leqslant l^{k+1}(n-l).
\end{aligned} \tag{27}$$

Следовательно, учитывая неравенство (11), имеем

$$\mathscr{M}(W_0) < n^k \left(\frac{l}{n}\right)^k l(n-l) < \frac{n^k \Delta}{2} \leqslant \frac{\widehat{m}_{i+1}}{2}. \tag{28}$$

Предположим, что для некоторого $r > 0$ нами уже построены множества $W_0, \ldots, W_{r-1}$. Если для каждого $s = 1, \ldots, k-2$ выполнено неравенство

$$\left|B_s^k \setminus \left(\Theta \cup W_{r-1}\right)\right| < ((h-1)-i)l, \tag{29}$$

то завершим построение искомой последовательности, положив $q = r-1$. В противном случае обозначим через $u(r)$ минимальное число s из $\{1, \ldots, k-2\}$, не удовлетворяющее неравенству (29). Построим последовательность $V_{u(r)+1}, \ldots, V_{k-1}$ подмножеств множества $\left(\bigcup\limits_{j=0}^{k-2} B_j^k \cup B_k^k\right) \setminus \Theta$ таких, что для каждого $t = u(r)+1, \ldots, k-1$ выполняются соотношения

$$\left|B_s^k \setminus \left(\Theta \cup V_t\right)\right| \geqslant ((h-1)-(i+1))l, \quad s = 1, \ldots, k-2, \tag{30}$$

$$\mathscr{M}(V_t) \equiv \widehat{m}_{i+1} \pmod{l^t(n-l)}. \tag{31}$$

Так как

$$\left|B_{u(r)}^k \setminus \left(\Theta \cup W_{r-1}\right)\right| \geqslant ((h-1)-i)l \geqslant l, \tag{32}$$

то во множестве $B_{u(r)}^k \setminus \left(\Theta \cup W_{r-1}\right)$ найдутся l различных наборов. Возьмем в качестве $V_{u(r)+1}$ объединение множества W_{r-1} с этими наборами. Из неравенств (24) для W_{r-1} и неравенства (32) следует, что $V_{u(r)+1}$ удовлетворяет неравенствам (30). Согласно формуле (20) имеем $\mathscr{M}(V_{u(r)+1}) = \mathscr{M}(W_{r-1}) + l^{u(r)+1}(n-l)^{k-u(r)}$, поэтому соотношение (31) для $V_{u(r)+1}$ вытекает из соотношения (25) для W_{r-1}. Предположим теперь, что для некоторого $t > u(r)+1$ уже построено искомое множество V_{t-1}. Обозначим через d число $(\widehat{m}_{i+1} - \mathscr{M}(V_{t-1}))/l^{t-1}(n-l)$, которое является целым в силу соотношения (31) для V_{t-1}. Так как $(l, (n-l)^{k-t}) = 1$, то согласно утверждению 5 в полной системе вычетов $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ по модулю l найдется число c такое, что $c(n-l)^{k-t} \equiv d \pmod{l}$. Домножив обе части и модуль данного сравнения на $l^{t-1}(n-l)$, получим

$$\widehat{m}_{i+1} - \mathscr{M}(V_{t-1}) \equiv cl^{t-1}(n-l)^{k-t+1} \pmod{l^t(n-l)}. \tag{33}$$

Для построения множества V_t выделим два возможных случая.

а) Пусть $\left|B_{t-1}^k \setminus \left(\Theta \cup V_{t-1}\right)\right| \geqslant ((h-1)-(i+1))l + c$. Тогда получим, что $\left|B_{t-1}^k \setminus \left(\Theta \cup V_{t-1}\right)\right| \geqslant c$, поэтому в качестве V_t мы можем взять объединение множества V_{t-1} с c различными наборами из $B_{t-1}^k \setminus \left(\Theta \cup V_{t-1}\right)$. Согласно (20) имеем $\mathscr{M}(V_t) = \mathscr{M}(V_{t-1}) + cl^{t-1}(n-l)^{k-t+1}$, поэтому (31) для V_t вытекает из (33).

б) Пусть $\left|B_{t-1}^k \setminus \left(\Theta \cup V_{t-1}\right)\right| < ((h-1)-(i+1))l + c$. Тогда из соотношений (16) для i вытекает, что $|B_{t-1}^k \cap V_{t-1}| > l - c$. Поэтому мы можем выбрать $l-c$ различных наборов в $B_{t-1}^k \cap V_{t-1}$ и в качестве V_t взять множество, получающееся удалением из V_{t-1} этих наборов. Согласно (20) имеем $\mathscr{M}(V_t) = \mathscr{M}(V_{t-1}) - (l-c)l^{t-1}(n-l)^{k-t+1} = \mathscr{M}(V_{t-1}) + cl^{t-1}(n-l)^{k-t+1} - l^t(n-l)^{k-t+1}$, поэтому (31) для V_t в этом случае также вытекает из (33).

Заметим, что в обоих случаях построенное нами множество V_t удовлетворяет также соотношениям (30).

Положим $W_r = V_{k-1}$. Соотношения (24) и (25) для W_r непосредственно вытекают из (30) и (31) для V_{k-1}. Заметим, что множество W_r было получено из множества W_{r-1} добавлением в каждом из слоев $B_1^k, \ldots, B_{k-2}^k$ не более, чем l наборов, т. е. для каждого $j = 1, \ldots, k-2$ справедливо неравенство $|W_r \cap B_i^k| - |W_{r-1} \cap B_i^k| \leqslant l$, поэтому, используя (20) и (9), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(W_r) &\leqslant \mathcal{M}(W_{r-1}) + \sum_{j=u(r)}^{k-2} l(l^j(n-l)^{k-j}) = \\ &= \mathcal{M}(W_{r-1}) + l^{k-1}(n-l)^2 \sum_{j=u(r)}^{k-2} \left(\frac{n-l}{l}\right)^{k-j-2} = \\ &= \mathcal{M}(W_{r-1}) + l^{k-1}(n-l)^2 \sum_{j=0}^{k-u(r)-2} \left(\frac{n-l}{l}\right)^{j} < \\ &< \mathcal{M}(W_{r-1}) + l^{k-1}(n-l)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n-l}{l}\right)^{j} \leqslant \\ &\leqslant \mathcal{M}(W_{r-1}) + l^k(n-l)^2. \end{aligned} \qquad (34)$$

В случае $r > 1$ заметим также, что $u(r-1) \leqslant u(r)$, и, если $u(r-1) = u(r)$, то $|B_{u(r)}^k \setminus (\Theta \cup W_r)| < |B_{u(r-1)}^k \setminus (\Theta \cup W_{r-1})|$. Тем самым построение искомой последовательности $W_0, W_1, \ldots, W_q$ обязательно завершится.

Пусть S — подмножество всех множеств W_j последовательности $W_0, W_1, \ldots, W_q$ таких, что $\mathcal{M}(W_j) \geqslant \widehat{m}_{i+1}$. Если S непусто, то выберем в S множество, имеющее минимальный порядковый индекс. Обозначим этот индекс через j^*. Согласно (28) выполняется $\mathcal{M}(W_0) < \widehat{m}_{i+1}$, поэтому $j^* > 1$. Обозначим через p число $(\widehat{m}_{i+1} - \mathcal{M}(W_{j^*-1}))/l^{k-1}(n-l)$, которое является целым в силу (25) для W_{j^*-1}. Поскольку $W_{j^*-1} \notin S$, то $\mathcal{M}(W_{j^*-1}) < \widehat{m}_{i+1}$, тем самым $p > 0$. С другой стороны, из неравенства (34) для $r = j^*$ и неравенства $\mathcal{M}(W_{j*}) \geqslant \widehat{m}_{i+1}$ следует $p \leqslant l(n-l)$. Согласно (17) для i имеем $|B_{k-1}^k \setminus \Theta| \geqslant l(n-l) \geqslant p$, поэтому в слое B_{k-1}^k найдутся p наборов, не содержащихся в Θ. Возьмем в качестве $\mathcal{N}_i(f)$ объединение множества W_{j^*-1} с этими наборами. Согласно (20) получаем, что $\mathcal{N}_i(f)$ удовлетворяет равенству (18). Из соотношения (17) для i и неравенства $p \leqslant l(n-l)$ следует справедливость соотношения (17) для $i+1$. Соотношения (16) для $i+1$ вытекают из соотношений (24) для W_{j^*-1}.

Пусть теперь множество S является пустым. Тогда

$$\mathcal{M}(W_q) < \widehat{m}_{i+1}. \qquad (35)$$

Положим $e = |B_{k-1}^k \setminus \Theta| - ((h-1)-(i+1))l(n-l)$. Согласно соотношению (17) для i имеем $e > 0$. Обозначим через W' объединение множества W_q с e различными наборами из $B_{k-1}^k \setminus \Theta$ и через W'' множество $\{0,1\}^k \setminus (\Theta \cup W')$. Для множества W'' мы имеем

$$|B_{k-1}^k \cap W''| = ((h-1)-(i+1))l(n-l).$$

Кроме того, из неравенств (29), выполняющихся при $q = r-1$, вытекают неравенства

$$|B_s^k \cap W''| < ((h-1)-i)l, \quad s = 1, \ldots, k-2.$$

Поэтому, применяя (19), получим

$$\mathscr{M}(W'') < (n-l)^k + \sum_{j=1}^{k-2} l((h-1)-i)l^j(n-l)^{k-j} + \\ + ((h-1)-(i+1))l(n-l)l^{k-1}(n-l) + l^k \\ < ((h-1)-i)\left((n-l)^k + l^k + \sum_{j=1}^{k-2} l^{j+1}(n-l)^{k-j} + l^k(n-l)^2\right).$$

Согласно неравенству (27) имеем

$$(n-l)^k + l^k + \sum_{j=1}^{k-2} l^{j+1}(n-l)^{k-j} < l^{k+1}(n-l),$$

поэтому, учитывая неравенство $n-l<l$, получаем

$$\mathscr{M}(W'') < ((h-1)-i)\left(l^{k+1}(n-l) + l^k(n-l)^2\right) < \\ < 2((h-1)-i)l^{k+1}(n-l).$$

Таким образом, применяя неравенство (11), имеем

$$P_{W''}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) = \frac{\mathscr{M}(W'')}{n^k} < \frac{2((h-1)-i)l^{k+1}(n-l)}{n^k} < \\ < ((h-1)-i)\Delta \leqslant \sum_{j=i+2}^{h} \frac{m_j}{n_j}. \quad (36)$$

Согласно утверждению 2 выполняются равенства

$$P_{\Theta}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) + P_{W'}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) + P_{W''}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) = \\ = \sum_{j<i} P_{\mathscr{N}_j(f)}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) + P_{W'}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) + P_{W''}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) = 1,$$

поэтому, учитывая равенства (15), справедливые для множеств $\mathscr{N}_j(f)$ при $j<i$, получаем

$$P_{W'}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) + P_{W''}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) = 1 - \sum_{j\leqslant i} \frac{m_j}{n_j} = \sum_{j=i+1}^{h} \frac{m_j}{n_j}$$

Из этого равенства в совокупности с неравенством (36) следует, что $P_{W'}\left(\frac{l}{n},\ldots,\frac{l}{n}\right) > \frac{m_{i+1}}{n_{i+1}}$, т. е.

$$\mathscr{M}(W') > \widehat{m}_{i+1}. \quad (37)$$

Согласно (20) имеем $\mathscr{M}(W') = \mathscr{M}(W_q) + el^{k-1}(n-l)$, поэтому неравенство (37) эквивалентно неравенству

$$\widehat{m}_{i+1} < \mathscr{M}(W_q) + el^{k-1}(n-l). \quad (38)$$

Обозначим через p число $(\widehat{m}_{i+1} - \mathscr{M}(W_q))/l^{k-1}(n-l)$, которое является целым в силу соотношения (25) для W_q. Из неравенств (35) и (38) следует, что $0<p<e$. Тем самым в слое B^k_{k-1} найдутся p наборов, не содержащихся в Θ. Возьмем в качестве $\mathscr{N}_i(f)$ объединение множества W_q с

этими наборами. Тогда $\mathscr{N}_i(f)$ удовлетворяет равенству (18) согласно (20). Из неравенства $p < e$ вытекает справедливость соотношения (17) для $i+1$. Соотношения (16) для $i+1$ следуют из соотношений (24) для W_q.

Построив таким образом искомые множества $\mathscr{N}_0(f), \ldots, \mathscr{N}_{h-2}(f)$, согласно утверждению 3 из равенств (15) получаем соотношение (14), из которого заключаем, что $\mathscr{D} \in \left\langle \left\{ \frac{l}{n} \right\} \right\rangle$. Поэтому $G[\mathscr{I}(n); \{l, n-l\}^{-1}] \subseteq \left\langle \left\{ \frac{l}{n} \right\} \right\rangle$ в силу утверждения 1.

Из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает

Теорема 1. *Пусть* $\frac{l}{n}$ *— произвольная несократимая дробь из интервала* (0; 1). *Тогда* $\left\langle \left\{ \frac{l}{n} \right\} \right\rangle = G[\mathscr{I}(n); \{l, n-l\}^{-1}]$.

4. Заключение

Рассмотренная нами задача описания замыканий одноэлементных множеств чисел из $Q(0, 1)$ представляет собой частный случай задачи описания замыканий произвольных множеств чисел из $Q(0, 1)$. Поэтому обобщение полученных результатов на случай замыканий произвольных подмножеств множества $Q(0, 1)$ является непосредственной целью наших дальнейших исследований. Мы также надеемся, что данные результаты помогут в решении задачи описания замыканий множеств произвольных конечных вероятностных распределений с рациональными значениями вероятностей. Другим интересным направлением дальнейших исследований является изучение различных сложностных аспектов построения преобразователей вероятностных распределений (см. [3, 7, 15, 4]).

Автор благодарен А. Д. Маните за поддержку данных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов. — М.: Наука, 1985.
2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.
3. Захаров В. М., Салимов Ф. И. К теории структурного синтеза детерминированных преобразователей вероятности // Problems of Control and Information Theory. — 1977. — V. 6. — № 2. — P. 137–148.
4. Колпаков Р. М. О сложности порождения рациональных чисел одноэлементными множествами в классе всех булевых функций // Материалы VII межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — М.: Изд-во МГУ, 1996. — С. 13–14.
5. Колпаков Р. М. О преобразованиях булевых случайных величин // Математические вопросы кибернетики. Вып. 9. — М.: Физматлит, 2000. — С. 227–252.
6. Нурмеев Н. Н. О булевых функциях с аргументами, принимающими случайные значения // Тез. докл. VIII Всесоюзн. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Горький, 1988. — Ч. 2. — С. 59–60.
7. Нурмеев Н. Н. О сложности реализации преобразователей вероятностей схемами из функциональных элементов // Методы и системы тех. диагностики: межвуз. сборник научных трудов. — Саратов, 1993. — Вып. 18. — С. 131–132.
8. Салимов Ф. И. К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. Казань: Казанский гос. университет, 1979. — Вып. 15. — С. 68–89.
9. Салимов Ф. И. Конечная порожденность некоторых алгебр над случайными величинами // Вопросы кибернетики. Вып. 86. — М., 1982. — С. 122–130.
10. Салимов Ф. И. О максимальных подалгебрах алгебр распределений // Известия вузов. Сер. Математика. — 1985. — № 7. — С. 14–20.
11. Салимов Ф. И. Об одном семействе алгебр распределений // Известия вузов. Сер. Матем. 1988. — № 7. — С. 64–72.
12. Схиртладзе Р. Л. О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрССР. — 1961. — Т. 26, № 2. — С. 181–186.

13. Схиртладзе Р. Л. О методе построения булевой случайной величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. Вып. 7. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1966. — С. 71–80.
14. Hailperin Th. Boole's logic and probability: a critical exposition from the standpoint of contemporary algebra, logic and probability theory // Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam Oxford North-Holland Publishing Co. 1976. V. 85.
15. Kolpakov R. M. On the complexity of generation of rational numbers by Boolean functions // Fundamenta Informaticae. — 1995. — V. 22. — № 3. — P. 289–298.
16. Srinivasan A., Zuckerman D. Computing with very weak random Sources // SIAM J. on Computing. — 1999. — V. 28. — № 4. — P. 1433–1459.

Поступило в редакцию 4 IV 2002