

Ордена Ленина  
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша  
Российской академии наук

**Голубев Ю.Ф.**  
Робот-эквilibрист

Москва, 2002

УДК 531.1

**Голубев Ю.Ф.** Робот-эквилибрист.

**Аннотация**

Исследована задача о стабилизации равновесия робота, поставленного на цилиндр, который может катиться по горизонтальной плоскости. Во всех внешних контактах отсутствует проскальзывание. Управление осуществляется за счет электромеханического углового ускорения маховика, расположенного на роботе. Изучены стационарные движения. Показано, что соответствующая линейная система полностью управляема. Построен PD-регулятор с насыщением. Найдена область стабилизируемости системы в связи с ограниченностью управляющей функции. Изучено влияние погрешностей измерений. Выполнен расчет характеристик управления для некоторых конкретных параметров робота.

**Golubev Yu.F.** Robot-equilibrism.

**Abstract** The problem on a stabilisation of the equilibrium position of the robot is investigated. The robot is posed on the cylinder which can roll along a horizontal plane. The sliding in all external contacts is absent. The control is realized by electromechanical angular acceleration of a flywheel placed on a robot. Steady motions are investigated. It is shown that corresponding linear system is completely controllable. PD-regulator with saturation is designed. The area of stability due to bounded control function is found. The influence of measuring errors is studied. The calculation of control properties is fulfilled for some particular parameters of the robot.

**Содержание**

Введение . . . . .	3
1. Уравнения движения . . . . .	4
2. Линейная система . . . . .	9
3. Синтез закона управления . . . . .	11
4. Управление электроприводом . . . . .	13
5. Область стабилизируемости . . . . .	16
6. Влияние погрешностей . . . . .	21
7. Результаты расчетов . . . . .	23
Заключение . . . . .	24
Литература . . . . .	25

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 01-01-00079, 00-15-96135) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (Т0267, Б0053).

## Введение

Проблема активной стабилизации механических систем в окрестности неустойчивого положения равновесия имеет многочисленные приложения. Среди них выделим задачу обеспечения равновесия перевернутого маятника. Необходимость ее решения возникает, в частности, при построении устойчивой ходьбы и бега шагающих машин с небольшим числом ног.

Существуют разнообразные методы обеспечения устойчивости равновесия перевернутого маятника. Например, в [1, 2] стабилизация перевернутого маятника достигается за счет подходящего выбора частоты вибрации точки подвеса. В [3] стабилизация обеспечивается за счет управления горизонтальным смещением точки подвеса маятника. В [4, 5, 6, 7] изучен принцип обеспечения равновесия перевернутого физического маятника с неподвижной точкой подвеса за счет управления угловым ускорением маховика, закрепленного на маятнике с помощью цилиндрического шарнира. Требуемое вращение маховика осуществляется электродвигателем, закрепленным на маятнике.

В данной работе изучается проблема стабилизации робота в окрестности неустойчивого по двум степеням свободы положения равновесия с помощью углового ускорения маховика, включенного в состав робота. В отличие от [4, 5, 6, 7] робот не имеет непосредственного шарнирного соединения с неподвижной горизонтальной опорной плоскостью, а взаимодействует с ней через посредство горизонтально расположенного опорного кругового цилиндра. Робот опирается сверху о цилиндр плоской доской, обеспечивающей отсутствие проскальзывания робота относительно цилиндра и исключающей возможность опрокидывания робота в направлении оси опорного цилиндра. В результате возможно только плоскопараллельное движение робота в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси опорного цилиндра. Цилиндр в свою очередь не может проскальзывать относительно опорной плоскости. Маховик представляет собой центрально симметричное тело, прикрепленное в центре симметрии к роботу с помощью цилиндрического шарнира с осью, параллельной оси опорного цилиндра. Маховик приводится в движение электромотором, закрепленном на корпусе робота. В качестве управления выступает электрическое напряжение на обмотках двигателя. Данная система имеет три степени свободы, одна из которых (угол вращения маховика) непосредственно управляется электродвигателем, а две другие (угол наклона робота к горизонтальной плоскости и его качение по опорному цилиндру) — неустойчивы.

Составлены уравнения движения робота и в нелинейной постановке проанализированы основные приемы стабилизации робота в вертикальном по-

ложении. Эти приемы по смыслу сходны с действиями циркового эквилибриста, сохраняющего равновесие на дощечке, опирающейся о цилиндр на полу.

Показано, что линейная система, описывающая движение в окрестности положения равновесия, обладает свойством полной управляемости. Определен состав параметров, измеряемых с помощью телекамеры, и синтезирован закон управления электрическим напряжением двигателя, обеспечивающий асимптотическую устойчивость положения равновесия.

## 1. Уравнения движения

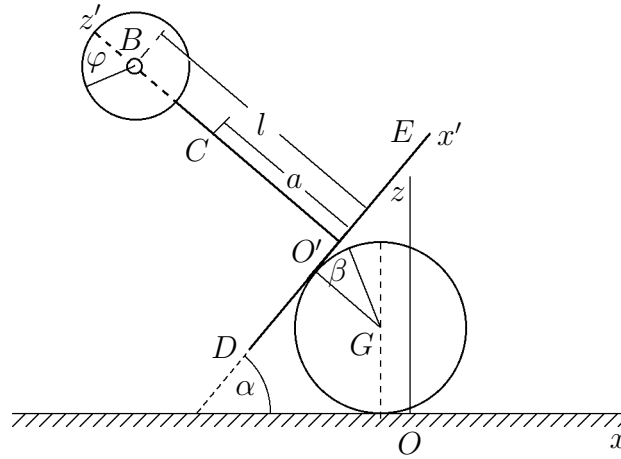


Рис. 1.1. Схематическое изображение робота-эквилибриста.

Доска  $DE$  опирается об однородный прямой круговой горизонтальный цилиндр, сечение которого плоскостью чертежа представляет собой круг с центром в точке  $G$  (рис. 1.1). Опорный цилиндр  $G$  имеет радиус  $R$ , массу  $m_o$ , центральный момент инерции  $J_o$ , лежит на горизонтальной плоскости и может катиться по ней без проскальзывания. Доска  $DE$  без проскальзывания может перекаатываться по опорному цилиндру. К доске в точке  $O'$  жестко прикреплен перпендикулярный к ней стержень. В точке  $B$  к стержню на расстоянии  $l$  от доски прикреплен маховик массы  $m$ , который может вращаться относительно стержня на угол  $\varphi$ . Центр масс маховика расположен в точке  $B$ , а его центральный момент инерции равен  $J_m$ . Маховик приводится в движение электроприводом. Коэффициент редукции от маховика к ротору электромотора равен  $\gamma$ , а момент инерции ротора равен  $J_u$ . Общий центр масс доски  $DE$  и стержня  $O'B$  вместе с закрепленными на нем деталями лежит в точке  $C$  на стержне  $O'B$ . Расстояние  $O'C$  равно  $a$ . Общая масса доски  $DE$  и стержня  $O'B$  вместе с закрепленными на нем

детальями равна  $M$ , а их суммарный центральный момент инерции равен  $J$ .

Угол между плоскостью доски и опорной горизонтальной плоскостью обозначим  $\alpha$ . Возьмем сечение опорного цилиндра плоскостью чертежа (рис. 1.1). Это сечение ограничено окружностью  $\mathcal{L}$  с центром в точке  $G$ . Пусть угол между направлением из  $G$  в некоторую фиксированную точку окружности  $\mathcal{L}$  и направлением из  $G$  в точку касания отрезка  $DE$  с этой окружностью составляет  $\beta$ . Предположим, что при  $\alpha = \beta = 0$  стержень  $O'B$ , занимая вертикальное положение, проектируется в точку опоры цилиндра с плоскостью. Начало  $O$  неподвижной системы координат  $Oxz$  свяжем с точкой опоры цилиндра с горизонтальной плоскостью при  $\alpha = \beta = 0$ . Ось  $Ox$  направим горизонтально, а ось  $Oz$  — вертикально, как показано на рис. 1.1. В точке  $O'$  возьмем начало системы координат  $O'x'z'$ , связанной с роботом. Ось  $O'x'$  направим вдоль отрезка  $DE$  в сторону точки  $E$ , ось  $O'z'$  направим вдоль отрезка  $O'B$  в сторону точки  $B$ .

С учетом введенных обозначений абсолютные координаты  $(x_o, z_o)$  точки  $O'$ ,  $(x_b, z_b)$  точки  $B$  и  $(x_c, z_c)$  точки  $C$  можно выразить формулами

$$\begin{aligned} x_o &= -R[\alpha + \sin \alpha - \beta(1 + \cos \alpha)], & z_o &= R(1 + \cos \alpha + \beta \sin \alpha), \\ x_b &= x_o - l \sin \alpha, & z_b &= z_o + l \cos \alpha, \\ x_c &= x_o - a \sin \alpha, & z_c &= z_o + a \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть  $z'$  — координата произвольной точки стержня  $O'B$ . Квадрат скорости  $v^2(z')$  этой точки определен выражением

$$\begin{aligned} v^2(z') &= [2R(R + z')(1 + \cos \alpha) + R^2(\beta^2 + 2\beta \sin \alpha) + (z')^2]\dot{\alpha}^2 - \\ &- 2R[(2R + z')(1 + \cos \alpha) + R\beta \sin \alpha]\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2R^2(1 + \cos \alpha)\dot{\beta}^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

так что квадрат скорости точки  $C$  есть  $v_c^2 = v^2(a)$ , а квадрат скорости точки  $B$  есть  $v_b^2 = v^2(l)$ . Приняв во внимание, что  $\psi = \alpha - \beta$  есть угол вращения опорного цилиндра, кинетическую энергию системы можно представить следующим образом

$$T = \frac{1}{2}(a'_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}^2 + a'_{\beta\beta}\dot{\beta}^2 + a_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 - 2a'_{\alpha\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2a_{\alpha\varphi}\dot{\alpha}\dot{\varphi}), \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a'_{\alpha\alpha} &= 2b(1 + \cos \alpha) + c(\beta^2 + 2\beta \sin \alpha) + d, \\ a'_{\beta\beta} &= 2c(1 + \cos \alpha) + e, & a_{\varphi\varphi} &= J_m + \gamma^2 J_u, \\ a'_{\alpha\beta} &= k(1 + \cos \alpha) + c\beta \sin \alpha + e, & a_{\alpha\varphi} &= J_m + \gamma J_u, \\ b &= R(M + m)(R + z'_c), & c &= (M + m)R^2, \\ d &= Ma^2 + ml^2 + J + J_m + J_u + e, & e &= J_o + m_o R^2, \\ k &= R(M + m)(2R + z'_c), & z'_c &= (aM + lm)/(M + m). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Силовая функция системы имеет вид

$$U = -\frac{g}{R}[b \cos \alpha + c(1 + \beta \sin \alpha)], \quad (1.5)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Выберем углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$  в качестве лагранжевых координат и составим систему дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} a'_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} - a'_{\alpha\beta}\ddot{\beta} &= -a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} + I\left(\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{R}\right) - 2c(\beta + \sin \alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}, \\ -a'_{\alpha\beta}\ddot{\alpha} + a'_{\beta\beta}\ddot{\beta} &= (c\beta - I)\dot{\alpha}^2 + 2c\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin \alpha - \frac{gc}{R}\sin \alpha, \\ a_{\alpha\varphi}\ddot{\alpha} + a_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} &= Q, \quad I = b \sin \alpha - c\beta \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $Q$  — обобщенная сила, работающая на изменении угла  $\varphi$ .

Функция

$$f(\gamma) = \frac{a_{\alpha\varphi}}{a_{\varphi\varphi}} = \frac{J_m + \gamma J_u}{J_m + \gamma^2 J_u}$$

характеризует влияние маховика на движение системы. При  $\gamma = \gamma^* = -J_m/J_u$  имеем  $f(\gamma^*) = 0$ . И это единственный корень функции  $f(\gamma)$ . При

$$\gamma = \gamma_1 = -\frac{J_m}{J_u} - \sqrt{\frac{J_m}{J_u} \left(1 + \frac{J_m}{J_u}\right)}$$

эта функция достигает минимума, а при

$$\gamma = \gamma_2 = -\frac{J_m}{J_u} + \sqrt{\frac{J_m}{J_u} \left(1 + \frac{J_m}{J_u}\right)}$$

она достигает максимума, причем

$$\gamma_1 < \gamma^* < 0 < \gamma_2, \quad \min f(\gamma) = f(\gamma_1) = \frac{1}{2\gamma_1}, \quad \max f(\gamma) = f(\gamma_2) = \frac{1}{2\gamma_2}.$$

Кроме того,

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} f(\gamma) = +0, \quad \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} f(\gamma) = -0.$$

Величиной максимума и минимума  $f(\gamma)$  можно управлять за счет подходящего выбора моментов инерции маховика и ротора двигателя. Так, если увеличивать отношение момента инерции маховика к моменту инерции ротора двигателя, то  $\max f(\gamma) \rightarrow 1$ , а  $\min f(\gamma) \rightarrow -0$ , и теоретически его можно сделать сколь угодно малым по абсолютной величине.

При  $\gamma^* < \gamma \leq \gamma_2$  функция  $f(\gamma)$  монотонно возрастает от значения  $f(\gamma^*) = 0$  до значения  $f(\gamma_2) > 1$ . Крайнюю точку  $\gamma^*$  указанного диапазона изменения  $\gamma$  следует исключить, так как при  $\gamma = \gamma^*$  теряется управляемость по углам  $\alpha$ ,  $\beta$  системы (1.6).

Изменяя подходящим образом величину  $\ddot{\varphi}$ , можно обеспечить различные режимы движения робота в целом. Рассмотрим отдельные случаи.

1. Потребуем, например, чтобы угол  $\alpha$  был постоянным во все время движения ( $\dot{\alpha} \equiv 0$ ). Первые два уравнения (1.6) примут вид

$$-a'_{\alpha\beta}\ddot{\beta} = -a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}I, \quad \ddot{\beta} = -\frac{gc \sin \alpha}{Ra'_{\beta\beta}}.$$

Первое из этих уравнений служит условием согласования для определения функции  $\ddot{\varphi}$ , а из второго уравнения следует, что угол  $\beta$  будет меняться при  $\alpha > 0$  равнозамедленно (опорный цилиндр на рис. 1.1 движется с постоянным положительным угловым ускорением, доска  $DE$  имеет ускорение, направленное вниз, а ускорение точки контакта доски с опорным цилиндром, взятое относительно доски, направлено вверх). При  $\alpha < 0$  угол  $\beta$  будет меняться равноускоренно (опорный цилиндр на рис. 1.1 движется с постоянным отрицательным угловым ускорением, по-прежнему доска  $DE$  имеет ускорение, направленное вниз, тогда как ускорение точки контакта доски с опорным цилиндром, взятое относительно доски, направлено вверх).

Таким образом, подбирая подходящее значение  $\alpha$ , можно обеспечить управление относительным положением точки контакта доски  $DE$  и опорного цилиндра. Например, если требуется приблизить указанную точку контакта к прямой  $BO'$  (рис. 1.1), то при  $\beta > 0$  (точка контакта имеет отрицательную абсциссу в осях  $O'x'z'$ ) следует выбрать  $\alpha > 0$ , а в случае  $\beta < 0$  (точка контакта имеет положительную абсциссу в осях  $O'x'z'$ ) достаточно взять  $\alpha < 0$ .

2. Если  $\alpha = 0$ , то тогда окажется, что  $\ddot{\beta} = 0$ . Это означает, что доска  $DE$ , будучи горизонтальной, равномерно смещается вправо или влево с постоянной начальной скоростью, а опорный цилиндр совершает соответствующее вынужденное движение. Условие согласования в этом случае принимает вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gc\beta}{Ra_{\alpha\varphi}},$$

то есть угловое ускорение маховика должно быть пропорционально величине  $\beta$  и будет постоянным, если  $\beta$  постоянно. В частности, оно будет равным нулю, если  $\beta = 0$ .

3. Из сказанного в предыдущем пункте ясно, что при  $Q = 0$  движение с параметрами

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \dot{\varphi} = \text{const}$$

будет стационарным движением системы. Его можно пытаться сделать устойчивым, подбирая соответствующее управление угловым ускорением  $\ddot{\varphi}$ .

4. Переход от одного постоянного значения  $\alpha$  к другому постоянному его значению можно осуществлять целенаправленно, задав специальным образом функцию  $\ddot{\alpha}(t)$ . Такие режимы в сочетании с режимами п. 1 могут оказаться полезными для обеспечения устойчивого движения системы в окрестности стационарной точки. Если  $\ddot{\alpha}(t)$  есть заданная функция времени, то первые два уравнения системы (1.6) примут вид

$$\begin{aligned} a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} &= -a'_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} + a'_{\alpha\beta}\ddot{\beta} + I\left(\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{R}\right) - 2c(\beta + \sin\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}, \\ a'_{\beta\beta}\ddot{\beta} &= a'_{\alpha\beta}\ddot{\alpha} + (c\beta - I)\dot{\alpha}^2 + 2c\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha - \frac{gc}{R}\sin\alpha. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Первое из них дает по-прежнему условие согласования, а второе полностью определяет закон изменения угла  $\beta$ . Второе уравнение (1.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} a'_{\beta\beta}\ddot{\beta} &= c\beta[(1 + \cos\alpha)\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}\sin\alpha] + \left(2c\dot{\alpha}\dot{\beta} - b\dot{\alpha}^2 - \frac{gc}{R}\right)\sin\alpha + \\ &+ [k(1 + \cos\alpha) + e]\ddot{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Оно оказывается линейным относительно  $\beta$  с коэффициентами, известным образом зависящими от времени.

Закон изменения угла  $\alpha$  в малой окрестности значений  $\alpha = \dot{\alpha} = 0$  зададим с помощью уравнения

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0. \quad (1.9)$$

Этот закон означает гармоническое покачивание доски  $DE$  около горизонтального положения и может быть использован для перевода робота из одного наклонного положения в другое.

В уравнении (1.8) учтем равенство (1.9) и пренебрежем членами второго и выше порядка малости по  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\ddot{\alpha}$ . Тогда получим

$$(4c + e)\ddot{\beta} = -\frac{gc}{R}\alpha + (2k + e)\ddot{\alpha}$$

или

$$\beta = \frac{1}{4c + e} \left( \frac{gc}{R\omega^2} + 2k + e \right) \alpha + C_1(t - t_0) + C_0,$$

где постоянные  $C_1$ ,  $C_0$  определяются начальными условиями. Пусть в момент времени  $t_0$  начала перевода доски из положения с углом наклона  $\alpha(t_0) = \alpha_0$  и угловой скоростью  $\dot{\alpha}(t_0) = 0$  реализовались значения  $\beta(t_0) = \beta_0$ ,  $\dot{\beta}(t_0) = \dot{\beta}_0$ . Очевидно, что тогда будет справедливо равенство

$$\beta - \beta_0 = \frac{1}{4c + e} \left( \frac{gc}{R\omega^2} + 2k + e \right) (\alpha - \alpha_0) + (t - t_0)\dot{\beta}_0. \quad (1.10)$$



Предположим, что в конечный момент времени  $t_1$  перевода доски в другое наклонное положение требуется обеспечить  $\alpha(t_1) = -\alpha_0$  и  $\dot{\alpha}(t_1) = 0$ . Из (1.10) найдем приближенную формулу для приращения угла  $\beta$  за время маневра. Тогда  $t_1 - t_0 = \pi/\omega$  и

$$\beta(t_1) - \beta_0 = -2\alpha_0 \frac{1}{4c + e} \left( \frac{gc}{R\omega^2} + 2k + e \right) + \frac{\pi\dot{\beta}_0}{\omega}. \quad (1.11)$$

Необходимость в указанном маневре возникает, например, если в некоторый момент  $t_0$  оказалось, что

$$\alpha_0 > 0, \quad \beta_0 < 0, \quad \dot{\beta}_0 < 0.$$

Это означает, что доска  $DE$  слишком низко опустилась, и ее можно вернуть к положению равновесия, лишь перевернув до отрицательных значений  $\alpha$ . Из формулы (1.11) видим, что влияние члена, связанного с угловой скоростью  $\dot{\beta}_0$ , можно сделать сколь угодно малым за счет увеличения  $\omega$  (уменьшения времени переходного процесса), тогда как член, содержащий  $\alpha_0$ , нельзя таким образом сделать сколь угодно малым. На него влияет амплитуда маневра по  $\alpha$ , увеличивая по абсолютной величине отклонение по  $\beta$ . Поэтому маневры переворота со слишком большой амплитудой по  $\alpha$  могут оказаться не вполне хорошими для предотвращения задевания пола доской. Аналогичным представляется случай, когда

$$\alpha_0 < 0, \quad \beta_0 > 0, \quad \dot{\beta}_0 > 0.$$

## 2. Линейная система

Рассмотрим уравнения линейного приближения в окрестности решения  $\alpha = 0, \beta = 0$ :

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} - a_{\alpha\beta}\ddot{\beta} + a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} &= \frac{g}{R}(b\alpha - c\beta), \\ -a_{\alpha\beta}\ddot{\alpha} + a_{\beta\beta}\ddot{\beta} &= -\frac{gc}{R}\alpha, \\ a_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} + a_{\alpha\varphi}\ddot{\alpha} &= Q, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где вновь введенные постоянные коэффициенты выражаются формулами

$$a_{\alpha\alpha} = 4b + d, \quad a_{\alpha\beta} = 2(b + c) + e, \quad a_{\beta\beta} = 4c + e. \quad (2.2)$$

Пусть система не управляется:  $Q = 0$ . Рассмотрим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{gb}{R} - \lambda a_{\alpha\alpha} & -\frac{gc}{R} + \lambda a_{\alpha\beta} & -\lambda a_{\alpha\varphi} \\ -\frac{gc}{R} + \lambda a_{\alpha\beta} & -\lambda a_{\beta\beta} & 0 \\ -\lambda a_{\alpha\varphi} & 0 & -\lambda a_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

Один из корней этого уравнения, как и следовало ожидать,  $\lambda_1 = 0$ . Два другие находятся из квадратного уравнения:

$$\Delta_0 \lambda^2 + \frac{ga_{\varphi\varphi}}{R}(2ca_{\alpha\beta} - ba_{\beta\beta})\lambda - \frac{g^2 c^2 a_{\varphi\varphi}}{R^2} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & -a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\varphi} \\ -a_{\alpha\beta} & a_{\beta\beta} & 0 \\ a_{\alpha\varphi} & 0 & a_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = a_{\varphi\varphi}\Delta - a_{\alpha\varphi}^2 a_{\beta\beta}.$$

есть определитель матрицы кинетической энергии системы, а

$$\Delta = a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 = 4R^2[Mm(l-a)^2 + (M+m)(J+J_m+J_u)] + (Ma^2 + ml^2 + J+J_m+J_u)(J_o + m_o R^2)$$

есть определитель первых двух уравнений системы (2.1), отличный от нуля при любых ненулевых параметрах робота.

Видим, что  $\Delta_0$  квадратично зависит от коэффициента редукции  $\gamma$ :

$$\Delta_0 = J_u(\Delta - J_u a_{\beta\beta})\gamma^2 - 2J_m J_u a_{\beta\beta}\gamma + J_m(\Delta - J_m a_{\beta\beta}).$$

Дискриминант  $\mathcal{D}$  этого квадратного трехчлена имеет вид

$$\mathcal{D} = J_m^2 J_u^2 a_{\beta\beta}^2 - J_m J_u (\Delta - J_u a_{\beta\beta})(\Delta - J_m a_{\beta\beta}).$$

Выполнив преобразования, найдем

$$\mathcal{D} = -J_m J_u \Delta \{4R^2[Mm(l-a)^2 + (M+m)J] + (Ma^2 + ml^2 + J)e\} < 0.$$

Поэтому при любых значениях параметров робота будет  $\Delta_0 > 0$ . Следовательно уравнение (2.3) имеет один отрицательный корень  $\lambda_2 < 0$  и один положительный  $\lambda_3 > 0$ . В целом при отсутствии управления система (2.1) имеет одну нейтральную главную координату, очевидно связанную с наличием маховика, одну устойчивую главную координату и одну неустойчивую. Один из характеристических показателей положителен, три из них имеют действительную часть, равную нулю, и один отрицателен. Это обстоятельство отличает рассматриваемую систему от изученных в работе [7].

Систему (2.1) можно разрешить относительно  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$  и привести ее к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= -\frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}\alpha - \frac{a_{\beta\beta}}{\Delta}\bar{u}, \\ \ddot{\beta} &= -\frac{gca_{\alpha\alpha}}{R\Delta}\alpha - \frac{a_{\alpha\beta}}{\Delta}\bar{u}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\bar{u}$  выражается формулой

$$\bar{u} = a_{\alpha\varphi}\ddot{\varphi} - \frac{gb}{R}\alpha + \frac{gc}{R}\beta \quad (2.5)$$

и может на данном этапе исследования рассматриваться как управление системой.

### 3. Синтез закона управления

Если в системе (2.4) назначить  $\bar{u} = 0$ , то уравнения движения примут вид

$$\ddot{\alpha} = -\frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}\alpha, \quad \ddot{\beta} = -\frac{gca_{\alpha\alpha}}{R\Delta}\alpha.$$

Следовательно при  $\bar{u} = 0$ , положение равновесия  $\alpha = \beta = 0$  будет по координате  $\alpha$  устойчивым, а по координате, выражаемой линейной комбинацией  $a_{\alpha\alpha}\alpha - a_{\alpha\beta}\beta$ , оно будет безразличным. Если начальные условия таковы, что указанная линейная комбинация и ее скорость невелики, то на достаточно большом промежутке времени управление  $\bar{u} = 0$  будет обеспечивать колебания системы вблизи равновесия. Однако более интересным представляется управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость по координатам  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\dot{\varphi}$ . Значение координаты  $\varphi$ , выражающей угол поворота маховика, может быть любым.

Объединим систему (2.4) и равенство (2.5):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= -\frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}\alpha - \frac{a_{\beta\beta}}{\Delta}\bar{u}, \\ \ddot{\beta} &= -\frac{gca_{\alpha\alpha}}{R\Delta}\alpha - \frac{a_{\alpha\beta}}{\Delta}\bar{u}, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{gb}{Ra_{\alpha\varphi}}\alpha - \frac{gc}{Ra_{\alpha\varphi}}\beta + \frac{1}{a_{\alpha\varphi}}\bar{u}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Приняв  $\bar{u}$  в качестве управления, исследуем свойство управляемости системы (3.1) по переменным  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\dot{\varphi}$ . С этой целью представим ее в стандартной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\bar{u}.$$

Вектор  $\mathbf{x}$ , матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  имеют вид

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}, & a_{41} &= -\frac{gca_{\alpha\alpha}}{R\Delta}, & a_{51} &= \frac{gb}{Ra_{\alpha\varphi}}, & a_{52} &= -\frac{gc}{Ra_{\alpha\varphi}}, \\ b_3 &= -\frac{a_{\beta\beta}}{\Delta}, & b_4 &= -\frac{a_{\alpha\beta}}{\Delta}, & b_5 &= \frac{1}{a_{\alpha\varphi}}. \end{aligned}$$

Запишем [8] матрицу управляемости  $\mathcal{U} = (\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}^2\mathcal{B}, \mathcal{A}^3\mathcal{B}, \mathcal{A}^4\mathcal{B})$ :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 & a_{31}b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & a_{41}b_3 & 0 \\ b_3 & 0 & a_{31}b_3 & 0 & a_{31}^2b_3 \\ b_4 & 0 & a_{41}b_3 & 0 & a_{41}a_{31}b_3 \\ b_5 & 0 & a_{51}b_3 + a_{52}b_4 & 0 & a_{31}a_{51}b_3 + a_{41}a_{52}b_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда ясно, что

$$\det \mathcal{U} = -b_3^2 a_{52} (b_3 a_{41} - b_4 a_{31})^3.$$

Далее

$$b_3 a_{41} - b_4 a_{31} = \frac{gc}{R\Delta^2} (a_{\beta\beta} a_{\alpha\alpha} - a_{\alpha\beta}^2) = \frac{gc}{R\Delta} > 0,$$

Следовательно, при неограниченном  $\bar{u}$  система (3.1) обладает свойством управляемости при любых значениях ее параметров.

Возьмем управление в виде [9]

$$\bar{u} = \varkappa_1 \alpha + \varkappa_2 \beta + \varkappa_3 \dot{\alpha} + \varkappa_4 \dot{\beta} + \varkappa_5 \dot{\varphi}, \quad (3.2)$$

так чтобы положение равновесия стало асимптотически устойчивым координатам  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\varphi}$ . Линейная система уравнений (2.4) запишется тогда следующим образом

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= (a_{31} + \varkappa_1 b_3) \alpha + \varkappa_2 b_3 \beta + \varkappa_3 b_3 \dot{\alpha} + \varkappa_4 b_3 \dot{\beta} + \varkappa_5 b_3 \dot{\varphi}, \\ \ddot{\beta} &= (a_{41} + \varkappa_1 b_4) \alpha + \varkappa_2 b_4 \beta + \varkappa_3 b_4 \dot{\alpha} + \varkappa_4 b_4 \dot{\beta} + \varkappa_5 b_4 \dot{\varphi}, \\ \ddot{\varphi} &= (a_{51} + \varkappa_1 b_5) \alpha + (a_{52} + \varkappa_2 b_5) \beta + \varkappa_3 b_5 \dot{\alpha} + \varkappa_4 b_5 \dot{\beta} + \varkappa_5 b_5 \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а соответствующее характеристическое уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} + \varkappa_1 b_3 & \varkappa_2 b_3 & \varkappa_3 b_3 - \lambda & \varkappa_4 b_3 & \varkappa_5 b_3 \\ a_{41} + \varkappa_1 b_4 & \varkappa_2 b_4 & \varkappa_3 b_4 & \varkappa_4 b_4 - \lambda & \varkappa_5 b_4 \\ a_{51} + \varkappa_1 b_5 & a_{52} + \varkappa_2 b_5 & \varkappa_3 b_5 & \varkappa_4 b_5 & \varkappa_5 b_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{13} \varkappa_3 + c_{14} \varkappa_4 + c_{15} \varkappa_5, \\ a_2 &= c_{21} \varkappa_1 + c_{22} \varkappa_2 + c_{20}, \\ a_3 &= c_{34} \varkappa_4 + c_{35} \varkappa_5, \\ a_4 &= c_{42} \varkappa_2, \\ a_5 &= c_{55} \varkappa_5, \end{aligned} \quad (3.5)$$

причем

$$\begin{aligned}
c_{13} = c_{21} = -b_3 &= \frac{a_{\beta\beta}}{\Delta}, & c_{14} = c_{22} = -b_4 &= \frac{a_{\alpha\beta}}{\Delta}, \\
c_{20} = -a_{31} &= \frac{gca_{\alpha\beta}}{R\Delta}, & c_{15} = -b_5 &= -\frac{1}{a_{\alpha\varphi}}, \\
c_{34} = c_{42} = a_{31}b_4 - a_{41}b_3 &= -\frac{gc}{R\Delta}, & c_{55} = a_{52}c_{34} &= \frac{g^2c^2}{R^2\Delta a_{\alpha\varphi}}, \\
c_{35} = a_{31}b_5 - a_{52}b_4 - a_{51}b_3 &= \frac{g(be - 2ce - 4c^2)}{R\Delta a_{\alpha\varphi}}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Разрешая равенства (3.5) относительно коэффициентов  $\varkappa_i$ , найдем

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 = d_{12}a_2 + d_{14}a_4 - d_{10}, & \quad \varkappa_2 = -d_{24}a_4, & \varkappa_3 = d_{31}a_1 + d_{33}a_3 + d_{35}a_5, \\
\varkappa_4 = -d_{43}a_3 + d_{45}a_5, & & \varkappa_5 = d_{55}a_5,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}
d_{12} = d_{31} &= \frac{\Delta}{a_{\beta\beta}}, & d_{14} = d_{33} &= \frac{Ra_{\alpha\beta}\Delta}{gca_{\beta\beta}}, & d_{10} &= \frac{gca_{\alpha\beta}}{Ra_{\beta\beta}}, \\
d_{24} = d_{43} &= \frac{R\Delta}{gc}, & d_{35} &= \frac{R^2\Delta}{g^2c^2a_{\beta\beta}} \left[ \Delta - \frac{(be - 2ce - 4c^2)a_{\alpha\beta}}{c} \right], \\
d_{45} &= \frac{(be - 2ce - 4c^2)R^2\Delta}{g^2c^3}, & d_{55} &= \frac{R^2a_{\alpha\varphi}\Delta}{g^2c^2}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Для того, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость переходного процесса, достаточно корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения назначить следующим образом:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5 < 0. \tag{3.9}$$

Коэффициенты характеристического уравнения с такими корнями найдутся по правилу бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\sum_{j=1}^5 \lambda_j, & a_2 &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i \sum_{j=i+1}^5 \lambda_j, & a_3 &= -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \sum_{j=i+1}^4 \lambda_j \sum_{k=j+1}^5 \lambda_k, \\
a_4 &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \sum_{j=i+1}^3 \lambda_j \sum_{k=j+1}^4 \lambda_k \sum_{n=k+1}^5 \lambda_n, & a_5 &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

а коэффициенты закона управления (3.2) можно вычислить по формулам (3.7).

## 4. Управление электроприводом

Рассмотрим третье уравнение системы (2.1). В нем правая часть представляет собой момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя. Возьмем [10] приближенное значение величины  $Q$ :

$$Q = c_1 u - c_2 \dot{\varphi}. \tag{4.1}$$

Постоянные  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  находятся по паспортным данным привода с учетом коэффициента редукции. Электрическое напряжение  $u$  ограничено по величине:  $-u_0 \leq u \leq u_0$ .

Подставив в третье уравнение системы (2.1) величину  $\ddot{\alpha}$ , взятую из первого уравнения (2.4), и величину  $\ddot{\varphi}$ , найденную из уравнения (2.5), установим связь между  $u$  и  $\bar{u}$

$$A\bar{u} + B\alpha - C\beta = c_1u - c_2\dot{\varphi}, \quad (4.2)$$

где

$$A = \frac{\Delta_0}{a_{\alpha\varphi}\Delta}, \quad B = \frac{g}{R} \left( \frac{ba_{\varphi\varphi}}{a_{\alpha\varphi}} - \frac{ca_{\alpha\beta}a_{\alpha\varphi}}{\Delta} \right), \quad C = \frac{gca_{\varphi\varphi}}{Ra_{\alpha\varphi}}.$$

В числителе коэффициента  $A$  стоит определитель  $\Delta_0 > 0$ . Поэтому при любых значениях параметров системы будет  $A > 0$ .

Возьмем выражение (3.2) для  $\bar{u}$  и подставим его в (4.2). Обозначим

$$V = k_1\alpha + k_2\beta + k_3\dot{\alpha} + k_4\dot{\beta} + k_5\dot{\varphi}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{A\alpha_1 + B}{c_1}, & k_2 &= \frac{A\alpha_2 - C}{c_1}, & k_3 &= \frac{A\alpha_3}{c_1}, \\ k_4 &= \frac{A\alpha_4}{c_1}, & k_5 &= \frac{A\alpha_5 + c_2}{c_1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Зададим закон управления электрическим напряжением, подаваемым на двигатель:

$$u = \begin{cases} -u_0, & V < -u_0; \\ u = V, & |V| \leq u_0; \\ u_0, & V > u_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Наличие в выражении (4.3) какого-нибудь ненулевого коэффициента усиления  $k_i$  означает необходимость измерения соответствующей фазовой координаты. Проанализируем возможность обращения в нуль каждого коэффициента  $k_i$ . Начнем с коэффициента  $k_1$ . Из первой формулы (4.4) и выражений для  $\alpha_1$  в формулах (3.7) и для коэффициентов  $d_{12}$  и  $d_{14}$  в (3.8) с учетом положительности значений  $a_2$  и  $a_4$  следует, что возможность обращения в нуль коэффициента  $k_1$  зависит от знака выражения

$$-Ad_{10} + B = \frac{g}{R} \left( \frac{ba_{\varphi\varphi}}{a_{\alpha\varphi}} - \frac{ca_{\alpha\beta}a_{\alpha\varphi}}{\Delta} - \frac{c\Delta_0a_{\alpha\beta}}{a_{\alpha\varphi}a_{\beta\beta}\Delta} \right).$$

Выполнив преобразования с учетом (2.2), найдем

$$-Ad_{10} + B = \frac{ga_{\varphi\varphi}(ba_{\beta\beta} - ca_{\alpha\beta})}{Ra_{\alpha\varphi}a_{\beta\beta}} = \frac{ga_{\varphi\varphi}(b - c)(2c + e)}{Ra_{\alpha\varphi}a_{\beta\beta}} > 0.$$

Отсюда ясно, что для действительных корней  $\lambda_i$ , удовлетворяющих (3.9), коэффициент  $k_1$  не может обратиться в нуль ни при каких значениях параметров системы. Аналогично, поскольку  $a_4 > 0$ , не может обратиться в нуль и  $k_2$ .

Что касается коэффициентов  $k_3, k_4$ , то они не могут одновременно сделаться равными нулю. Покажем это. Предположим, что выполнено  $k_3 = k_4 = 0$ . Это равносильно системе уравнений

$$\begin{aligned} d_{31}a_1 + d_{33}a_3 + d_{35}a_5 &= 0, \\ -d_{43}a_3 + d_{45}a_5 &= 0. \end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения этой системы  $a_3 = a_5 d_{45}/d_{43}$  и подставив его в левую часть первого уравнения, получим

$$d_{31}a_1 + \left( \frac{d_{45}d_{33}}{d_{43}} + d_{35} \right) a_5 = d_{31}a_1 + \frac{R^2 \Delta^2}{g^2 c^2 a_{\beta\beta}} a_5.$$

Все коэффициенты в последнем выражении оказываются положительными, и оно не может обратиться в нуль. Поэтому следует рассматривать случаи, когда либо  $k_3 = 0$ , либо  $k_4 = 0$ .

Коэффициент  $b$  в выражении для  $d_{45}$  формул (3.8) зависит от координаты  $z'_c$  центра масс робота (см. (1.4)). Если  $z'_c$  невелико (невысокий робот), то  $d_{45} < 0$ . Но тогда  $d_{35} > 0$ , и ни один из коэффициентов  $k_3, k_4$  не может обратиться в нуль. Обозначим

$$\bar{z}'_c = R \left[ 1 + \frac{4R^2(M+m)}{J_0 + m_0 R^2} \right].$$

Если  $z'_c = \bar{z}'_c$ , то  $d_{45} = 0$ , и при этом оказывается, что  $d_{35} > 0$ . Следовательно при  $z'_c = \bar{z}'_c$  равенство нулю коэффициентов  $k_3, k_4$  продолжает оставаться невозможным. При увеличении  $z'_c > \bar{z}'_c$  коэффициент  $d_{45}$  становится положительным, и появляется возможность сделать равным нулю коэффициент  $k_4$ . Таким образом, выполнение условия

$$z'_c > R \left[ 1 + \frac{4R^2(M+m)}{J_0 + m_0 R^2} \right] \quad (4.6)$$

ограничивает снизу высоту робота и дает возможность обойтись без измерения параметра  $\dot{\beta}$ .

Наконец, коэффициент  $k_5$  не может обратиться в нуль из-за того, что  $a_5 > 0$  и  $d_{55} > 0$ .

Пусть выполнено условие (4.6). Тогда подбор корней характеристического уравнения (3.4) можно осуществить следующим образом. Назначим произвольно пять действительных чисел  $\bar{\lambda}_i$ , удовлетворяющих условию

$$\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \bar{\lambda}_4 < \bar{\lambda}_5 < 0, \quad (4.7)$$

и по формулам (3.10) найдем соответствующие им значения  $\bar{a}_3$  и  $\bar{a}_5$ . Возьмем корни характеристического уравнения (3.4) в виде

$$\lambda_i = \chi \bar{\lambda}_i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Тогда требование  $k_4 = 0$  и  $\chi \neq 0$  приводит к уравнению

$$\chi^2 d_{45} \bar{a}_5 - d_{43} \bar{a}_3 = 0.$$

Отсюда найдем

$$\chi = \sqrt{\frac{d_{43} \bar{a}_3}{d_{45} \bar{a}_5}}. \quad (4.8)$$

После выполнения указанной процедуры будем иметь

$$k_1 c_1 > 0, \quad k_2 c_1 < 0, \quad k_3 c_1 > 0, \quad k_4 = 0, \quad k_5 c_1 > 0.$$

## 5. Область стабилизируемости

Управление с насыщением (4.5) влечет сужение области управляемости. Нас будет интересовать возможность управления по координатам  $\alpha$ ,  $\beta$ . Чтобы определить соответствующую область управляемости, возьмем систему уравнений (2.1) и подставим в нее выражение для обобщенной силы (4.1):

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha} \ddot{\alpha} - a_{\alpha\beta} \ddot{\beta} + a_{\alpha\varphi} \ddot{\varphi} &= \frac{g}{R} (b\alpha - c\beta), \\ -a_{\alpha\beta} \ddot{\alpha} + a_{\beta\beta} \ddot{\beta} &= -\frac{gc}{R} \alpha, \\ a_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} + a_{\alpha\varphi} \ddot{\alpha} &= c_1 u - c_2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Исключим из первого уравнения  $\ddot{\varphi}$  и рассмотрим первые два уравнения системы:

$$\begin{aligned} \left( a_{\alpha\alpha} - \frac{a_{\alpha\varphi}^2}{a_{\varphi\varphi}} \right) \ddot{\alpha} - a_{\alpha\beta} \ddot{\beta} &= \frac{g}{R} (b\alpha - c\beta) + U, \\ -a_{\alpha\beta} \ddot{\alpha} + a_{\beta\beta} \ddot{\beta} &= -\frac{gc}{R} \alpha, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$U = \frac{a_{\alpha\varphi} (c_2 \dot{\varphi} - c_1 u)}{a_{\varphi\varphi}}. \quad (5.3)$$

В каждый фиксированный момент времени управление  $U$  может принимать значения из диапазона

$$U_m \leq U \leq U_M, \quad U_m = \frac{a_{\alpha\varphi} (c_2 \dot{\varphi} - |c_1| u_0)}{a_{\varphi\varphi}}, \quad U_M = \frac{a_{\alpha\varphi} (c_2 \dot{\varphi} + |c_1| u_0)}{a_{\varphi\varphi}}. \quad (5.4)$$



Стабилизируемость системы (5.2) будем понимать, как возможность приведения ее фазовой точки в начало координат фазового пространства, т.е. в точку с координатами  $\alpha = \dot{\alpha} = \beta = \dot{\beta} = 0$ . Для исследования стабилизируемости рассмотрим свойства однородной системы:

$$\begin{aligned} \left( a_{\alpha\alpha} - \frac{a_{\alpha\varphi}^2}{a_{\varphi\varphi}} \right) \ddot{\alpha} - a_{\alpha\beta} \ddot{\beta} &= \frac{g}{R} (b\alpha - c\beta), \\ -a_{\alpha\beta} \ddot{\alpha} + a_{\beta\beta} \ddot{\beta} &= -\frac{gc}{R} \alpha. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{gb}{R} - \mu \left( a_{\alpha\alpha} - \frac{a_{\alpha\varphi}^2}{a_{\varphi\varphi}} \right) & \mu a_{\alpha\beta} - \frac{gc}{R} \\ \mu a_{\alpha\beta} - \frac{gc}{R} & -\mu a_{\beta\beta} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\Delta_0}{a_{\varphi\varphi}} \mu^2 + \frac{g(4c^2 + 2ce - eb)}{R} \mu - \frac{g^2 c^2}{R^2} = 0. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6), как и следовало ожидать, совпадает с (2.3) и имеет один положительный и один отрицательный корень. Заметим, что если коэффициент  $d_{45}$  в формулах (3.8) положителен, то наибольшим по абсолютной величине будет положительный корень, а если  $d_{45}$  окажется отрицательным, то наибольшую абсолютную величину будет иметь отрицательный корень. Однако, не существует параметров системы, при которых какой-нибудь из корней сделался равным нулю. Обозначим  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_2 > 0$  корни уравнения (5.6).

Собственные векторы системы (5.5) имеют координаты

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu_1 a_{\beta\beta}, \quad \beta_1 = \mu_1 a_{\alpha\beta} - \frac{gc}{R}, \\ \alpha_2 &= \mu_2 a_{\beta\beta}, \quad \beta_2 = \mu_2 a_{\alpha\beta} - \frac{gc}{R}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

После преобразования координат к собственным векторам система (5.2) перейдет в следующую

$$\ddot{\xi}_1 = \mu_1 \xi_1 + u_1, \quad \ddot{\xi}_2 = \mu_2 \xi_2 + u_2. \quad (5.8)$$

где управления

$$u_1 = U \alpha_1 = U \mu_1 a_{\beta\beta}, \quad u_2 = U \alpha_2 = U \mu_2 a_{\beta\beta}$$

ограничены по величине:

$$u_{1m} \leq u_1 \leq u_{1M}, \quad u_{2m} \leq u_2 \leq u_{2M},$$

причем

$$\begin{aligned} u_{1m} &= U_M \mu_1 a_{\beta\beta}, & u_{1M} &= U_m \mu_1 a_{\beta\beta} \\ u_{2m} &= U_m \mu_2 a_{\beta\beta}, & u_{2M} &= U_M \mu_2 a_{\beta\beta}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Первое уравнение системы (5.8) соответствует отрицательному собственному значению  $\mu_1$ . При постоянном управлении его фазовые траектории суть эллипсы. Из любой точки фазового пространства, выбирая подходящим образом управление в диапазоне  $u_{1m} \leq u_1 \leq u_{1M}$ , можно привести фазовую точку первого уравнения в начало его фазовой плоскости.

Второе уравнение системы (5.8) соответствует положительному собственному значению  $\mu_2$ . При постоянном управлении  $u_2$  его фазовые траектории суть гиперболы с асимптотами:

$$\dot{\xi}_2 = \pm \sqrt{\mu_2} (\xi_2 - \bar{u}_2), \quad \bar{u}_2 = -\frac{u_2}{\mu_2}.$$

Возьмем какие-нибудь числа  $u_m$  и  $u_M$  так, чтобы было

$$u_m < 0 < u_M,$$

и исследуем возможность стабилизации из различных точек фазовой плоскости в ее начало для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{\xi} - \mu_2 \xi = u, \quad u_m \leq u \leq u_M \quad (5.10)$$

при использовании релейного управления вида

$$u = \frac{u_m + u_M}{2} \pm \frac{u_m - u_M}{2}. \quad (5.11)$$

Если принять  $u = u_m$ , то фазовые гиперболы для (5.10) задаются уравнением

$$\mu_2 (\xi - \bar{u}_m)^2 - \dot{\xi}^2 = p_m, \quad \bar{u}_m = -\frac{u_m}{\mu_2}, \quad (5.12)$$

а если положить  $u = u_M$ , то аналогичное уравнение примет вид

$$\mu_2 (\xi - \bar{u}_M)^2 - \dot{\xi}^2 = p_M, \quad \bar{u}_M = -\frac{u_M}{\mu_2}, \quad (5.13)$$

где  $p_m$  и  $p_M$  – постоянные интегрирования, причем  $\bar{u}_M < 0 < \bar{u}_m$ .

Сначала выделим область начальных условий  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ , удовлетворяющих неравенствам

$$-\sqrt{\mu_2} (\xi_0 - \bar{u}_m) \leq \dot{\xi}_0 < 0. \quad (5.14)$$

Если начальная точка находится в этой области и выдерживается управление  $u = u_m$ , то движение фазовой точки происходит по соответствующей

гиперболе (5.12) в сторону оси абсцисс, и фазовая траектория пересекает ось абсцисс в точке с координатой

$$\xi_m = \sqrt{(\xi_0 - \bar{u}_m)^2 - \frac{\dot{\xi}_0^2}{\mu_2}} + \bar{u}_m > \bar{u}_m > 0$$

и затем удаляется в бесконечность. Если при тех же начальных условиях взять управление  $u = u_M$ , то движение будет также происходить в сторону оси абсцисс, но уже по гиперболе вида (5.13), а координата  $\xi_M$  точки пересечения этой гиперболы с осью абсцисс выразится следующим образом

$$\xi_M = \sqrt{(\xi_0 - \bar{u}_M)^2 - \frac{\dot{\xi}_0^2}{\mu_2}} + \bar{u}_M.$$

Покажем, что

$$\xi_M \geq \xi_m. \quad (5.15)$$

Прежде всего, отметим, что

$$\xi_M = \sqrt{(\xi_0 - \bar{u}_m)^2 + 2(\xi_0 - \bar{u}_m)(\bar{u}_m - \bar{u}_M) + \bar{u}_m(\bar{u}_m - 2\bar{u}_M) + \bar{u}_M^2 - \frac{\dot{\xi}_0^2}{\mu_2}} + \bar{u}_M > 0$$

из-за того, что выполнено неравенство (5.14),  $\bar{u}_M < 0$  и  $\bar{u}_m > 0$ . Поэтому из (5.15) следует  $\xi_M^2 \geq \xi_m^2$  или после преобразований

$$\xi_0 - \bar{u}_m \geq \sqrt{(\xi_0 - \bar{u}_m)^2 - \frac{\dot{\xi}_0^2}{\mu_2}}.$$

В области (5.14) имеем  $\xi_0 - \bar{u}_m \geq 0$ , и последнее неравенство представляется очевидным, что и доказывает справедливость (5.15).

Неравенство (5.15) свидетельствует, что фазовую траекторию, начинающуюся в области (5.14), при любом управлении  $u \in [u_m, u_M]$  невозможно привести в начало координат.

Траектории, начинающиеся в области, описываемой неравенствами

$$\dot{\xi}_0 \geq -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_m), \quad \dot{\xi}_0 \geq 0,$$

также невозможно привести в начало координат, так как при любом управлении  $u \in [u_m, u_M]$  они уходят в бесконечность.

Аналогично можно показать, что и область начальных условий, удовлетворяющая неравенству

$$-\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_M) > \dot{\xi}_0,$$

не удовлетворяет требованию стабилизируемости.

Покажем теперь, что можно построить релейное управление (5.11), приводящее фазовую траекторию в начало координат из любой начальной точки в области

$$-\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_M) < \dot{\xi}_0 < -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_m). \quad (5.16)$$

С этой целью составим линию переключения

$$\dot{\xi}_s(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\mu_2}[(\xi - \bar{u}_m)^2 - \bar{u}_m^2], & \xi < 0; \\ -\sqrt{\mu_2}[(\xi - \bar{u}_M)^2 - \bar{u}_M^2], & \xi \geq 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

и синтезируем управление, приводящее любую фазовую точку из области (5.16) в начало координат:

$$u = \begin{cases} u_M, & \text{при } -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_M) < \dot{\xi} < \dot{\xi}_s; \\ u_M, & \text{при } \dot{\xi} = \dot{\xi}_s \text{ и } \dot{\xi}_s < 0; \\ u_m, & \text{при } -\sqrt{\mu_2}(\xi_0 - \bar{u}_m) > \dot{\xi} > \dot{\xi}_s; \\ u_m, & \text{при } \dot{\xi} = \dot{\xi}_s \text{ и } \dot{\xi}_s \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, система, описываемая уравнением (5.10) с постоянными ограничениями  $u_m$  и  $u_M$ , стабилизируема тогда и только тогда, когда ее фазовая точка принадлежит области (5.16).

Приведенный релейный закон управления доказывает лишь возможность стабилизации системы. Для реального управления целесообразно применять функции  $u(t)$ , не выходящие на границы области допустимых значений.

Второе уравнение системы (5.8) отличается от рассмотренного (5.10) тем, что ограничения  $u_{2m}$  и  $u_{2M}$  не постоянны, но зависят от угловой скорости  $\dot{\varphi}$ , которая подчиняется третьему уравнению (5.1). При изменении  $\dot{\varphi}$  интервал допустимых значений управляющей функции целиком смещается в ту или другую сторону в зависимости от знака  $\dot{\varphi}$ . Границы области стабилизируемости укажем для случая, когда угловая скорость маховика отсутствует. Они интересны в связи с тем, что целью управления служит приведение системы в положение равновесия при условии, что угловая скорость маховика стремится к нулю. В формулах (5.9) положим  $\dot{\varphi} = 0$ . Тогда

$$U_m = -U_M = -\frac{a_{\alpha\varphi}|c_1|u_0}{a_{\varphi\varphi}}, \quad u_{2m} = -u_{2M} = -\frac{a_{\alpha\varphi}|c_1|u_0}{a_{\varphi\varphi}}\mu_2 a_{\beta\beta}.$$

Воспользовавшись теперь неравенством (5.16) и перейдя от главных к исходным координатам, найдем область стабилизируемости системы (5.1):

$$-u_0 < a_\beta \left( \beta + \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{\mu_2}} \right) - a_\alpha \left( \alpha + \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\mu_2}} \right) < u_0, \quad (5.18)$$

где

$$a_\beta = \frac{\mu_1 R a_{\varphi\varphi}}{(\mu_2 - \mu_1) g c |c_1| a_{\alpha\varphi} a_{\beta\beta}}, \quad a_\alpha = \frac{R a_{\varphi\varphi}}{(\mu_2 - \mu_1) g c |c_1| a_{\alpha\varphi} a_{\beta\beta}^2} \left( \mu_1 a_{\alpha\beta} - \frac{g c}{R} \right).$$

## 6. Влияние погрешностей

Измерительные погрешности зависят от используемых в системе датчиков. Мы будем предполагать, что измерения производятся с помощью неподвижной телекамеры, расположенной вне робота и фиксирующей положение какого-нибудь отрезка, жестко связанного с роботом. Пусть это будет отрезок, направленный вдоль прямой  $O'B$  на рис. 1.1. Тогда в осях, связанных с роботом, концевые точки  $N_1$  и  $N_2$  этого отрезка должны иметь координаты  $(0, z'_1)$ ,  $(0, z'_2)$ ,  $z'_2 > z'_1 > 0$  соответственно. Предположив, что координаты точек  $N_1$  и  $N_2$  безошибочны и сместив начало координат в картинную плоскость телекамеры, найдем в соответствии с формулами (1.1) абсолютные координаты концов измеряемого отрезка:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - z'_1 \sin \alpha, & z_1 &= z_0 + z'_1 \cos \alpha, & y_1 &= -h, \\ x_2 &= x_0 - z'_2 \sin \alpha, & z_2 &= z_0 + z'_2 \cos \alpha, & y_2 &= -h, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $h$  — расстояние от телекамеры до плоскости движения. Картинная плоскость камеры должна быть выставлена строго параллельно плоскости движения робота. В реальности она будет установлена с ошибками, действие которых выражается матрицей малых поворотов

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -\delta_3 & \delta_2 \\ \delta_3 & 1 & -\delta_1 \\ -\delta_2 & \delta_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому изображения точек  $N_1$  и  $N_2$  на матрице телекамеры будут иметь следующие координаты соответственно

$$\begin{aligned} x''_1 &= k[x_0 - z'_1 \sin \alpha + \delta_3 h + \delta_2(z_0 + z'_1 \cos \alpha)], \\ z''_1 &= k[-\delta_2(x_0 - z'_1 \sin \alpha) - \delta_1 h + z_0 + z'_1 \cos \alpha], \\ x''_2 &= k[x_0 - z'_2 \sin \alpha + \delta_3 h + \delta_2(z_0 + z'_2 \cos \alpha)], \\ z''_2 &= k[-\delta_2(x_0 - z'_2 \sin \alpha) - \delta_1 h + z_0 + z'_2 \cos \alpha], \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $k$  — коэффициент равномерного сжатия изображения на матрице телекамеры.

Дальнейший анализ влияния погрешностей опирается на конкретный алгоритм обработки изображения. Здесь мы примем, что изображения точек  $N_1$  и  $N_2$  на матрице телекамеры идентифицированы безошибочно, и возьмем простейший алгоритм определения углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Из формул (6.2) найдем

$$\frac{x''_2 - x''_1}{z''_2 - z''_1} = \frac{-\sin \alpha + \delta_2 \cos \alpha}{\cos \alpha + \delta_2 \sin \alpha} \approx -\operatorname{tg} \alpha + \delta_2(1 - \operatorname{tg} \alpha). \quad (6.3)$$

Таким образом  $\operatorname{tg} \alpha$  будет найден с постоянной и пропорциональной ошибками, причем, как и следовало ожидать, постоянная ошибка и коэффи-

циент пропорциональности оказались равными углу поворота телекамеры вокруг перпендикуляра к плоскости движения.

Из формул (1.1) видно, что угол  $\beta$  можно будет надежно найти даже при малых углах  $\alpha$ , вычислив величину  $x_0$ . Воспользовавшись второй и третьей формулами (6.2), найдем

$$x_0 + \delta_3 h + \delta_2 z_0 = \frac{x_1'' z_2' - x_2'' z_1'}{k(z_2' - z_1')}. \quad (6.4)$$

Если полученное выражение сопоставить с первой формулой (1.1), то можно заметить, что при определении угла  $\beta$  помимо ошибок, связанных с определением угла  $\alpha$ , возникают также дополнительные постоянная и пропорциональная погрешности. Одна из них возникает из-за поворота телекамеры вокруг вертикальной оси и пропорциональна отношению расстояния от робота до телекамеры к радиусу опорного цилиндра. Другая постоянная погрешность связана с вращением телекамеры вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения. Сказанное становится наглядным, если предположить угол  $\alpha$  настолько малым, что в выражении (6.4) можно пренебречь членами второго порядка малости по  $\alpha$ . Тогда получим

$$\beta + \delta_3 \frac{h}{2R} + \delta_2 \left(1 + \frac{\beta \alpha}{2}\right) = \alpha + \frac{x_1'' z_2' - x_2'' z_1'}{2Rk(z_2' - z_1')}.$$

Формулы (6.3) и (6.4) могут быть положены в основу юстировки положения телекамеры. Однако даже после этого останутся некоторые случайные и систематические постоянные и пропорциональные погрешности в определении углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Для анализа влияния систематических погрешностей на процесс управления примем линейную структуру ошибок с постоянными коэффициентами.

$$\begin{aligned} \delta \alpha &= \delta_\alpha + \delta'_\alpha \alpha, & \delta \dot{\alpha} &= \bar{\delta}_\alpha + \bar{\delta}'_\alpha \dot{\alpha}, \\ \delta \beta &= \delta_\beta + \delta'_\beta \beta, & \delta \dot{\beta} &= \bar{\delta}_\beta + \bar{\delta}'_\beta \dot{\beta}, \\ \delta \dot{\varphi} &= \bar{\delta}_\varphi + \bar{\delta}'_\varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Выбранная структура закона регулирования такова, что пропорциональные погрешности приводят к некоторому изменению коэффициентов усиления, и если коэффициенты усиления взяты с достаточным запасом, то влияние пропорциональных погрешностей будет несущественным.

Наличие постоянных погрешностей приведет к тому, что в последнем уравнении системы (5.1) возникнет дополнительное постоянное слагаемое, и это уравнение примет вид

$$a_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} + a_{\alpha\varphi} \ddot{\alpha} = c_1 u + c_1 \delta u - c_2 \dot{\varphi}, \quad \delta u = k_1 \delta_\alpha + k_2 \bar{\delta}_\alpha + k_3 \delta_\beta + k_4 \bar{\delta}_\beta + k_5 \bar{\delta}_\varphi.$$

Тогда система (5.1) допускает частное решение

$$\dot{\varphi} = \frac{c_1 \delta u}{c_2}, \quad \alpha \equiv 0, \quad \beta \equiv 0, \quad (6.5)$$

вследствие чего регулятор обеспечит асимптотическую устойчивость равновесия по углам  $\alpha$  и  $\beta$ , а к угловой скорости маховика добавится слагаемое (6.5), компенсирующее действие постоянных составляющих ошибок. Другими словами, указанные погрешности мешают обеспечить равенство нулю угловой скорости маховика в положении равновесия. Вместе с тем величина (6.5) угловой скорости маховика может быть использована в качестве поправки к управлению для компенсации влияния погрешностей телекамеры.

## 7. Результаты расчетов

Выберем следующие численные значения параметров системы:

$$\begin{aligned} l &= 1 \text{ м}; & a &= 0,55 \text{ м}; & J_u &= 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; & J_m &= 0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ R &= 0,05 \text{ м}; & M &= 2 \text{ кг}; & c_1 &= -0,8 \text{ н} \cdot \text{м/в}; & J &= 0,297 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ m_0 &= 3 \text{ кг}; & u_0 &= 12 \text{ в}; & c_2 &= 0,76 \text{ н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; & J_0 &= 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ \gamma &= -10; & m &= 3 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Для таких параметров получим корни  $\mu_1 \approx -7,3 \text{ с}^{-2}$ ,  $\mu_2 \approx 11,5 \text{ с}^{-2}$ , а коэффициенты в формуле (5.18) оказываются равными  $a_\alpha \approx -3,6 \text{ в}$ ;  $a_\beta \approx -4,45 \text{ в}$ . В результате область управляемости линейной системы получается достаточно большой. Например, если  $\beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ , то угол  $\alpha$  вполне может быть в пределах  $-3 \div 3$  радиана, что значительно превышает диапазон его разумных значений  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ .

Для выбранных значений параметров системы критерий (4.6) выполняется. Это значит, что можно подобрать собственные значения (3.9) таким образом, чтобы обеспечить  $k_4 = 0$ . С этой целью выберем постоянные (4.7), например, следующими:

$$\bar{\lambda}_1 = -15, \quad \bar{\lambda}_2 = -16, \quad \bar{\lambda}_3 = -17, \quad \bar{\lambda}_4 = -18, \quad \bar{\lambda}_5 = -19.$$

По формуле (4.8) найдем поправочный коэффициент  $\chi \approx 0.834$ . Таким образом, переходный процесс, соответствующий условию отсутствия измерений величины  $\dot{\beta}$ , оказывается достаточно быстрым. Соответствующие коэффициенты усиления принимают значения

$$\begin{aligned} k_1 &= -0,816 * 10^5; & k_2 &= 0,101 * 10^5; & k_4 &= 0; \\ k_3 &= -0.139 * 10^5; & k_5 &= -0,337 * 10^3. \end{aligned}$$

Если отказаться от требования  $k_4 = 0$ , то процесс стабилизации можно сделать более спокойным. В частности можно, например, принять

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -1,01; \quad \lambda_3 = -1,02; \quad \lambda_4 = -1,03; \quad \lambda_5 = -1,04.$$

Таким характеристическим показателям отвечают следующие коэффициенты усиления

$$k_1 = -0,64 * 10^2; \quad k_2 = 0,449 * 10^1; \quad k_4 = 0,53; \\ k_3 = -0.144 * 10^2; \quad k_5 = -0,95.$$

Видим, что при уменьшении абсолютной величины характеристических показателей коэффициент усиления  $k_4$  возрастает не очень существенно. В то же время напряженность управления по другим координатам уменьшается весьма заметно.

## Заключение

Основные результаты исследования, выполненного в настоящей работе, состоят в следующем.

1. В работе изучены стационарные движения робота эквilibриста, комбинация которых может оказаться полезной при построении алгоритма нелинейной стабилизации робота. Для малой окрестности неустойчивого верхнего положения равновесия робота доказана полная управляемость соответствующей линейной системы и для электропривода маховика построен линейный регулятор с насыщением, обеспечивающий стабилизацию равновесия. Коэффициенты усиления регулятора оказались линейно зависящими от коэффициентов соответствующего характеристического уравнения, что облегчает задачу синтеза регулятора для различных значений параметров системы. Найден критерий, при выполнении которого размерность вектора измеряемых параметров системы может быть меньше размерности ее фазового пространства.

2. Для переменных, описывающих положение фигуры робота, найдена область стабилизируемости, возникающая из-за насыщения регулятора. Указанная область оказывается ограниченной в связи с положительностью одного из корней характеристического уравнения системы при отсутствии электропривода. Положение этой области в фазовом пространстве определяется сдвигом в зависимости от угловой скорости маховика. Границы области стабилизируемости указаны для случая, когда угловая скорость маховика отсутствует.

3. Выполнен анализ влияния погрешностей измерений положения робота-эквilibриста, выполняемых с помощью телекамеры. Учтены неточ-



ности установки телекамеры и структура возникающих из-за этого ошибок измерений. Указаны формулы для юстировки показаний. Установлено, что при наличии постоянных ошибок измерений линейный регулятор будет обеспечивать устойчивость равновесия фигуры робота, когда маховик вращается с постоянной угловой скоростью. Величина указанной угловой скорости может служить поправкой для компенсации влияния погрешностей измерений.

4. Для конкретных значений параметров системы выполнена оценка свойств линейного регулятора. Оказалось, что диапазон стабилизируемости соответствующей линейной системы в окрестности неустойчивого положения равновесия превышает размеры области, где линейное приближение правильно отражает особенности поведения порождающей нелинейной системы. Попытка уменьшить состав измеряемых параметров приводит к необходимости увеличивать характеристические показатели системы управления из-за чего увеличиваются также и коэффициенты усиления регулятора.

5. Проведенные исследования свидетельствуют о том, что для практической реализации робота-эквилибриста не требуются какие-либо недоступные в настоящее время технические средства.

## Список литературы

1. Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, Vol.52, No. 8, Part II, 1908.—p. 1-10.
2. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, т.21, вып.5, 1951.—с. 588-597.
3. Schaefer I.F., Cannon R.H. On the Control of Unstable Mechanical Systems. *IFAC*, 3d Congress, London, 1966.
4. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 288 с.
5. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., пераб. и дополн.—М.: Изд-во МГУ,2000.—719 с. ISBN 5-211-04244-1
6. Åström K.J., Block D.J., Spong M.W. The Reaction Wheel Pendulum. [www.prairienet.org/msu.](http://www.prairienet.org/msu/), 2001.—111 p.

7. Охоцимский Д.Е., Гришин А.А., Ленский А.В., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник. Известия РАН, Теория и системы управления, № 5, 2002.—с.
8. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров И.М. Оптимизация динамики управляемых систем: Учебное пособие. — М.: Изд-во МГУ, 2000. — 304 с. ISBN 5-211-04267-0
9. Голубев Ю.Ф. Механические системы с сервосвязями.—М.: Наука. ПММ, т. 65 вып.2, 2001.—с. 211-224.
10. Гориневский Д.М., Формальский А.М., Шнейдер А.Ю. Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях/ под ред. В.С.Гурфинкеля и Е.А.Девянина. — М: Физматлит, 1994.—368 с. — (Научные основы робототехники). — ISBN 5-02-014589-0