РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В.КЕЛДЫША

УДК: 519.6; 533.9

А.Н. Козлов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

МОСКВА, 2002 г.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.Н. Козлов

Препринт Института Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН

Аннотация

Представлена аналитическая модель стационарных двумерных течений в коаксиальных каналах плазменных ускорителей при наличии продольного поля. Найдено решение задачи о динамики плазмы в приближении плавного канала для двухжидкостных МГД-уравнений идеальной плазмы. Приведены примеры возникающих течений и исследованы особенности плазмодинамических процессов. Обнаружено, что с помощью продольного поля и вращения плазмы можно уменьшить влияние эффекта Холла и область анодного подпотока.

32 стр., 5 рис., библиография - 23 наименования

THE ANALYTICAL MODEL OF THE AXIALLY SYMMETRICAL FLOWS OF IDEAL TWO-COMPONENT PLASMA IN PRESENCE OF THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

A.N. Kozlov

Preprint of Keldysh Institute of Appl.Math. R.A.S.

Abstract

The analytical model of steady-state two-dimensional flows in coaxial channels of plasma accelerators is considered in presence of the longitudinal magnetic field. The solution of plasma dynamics problem is obtained in the smooth channel approximation for the two-fluid MHD-equations of ideal plasma. There are examples of the nascent flows and the peculiarities of plasma dynamic processes are investigated. The results show that the region of anodic sub-flow and Hall effect influence are decreased by the longitudinal magnetic field and plasma rotation.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований : проекты N 00-01-00395 (моделирование процессов в плазме) и N 99-07-90443 (расчеты на МВС-1000).

В в е д е н и е

Данная публикация отражает постоянный интерес автора к исследованию физических процессов в плазменных ускорителях. Плазмодинамика является одной из динамично развивающихся областей современной физики низкотемпературной плазмы. Это обусловлено, в частности, все возрастающим применением в технологии и научных, в том числе космических, исследованиях стационарных и квазистационарных плазменных ускорителей (ПУ), ионных инжекторов и импульсных ПУ.

Явление кризиса тока является наиболее существенным фактором, ограничивающим достижение больших скоростей, в таких квазистационарных ПУ, как торцевой сильноточный ускоритель (ТСУ), торцевой холловский ускоритель (ТХУ) и коаксиальный плазменный ускоритель (КПУ) с непроницаемыми, сплошными электродами. Этот и другие факторы указывают на целесообразность перехода к системам типа стационарного плазменного двигателя (СПД) и квазистационарного плазменного ускорителя (КСПУ), предложенных А.И. Морозовым [1, 2]. Большая роль в разработке ПУ отводится численному моделированию плазмодинамических процессов [3-5]. Эксперименты [6-11] в целом подтвердили идеи, на основе которых были сконструированы эти принципиально разные плазменные ускорители.

В настоящее время наиболее продвинутой и успешной разработкой является СПД, с помощью которого на протяжении последних десятилетий осуществляется коррекция орбит спутников. Несмотря на достаточно длительную историю СПД и разработку основ теории физических процессов [12], в ПУ данного типа остается целый ряд явлений, которые еще предстоит детально изучить. Поэтому наряду с экспериментами интенсивно продолжаются теоретические и численные исследования плазмодинамических процессов, происходящих в СПД, в частности, исследования пристеночной проводимости [13, 14]. Большая часть этих исследований проводится на основе кинетических уравнений, поскольку плазма в СПД является достаточно разреженной с характерной концентрацией $n \sim 10^{11}\ см^{-3}$ при скоростях $V \sim 10^{6}\ см/с$.

Энергетическое обеспечение работы СПД на спутниках осуществляется с помощью солнечных батарей. Переход к ядерным реакторам делает весьма перспективным, в том числе с точки зрения космических исследований, развитие идей, которые легли в основу КСПУ.

В экспериментах на одном из КСПУ [8] были получены рекордные потоки плотной плазмы $n \sim 10^{14} \div 10^{15}\ см^{-3}$ со скоростью ионов водорода $V \sim 4 \cdot 10^{7}\ см/с$. Теоретические и численные исследования процессов в КСПУ для плотной плазмы проводятся в рамках МГД-уравнений.

Конструктивно КСПУ является магнито-плазменным аналогом газодинамического сопла, профиль которого широко представлен в современных реактивных двигателях. Основу КСПУ составляют два профилированных электрода, между которыми по плазме протекает ток $\mathbf{j}$, создающий азимутальное магнитное поле H_{φ}, величина которого убывает по мере приближения к срезу канала. Поэтому в КСПУ реализуется смешанный вариант ускорения плазмы за счет градиента давления ∇P и амперовой силы $\frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{H}]$, которая приводит к наиболее эффективному ускорению при условии, что ток $\mathbf{j}$, протекающий по плазме между электродами, будет иметь преимущественно радиальное направление. Аналогично газодинамическому соплу в канале КСПУ реализуется трансзвуковое течение. В середине канала с минимальной площадью поперечного сечения при переходе от сужающейся к расширяющейся части ПУ происходит переход скорости потока через местную скорость, в данном случае, магнитозвуковой волны $C_S = \sqrt{C_T^{\,2} + C_A^{\,2}}$, где $C_T = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$ - газодинамическая скорость звука, $C_A = \frac{H_{\varphi}}{\sqrt{4\pi\rho}}$ - альфвеновская скорость.

Особенностями КСПУ являются наличие анодного и катодного трансформеров, а также двухступенчатая схема ускорения плазмы. Первая ступень КСПУ состоит из нескольких входных ионизационных камер (ВИК), представляющих собой КПУ со сплошными электродами. В ВИК'ах происходит ионизация, поступающего газа, и предварительный разгон рабочего вещества. Во второй ступени осуществляется окончательный разгон плазмы. Механизм ускорения плазмы в обеих ступенях один и тот же.

Ионизация газа в ВИК'ах или КПУ является весьма нетривиальным процессом. На образующемся узком фронте ионизации происходит резкое возрастание температуры, скорости и степени ионизации газа. Одновременно плотность и магнитное поле H_φ резко падают. При определенных условиях фронт ионизации - это стационарное и устойчивое образование. В то же время, как показали недавние исследования [15], в узкой области фронта наблюдается четко выраженное отклонение процесса ионизации от равновесия. Детальное описание структуры фронта ионизации возможно на основе развития теории ударных волн, ионизующих газ [16, 17].

Появление анодного и катодного трансформеров в КСПУ обусловлено необходимостью согласования электромагнитных полей в объеме плазменного потока и на поверхности электродов, что в итоге должно обеспечить перенос тока в плазме и во внешней цепи. Анодный трансформер предназначен для устранения упомянутого выше явления кризиса тока. В работе [2] приведены примеры магнитоплазменных конфигураций анодных трансформеров, которые реализованы в ряде экспериментов [8-11] .

Основам теории аксиально симметричных течений посвящены обзор [18] и монографии [1, 19], в которых представлены методы исследования плазменных потоков в разных условиях, а также анализируются важнейшие свойства этих потоков. Одним из аналитических способов описания двумерных течений плазмы с помощью стационарных МГД-уравнений является метод плавных течений, развитый в работах [20-23], где построены конкретные примеры аксиально симметриных течений двухкомпонентной плазмы, определяются профили электродов и исследуются возникающие течения в режимах электронного и ионного токопереноса.

Следует заметить, что в объеме существующих анодных трансформеров не предусмотрено ускорение плазмы вдоль канала. Поэтому подача плазмы в основной канал происходит при малых скоростях, характерных для входной части КСПУ. В этом случае образуется область анодного подпотока, на границе которой с основным потоком может возникнуть тангенциальный разрыв. Наряду с другими факторами, это может приводить к отклонению токов от преимущественно радиального направления, необходимого для эффективного ускорения. Аналитическое решение задачи о двумерном течении плазмы в анодном подпотоке в канале медленно меняющегося сечения найдено в [22], где исследована возможность плавного соединения анодного подпотока с основным потоком ПУ.

Новые возможности в исследовании течений плазмы, в том числе при согласовании анодного подпотока и потока плазмы в основном канале КСПУ, открываются при наличии продольного магнитного поля $\left(H_z >> H_r\right)$, влияние которого можно исследовать наряду с азимутальным полем H_φ, традиционно участвовавшим в большинстве прежних аналитических и численных моделей. Возникновение продольного поля в плазменном объеме ПУ может быть обусловлено, например, токами во внешних катушках.

В данной работе найдено решение задачи о двумерном аксиально симметричном течении двухкомпонентной плазмы в присутствии продольного поля. Продольное поле естественным образом усложняет модель осесимметричного течения, например, приводит к вращению ионной и электронной компонент плазмы вокруг оси системы. Полученное решение позволило проанализировать важнейшие свойства двухкомпонентных плазменных потоков при наличии продольного поля. В частности, обнаружено, что с помощью продольного поля и возникающего вращения можно уменьшить область анодного подпотока и влияние эффекта Холла.

1. Уравнения для функций потока и законы сохранения

При аналитическом описании аксиально симметричных течений плазмы будем исходить из стационарных уравнений идеальной двухжидкостной магнитной гидродинамики. Если пренебречь инерцией электронов, током смещения и, как следствие, считать плазму квазинейтральной $n_i = n_e = n = \rho$, то эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$div\ \rho \mathbf{V}_i = 0 \quad (а) \quad ; \qquad div\ \rho \mathbf{V}_e = 0 \quad (б) \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\mathbf{V}_i \nabla\right)\mathbf{V}_i = -\nabla P_i + \frac{\rho}{\xi}\left(\mathbf{E} + \left[\mathbf{V}_i\, \mathbf{H}\right]\right) \tag{1.2}$$

$$0 = -\nabla P_e - \frac{\rho}{\xi}\left(\mathbf{E} + \left[\mathbf{V}_e\, \mathbf{H}\right]\right) \tag{1.3}$$

$$rot\ \mathbf{H} = \mathbf{j} = \frac{\rho}{\xi}\left(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e\right) \quad (а)\ ; \qquad div\ \mathbf{H} = 0 \quad (б) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \tag{1.5}$$

Здесь и далее пренебрегаем массой электронов по сравнению с массой ионов. Вместо уравнения энергии предполагается изэнтропичность обеих компонент

$$S_i = \frac{P_i}{\rho^\gamma} = const \quad ; \qquad S_e = \frac{P_e}{\rho^\gamma} = const$$

Данная система уравнений для электромагнитного поля, плотности ρ и скоростей $\mathbf{V}_i$, $\mathbf{V}_e$ соответственно ионной и электронной компонент плазмы записана в безразмерной форме [20] . В качестве исходных размерных единиц выступают характерные на входе в канал значения концентрации n_o $\left(\rho_o = m_i\, n_o\right)$, температуры $T_o = T_o^i + T_o^e$, длины канала плазменного ускорителя либо его части L, а также напряженности азимутальной составляющей магнитного поля H_o , связанной с разрядным током в системе J_p соотношением $H_o = \dfrac{2\,J_p}{c\,R_a}$, где R_a- характерный радиус на входе. С помощью перечисленных величин формируются единицы : скорости –

альфвеновская скорость $V_o = \dfrac{H_o}{\sqrt{4\pi\,\rho_o}}$; времени - ’’пролетное” время $t_o = \dfrac{L}{V_o}$;

давления – характерное значение магнитного давления $\dfrac{H_o^{\;2}}{4\pi}$, а также

единицы напряженности электрического поля - $E_o = \dfrac{1}{c} H_o\, V_o$ и плотности

тока - $j_o = \dfrac{c\,H_o}{4\,\pi\,L}$. Связь исходных размерных величин с безразмерными параметрами, участвующими в уравнениях (1.1)-(1.5), определяется следующим образом: $\xi = \dfrac{c}{e\,L}\sqrt{\dfrac{m_i}{4\,\pi\,n_o}}$ - локальный параметр обмена, характеризующий роль эффекта Холла в двухжидкостной модели; $\beta = \dfrac{8\,\pi\,P_o}{H_o^{\;2}}$ - отношение газового и магнитного давлений на входе, где $P_o = P_o^i + P_o^e = k\,n_o\,T_o$.

В случае аксиальной симметрии течения уравнения (1.1-а, б) и (1.4-б) позволяют ввести функции потока ψ_i , ψ_e и ψ такие, что

$$r\,\rho\left(V_r\right)_{i\,,\,e} = -\frac{\partial\,\psi_{i\,,\,e}}{\partial\ z}\ ; \qquad r\,\rho\left(V_z\right)_{i\,,\,e} = \frac{\partial\,\psi_{i\,,\,e}}{\partial\ r} \tag{1.6}$$

$$r\,H_r = -\frac{\partial\,\psi}{\partial\ z}\ ; \qquad r\,H_z = \frac{\partial\,\psi}{\partial\ r}\ , \tag{1.7}$$

и тем самым тождественно удовлетворить уравнения непрерывности.

Следуя работе [18] , систему уравнений (1.1) – (1.5) несложно частично проинтегрировать и переписать в форме законов сохранения. Для этого введем функции Бернулли

$$U_i = \frac{1}{2} V_i^{\,2} + W_i + \frac{1}{\xi}\,\Phi\ ; \qquad U_e = W_e - \frac{1}{\xi}\,\Phi \tag{1.8}$$

где с учетом изэнтропичности и термодинамического соотношения $\nabla\,P/\rho = \nabla\,W - T\,\nabla\,S$ энтальпии компонент $W_{i\,,\,e} = \int \dfrac{d\ P_{i\,,\,e}}{\rho}$ являются известными функциями плотности. Нетрудно показать, что $U_i = U_i(\psi_i)$ и $U_e = U_e(\psi_e)$, т.е. полная энергия ионов и электронов сохраняется вдоль их траекторий движения. Введя моменты

$$D_i = \psi + \xi\, r\, V_\varphi^{\ i} \quad ; \qquad D_e = \psi \quad , \tag{1.9}$$

приходим к следующим законам сохранения: $D_i = D_i(\psi_i)$, $D_e = D_e(\psi_e)$.

В результате преобразований получим систему механических уравнений:

$$U_i(\psi_i) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r\,\rho}\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\,\rho}\frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right)^2 + \left(V_\varphi^{\ i}\right)^2\right] + W_i + \frac{1}{\xi}\Phi \tag{1.10}$$

$$U_e(\psi_e) = W_e - \frac{1}{\xi}\Phi \tag{1.11}$$

$$D_i(\psi_i) = \psi + \xi\, r\, V_\varphi^{\ i} \ \text{(а)} \quad ; \qquad D_e(\psi_e) = \psi \ \text{(б)} \tag{1.12}$$

$$\frac{\xi}{r\,\rho}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r\,\rho}\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\,\rho}\frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right)\right] - \frac{H_\varphi}{r\,\rho} + \frac{V_\varphi^{\ i}\, D_i^{\ I}}{r} = \xi\ U_i^{\ I} \tag{1.13}$$

$$-\frac{H_\varphi}{r\,\rho} + \frac{V_\varphi^{\ e}\, D_e^{\ I}}{r} = -\xi\ U_e^{\ I} \quad , \tag{1.14}$$

где $U^I_{i,e} = \dfrac{d\,U_{i,e}}{d\ \psi_{i,e}}$; $D^I_{i,e} = \dfrac{d\,D_{i,e}}{d\ \psi_{i,e}}$.

Эти уравнения следует дополнить уравнениями Максвелла. С учетом (1.6) и (1.7) φ - и r (или z) - компоненты уравнения (1.4-а) приводят к соотношениям:

$$r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{r\,\rho}{\xi}\left(V_\varphi^{\ i} - V_\varphi^{\ e}\right) \tag{1.15}$$

$$\xi\, r\, H_\varphi = \psi_i - \psi_e \tag{1.16}$$

Уравнения (1.10) – (1.16) для 8-ми неизвестных ψ, ψ_i, ψ_e, ρ, $V_\varphi^{\ i}$, $V_\varphi^{\ e}$, H_φ, Φ содержат четыре функции $U_i(\psi_i)$, $U_e(\psi_e)$, $D_i(\psi_i)$, $D_e(\psi_e)$, которые можно задать произвольно.

Данная система уравнений, с точностью до обезразмеривания и пренебрежения массой электронов по сравнению с массой ионов, аналогична системе уравнений, полученной в обзоре [18] . В настоящей работе будет найдено решение этой системы уравнений в общем случае при наличии продольного магнитного поля и возможного вращения плазмы.

В отсутствии продольного поля и вращения исходная система уравнений для двухкомпонентной плазмы также, как в одножидкостном приближении, сводится к квадратурам в двух известных случаях : а) холодной плазмы $W=0$ и б) изомагнитного течения $U_e{}^I(\psi_e)=const$. Проведенные исследования в изомагнитном случае [20-22] при $\beta \neq 0$ позволяют, в частности, анализировать течения с выходом на ось системы и показали слабую зависимость от безразмерного параметра β в объеме канала при $r \neq 0$. Заметим, что в плазменных ускорителях магнитное давление существенно больше газового $\beta << 1$. Поэтому в изомагнитных течениях, не выходящих на ось системы, оправдан переход к $\beta = 0$ или холодной плазме.

В общем случае при наличии продольного поля и вращения компонент плазмы аналитическое решение осесимметричной задачи будет получено на основе тех же предположений об изомагнитности течения холодной плазмы. Для изомагнитных течений функция $U_e(\psi_e)$ задается в виде

$$U_e = k\,\psi_e \tag{1.17}$$

где $k = U_e{}^I = const$. При этом параметр ''вмороженности'' $\dfrac{H_\varphi}{r\,\rho}$ не зависит от траектории $\psi_e = const$ согласно (1.14) при $V_\varphi{}^e = 0$. Кроме того, будем предполагать, что течение изобернуллиево. Иными словами, интеграл Бернулли справедлив во всем объеме потока и не зависит от траектории. Это означает, что функция $U_i(\psi_i)$ задается следующим образом

$$U_i = U_o - k\,\psi_i \tag{1.18}$$

Действительно, сложив уравнения (1.10), (1.11) и исключив тем самым потенциал Φ, с учетом (1.16) и (1.6) запишем интеграл Бернулли в форме

$$\frac{1}{2}V_i^2 + W + \xi\, k\, r\, H_\varphi = U_o \qquad (1.19)$$

Здесь $W = W_i + W_e$ и $U_o = const$.

Из соотношения (1.19) после несложных преобразований с помощью (1.14), где $D_e^{\,I} = \dfrac{H_z}{\rho V_z^{\,e}}$ согласно (1.6),(1.7) и (1.12-б), вытекает

$$\frac{1}{2}V_i^2 + W + \frac{H_\varphi^{\;2}}{\rho} - \frac{H_z\, H_\varphi\, V_\varphi^{\;e}}{\rho\;\; V_z^{\;e}} = U_o$$

Такой вид имеет уравнение Бернулли при наличии продольного поля в одножидкостном случае, когда $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$. В отсутствии продольного поля $H_z = 0$ уравнение Бернулли принимает обычный вид

$$\frac{1}{2}V^{\,2} + \int\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{H_\varphi^{\;2}}{\rho} = U_o$$

2. Уравнения для плавных течений.

Рассмотрим “плавные” течения, когда площадь сечения канала медленно меняется вдоль оси и имеет место слабая зависимость от координаты z. Пусть искомые функции имеют вид $f(r, \varepsilon z)$, где ε - малый параметр. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial z} \sim \varepsilon$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \sim \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sim \varepsilon^2$. Система уравнений (1.10) – (1.16) не содержит членов, линейных относительно $\dfrac{\partial}{\partial z}$. Пренебрегая в уравнениях членами , квадратичными по ε , можно избавиться от производных по z и получить фактически систему обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих производные только по r .

Преобразуем уравнения (1.10) – (1.16) с учетом “плавности течения”, отбросив в них члены, содержащие производные по z.Кроме того, исключим из уравнений скорость электронов $V_\varphi{}^e$, которая согласно (1.15) равна

$$V_\varphi{}^e = V_\varphi{}^i + \frac{\xi}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \tag{2.1}$$

Комбинируя полученные соотношения, придем в результате к следующим уравнениям для 6-ти неизвестных ψ, ψ_i, ψ_e, ρ, $V_\varphi{}^i$, H_φ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\,\rho}\,\frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(V_\varphi{}^i\right)^2 + W + \xi\,k\,r\,H_\varphi = U_o \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(V_\varphi{}^i\right)^2 + \frac{1}{r\,\rho}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{H_\varphi}{r\,\rho}\,\frac{\partial\, r\,H_\varphi}{\partial r} = 0 \tag{2.3}$$

$$\left(V_\varphi{}^i + \frac{\xi}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\right) D_e{}^I = \frac{H_\varphi}{\rho} - \xi\,k\,r \tag{2.4}$$

Эти соотношения необходимо дополнить уравнениями (1.12-а) и (1.12-б), в которых согласно (1.16) $\psi_e = \psi_i - \xi\,r\,H_\varphi$. Функции $D_i(\psi_i)$, $D_e(\psi_e)$ в (1.12) будут заданы в соответствии с логикой дальнейших построений, используя значения переменных на входе в канал ПУ.

Можно считать, что уравнение (2.3) заменяет (1.13) в приближении плавного течения. Полученная таким образом система оказывается более удобной. Заметим также, что уравнение (2.3) можно представить как уравнение радиального равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{H_\varphi{}^2}{2} + \frac{H_z{}^2}{2}\right) = \frac{\rho\left(V_\varphi{}^i\right)^2}{r} - \frac{H_\varphi{}^2}{r} \quad ,$$

что непосредственно следует из определения энтальпии и соотношений (1.7).

В данной работе исследуется динамики двухкомпонентной плазмы в промежутке между электродами при $r \neq 0$ с целью изучить возможность правильной организации плазменных потоков внутри канала ускорителя. В связи с этим и в силу изложенных выше факторов допустимо дальнейшее упрощение анализа изомагнитных течений на случай холодной плазмы, когда $\beta = 0$ $(W = 0)$. Течения с выходом на ось системы $r = 0$, которые можно рассмотреть при $\beta \neq 0$, в данном случае не представляют интереса.

Исследование влияния продольного магнитного поля на осесимметричные течения плазмы проведем на основе сравнения с аналогичными течениями в отсутствии продольного поля.

3. Динамика плазмы в отсутствии продольного магнитного поля.

Рассмотрим конкретный пример течения плазмы при условии, что продольное магнитное поле отсутствует. В этом случае $\psi = 0$ и для не вращающейся плазмы $V_\varphi^{\,i} = V_\varphi^{\,e} = 0$ система уравнений (2.2)-(2.4) и (1.12) упрощается, поскольку исчезают соответствующие моменты: $D_i = 0$ и $D_e = 0$. Уравнения (2.3) и (2.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r\,\rho}\frac{\partial\, r\, H_\varphi}{\partial r} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{H_\varphi}{r\,\rho} = \xi\, k \tag{3.2}$$

Заметим, что в предшествующих исследованиях уравнение (3.1) было получено в результате преобразований упрощенной системы уравнений в отсутствии продольного магнитного поля. В данном случае видно, что это соотношение является следствием более общего уравнения (2.3).

Энтальпия в случае идеальной плазмы равна $W(\rho) = \dfrac{\gamma\,\beta\,\rho^{\gamma-1}}{2(\gamma-1)}$. При показателе адиабаты $\gamma = 2$ вместо $\gamma = 5/3$, что общепринято для плазмы, имеем линейную зависимость $W(\rho) = \beta\,\rho$. Это упрощающие предположение было использовано в работах [20-22] в случае $\beta \neq 0$.

Для холодной плазмы $\beta = 0$ из уравнений (3.1), (3.2) получим

$$H_\varphi(z, r) = \frac{C_1(z)}{\xi\, k\, r}\ ; \qquad \rho(z, r) = \frac{C_1(z)}{\xi^2\, k^2\, r^2}\ , \tag{3.3}$$

где постоянная интегрирования $C_1(z)$ может быть произвольной медленно меняющейся функцией от z. Данные зависимости плотности и поля от координат содержат особенность при $r \to 0$, что не имеет принципиального значения для течений в промежутке между электродами при $r \neq 0$.

Согласно (3.2) параметр вмороженности равен $\dfrac{H_\varphi}{r\,\rho} = \xi\, k = \dfrac{s}{r_o}$, где r_o - радиус точки на входе в канал, в которой $\left|H_\varphi\right| = 1$ и $\rho = 1$; $s = \pm 1$ в зависимости от полярности центрального электрода. Из (2.2) следует

$$\frac{1}{2}\left(V_z{}^i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\,\rho}\frac{\partial \psi_i}{\partial r}\right)^2 = U_o - C_1(z) = \frac{1}{2}V_o{}^2(z) \quad , \tag{3.4}$$

т.е. продольная скорость $V_z{}^i$ не зависит от r в рассматриваемом приближении. Константу Бернулли U_o удобно определить с помощью (2.2) на входе в точке $z = 0$, $r = r_o$: $U_o = \dfrac{1}{2}V_o{}^2(0) + 1$.

Проинтегрировав уравнение (3.4) с учетом (3.3), найдем

$$\psi_i(z,r) = r_o{}^2\, V_o(z)\, C_1(z) \ln(r) + C_2(z) \quad , \tag{3.5}$$

где $C_2(z)$ - вторая произвольная "плавная" функция от z . Остальные функции ψ_e и Φ легко находятся из уравнений (1.16) и (1.11) при $W_e = 0$

$$\Phi(z,r) = \xi\, C_1(z) - s\, r_o\, V_o(z) C_1(z) \ln(r) - \frac{s}{r_o} C_2(z) \tag{3.6}$$

Динамика плазмы в ПУ рассматривается в разных режимах токопереноса. В режиме электронного токопереноса траектории ионной компоненты плазмы $\psi_i = const$ лежат на поверхности непроницаемых электродов: катода $r_k(z)$ и анода $r_a(z)$. При этом, электроды оказываются не эквипотенциальными. Наоборот, в режиме ионного токопереноса электроды представляют собой эквипотенциальные поверхности. В этом случае они должны быть прозрачными для плазмы, поступающей сквозь них в канал. В настоящее время в основе большинства экспериментов [8-11] и соответственно моделей [4, 5, 20-23] лежит ионный токоперенос.

Окончательный выбор функций $C_1(z)$ и $C_2(z)$ в соотношениях (3.3) - (3.6) производится в зависимости от конкретных деталей постановки задачи. Например, можно задать профили электродов $r_k(z)$, $r_a(z)$ и потребовать, чтобы они были непроницаемыми для ионов ($\psi_i = const$) или сделать их эквипотенциальными ($\Phi = const$). Любое из этих условий однозначно определяет функции $C_1(z)$, $C_2(z)$ и позволяет исследовать динамику плазмы в промежутке между заданными электродами.

Другой способ, более простой и логичный в задачах об ускорении плазмы, состоит в том, что задаются форма одного из электродов и ионная скорость $V_z{}^i = V_o(z)$, которая согласно (3.4) не зависит от радиуса r. В этом случае $C_1(z) = U_o - \frac{1}{2} V_o{}^2(z)$. Далее требуется, чтобы электроды были линиями уровня одной из функций ψ_i или Φ в зависимости от режима токопереноса. Этот способ реализован в работах [20-21] в двух режимах.

В данной работе приведем пример течения холодной плазмы в режиме ионного токопереноса. Предположим, что задан профиль анода, т.е. $r_a(z)$ - известная функция. В экспериментах, как правило, анод – это внешний электрод, выполненный в виде стержней $r_a(z) = const$. В режиме ионного токопереноса электроды, в частности, анод $r = r_a(z)$, являются эквипотенциалями. Потенциал анода без ограничения общности можно считать равным нулю $\Phi(z, r = r_a(z)) = 0$. Определив с помощью этого соотношения функцию $C_2(z)$ в (3.6), окончательно получим

$$\Phi(z, r) = -s\, r_o\, V_o(z) C_1(z) \ln\left(\frac{r}{r_a(z)} \right) \tag{3.7}$$

$$\psi_e(z, r) = -s\, r_o\, \Phi(z, r) \tag{3.8}$$

$$\psi_i(z, r) = \psi_e(z, r) + s\, \xi \frac{r^2}{r_o} \rho(z, r) \tag{3.9}$$

Таким образом, считая заданными функцию $V_o(z)$ и форму одного из электродов, например, анода $r_a(z)=r_o=const$, можно определить форму второго электрода и исследовать возникающее течение. На рис. 1 представлен соответствующий пример. Здесь изображены: **а** – эквипотенциали, **б** – электрический ток $\mathbf{j}$ (линии уровня функции $r\,H_\varphi$), **в** – линии уровня функции ψ_i или ионные траектории ($\psi_i=const$), **г** – векторное поле скоростей ионной компоненты $\mathbf{V}_i=\left(V_z{}^i, V_r{}^i\right)$, **д** – двумерное распределение плотности или линии уровня функции $\rho(z,r)$, а также векторное поле скоростей электронной компоненты плазмы $\mathbf{V}_e=\left(V_z{}^e, V_r{}^e\right)$. Электронные траектории ($\psi_e=const$), как это следует из (3.8), совпадают с эквипотенциалями. В данном варианте течения двухкомпонентной плазмы функция $V_o(z)$ задана отрезком синусоиды и монотонно возрастает от значения $V_o(0)$ на входе в канал до значения $V_o(1)$ на выходе с коэффициентом ускорения $K=\dfrac{V_o(1)}{V_o(0)}$. На рис. 1-г и 1-д длина векторов (в сантиметрах) равна безразмерному значению скорости в данной точке.

Рисунку 1 отвечают значения безразмерных параметров $\beta=0$; $\xi=0.02$; $K=10$ и, например, следующий набор соответствующих размерных параметров задачи : $m_i=2.5\,m_p$; скорость плазмы на выходе из ускорителя - $V_{Z=1}=V_o(1)\cdot V_o=1.5\cdot 10^8\ см/с$; единица скорости - $V_o=1.1\cdot 10^8\ см/с$; длина канала - $L=60\ см$; радиус анода - $R_a=25\ см$ (характерный безразмерный радиус - $r_o=\dfrac{R_a}{L}=0.41$) ; радиус диверторного отверстия или радиус катода на выходе из канала - $R_d=r_k(1)\cdot L=6\ см$; разрядный ток в системе - $J_p=3\ Ма$; расход вещества $\tilde{m}\,(г/с)$, выраженный в эквивалентных токовых единицах, - $J_{\tilde{m}}=\dfrac{e}{m_i}\tilde{m}=10\ Ма$; характерная концентрация плазмы на ходе - $n_o = 0.9 \cdot 10^{15}$ $см^{-3}$, единица магнитного поля - $H_o = 2.4 \cdot 10^4$ *Эрстед*; единица потенциала - $\Phi_o = 2.65 \cdot 10^4$ *Вольт*. В этом примере потенциал катода в безразмерных единицах равен $\varPhi_k = \varPhi_k^1 = -0.066$

Важной характеристикой течений плазмы является интегральный параметр обмена $\xi_{\Sigma} = \dfrac{J_p}{J_{\tilde{m}}}$, который в данном случае равен $\xi_{\Sigma} = 0.3$.

Пунктиром на рис. 1-в изображена ионная траектория, берущая свое начало с анода при $z = 0$. Эта кривая $r = r^*(z)$ является границей раздела основного потока и анодного подпотока, втекающего в основной канал со стороны анода. Значения функции $r^*(z)$ при любом z вычисляются с помощью уравнения $\psi_i\left(z, r = r^*(z)\right) = \psi_i^*$, где $\psi_i^* = s\, \xi\, r_o$ согласно (3.9). Электронные траектории совпадают с эквипотенцалями, в том числе с поверхностью анода $r = r_a(z) = r_o$. Кривые $r = r_o$ и $r = r^*(z)$ можно рассматривать соответственно как электронную и ионную траектории, начинающиеся в общей точке $z = 0$, $r = r_o$. Расхождение этих траекторий за счет эффекта Холла определяет область анодного подпотока.

В средней части канала скорость потока переходит через местную скорость магнитозвуковой волны, т.е. через скорость сигнала $C_S = \sqrt{C_T{}^2 + C_A{}^2}$. Этому переходу соответствует пунктир на рис. 1-а .

На рис. 2 сплошной кривой представлен график зависимости плотности ρ от z на аноде при $r = r_o$. Эта функция в данном случае характеризует подачу плазмы через прозрачный эквипотенциальный анод для течения в режиме ионного токопереноса и в отсутствии продольного магнитного поля .

4. Постановка задачи при наличии продольного магнитного поля.

Исследуем влияние продольного магнитного поля на аксиально симметричные течения плазмы в канале ПУ. В качестве основы возьмем построенный в предыдущем разделе пример течения холодной плазмы.

В дальнейшем будем считать, что геометрия канала, определяемая профилями электродов $r_k(z)$ и $r_a(z)$, задана и соответствует возможности трансзвукового течения, изображенного на рис. 1 . Значения параметров плазмы на входе в канал также известны и отвечают, например, найденным величинам в отсутствии продольного поля и вращения плазмы.

Аналогично рассмотренному выше случаю предположим, что внешний электрод является анодом. На входе в соответствии с найденным в предыдущем разделе решением имеем при $z=0$: $V_\varphi{}^i = V_\varphi{}^e = 0$, $r\,H_\varphi = -r_o = const$. Тогда из (2.3) при $W=0$ следует, что $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0$

или

$$H_z(z=0,r)=\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}=H_z^o=const \tag{4.1}$$

Проинтегрировав (4.1), получим

$$\psi(z=0,\ r)=\frac{1}{2}\,H_z^o\,r^2 \quad , \tag{4.2}$$

где H_z^o - величина продольного поля на входе в канал, не зависящая от r .

Форма обоих электродов известна, в частности, $r_a(z)=r_o=const$. Поэтому в силу (3.8) и (3.7) имеем

$$\psi_e(z=0,r)=C_o\,r_o{}^2\ \ln\left(\frac{r}{r_o}\right) \quad , \tag{4.3}$$

где $C_o = V_o(0)C_1(0) = V_o(0)$. Исключая переменную r в соотношениях (4.2) и (4.3), найдем функцию $D_e(\psi_e)$ в (1.12-б) при $z=0$

$$D_e(\psi_e(z=0,\ r))=\psi(z=0,\ r)=\frac{1}{2}\,H_z^o\,r_o{}^2\,\exp\left(\frac{2\,\psi_e(z=0,\ r)}{C_o\,r_o{}^2}\right) \tag{4.4}$$

Далее вычислим функцию $D_i(\psi_i)$ на входе. Согласно (1.12–а) и (1.16) имеем

$$D_i(\psi_i(z=0,\ r))=\psi(z=0,\ r)\ ; \qquad \psi_i(z=0,r)=-\xi\,r_o+C_o\,r_o{}^2\ \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$$

Опять же исключив из последнего соотношения и (4.2) переменную r, можно записать функцию $D_i(\psi_i)$ при $z=0$ в виде

$$D_i(\psi_i(z=0,\ r)) = \frac{1}{2} H_z^o\, r_o^{\,2} \exp\left(\frac{2\,(\psi_i(z=0,\ r) + \xi\, r_o)}{C_o\, r_o^{\,2}} \right) \qquad (4.5)$$

Как видно, с помощью параметров плазмы на входе не сложно определить при $z=0$ интегральные моменты D_i и D_e только как функции соответственно ψ_i и ψ_e. Задав функции $D_i(\psi_i)$ и $D_e(\psi_e)$ на входе, тем самым зададим эти функции во всем объеме канала ускорителя.

Таким образом, в рассматриваемом случае течения двухкомпонентной плазмы согласно (4.4) и (4.5) в любой точке канала имеем

$$D_e(\psi_e) = \psi = \frac{1}{2} H_z^o\, r_o^{\,2} \exp\left(\frac{2\,\psi_e}{C_o\, r_o^{\,2}} \right) \qquad (4.6)$$

$$D_i(\psi_i) = \psi + \xi\, r\, V_\varphi^{\,i} = \frac{1}{2} H_z^o\, r_o^{\,2} \exp\left(\frac{2\,(\psi_i + \xi\, r_o)}{C_o\, r_o^{\,2}} \right) \qquad (4.7)$$

Заметим, что соотношение (4.6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями ψ и ψ_e так, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = D_e^{\,I}\, \frac{\partial \psi_e}{\partial r} \;; \qquad\qquad D_e^{\,I} = \frac{2\,\psi}{C_o\, r_o^{\,2}} \qquad (4.8)$$

В свою очередь соотношение (4.7) с учетом (1.16) и (4.6) позволяет определить $V_\varphi^{\,i}$ как функцию ψ и H_φ

$$V_\varphi^{\,i} = \frac{\psi}{\xi\, r} \left[\exp\left(\frac{2\,\xi\,(r\, H_\varphi + r_o)}{C_o\, r_o^{\,2}} \right) - 1 \right] \qquad (4.9)$$

Найденные зависимости (4.6) и (4.9) уменьшают на две единицы число независимых функций.

Теперь обратимся к системе дифференциальных уравнений (2.2)–(2.4), которую необходимо дополнить соотношениями (1.16) и (4.6), (4.9) вместо (1.12-а, б). Преобразуем эту систему, исключив плотность ρ и функцию потока ψ_i. В результате из 6-ти останется две независимые функции H_φ и ψ (или ψ_e с учетом взаимно однозначного соответствия между ними (4.6)).

Комбинируя указанные соотношения, после несложных преобразований придем к уравнениям

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{D_e{}^I}{A_1}\left(H_\varphi A_2 - \xi \left(V_\varphi{}^i\right)^2 \right) \tag{4.10}$$

$$A_2 D_e{}^I \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + A_1 \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} = \left(V_\varphi{}^i\right)^2 \quad , \tag{4.11}$$

где $A_1 = V_\varphi{}^i D_e{}^I + \xi k r$; $A_2 = r\left(2U_o - \left(V_\varphi{}^i\right)^2 - 2\xi k r H_\varphi \right)^{\frac{1}{2}}$.

Эти уравнения содержат только две независимые функции ψ , H_φ и производные от них. Предполагается , что продольное магнитное поле имеет такие значения, при которых $A_1 \neq 0$.

Дальнейшие преобразования связаны с возможностью получить систему дифференциальных уравнений первого порядка. Но прежде заметим, что в силу (1.17) и (1.11) при $W_e = 0$ функция потока ψ_e связана с потенциалом Ф простой линейной зависимостью

$$\psi_e = -\frac{1}{\xi k} \Phi \tag{4.12}$$

Поскольку разность потенциалов между электродами является величиной, легко определяемой в экспериментах, можно считать, что потенциалы электродов известны. В связи с этим для последующей постановки граничных условий удобно перейти от переменной ψ к ψ_e с учетом (4.6) .

Следует также напомнить, что в силу выбранной полярности электродов в уравнениях (4.10)-(4.11) параметр ’’вмороженности’’ равен $\xi k = -1 / r_o$.

Продифференцировав по r уравнение (4.10), подставив результат в (4.11) и перейдя затем от переменной ψ к ψ_e , получим в итоге систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial r} = F_1\left(r,\ \psi_e\ , H_\varphi\right) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} = F_2\left(r,\ \psi_e\ , H_\varphi\right) \quad , \tag{4.14}$$

где $\quad F_1 = C_o\, r_o^{\,2}\, \theta_4\ ; \qquad F_2 = \dfrac{\theta_6}{\theta_7}\ ; \qquad \theta_1 = \left(2U_o - \left(V_\varphi^{\,i}\right)^2 + \dfrac{2}{r_o} r H_\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\ ;$

$$\theta_2 = r H_\varphi \theta_1 - \xi \left(V_\varphi^{\,i}\right)^2; \quad \theta_3 = 2\psi V_\varphi^{\,i} - C_o\, r_o\, r\ ; \quad \theta_4 = \frac{\theta_2}{\theta_3}\ ; \quad \theta_5 = 2\,\xi + \frac{r H_\varphi}{\theta_1}\ ;$$

$$\theta_6 = C_o\, r_o^{\,2} \left(V_\varphi^{\,i}\right)^2 \frac{\theta_3}{\theta_1} + 4\theta_4\, \psi^2 \left[8\psi\, V_\varphi^{\,i} \theta_4 - 2C_o\, r_o - 2\theta_2 + \left(2 - \frac{1}{r\,\theta_4}\right)\theta_5 \left(V_\varphi^{\,i}\right)^2\right];$$

$$\theta_7 = \frac{\theta_3^{\,2}}{\theta_1} + 4\psi^2 \left[\theta_1 + \frac{r H\varphi}{r_o\,\theta_1} - \frac{2D_i}{C_o\, r_o^{\,2}\, r}\left(2\psi\,\theta_4 + \theta_5\, V_\varphi^{\,i}\right)\right] \quad .$$

Здесь функции $\psi(\psi_e)$, $V_\varphi^{\,i}\left(r, \psi_e, H_\varphi\right)$ и $D_i\left(r, \psi_e, H_\varphi\right)$ определяются с помощью соотношений (4.6), (4.7) и (4.9) .

Анализ дифференциальных уравнений (4.13) и (4.14) показывает, что в предельном случае $H_z^o \to 0$ или $\psi \to 0$ осуществляется переход к рассмотренному ранее течению двухкомпонентной плазмы при $H_z^o = 0$.

При $H_z^o \neq 0$ окончательная постановка задачи возможна на основе информации о величинах ψ_e и H_φ на границах канала при $r = r_a(z)$ и $r = r_k(z)$. Относительно азимутального магнитного поля H_φ нельзя сказать что-либо определенное, не решив задачи. Однако известны значения потенциалов на электродах, подключенных к электрической цепи, т.е.

$$\Phi\left(z, r = r_a(z)\right) = \Phi_a \quad ; \qquad \Phi\left(z, r = r_k(z)\right) = \Phi_k \quad , \tag{4.15}$$

где Φ_a и Φ_k - потенциалы соответственно анода и катода. Не нарушая общности постановки задачи, потенциал анода можно считать равным нулю $\Phi_a = 0$. Это условие было использовано выше в примере, изображенном на рис. 1, где $\Phi_k = \Phi_k^1$. Зная потенциалы электродов, с помощью (4.12) легко определить значения функции потока электронов ψ_e на границах

$$\psi_e\big(z, r = r_a(z)\big) = \psi_e^{\,a} \quad ; \qquad \psi_e\big(z, r = r_k(z)\big) = \psi_e^{\,k} \ , \tag{4.16}$$

где $\psi_e^{\,a} = 0$, $\psi_e^{\,k} = r_o\,\Phi_k$.

Таким образом, полная постановка задачи для системы дифференциальных уравнений (4.13), (4.14) включает граничные условия, например, в виде (4.16). Основными параметрами задачи, помимо значений потенциалов катода Φ_k и анода Φ_a или соответственно значений $\psi_e^{\,k}$ и $\psi_e^{\,a}$ на электродах с заданными профилями $r = r_k(z)$ и $r = r_a(z)$, являются параметр обмена ξ и значение продольного магнитного поля на входе H_z^o .

Кроме того, в уравнениях фигурирует константа C_o или значение скорости плазмы на входе в канал, т.к. $C_o = V_o(0)$ согласно (4.3). Исследование влияния продольного магнитного поля $H_z^o \neq 0$ проводится при условии, что поступающая в канал ускорителя плазма имеет на входе при $z = 0$ известные распределения плотности, скорости и других величин, которые взяты, для определенности, в соответствии с решением, рассмотренным в предыдущем разделе при $H_z^o = 0$. В этом случае существует простая связь между скоростью плазмы на входе $V_o(0)$ или константой C_o и разностью потенциалов между электродами или потенциалом катода Φ_k ($\Phi_a = 0$) . С учетом (4.3) и (4.12) имеем

$$\Phi_k = C_o\, r_o \ln\left(\frac{r_k(0)}{r_o}\right) \tag{4.17}$$

Это позволяет определить C_o при известном потенциале катода Φ_k .

5. Течения плазмы при наличии продольного магнитного поля.

Решение поставленной задачи основано на использовании любого из множества известных численных алгоритмов расчета системы дифференциальных уравнений первого порядка при заданных начальных данных. Величина H_φ на границах не известна. Поэтому при любом z для известной величины $\psi_e(z, r = r_k(z)) = \psi_e^k$ на катоде в процессе расчетов реализован поиск тех значений $r\,H_\varphi(z, r = r_k(z))$, для которых на аноде удовлетворяется соотношение $\psi_e(z, r = r_a(z)) = \psi_e^a$.

Перейдем к обсуждению результатов исследования влияния продольного магнитного поля $H_z^o \neq 0$ на течения двухкомпонентной плазмы в режиме ионного токопереноса. При этом ограничимся геометрией электродов, представленной на рис. 1 в случае $H_z^o = 0$, и $\xi = 0.02$.

Из формул (4.13), (4.14) и проведенных расчетов следует, что результаты решения задачи не зависят от знака продольного магнитного поля с точностью до изменения направления вращения согласно (4.9). В связи с этим параметр H_z^o будем задавать так, что $H_z^o > 0$.

Вначале рассмотрим течения, к которым приводит варьирование параметра H_z^o при условии, что потенциал катода не меняется и равен, $\Phi_k = \Phi_k^1 = -0.066$, т.е. соответствует потенциалу катода или разности потенциалов между электродами ($\Phi_a = 0$) в примере с $H_z^o = 0$. Напомним, что единицей магнитного поля, в том числе продольного, является характерное значение азимутального магнитного поля H_o, отвечающее разрядному току в системе.

Увеличение H_z^o приводит к полной перестройке картины течения. Для значений $H_z^o \leq 0.15$ и прежней разности потенциалов между электродами трансзвуковое течение отсутствует. Так, например, величине $H_z^o = 0.1$ отвечают рисунки 3-а и 4. Изображенные на рис. 3-а кривые представляют собой множество тех значений $r\,H_\varphi(z, r = r_k(z))$ на катоде, при которых задача (4.13)-(4.16) имеет решение. Число таких значений при любом z равно либо четырем либо двум в средней части канала. Сплошная кривая является единственной кривой, для которой выполнено условие на входе $r\,H_{\varphi} = -r_o$ при $z = 0$. На рис. 4 представлено возникающее при этом течение плазмы. Здесь аналогично рис. 1 изображены: **а** – эквипотенциали, **б** – электрический ток $\mathbf{j}$, **в** – ионные траектории , **г** – векторное поле скоростей ионной компоненты $\mathbf{V}_i = \left(V_z^{\,i}, V_r^{\,i}\right)$, **д** – двумерное распределение плотности $\rho(z, r)$, а также векторное поле скоростей электронной компоненты плазмы $\mathbf{V}_e = \left(V_z^{\,e}, V_r^{\,e}\right)$. Пунктиром на рис. 4-г и 4-д изображены линии уровня соответственно функций $V_{\varphi}^{\,i}$ и $V_{\varphi}^{\,e}$, т.е. двумерные распределения азимутальной скорости, характеризующей вращение плазмы. Как видно, течение симметрично относительно плоскости $z = 0.5$, проходящей в середине канала. В сужающейся части канала плазма ускоряется, а в расширяющейся – наоборот, скорость падает с ростом z.

При достаточно больших значениях продольного магнитного поля $H_z^o > 0.15$ решение задачи отсутствует для данной геометрии и любых Φ_k.

Дальнейшие исследования показали, что варьирование потенциала катода или разности потенциалов между электродами при значениях $H_z^o < 0.15$ для заданных профилей электродов приводит к тому, что течение плазмы опять становится трансзвуковым. При любом значении H_z^o в указанном диапазоне трансзвуковому течению соответствует вполне определенная величина потенциала катода Φ_k, которая тем больше, чем больше H_z^o. Справедливо обратное утверждение : любой величине Φ_k в известном интервале $\Phi_k^1 < \Phi_k < \Phi_*$ отвечает свое значение продольного магнитного поля, при котором течение является трансзвуковым. Следует заметить, что в случае $H_z^o = 0$ в канале любой наперед заданной геометрии, включая данную, трансзвуковое течение либо отсутствует либо, по крайней мере, в силу аналитических построений [18-23], такое течение существует при единственном наборе значений параметров плазмы на входе и разности потенциала между электродами.

В рамках представленной модели можно утверждать, что наличие незначительного по величине продольного магнитного поля позволяет реализовываться трансзвуковому течению в канале заданной геометрии в определенном диапазоне параметров задачи путем подбора соответствующей разности потенциалов между электродами.

На рисунках 3-б и 5 представлен пример трансзвукового течения при $H_z^o = 0.1$ и потенциале катода $\Phi_k = 1.035 \cdot \Phi_k^1$. Согласно рис. 3-б (сплошная кривая) трансзвуковому течению отвечает величина $r\, H_\varphi(z, r = r_k(z))$ на катоде и соответственно во всем объеме канала, монотонно убывающая по модулю вдоль канала аналогично случаю, изображенному на рис. 1. Видно (пунктир на рис. 5-а), что в средней части канала происходит переход скорости потока через местную скорость быстрой магнитозвуковой волны. При условии малости значений продольного поля в любой точке канала течение является докритическим. Согласно принятой классификации [18] в одножидкостном приближении и докритическом случае местная продольная скорость плазмы больше местной альфвеновской скорости $C_{II} = \dfrac{H_{II}}{\sqrt{4\pi\rho}}$, соответствующей продольному полю в данной точке H_{II}. В критическом случае значения ряда величин обращаются в бесконечность. Аналогичная особенность имеет место в рассматриваемом двухжидкостном приближении. В соответствии с формулами (2.4) , (4.11) и (4.14) плотность ρ обращается в бесконечность при условии, что $\theta_3 = 0$ или $2\psi V_\varphi^{\,i} = C_o\, r_o\, r$, где $V_\varphi^{\,i}$ и C_o определяются с помощью (4.9) и (4.17) .

Электрический ток на рис. 5-б вблизи анода имеет незначительное отклонение от вертикального направления, что связано с поджатием плазмы к электроду в области анодного подпотока за счет вращения. Эта область на рис. 5-в, где изображены ионные траектории $\psi_i = const$, ограничена снизу пунктиром, берущим свое начало с анода в точке $z = 0$, $r = r_o$. Область анодного подпотока, обусловленная расхождением ионной и электронной траекторий за счет эффекта Холла, в присутствии продольного магнитного поля существенно уменьшилась по сравнению со случаем $H_z^o = 0$ (см. пунктир на рис. 1-в). Это означает, что благодаря продольному полю и вращению плазмы уменьшается роль и влияние эффекта Холла.

В соответствии с рис. 5-г и 5-д , где пунктиром изображены линии уровня функций $V_\varphi{}^i$ и $V_\varphi{}^e$, вращение плазмы усиливается в направлении внешнего электрода и по мере приближения к выходу из канала ускорителя, т.е. в направлении той области на аноде, которая главным образом ответственна за явление кризиса тока, связанного с эффектом Холла. В целом плазма вращается так, что $|V_\varphi| < |\mathbf{V}|$. За счет продольного поля и вращения появляется возможность предотвратить или, по крайней мере, уменьшить возникновение прианодных нерегулярностей, связанных с недостатком ионов в этой области. Значения плотности ρ на аноде, график зависимости которой от z при $r = r_o$ представлен пунктиром на рис. 2 , увеличились за счет вращения и перераспределения плазмы у внешнего электрода.

Сравнение рисунков 5-г и 1-г показывает, что усредненный по r коэффициент ускорения и продольная скорость плазмы на выходе из ПУ существенно не изменились по сравнению со случаем $H_z^o = 0$. При этом, вращательная составляющая скорости и кинетической энергии плазмы обусловлена соответствующим продольным магнитным полем и его изменением в объеме канала ПУ (рис. 5-б) .

6. Выводы и заключение

Таким образом, продольное магнитное поле открывает новые возможности в исследованиях динамики плазмы в ПУ, в том числе, в преодолении явления кризиса тока. Проведенные исследования показали, что с помощью продольного поля и возникающего вращения плазмы можно уменьшить влияние эффекта Холла и область анодного подпотка. На практике появляется возможность достаточно простым образом бороться с недостатком ионов в прианодной области и тем самым предотвращать связанные с этим нежелательные эффекты.

Данная работа стимулирует дальнейшие экспериментальные исследования и разработку численных моделей в рамках полной системы МГД-уравнений с целью создания более детальной картины происходящих процессов с учетом диссипативных факторов.

В заключение автор благодарит А.И.Морозова, К.В.Брушлинского и В.В.Савельева за проявленный интерес и плодотворные обсуждения результатов работы.

Литература

1. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978, 328 с.
2. Морозов А.И. Принципы коаксиальных (квази)стационарных плазменных ускорителей (КСПУ). // Физика плазмы, 1990, т.16, вып. 2, с. 131-146.
3. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах. // В сб. ’’ Вопросы теории плазмы’’ под ред. Леонтовича М.А., М.: Атомиздат, 1974, вып. 8 , с. 88-163.
4. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ. // Физика плазмы, 1990, т. 16, вып. 2, с. 147-157.
5. Козлов А.Н. Особенности динамики плазмы в КСПУ в процессе установления течения. // Физика плазмы, 1992, т. 18, вып. 6, с.714-723.
6. Бугрова А.И., Морозов А.И. Особенности физических процессов в УЗДП. // В сб. ’’Ионные инжекторы и плазменные ускорители’’ под ред. А.И.Морозова, Н.Н.Семашко, М.: Энергоатомиздат, 1990, с.42-56.
7. Егоров В.В., Ким В., Семенов А.А., Шкарбман И.И. Пристеночные процессы и их влияние на работу ускорителей с замкнутым дрейфом электронов. // Там же, с.56-68.
8. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ. // Физика плазмы, 1990, т. 16, вып. 2, с. 168-175.
9. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование

квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей. // Там же, с. 176-185.

10. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ). // Там же, с. 186-196.
11. Alexandrov V.A., Dyakonov G.A., Popov G.A., Tikhonov V.B., Tyutin V.K. Research of the influence of acceleration channel geometry and external magnetic field on modes of plasma flow in quasistationary plasma accelerator (QSPA) P-50A. // II-nd German-Russian conference on electric propulsion engines and their technical applications. Moscow Aviation Institute, 1993, c. 10.
12. Morozov A.I. and Savelyev V.V. Fundamentals of stationary plasma thruster theory.// Reviews of plasma physics. / Edited by B.B.Kadomtsev (deceased) and V.D.Shafranov , Consultants Bureau, 2000, Vol. 21, pp. 203-391.
13. Морозов А.И., Савельев В.В. К теории пристеночной проводимости . // Физика плазмы, 2001, т. 27, вып. 7, с. 607-613.
14. Козлов А.Н. Модель пристеночной проводимости в окрестности макронеоднородной зеркально отражающей поверхности. // Физика плазмы, 2002, т. 28, вып. 2, с. 180-187.
15. Козлов А. Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя.// Известия РАН, сер. механ. жид. и газа, 2000, № 5, С. 181-188.
16. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз. 1962, 246 с.
17. Бармин А.А., Куликовский А.Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле.// Итоги науки. Гидродинамика, т. 5, М.: ВИНИТИ, 1971, с. 5-31.
18. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле.// В сб. ’’ Вопросы теории плазмы’’ под ред. Леонтовича М.А., М.: Атомиздат, 1974, вып. 8 , с. 3-87.
19. Соловьев Л.С. Собрание трудов. Т. 1. Равновесие и устойчивость плазменных конфигураций. М.: Наука. 2001, 396 с.
20. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Морозов А.И. Численное исследование двумерных течений плазмы и ионизующегося газа методом пробных частиц. // Физика плазмы, 1985, т. 11, вып. 11, с. 1358-1367.
21. Козлов А.Н. Определение геометрии электродов и оценки параметров коаксиального плазменного ускорителя в приближении плавного течения. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1984, № 123, 28 с.
22. Козлов А.Н. Течение плазмы с анодным подпотоком в канале коаксиального ускорителя медленно меняющегося сечения. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1989, № 53, 20 с.
23. Брушлинский К.В., Горшенин К.П., Сыцько Ю.И. Математические модели стационарных МГД-течений в каналах плазменных ускорителей. // Математическое моделирование, 1991, т. 3, № 10, с. 3-19.