

**Российская Академия Наук**  
**Институт прикладной математики**  
**им. М.В. Келдыша**

Э.Л. Аким, А.А. Горохова, И.П. Киселева,  
В.А. Степаньянц, А.Г. Тучин

**Небесно-механическая интерпретация**  
**измерений радиосистемы**  
**межпланетных космических аппаратов**  
**«Квант-Д»**

Москва  
2002

## **Аннотация**

Работа посвящена обработке траекторных измерений космических аппаратов дальнего космоса, проводимых радиотехнической системой (РТС) «Квант-Д». Рассмотрены модели измерений радиальной скорости и наклонной дальности. Приведены соотношения, связывающие измеряемые радиотехнические параметры с вектором состояния КА, а также с положением и скоростью движения в пространстве передающей и приемной антенн измерительной системы. РТС «Квант-Д» была разработана в НИИ космического приборостроения для обеспечения полетов к Фобосу в 1988/1989гг. и последующих полетов к Марсу. Проект «Фобос-Грунт», основной целью которого является доставка на Землю образцов грунта Фобоса, предусматривает, что основным типом измерительной системы для проведения траекторных измерений будет РТС «Квант-Д». В Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша ведутся работы по баллистике и навигации проекта «Фобос-Грунт». В рамках этих работ проведен анализ возможностей измерительной системы «Квант-Д».

**E. Akim, A. Gorokhova, I. Kiseleva, V. Stepaniants, A. Tuchin. The celestial mechanics interpretation of measurements of the radio system "Kvant-D" for deep space spacecraft**

Abstract. This paper presents the processing method for tracking data of the deep space spacecraft, performed by tracking station "Kvant-D". The range and range rate models are considered. The equations are given, which connect measured radio engineering parameters of tracking system with the spacecraft's state-vectors and antenna's position and velocity. The measuring system "Kvant-D" was developed in RНИИ КР for providing Phobos mission in 1988/1989 and following flights to Mars. The "Kvant-D" will be used as a base measuring system in the project " Phobos-Sample-return", which main goal is delivery of the soil samples of Phobos to the Earth. Keldysh institute of applied mathematics conducts the activities on ballistics and navigation of the project "Phobos sample return". Within the framework of these activities the analysis of capabilities of the measuring system "Kvant-D" is carried out.

## Введение

Для обеспечения полетов к Фобосу в 1988/1989 гг. и последующих полетов к Марсу в НИИ космического приборостроения была создана новая РТС «Квант-Д», работающая в диапазоне 5/6 ГГц [1],[2]. Возможности этой системы были использованы в полном объеме в работе по баллистико-навигационному обеспечению полетов космических аппаратов (КА) «Фобос-1,2». Траекторные измерения проводились на измерительных пунктах (ИП) в Евпатории и Уссурийске. Результаты показали, что РТС «Квант-Д» обеспечивает проведение траекторных измерений на порядок точнее систем предыдущего поколения. После завершения работ с КА «Фобос-2» РТС «Квант-Д» использовалась для баллистического обеспечения полета КА «Гранат» и «Интербол» [7]. Однако радиокomплексы этих КА были оборудованы передатчиком только дециметрового диапазона, что не позволило в полной мере использовать возможности измерительной системы «Квант-Д».

Проект «Фобос-Грунт», основной целью которого является доставка на Землю образцов грунта Фобоса, предусматривает, что основным типом измерительной системы для проведения траекторных измерений будет РТС «Квант-Д». В Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша ведутся работы по баллистике и навигации проекта «Фобос-Грунт». В рамках этих работ проведен анализ возможностей измерительной системы «Квант-Д». В настоящей работе рассмотрена интерпретация измерений наклонной дальности и радиальной скорости РТС «Квант-Д» в режимах, предусмотренных проектом «Фобос-Грунт». Новым по отношению к измерениям, проводимым при работе по КА "Фобос-2", является наличие 3-х путевых доплеровских измерений.

### 1. Измерения наклонной дальности

Для измерения наклонной дальности используются фазовые методы, при которых дальность определяется измерением разности фаз излученного и принятого сигналов. Предусмотрено два режима измерения дальности, которые различаются структурой сигнала [1]. В первом режиме дальномерный сигнал представляет собой набор гармонических колебаний, наивысшая частота которых определяет аппаратную точность измерения. При частоте точной шкалы 300 КГц аппаратная точность равна 10м. Во втором режиме используется псевдошумовой код длиной 2047 элементов. Тактовая частота составляет 1.2 МГц, а аппаратная точность измерения - 5м. В обоих режимах для раскрытия неоднозначности используется измерение грубой шкалы. Для формирования дальномерных сигналов используется выходной сигнал синтезатора тактовой частоты

$$f_T = \frac{79}{480} \left( \nabla + \frac{f_{pd}}{n} \right), \quad (1)$$

где

- $\nabla$  - исходная эталонная частота;
- $f_{pd}$  - прогнозируемое значение доплеровского сдвига по трассе ИП-КА;
- $n$  - целочисленный коэффициент.

### 1.1. Измеренные величины

Измеренными величинами являются:

- $D_p$  - измеренное значение дальности по точной шкале;
- $D_r$  - измеренное значение дальности по грубой шкале;
- $P$  - давление воздуха [Мб];
- $T$  - температура воздуха [ $K^0$ ];
- $V$  - парциальное давление водяного пара [Мб].

Для получения измеренного значения дальности используются следующие величины:

- $\Delta D_b$  - задержка сигнала в бортовом радиоконтакте, вычисляемая по конечным формулам в зависимости от режима и параметров бортового радиоконтакта;
- $\theta$  - зенитный угол прихода радиоволны, вычисляемый по прогнозу движения КА;
- $\Delta D_a$  - геометрическая поправка антенного устройства, вычисляемая по конечным формулам в зависимости от антенны РТ-32 или РТ-70 [1].

### 1.2. Интерпретация измерений дальности

В этом разделе будет описан алгоритм, позволяющий получить измеренное значение дальности в виде:

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}, \quad (2)$$

где

- $D_1$  - дальность между опорной плоскостью передающей антенны измерительного пункта в момент излучения и КА в момент

переизлучения;

$D_2$  - дальность между КА в момент переизлучения и опорной плоскостью приемной антенны измерительного пункта в момент регистрации.

На первом шаге алгоритма вычисляется тропосферная поправка [3]:

$$\Delta D_t = - \frac{N_0 \cdot 10^{-5}}{\left( \ln \frac{93}{N_0} \right) \cos \theta}, \quad (3)$$

где

$N_0$  - приведенный коэффициент преломления у поверхности Земли;

$\theta$  - зенитный угол прихода радиоволны;

$N_0$  - вычисляется по формуле:

$$N_0 = \frac{77.6}{T} \left( P + \frac{4810 \cdot B}{T} \right). \quad (4)$$

Затем раскрывается неоднозначность и вычисляется значение дальности в пределах зоны однозначного измерения  $D_m$

$$D_m = D_p + p \frac{\lambda_T}{2}; \quad p = \left\{ 2 \frac{D_r - D_p}{\lambda_T} \right\}_{NW}, \quad (5)$$

где

$\lambda_T = \frac{c}{f_T}$  - длина волны тактовой частоты;

$\{ \}_{NW}$  - функция «ближайшее целое»;

$c$  - скорость света.

Далее учитываются поправки и вычисляется значение  $\hat{D}_m$  по формуле:

$$\hat{D}_m = D_m - \Delta D_b - \Delta D_t + \Delta D_a. \quad (6)$$

Вычисляется значение зоны однозначного измерения

$$D_0 = \begin{cases} c \frac{2047}{2 f_T} & \text{для режима 2 (1.2 МГц)} \\ c \frac{1024}{2 \frac{f_T}{4}} & \text{для режима 1 (300 КГц)} \end{cases} \quad (7)$$

Наконец, вычисляется измеренное значение наклонной дальности:

$$D = \hat{D}_m + q \cdot D_0$$

$$q = \left\{ \frac{D_f - \hat{D}_m}{D_0} \right\}_{NW}, \quad (8)$$

где

$D_f$  — прогнозируемое (расчетное) значение дальности.

### 1.3. Расчетный аналог измерения дальности

Для получения расчетного аналога измерения дальности представим измеренное значение в виде:

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} = c \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2}, \quad (9)$$

где

$\Delta t_1$  - время распространения сигнала от излучающей антенны измерительного пункта до КА;

$\Delta t_2$  - время распространения сигнала от КА до приемной антенны.

Время распространения сигнала  $dt$  на расстояние  $dr$  при удалении от Солнца на расстояние  $r$  равно [5]:

$$dt = \frac{dr}{c \left( 1 - \frac{GM_s}{c^2 r} \right)} \approx \frac{dr}{c} \left( 1 + \frac{GM_s}{c^2 r} \right), \quad (10)$$

где  $GM_s$  — гравитационная постоянная Солнца.

Соотношения для  $\Delta t_1$  ( $\Delta t_2$ ) получаются интегрированием (10) вдоль линии: передающая антенна - КА (КА - приемная антенна). Используя приближенную формулу Мойера для таких интегралов, получим:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{1}{c} |r_{sc}(t_2) - r_{snd}(t_1)| + \frac{2GM_s}{c^3} \ln \frac{|r_{sc}(t_2)| + |r_{snd}(t_1)| + |r_{sc}(t_2) - r_{snd}(t_1)|}{|r_{sc}(t_2)| + |r_{snd}(t_1)| - |r_{sc}(t_2) - r_{snd}(t_1)|}, \\ \Delta t_2 &= \frac{1}{c} |r_{sc}(t_2) - r_{rcv}(t_3)| + \frac{2GM_s}{c^3} \ln \frac{|r_{sc}(t_2)| + |r_{rcv}(t_3)| + |r_{sc}(t_2) - r_{rcv}(t_3)|}{|r_{sc}(t_2)| + |r_{rcv}(t_3)| - |r_{sc}(t_2) - r_{rcv}(t_3)|}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1,$$

$$t_3 = t_2 + \Delta t_2 = t_1 + \Delta t_1 + \Delta t_2,$$

где

$t_1$  - момент излучения сигнала;

$t_2$  - момент переизлучения сигнала на борту КА;

$t_3$  - момент приема сигнала;

$r_{snd}(t_1)$  - гелиоцентрическое положение излучающей антенны в момент излучения сигнала  $t_1$ ;

$r_{sc}(t_2)$  - гелиоцентрическое положение КА в момент переизлучения сигнала;

$r_{rcv}(t_3)$  - гелиоцентрическое положение приемной антенны в момент регистрации сигнала.

Подставляя (11) в (9), получим:

$$D = \frac{1}{2} \left( |r_{sc}(t_2) - r_{snd}(t_1)| + |r_{sc}(t_2) - r_{rcv}(t_1)| \right) + \Delta D_{1R} + \Delta D_{2R} \quad , \quad (12)$$

где

$$\Delta D_{1R} = \frac{GM_s}{c^2} \ln \frac{|r_{sc}(t_2)| + |r_{snd}(t_1)| + |r_{sc}(t_2) - r_{snd}(t_1)|}{|r_{sc}(t_2)| + |r_{snd}(t_1)| - |r_{sc}(t_2) - r_{snd}(t_1)|} \quad ,$$

$$\Delta D_{2R} = \frac{GM_s}{c^2} \ln \frac{|r_{sc}(t_2)| + |r_{rcv}(t_3)| + |r_{sc}(t_2) - r_{rcv}(t_3)|}{|r_{sc}(t_2)| + |r_{rcv}(t_3)| - |r_{sc}(t_2) - r_{rcv}(t_3)|} \quad .$$

Сумма  $\Delta D_{1R} + \Delta D_{2R}$  рассматривается как поправка. В качестве примера приведем два ее значения для КА «Фобос-2» на участке орбитального полета.

Moscow time	$\Delta D_{R1} + \Delta D_{R2}$ [km]
1989 01 24 0h	3.027
1989 03 22 0h	2.593

Измерительная система обеспечивает только регистрацию момента приема сигнала  $t_3$ . Другие моменты времени  $t_2$  и  $t_1$  должны быть найдены из световых уравнений:

$$t_2 = t_3 - \frac{|r_{sc}(t_2) - r_{snd}(t_1)|}{c} - \Delta D_{2R} \quad ,$$

$$t_1 = t_2 - \frac{|r_{sc}(t_2) - r_{rcv}(t_1)|}{c} - \Delta D_{1R} \quad . \quad (13)$$

Эти уравнения решаются итерационным способом последовательно: сначала определяется  $t_2$ , а затем -  $t_1$ . А именно, для определения момента времени  $t_2$  необходимо выполнить следующие действия:

- 1) Принять  $t_2^{(0)} = t_3$ .
- 2) Повторять вычисления для  $t_2^{(i)}$  ( $i \geq 1$ ) по формуле

$$t_2^{(i)} = t_3 - \frac{\left| \bar{r}_{sc} \left( t_2^{(i)} \right) - \bar{r}_{rcv} \left( t_3 \right) \right|}{c} - \frac{\Delta D_{2R} \left( \bar{r}_{sc} \left( t_2^{(i)} \right), \bar{r}_{rcv} \left( t_3 \right) \right)}{c} \quad (14)$$

до выполнения условия при некотором  $i=k$

$$\left| t_2^{(k)} - t_2^{(k-1)} \right| \leq \eta \quad , \quad (15)$$

где  $\eta$  является некоторой малой величиной. После этого можно положить  $t_2 = t_2^{(k)}$ . Для нахождения момента времени  $t_1$  нужно выполнить следующую последовательность действий:

- 3)  $t_1^{(0)} = t_2$ ,

$$t_1^{(i)} = t_2 - \frac{\left| \bar{r}_{sc}(t_2) - \bar{r}_{snd}(t_1^{(i)}) \right|}{c} - \frac{\Delta D_{1R}(\bar{r}_{rc}(t_2), \bar{r}_{snd}(t_1^{(i)}))}{c} \quad (16)$$

до выполнения условия (15). После этого следует положить  $t_1 = t_1^{(k)}$ .

При выполнении расчетов полагается, что  $\eta \sim 10^{-6}$  сек. При этом для нахождения точных значений необходимо делать в (14) и (16) 2-3 итерации.

## 2. Запросные измерения радиальной скорости

### 2.1. Измеряемый параметр

Радиотехническая система «Квант-Д» измеряет доплеровское смещение частоты принимаемого сигнала относительно излучаемого. Измеряемой величиной является полный набег нециклической, т.е. неограниченной значением  $2\pi$ , фазы сигнала промежуточной частоты на интервале накопления. Частота этого сигнала равна разности частот принятого сигнала и сигнала, сформированного по прогнозу доплеровского сдвига [1]. Среднее значение набег фазы сигнала промежуточной частоты пересчитывается по конечным формулам в среднее значение отношения принимаемой частоты к передаваемой. Это отношение называют доплеровским множителем. Поэтому можно считать, что радиотехническая система проводит измерения среднего значения доплеровского множителя  $\bar{A}$  на интервале времени  $\Delta t$ . Получим соотношение, которое связывает  $\bar{A}$  с моментами времени излучения и приема сигналов. Для этого рассмотрим (рис. 1) инерциальную систему координат К и мировые линии космического аппарата (КА) и измерительного пункта [6].

Пусть:

- $t'$  - время по часам ИПа;
- $t^*(t)$  - время в системе К, соответствующее излучению сигнала, полученного в момент  $t$ ;
- $t'^*(t')$  - время по часам ИПа, соответствующее излучению сигнала, полученного в момент  $t'$ ;
- $\Delta t'$  - интервал накопления, отсчитанный по часам ИПа (интервал, на котором определяется полное приращение фазы доплеровского сдвига).

Тогда, среднее значение доплеровского множителя, измеренное системой, можно представить в виде:

$$\bar{A} = \frac{1}{\Delta t'} \int_{t'_m - \Delta t'}^{t'_m} \frac{dt'^*}{dt'} dt' = \frac{1}{\Delta t'} \int_{t'_m - \Delta t'}^{t'_m} dt'^* = \frac{t'^*(t'_m) - t'^*(t'_m - \Delta t')}{\Delta t'}. \quad (17)$$



Таким образом, среднее значение доплеровского множителя равно отношению интервала излучения к интервалу приема.

Так как погрешность, вносимая при переходе от отношения интервалов, отмеренных по часам ИПа, к отношению интервалов в системе  $K$ , пренебрежимо мала, вместо (17) будем рассматривать соотношение:

$$\bar{A} = \frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{dt^*}{dt} dt. \quad (18)$$

## 2.2. Интерпретация измерения в виде мгновенного значения радиальной скорости

В этом разделе будет показано, что мгновенное значение радиальной скорости на момент времени, соответствующий середине интервала накопления  $\Delta t$ , определяется следующим соотношением:

$$\bar{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) = c \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}},$$

где

$$\dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{\dot{D}_{1K} - \dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2K}}{2};$$

$c$  - скорость света;

$\dot{D}_{1H} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$  - проекция скорости передающей антенны в момент излучения на линию визирования: передающая антенна - КА (рис. 2);

$\dot{D}_{1K} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{V}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$  - проекция скорости КА в момент переизлучения на линию визирования: передающая антенна - КА (рис. 2);

$\dot{D}_{2K} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{V}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$  - проекция скорости КА в момент переизлучения на линию визирования: КА-приемная антенна (рис. 2);

$\dot{D}_{2H} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{V}_3)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$  - проекция скорости приемной антенны в момент приема сигнала на линию визирования: КА - приемная антенна (рис. 2);

$\vec{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$  - вектор положения передающей антенны на момент передачи;

$\vec{r}_2\{x_2, y_2, z_2\}$  - вектор положения КА на момент переизлучения;

- $\vec{r}_3 \{x_3, y_3, z_3\}$  - вектор положения приемной антенны ИПа на момент приема;
- $\vec{V}_1 = \frac{d}{dt_1} \vec{r}_1$  - производная вектора положения передающей антенны на момент излучения сигнала  $t_1$ ;
- $\vec{V}_2 = \frac{d}{dt_2} \vec{r}_2$  - производная вектора положения КА на момент переизлучения сигнала  $t_2$ ;
- $\vec{V}_3 = \frac{d}{dt_3} \vec{r}_3$  - производная вектора положения приемной антенны на момент приема сигнала  $t_3$ .

Для обоснования соотношения интерпретации найдем выражение для  $\frac{dt^*}{dt}$  через проекции скоростей на линии визирования: передающая антенна - КА и КА - приемная антенна.

Рассмотрим:

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - c^2(t - t_2)^2 = 0;$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t^*(t))^2 = 0. \quad (19)$$

Откуда, учитывая, что  $\frac{d\vec{r}_2}{dt_1} = \frac{d\vec{r}_2}{dt_2} \frac{dt_2}{dt_1}$  и  $\frac{d\vec{r}_3}{dt_2} = \frac{d\vec{r}_3}{dt_3} \frac{dt_3}{dt_2}$ , получим:

$$\frac{dt_2}{dt} = \frac{\left( \left( \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}, \vec{V}_3 \right) - c \right)}{\left( \left( \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}, \vec{V}_2 \right) - c \right)} = \frac{\dot{D}_{2H} - c}{\dot{D}_{2K} - c};$$

$$\frac{dt^*}{dt_2} = \frac{\left( \left( \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \vec{V}_2 \right) - c \right)}{\left( \left( \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \vec{V}_1 \right) - c \right)} = \frac{\dot{D}_{1K} - c}{\dot{D}_{1H} - c};$$

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{(\dot{D}_{1K} - c)(\dot{D}_{2H} - c)}{(\dot{D}_{1H} - c)(\dot{D}_{2K} - c)}. \quad (20)$$

С точностью до членов, содержащих  $\frac{1}{c^2}$ , выражение (20) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dt^*}{dt} = & 1 - \frac{\dot{D}_{1K} - \dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2K}}{c} + \frac{(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2K})(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{1K} - \dot{D}_{2K})}{c^2} + \\ & + \frac{\dot{D}_{1K}\dot{D}_{2H}}{c^2} - \frac{\dot{D}_{1H}\dot{D}_{2K}}{c^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{dt^*}{dt} dt = 1 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1K} - \dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2K}}{c} dt + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \left( \frac{(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2K})(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{1K} - \dot{D}_{2K})}{c^2} + \frac{\dot{D}_{1K}\dot{D}_{2H}}{c^2} - \frac{\dot{D}_{1H}\dot{D}_{2K}}{c^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем обозначение:

$$\bar{D} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D} dt.$$

Рассмотрим выражение:

$$\frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}}. \quad (23)$$

После преобразований с точностью до членов, содержащих  $\frac{1}{c^2}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}} = & \frac{\bar{D}}{c} + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1K}^2 - \dot{D}_{1H}^2 - \dot{D}_{2K}^2 + \dot{D}_{2H}^2}{4c^2} dt + \\ & + \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}}{c} dt \right)^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}^2}{c^2} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом,

$$\bar{D} = c \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}} \quad (25)$$

с погрешностью:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1K}^2 - \dot{D}_{1H}^2 - \dot{D}_{2K}^2 + \dot{D}_{2H}^2}{4c} dt + \frac{1}{c} \left[ \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D} dt \right)^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}^2 dt \right].$$

Получим соотношение между средним и мгновенным значениями радиальной скорости.

Представим зависимость от времени радиальной скорости в окрестности средней точки интервала в виде ряда Тейлора:

$$\dot{D}(t) = \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)\left(t - \left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)\left(t - \left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)\right)^2 + \dots, \quad (26)$$

где

$t_m$  - время регистрации (конец интервала накопления);

$\Delta t$  - интервал накопления.

После интегрирования по времени на интервале от  $(t_m - \Delta t)$  до  $t_m$  левой и правой частей соотношения (26) получим:

$$\int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}(t) dt = \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t + \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\Delta t^3}{24} + \dots$$

Следовательно,

$$\bar{D} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}(t) dt = \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\Delta t^2}{24} + \dots \quad (27)$$

Откуда,

$$\bar{D} \approx \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$\text{с погрешностью } \sim \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\Delta t^2}{24}. \quad (28)$$

Получим, наконец, соотношение для небесно-механической интерпретации радиальной скорости, соединяя соотношения (25) и (27):

$$\dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) = c \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}} \quad (29)$$

с погрешностью:

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1K}^2 - \dot{D}_{1H}^2 - \dot{D}_{2K}^2 + \dot{D}_{2H}^2}{4c} dt + \frac{1}{c} \left[ \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D} dt \right)^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}^2 dt \right] \right| + \left| \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\Delta t^2}{24} \right|. \quad (30)$$

Проведенный численный анализ показал, что величина этой погрешности на траекториях, предусмотренных проектом «Фобос-Грунт», составляет

для перелетной траектории до 0.1 мм/сек,

для орбиты искусственного спутника Марса до 2 мм/сек.

На интервале сеанса измерений протяженностью до 10 минут погрешность будет иметь характер систематической ошибки.

### 2.3. Интерпретация измерения в виде приращения дальности

В этом разделе будет показано, что разность дальностей на конец и начало интервала накопления по трассе: передающая антенна-КА-приемная антенна связана с измеренным значением следующим соотношением:

$$\frac{D(t_m) - D(t_m - \Delta t)}{\Delta t} = c(1 - \bar{A}), \quad (31)$$

где

- $D(t_m)$  - расстояние, которое прошел сигнал, полученный в момент  $t_m$ , по трассе: передающая антенна - КА - приемная антенна;  
 $D(t_m - \Delta t)$  - расстояние, которое прошел сигнал, полученный в момент  $t_m - \Delta t$ , по трассе: передающая антенна - КА - приемная антенна.

Рассмотрим,

$$\begin{aligned} c(1 - \bar{A}) &= c \left( 1 - \frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{\Delta t} \right) = \\ &= c \left( \frac{t_m - t^*(t_m) - (t_m - \Delta t - t^*(t_m - \Delta t))}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Из (31) следует (32), так как

$$\begin{aligned} D(t_m) &= c(t_m - t^*(t_m)), \\ D(t_m - \Delta t) &= c(t_m - \Delta t - t^*(t_m - \Delta t)). \end{aligned} \quad (33)$$

### 2.4. Компенсация методической ошибки интерпретации запросных доплеровских измерений

Интерпретация запросного измерения радиальной скорости в виде мгновенного значения в силу ее простоты более привлекательна, чем интерпретация в виде приращения дальности. Поэтому рассмотрим вопрос о внесении поправок, компенсирующих методическую погрешность интерпретации измеренного значения в виде мгновенного значения радиальной скорости. Вначале получим соотношение для методической ошибки интерпретации запросного доплеровского измерения в виде мгновенного значения радиальной скорости. Пусть  $\dot{D}(t_0)$  — мгновенное значение радиальной скорости,

соответствующее моменту регистрации  $t_0$ , а  $D\left(t_0 - \frac{\Delta t}{2}\right)$  и  $D\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)$  — значения дальности по трассе: передающая антенна - КА - приемная антенна на моменты времени  $t_0 - \frac{\Delta t}{2}$  и  $t_0 + \frac{\Delta t}{2}$ . Тогда, используя (31), можно получить среднее значение доплеровского множителя на интервале  $\left[t_0 - \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right]$  в виде

$$\bar{A}(t_0) = 1 - \frac{D\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) - D\left(t_0 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{c \cdot \Delta t}.$$

Этому среднему значению соответствует мгновенное значение радиальной скорости, вычисленное по формуле (23). Таким образом, для рассматриваемой методической ошибки справедливо соотношение:

$$N(t_0) = \dot{D}(t_0) - \frac{1 - \bar{A}(t_0)}{1 + \bar{A}(t_0)}.$$

Обозначим  $\tilde{N}(t_0)$  значение методической ошибки, рассчитанное для опорной орбиты. Тогда, добавляя  $\tilde{N}(t_0)$  к измеренному значению, можно компенсировать ошибку. Ответ на вопрос, насколько опорная орбита должна быть близка к реальной, чтобы поправка  $\tilde{N}(t_0)$  обеспечила необходимую точность дают частные производные по компонентам вектора состояния:  $\frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial v_x}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial v_y}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial v_z}$

Максимальные значения производных для орбит, предусмотренных проектом «Фобос-Грунт» представлены в следующей таблице.

	$\frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial z}$ [1/сек]	$\frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial z}$ [безразмерная величина]
орбита перелета	$0.5 \cdot 10^{-9}$	$0.5 \cdot 10^{-4}$
орбита искусственного спутника Марса	$3 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-4}$

Таким образом, поправки, рассчитанные по опорной орбите, компенсируют методическую ошибку с необходимой точностью, если опорная орбита лежит в такой трубке, относительно

уточненной, что невязки компонент вектора скорости не превосходят 1 м/сек, а компонент вектора положения — 1000 км.

### 3. Беззапросные измерения радиальной скорости

#### 3.1. Измеряемый параметр

РТС «Квант-Д» имеет возможность проводить доплеровские измерения по сигналу, излучаемому с борта КА. Также, как и в случае когерентных измерений, измеряется среднее значение доплеровского множителя:

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{\Delta t'} \int_{t'_m - \Delta t'}^{t'_m} \frac{dt^{*''}(t')}{dt'} dt', \quad (34)$$

где

- $t'$  - время регистрации сигнала по часам ИПа;
- $t^{*''}(t')$  - время по часам КА, соответствующее моменту излучения сигнала, принятого на ИПе в момент  $t'$ ;
- $t'_m$  - конец интервала накопления по часам ИПа;
- $\Delta t'$  - длительность интервала накопления по часам ИПа.

После интегрирования (34), получим:

$$\bar{A}_2 = \frac{t^{*''}(t'_m) - t^{*''}(t'_m - \Delta t')}{\Delta t'}. \quad (35)$$

Перейдем в гелиоцентрическую систему координат. Для этого преобразуем (35) к виду:

$$\bar{A}_2 = \frac{t^{*''}(t'_m) - t^{*''}(t'_m - \Delta t')}{t^{*'}(t'_m) - t^{*'}(t'_m - \Delta t')} \cdot \frac{t^{*'}(t'_m) - t^{*'}(t'_m - \Delta t')}{\Delta t'}, \quad (36)$$

где

- $t^{*'}(t'_m)$  - время по часам ИПа, соответствующее моменту излучения сигнала, принятого на ИПе в момент  $t'$  ( $t'_m$  - конец, а  $(t'_m - \Delta t')$  - начало мерного интервала).

Первый множитель в (36) представляет собой отношение интервалов времени между одними и теми же событиями, но в разных системах координат. Для наблюдателя, находящегося в гелиоцентрической системе координат, справедливо следующее соотношение [5],[6]:

$$\frac{t^{*''}(t'_m) - t^{*''}(t'_m - \Delta t')}{t^{*'}(t'_m) - t^{*'}(t'_m - \Delta t')} = 1 - \left( \frac{V_{sc}^2 - V_{rsv}^2}{2c^2} - \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rsv}}{c^2} \right), \quad (37)$$

где

$V_{sc}, V_{rsv}$  - модули скорости КА и приемной антенны ИПа в гелиоцентрической системе координат;

$\Phi_{sc}, \Phi_{rsv}$  - гравитационные потенциалы в точках, в которых находятся КА и приемная антенна.

Рассмотрим более подробно второй сомножитель в (36). Так как за время распространения сигнала от КА до приемной антенны не изменились условия, определяющие параметры преобразования времени из системы координат ИПа в гелиоцентрическую систему координат, справедливо соотношение:

$$\frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{t^{*'}(t'_m) - t^{*'}(t'_m - \Delta t')} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}, \quad (38)$$

где

$t_m$  - время конца интервала накопления в гелиоцентрической системе координат;

$t^*(t)$  - время излучения сигнала, полученного в момент  $t$  в гелиоцентрической системе координат ( $t_m$  - конец, а  $(t_m - \Delta t)$  - начало мерного интервала в гелиоцентрической системе координат);

$\Delta t$  - интервал накопления в гелиоцентрической системе координат.

Используя (37) и (38), преобразуем (36) к виду :

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= \left( 1 - \left( \frac{V_{sc}^2 - V_{rsv}^2}{2c^2} - \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rsv}}{c^2} \right) \right) \cdot \left( \frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{\Delta t} \right) = \\ &= \left( 1 - \left( \frac{V_{sc}^2 - V_{rsv}^2}{2c^2} - \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rsv}}{c^2} \right) \right) \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{dt^*}{dt} dt \end{aligned} \quad (39)$$

### 3.2. Расчетный аналог беззапросного измерения радиальной скорости

Как и в случае запросных доплеровских измерений, можно получить соотношение для

$\frac{dt^*}{dt}$  через проекции скоростей на линию визирования КА-ИПов в гелиоцентрической системе

координат



$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{c - \dot{D}_{2H}}{c - \dot{D}_{2k}} \quad , \quad (40)$$

где

$$\dot{D}_{2k} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{v}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \quad - \quad \text{проекция скорости КА в момент излучения на линию визирования : КА- приемная антенна;}$$

$$\dot{D}_{2H} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{v}_3)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \quad - \quad \text{проекция скорости приемной антенны в момент приема сигнала на линию визирования : КА - приемная антенна;}$$

$$\vec{r}_2 \{x_2, y_2, z_2\} \quad - \quad \text{вектор положения КА на момент излучения;}$$

$$\vec{r}_3 \{x_3, y_3, z_3\} \quad - \quad \text{вектор положения приемной антенны ИПа на момент приема;}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d}{dt} \vec{r}_2 \quad - \quad \text{вектор скорости КА на момент излучения;}$$

$$\vec{v}_3 = \frac{d}{dt} \vec{r}_3 \quad - \quad \text{вектор скорости приемной антенны ИПа на момент приема.}$$

С точностью до членов, содержащих  $\frac{1}{c^2}$ , выражение (40) может быть представлено в

виде:

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{1 - \frac{\dot{D}_{2H}}{c}}{1 - \frac{\dot{D}_{2k}}{c}} = 1 - \frac{\dot{D}_{2H}}{c} + \frac{\dot{D}_{2k}}{c} - \frac{\dot{D}_{2H}\dot{D}_{2k}}{c^2} = 1 - \frac{\dot{D}_2}{c} - \frac{\dot{D}_{2H}\dot{D}_{2k}}{c^2} \quad , \quad (41)$$

где

$$\dot{D}_2 = \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2k} \quad - \quad \text{радиальная скорость.}$$

После подстановки (41) в (39) получим

$$\bar{A}_2 = \left( 1 - \left( \frac{V_{sc}^2 - V_{rsv}^2}{2c^2} - \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rsv}}{c^2} \right) \right) \cdot \left( 1 - \frac{\bar{\dot{D}}_2}{c} - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{1}{c^2} \dot{D}_{2H}(t) \cdot \dot{D}_{2k}(t) dt \right) \quad . \quad (42)$$

С точностью до членов, содержащих  $\frac{1}{c^2}$ , выражение (42) может быть представлено в виде:

$$\bar{A}_2 = 1 - \frac{\bar{\dot{D}}_2}{c} - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{2H}(t) \cdot \dot{D}_{2k}(t)}{c^2} dt - \left( \frac{V_{sc}^2 - V_{rsv}^2}{2c^2} - \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rsv}}{c^2} \right) \quad , \quad (43)$$

где

$$\bar{\dot{D}}_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}_2(t) dt \quad .$$

Разрешив (43) относительно  $\bar{D}_2$ , получим

$$\bar{D}_2 = c(1 - A_2) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{2H}(t) \cdot \dot{D}_{2k}(t)}{c} dt - \left( \frac{V_{sc}^2 - V_{rsv}^2}{2c} - \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rsv}}{c} \right) . \quad (44)$$

Соотношение (44) может быть использовано как для интерпретации измеренных значений, так и для определения текущего значения частоты бортового задающего генератора по эталонной орбите.

#### 4. 3-х путевой доплер

Схема проведения измерений 3-х путевого доплера аналогична схеме 2-х путевого, которая рассмотрена во втором разделе, но прием сигнала осуществляется на двух различных измерительных станциях. Для определения параметров орбиты целесообразно использовать измерения 3-х путевого доплера как разность радиальных скоростей, полученных на каждой из этих станций. Измерения, полученные в результате такого вычитания, имеют большую информационную ценность, т.к. позволяют определить скорость измерения углового направления на КА. Ожидаемая точность измерений разности выше, чем точность обычных запросных доплеровских измерений (2-х путевых), поскольку при вычитании происходит взаимное уничтожение ряда составляющих ошибок, в частности:

- ошибок, связанных с нестабильностью частоты излучаемого сигнала;
- ошибок, возникающих при прохождении излученного сигнала через атмосферу;
- ошибок, связанных с преобразованием сигнала в бортовом радиокомплексе.

Одним из вариантов проведения измерений 3-х путевого доплера, в проекте «Фобос-Грунт», рассматривается вариант проведения, при котором сигнал излучается из Евпатории, а принимается в Евпатории и Медвежьих Озерах [9].

Для обеспечения необходимой точности измерений необходимо учитывать ошибки измерения радиальной скорости, вызываемые атмосферой Земли. Эти ошибки имеют тропосферную и ионосферную составляющие. Так как при проведении измерений КА будет находиться за пределами атмосферы, эти ошибки определяются перемещением луча по углу места [4] и могут быть учтены по модели [8]. Тропосферная составляющая ошибки резко уменьшается с увеличением угла места. Лучший способ учета ионосферной составляющей — использование двух частот [2]. РТС «Квант-Д» имеет возможность проведения измерений на двух частотах, однако опыт работы по проекту полета к Фобосу в 1988/1989 гг. показал, что технологически это осуществить трудно. Следует отметить, что в наземной сети слежения за КА дальнего космоса США (DSN) для определения состояния атмосферы

используются станции, принимающие сигнал на двух частотах от системы спутниковой навигации GPS. При реализации проекта «Фобос-Грунт» целесообразно воспользоваться этим опытом.

## Литература

1. *Радиосистемы межпланетных космических аппаратов*. Р.В.Бакитько, М.Б. Васильев, А.С. Веницкий и др. // М.: Радио и связь, 1993, 328 с.
2. *Космические траекторные измерения. Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных*. Под ред. П.А. Агаджанова, В.Е. Дулевича, А.А. Коростелева // М.: Советское радио, 1969, 504 с.
3. М.А. Колосов, Н.А. Арманд, О.И. Яковлев. *Распространение радиоволн при космической связи* // М.: Связь, 1969, 155 с.
4. Ф.Б. Черный. *Распространение радиоволн* // М.: Советское радио, 1972, 464 с.
5. А.Л. Зельманов, В.Г. Агаков. *Элементы общей теории относительности* // М.: Наука, 1989, 240 с.
6. У. Берке. *Пространство - время, геометрия, космология* // М.: Мир, 1985, 411 с.
7. *Небесно-механическая интерпретация и первичная обработка измерений КА "Гранат" и "Интербол"*. Э.Л. Аким, А.А. Горохова, И.П. Киселева, В.А. Степаньянц, А.Г. Тучин // Препринт №83, М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1996, 21 с.
8. А.Г. Квашнин, А.Г. Тучин. *Баллистическое обеспечение радиоинтерферометрических измерений* // Препринт № 98, М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1992, 26 с.
9. *Пространственно-временные соотношения при измерении дальности и скорости космических аппаратов. Технический отчет*. М.Н. Мешков, Г.А. Соколов, В.А. Иванов // М.: Особое конструкторское бюро Московского энергетического института, 1997, 46 с.

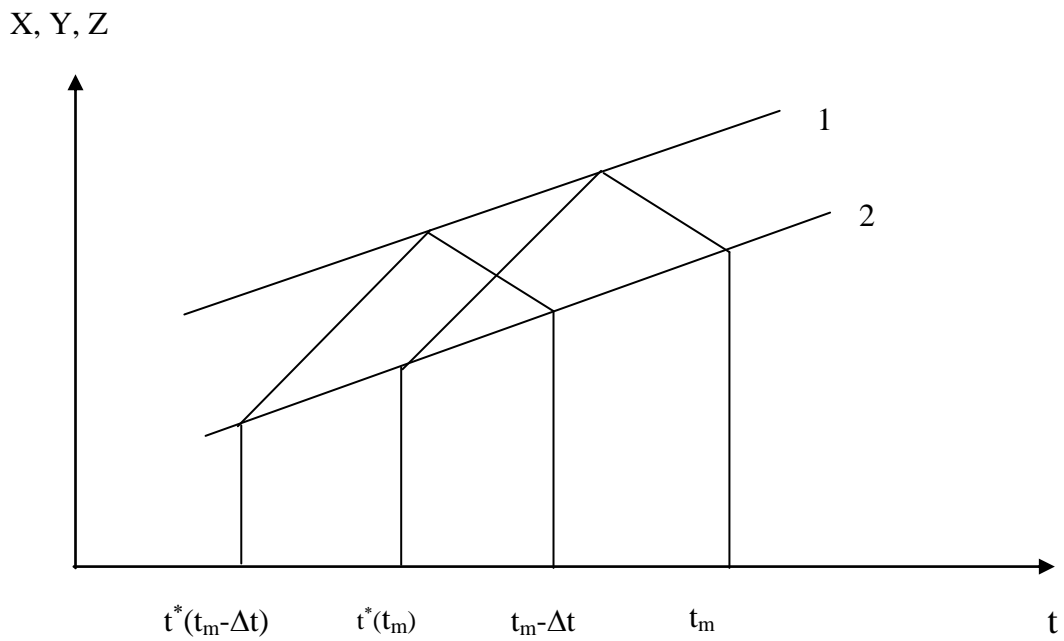


Рис. 1.

- 1 - мировая линия КА;
- 2 - мировая линия Ипа;
- $t_m$  - время регистрации измерения;
- $\Delta t$  - интервал накопления.

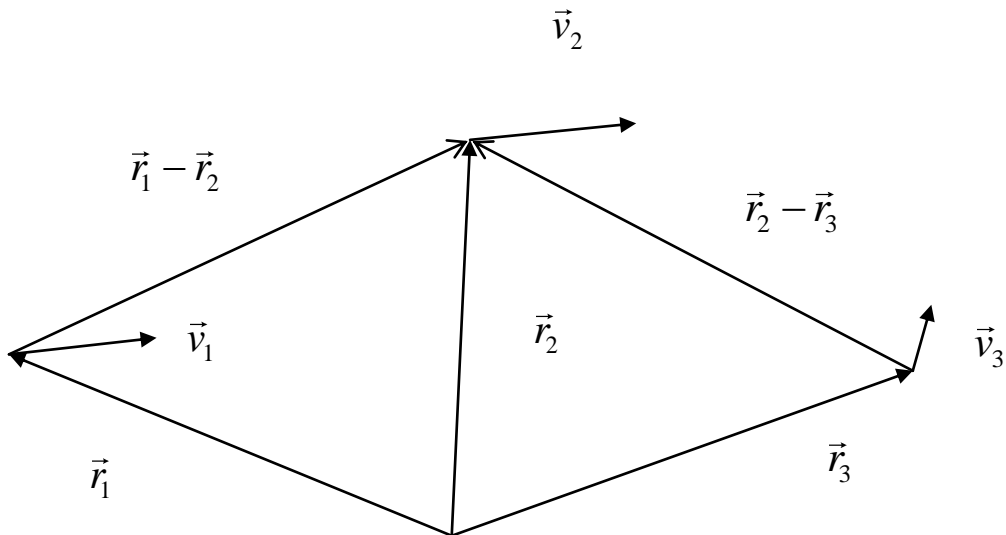


Рис. 2. Положение и скорость передающей антенны ( $\vec{r}_1, \vec{v}_1$ ), КА ( $\vec{r}_2, \vec{v}_2$ ) и приемной антенны ( $\vec{r}_3, \vec{v}_3$ ), используемые в расчете мгновенного значения радиальной скорости. Линии визирования: передающая антенна - КА ( $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ) и КА - приемная антенна ( $\vec{r}_3 - \vec{r}_2$ ).

