

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

Заславский М.Ю. , Пергамент А.Х.

**Исследование неустойчивости
типа «fingers»
в фильтрационных течениях**

Москва 2002

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША

Заславский М.Ю., Пергамент А.Х.

**Исследование неустойчивости
типа «fingers»
в фильтрационных течениях**

Москва
2002

М.Ю. Заславский, А.Х. Пергамент. *Исследование неустойчивости типа “fingers” в фильтрационных течениях.*

Аннотация. Работа посвящена исследованию численными методами классической задачи теории фильтрации – задачи об устойчивости вытеснения одной компоненты флюида другой. Система уравнений, описывающая процесс, состоит из гиперболических уравнений для насыщенности компонент и эллиптического уравнения для порового давления. Были использованы TVD схемы для гиперболического уравнения и итерационные методы на основе продольно-поперечной прогонки для решения эллиптической краевой задачи. Были подтверждены результаты теоретических исследований относительно зависимости инкрементов неустойчивости от пространственной частоты возмущения. Установлено отсутствие дискриминации: максимально быстро растет наибольшая пространственная частота.

M.Yu. Zaslavsky, A.Kh. Pergament. *Investigation of “fingers” instability in filtration flows.*

Abstract. The classical problem, the problem of displacement stability in the filtration flow, is considered in the article. The governing system consists of the hyperbolic equations, describing the saturation evolution, and elliptic one for the pore pressure evolution. The TVD difference schemes are used for the hyperbolic equations and Peaceman - Douglas iteration method for boundary elliptic problem. The theoretical investigation results of the instability increments dependence on the spatial frequency of the perturbation were proved. It is established there is no frequency discrimination: the perturbation of the maximal spatial frequency has the maximal increment of the instability.

Содержание

1. Введение	5
2. Постановка задачи и устойчивость ее решения	6
3. Разностная схема	10
4. Результаты расчета	13
Использованная литература	23

Введение

Одним из эффективных способов добычи углеводородов является закачивание воды или газа с целью вытеснения нефти и газоконденсата в добывающую скважину. Существует большое количество публикаций на эту тему, описывающие различные аспекты этой проблемы [Бедриковецкий П.Г., 1982, Панфилов М.Б., 1986, Голф-Рахт Т.Д., 1986, Бузинов С.Н., Умрихин И.Д., 1973]. То, что вытесняющие компоненты, вода или газ, имеют вязкость существенно меньшую, чем нефть и газоконденсат, приводит к развитию неустойчивости фронта вытеснения и нежелательному заводнению пластов [Мартос В.Н., 1972].

Вероятно первым, кто теоретически рассмотрел этот вопрос, был Чарный И.А., еще в 40-е – 50-е годы. Мы можем сослаться на его работу 1963 г., хотя первые результаты были им получены ранее. Наиболее серьезные исследования этого процесса, качественно и численными методами, были выполнены Баренблаттом Г.И. [1971] совместно с Ентовым В.М. [1972, 1980, 1984] и Виниченко А.П. [1978, 1980]. Было получено выражение для инкремента неустойчивости фронта вытеснения. Ими показано, что без влияния силы тяжести фронт вытеснения устойчив, если подвижность вытесняющей жидкости за фронтом меньше, чем подвижность вытесняемой жидкости впереди него. В этом случае фронт вытеснения эволюционирует медленнее, чем происходит процесс сглаживания фронта за счет перетока в поперечном направлении. Если вытеснение происходит снизу вверх, причем плотность вытесняющей жидкости больше, то действие силы тяжести способствует стабилизации фронта.

Теоретические исследования были подтверждены математическим моделированием процессов вытеснения. Обычно для расчетов используются полностью неявные схемы, что обеспечивает устойчивость счета при любых шагах по времени [Ентов В.М., 1987, Vachmat Y., Bear J., 1986, Peaceman D.W., 1987]. Полученные схемы полностью консервативны, потому что, как правило, аппроксимируют уравнения баланса масс каждой компоненты методом конечных объемов, что является несомненным достоинством. Однако они являются схемами первого порядка аппроксимации по времени и, как следствие, обладают большой схемной вязкостью, что приводит к заметной деформации фронтов вытеснения и большим погрешностям при вычислении инкрементов в случае рассмотрения неустойчивых процессов. Кроме того, решение уравнений для определения насыщенности компонент и порового давления на неявном слое осуществляется посредством ньютоновских итераций, что приводит к необходимости обращать матрицы высокого порядка.

Задача вытеснения для двух несжимаемых, несмешиваемых жидкостей приводит к гиперболическому уравнению для насыщенностей. Поэтому целесообразно применять классические явные схемы с коррекцией потоков, позволяющие обеспечить хорошую форму фронтов (*high resolution scheme*) и не нуждающиеся в итерациях. В качестве таковых предлагаются схемы Радвогина Ю.Б. [Радвогин Ю.Б., 1991, Radvogin Yu.B., Zaitsev N.A., 1996]. Эллиптическое уравнение для порового давления решается методом продольно-поперечной прогонки [Peaceman D.W. ...] с итерациями, что также позволяет избежать обращения матрицы. Если бы рассматривали задачи для слабо-сжимаемых компонент, то, как показывает опыт, число итераций могло быть меньшим, т.к. не требовалось считать до сходимости. В случае многокомпонентной фильтрации Митлиным В.С. [1986] были рассмотрены безитерационные схемы, в которых суммарная аппроксимация достигается за счет выполнения термодинамических соотношений.

В настоящей работе исследованы двумерные задачи устойчивости вытеснения двух несжимаемых жидкостей на основе явных схем *high-resolution* для гиперболических уравнений и неявных консервативных схем, решаемых методом продольно-поперечной прогонки для эллиптических уравнений, описывающих эволюцию порового давления.

Постановка задачи и устойчивость ее решения

Пусть в серой области находится, например, нефть с концентрацией S_{oil} и вязкостью μ_{oil} , а слева находится, к примеру, вода с концентрацией S_{water} и вязкостью μ_{water} (см. рис.2.1), и вода начинает вытеснять нефть.

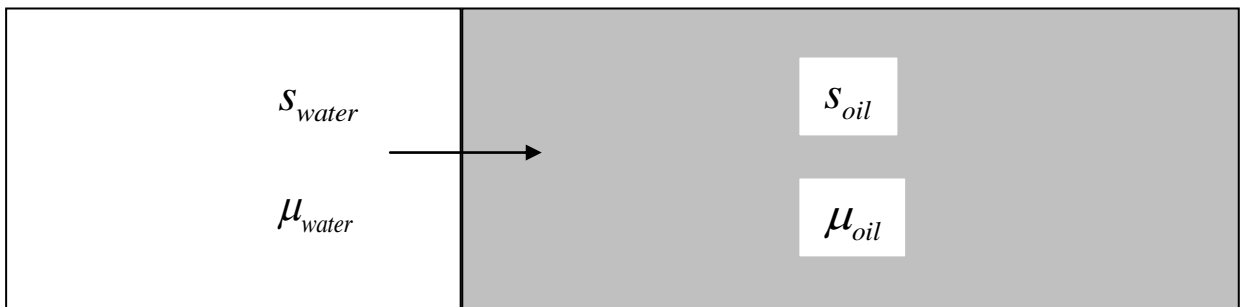


Рис.2.1.

Дадим математическое описание данного явления. Пусть $S_1 =: S$ и $S_2 = 1 - S$ это насыщенности (т.е. объемные концентрации) воды и нефти, соответственно, m - пористость среды, k - ее проницаемость, $k_{1,2}$ - относи-

тельные проницаемости воды и нефти, $\mu_{1,2}$ - их вязкости, $u_{1,2}$ - их скорости, $\rho_{1,2}$ - их плотности, p – давление.

Мы предполагаем, что как нефть, так и вода несжимаемы (т.е. плотности $\rho_{water} = const$ и $\rho_{oil} = const$), а также, что выполняется закон Дарси: $\vec{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} k_i(s_i) \nabla p$. Тогда уравнения неразрывности для каждой фазы

записываются в виде

$$m \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i s_i) + \operatorname{div} \left(-\frac{k}{\mu_i} \rho_i k_i(s_i) \nabla p \right) = 0, i = 1; 2. \quad (2.1)$$

Сложим оба уравнения, предварительно сократив первое на $(-\rho_1)$, а второе – на $(-\rho_2)$, учтя, что $s_1 = s$ и $s_2 = 1 - s$:

$$\operatorname{div} \left(\left(\frac{k}{\mu_1} k_1(s) + \frac{k}{\mu_2} k_2(1-s) \right) \nabla p \right) = 0. \quad (2.2)$$

Введем обозначение

$$\vec{w} = \left(\frac{k}{\mu_1} k_1(s) + \frac{k}{\mu_2} k_2(1-s) \right) \nabla p. \quad (2.3)$$

Тогда второе уравнение можно переписать в виде

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(-\varphi(s) \vec{w}) = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\varphi(s) = \frac{\frac{k_1(s)}{\mu_1}}{\frac{k_1(s)}{\mu_1} + \frac{k_2(1-s)}{\mu_2}} = \frac{k_1(s)}{k_1(s) + \mu_0 k_2(1-s)} \quad \text{при } \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (2.5)$$

Таким образом, система, описывающая данное явление, состоит из двух уравнений:

1. уравнения гиперболического типа для насыщенности, т.к. (2.4) при условии $\operatorname{div}(\vec{w}) = 0$ равносильно уравнению

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{d\varphi(s)}{ds} \nabla s \cdot \vec{w} = 0 \quad (2.4')$$

2. уравнения эллиптического типа для давления (2.2).

В нашей задаче целесообразно рассматривать $k_1(s)$ и $k_2(s)$ определенного вида

$$k_1(s) = \begin{cases} \left(\frac{s-s_0}{1-s_0}\right)^\alpha, & s \geq s_0 \\ 0, & s < s_0 \end{cases}, \quad k_2(s) = \begin{cases} \left(\frac{s-s_0}{1-s_0}\right)^\beta, & s \geq s_0 \\ 0, & s < s_0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

где s_0 отвечает за остаточную (т.е. невымываемую) нефть, а α и β - некоторые числа.

Общий способ анализа устойчивости какой-либо системы состоит в исследовании ее поведения после наложения на основное состояние малых возмущений.

Рассмотрим простейший случай – движение с постоянной скоростью плоской границы раздела двух жидкостей с различными плотностями и вязкостями. Рассмотрим уравнения $\vec{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} k_i(s_i) \nabla p$ и

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}_1) = 0, \quad \operatorname{div}(\vec{w}) = 0, \quad \vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$

Течение, устойчивость которого исследуется, является плоскопараллельное движение вдоль оси Ox с постоянной скоростью фильтрации

$w_0 = u_{10} + u_{20}$. Позади и впереди скачка, движущегося со скоростью $V = \frac{w_0}{m} \frac{\varphi(s_-) - \varphi(s_+)}{s_- - s_+}$, насыщенность постоянна и равна соответственно s_- и s_+ .

Распределение давления описывается соотношениями

$$p_0^- = p_0 - \frac{\mu_1}{k} \frac{w_0}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(1-s_-)} (x - Vt) \quad \text{при } x - Vt < 0;$$

$$p_0^+ = p_0 - \frac{\mu_1}{k} \frac{w_0}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(1-s_+)} (x - Vt) \quad \text{при } x - Vt \geq 0.$$

Уравнение невозмущенной границы имеет вид $x - Vt = 0$. Пусть $\vec{u}_j = \vec{u}_{j0} + \varepsilon \vec{u}_{j1}$, $p = p_0 + \varepsilon \tilde{p}$. Уравнение границы раздела следующее: $x = x_0(y, z, t) + \varepsilon \tilde{x}(y, z, t)$. Тогда для возмущенного движения имеем уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_j = -\frac{kk_1(s_-)}{\mu_1} \text{grad}(\tilde{p}), \quad x - Vt < 0 \\ \vec{u}_j = -\frac{kk_1(s_+)}{\mu_1} \text{grad}(\tilde{p}), \quad x - Vt > 0 \\ \text{div}(\vec{w}) = 0, \quad \vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Пользуясь малостью искажения границы, можно отнести условия на фронте на невозмущенную границу раздела $x - Vt = 0$. Тогда с точностью $O(\varepsilon^2)$ имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{u}_1^- - \vec{u}_1^+, \vec{e}_x) = m(s_- - s_+) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \\ (\vec{u}_1^- + \vec{u}_2^-, \vec{e}_x) = (\vec{u}_1^+ + \vec{u}_2^+, \vec{e}_x) = (\vec{w}, \vec{e}_x) \\ \tilde{p}^- - \tilde{p}^+ = \frac{\mu_1}{k} \left(\frac{1}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(1-s_-)} - \frac{1}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(1-s_+)} \right) w_0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Сюда надо еще приплюсовать условия затухания возмущений при $x \rightarrow \pm\infty$.

Произвольное возмущение можно разложить в интеграл Фурье по y и z . Поэтому для исследования устойчивости достаточно рассмотреть развитие элементарного синусоидального возмущения. Для этого положим $\tilde{x} = X(t)e^{i\gamma_1 y + i\gamma_2 z}$, где $X(t)$ - амплитуда. Тогда, подставляя эти выражения в (2.7), легко получить, что $\tilde{p}^\pm = P^\pm(t)e^{i\gamma_1 y + i\gamma_2 z \pm \gamma x'}$, где

$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$, $x' = x - Vt$. Возмущения скоростей легко получаются из

(2.7). Тогда, используя (2.8), получаем, что

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{N\gamma X}{m(s_- - s_+) \left(\frac{1}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(1-s_-)} + \frac{1}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(1-s_+)} \right)}, \text{ где}$$

$$N = w_0 \left(\frac{1}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(1-s_-)} - \frac{1}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(1-s_+)} \right).$$

Решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, имеем:

$$X = X_0 e^{-\frac{N\gamma t}{m(s_- - s_+) \left(\frac{1}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(1-s_-)} + \frac{1}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(1-s_+)} \right)}}. \text{ Значит, для}$$

затухания колебаний необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\frac{1}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(1-s_-)} - \frac{1}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(1-s_+)} > 0.$$

Так как формула не зависит от γ , то результат справедлив для возмущений произвольной формы. Если же указанное выше неравенство не выполняется (как, например, в случае вытеснения водой нефти), то граница раздела становится неустойчивой и разбивается на отдельные "языки" сложной и случайной формы. Такая неустойчивость носит английское название "fingers".

Разностная схема

Рассмотрим двумерную задачу фильтрации в прямоугольнике $\{(x; y) : 0 \leq x \leq x_{\max}; 0 \leq y \leq y_0\}$. Зададим граничные и начальные условия в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{y=y_0} = 0, \quad p|_{x=0} = p_0, \quad p|_{x=1} = p_1, \\ s|_{x=0} = s^-, \quad s|_{t=0} = \begin{cases} s^-, & x \leq x_0 + A \sin^2(my) \\ s^+, & x > x_0 + A \sin^2(my) \end{cases}, \quad x_0 \in [0; 1] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отметим, что давление и насыщенность будем искать в точках (i, j) и $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$.

Для решения уравнения (2.2) необходимо обратить пятидиагональную матрицу. Чтобы избежать столь неприятной операции, поступим следующим образом: заменим эллиптическое уравнение параболическим и будем считать до стационара. Для решения же параболического воспользуемся локально-одномерным методом, впервые предложенным Самарским (дужка означает полуцелый слой по вспомогательному времени, шаг по которому равен T , а крышка – неявный слой):

$$\frac{\tilde{p}_{i+1/2, j+1/2} - p_{i+1/2, j+1/2}}{T} = - \frac{\tilde{w}_{x, i+1, j+1/2} - \tilde{w}_{x, i, j+1/2}}{h_x}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\hat{p}_{i+1/2, j+1/2} - \tilde{p}_{i+1/2, j+1/2}}{T} = - \frac{\hat{w}_{y, i+1/2, j+1} - \hat{w}_{x, i+1/2, j}}{h_y}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\bar{p}_{i,j} - p_{i,j}}{\Gamma} = -\frac{\bar{w}_{x,i+1/2,j} - \bar{w}_{x,i-1/2,j}}{h_x}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\hat{p}_{i,j} - \bar{p}_{i,j}}{\Gamma} = -\frac{\hat{w}_{y,i,j+1/2} - \hat{w}_{y,i,j-1/2}}{h_y}. \quad (3.5)$$

Здесь:

$$\bar{w}_{x,i+1,j+1/2} = -\frac{2r(s_{i+3/2,j+1/2})r(s_{i+1/2,j+1/2})}{r(s_{i+3/2,j+1/2}) + r(s_{i+1/2,j+1/2})} \frac{\bar{p}_{i+3/2,j+1/2} - \bar{p}_{i+1/2,j+1/2}}{h_x}, \quad (3.6)$$

$$\hat{w}_{y,i+1/2,j} = -\frac{2r(s_{i+1/2,j+1/2})r(s_{i+1/2,j-1/2})}{r(s_{i+1/2,j+1/2}) + r(s_{i+1/2,j-1/2})} \frac{\hat{p}_{i+1/2,j+1/2} - \hat{p}_{i+1/2,j-1/2}}{h_y}, \quad (3.7)$$

$$\bar{w}_{x,i+1/2,j} = -\frac{2r(s_{i+1,j})r(s_{i,j})}{r(s_{i+1,j}) + r(s_{i,j})} \frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i,j}}{h_x}, \quad (3.8)$$

$$\hat{w}_{y,i,j+1/2} = -\frac{2r(s_{i,j+1})r(s_{i,j})}{r(s_{i,j+1}) + r(s_{i,j})} \frac{\hat{p}_{i,j+1} - \hat{p}_{i,j}}{h_y}, \quad (3.9)$$

где $r(s) = \frac{k}{\mu_1} k_1(s) + \frac{k}{\mu_2} k_2(1-s)$.

Каждое же из уравнений (3.2)-(3.5) легко решить методом прогонки.

Теперь рассмотрим схему для гиперболического уравнения. Для него рассмотрим схему, основанную на методах Ю.Б. Радвогина. Ее можно интерпретировать как схему типа предиктор-корректор. Шаг корректора заключается в счете насыщенности на неявном слое:

$$m \frac{\hat{s}_{i+1/2,j+1/2} - s_{i+1/2,j+1/2}}{\tau} + \frac{\bar{F}_{i+1,j+1/2} - \bar{F}_{i,j+1/2}}{h_x} + \frac{\bar{G}_{i+1/2,j+1} - \bar{G}_{i+1/2,j}}{h_y} = 0 \quad (3.10)$$

$$m \frac{\hat{s}_{i,j} - s_{i,j}}{\tau} + \frac{\bar{F}_{i+1/2,j} - \bar{F}_{i-1/2,j}}{h_x} + \frac{\bar{G}_{i,j+1/2} - \bar{G}_{i,j-1/2}}{h_y} = 0 \quad (3.11)$$

Предиктор же состоит в определении потоков \bar{F} и \bar{G} в необходимых точках. А именно, в переносе насыщенности в эти точки и последующем пересчете давления. Рассмотрим уравнение (3.10). Пусть для определенности

$$w_{x,i+1,j+1/2} < 0, w_{x,i,j+1/2} < 0, \quad (3.12)$$

$$w_{y,i+1/2,j+1} < 0, w_{y,i+1/2,j} < 0. \quad (3.13)$$

Тогда

$$\bar{s}_{i+1,j+1/2} = \tilde{s}_{i+1,j+1/2} + 0.5(1 - \frac{\tau}{h_x} a_{i+1,j+1/2}) \delta_x s_{i+1,j+1/2}, \quad (3.14)$$

$$\bar{s}_{i+1/2,j+1} = \tilde{s}_{i+1/2,j+1} + 0.5(1 - \frac{\tau}{h_y} b_{i+1/2,j+1}) \delta_y s_{i+1/2,j+1}, \quad (3.15)$$

$$\tilde{s}_{i+1,j+1/2} = s_{i+1/2,j+1/2} - 0.5 \frac{\tau}{h_y} (s_{i+1/2,j+1/2} - s_{i+1/2,j-1/2}) b_{i+1,j+1/2}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{s}_{i+1/2,j+1} = s_{i+1/2,j+1/2} - 0.5 \frac{\tau}{h_x} (s_{i+1/2,j+1/2} - s_{i-1/2,j+1/2}) a_{i+1/2,j+1}, \quad (3.17)$$

$$\bar{\delta}_x s_{i+1,j+1/2} = \min \text{mod}(\delta_x s_{i,j+1/2}, \delta_x s_{i+1,j+1/2}), \quad (3.18)$$

$$\bar{\delta}_y s_{i+1/2,j+1} = \min \text{mod}(\delta_y s_{i+1/2,j}, \delta_y s_{i+1/2,j+1}), \quad (3.19)$$

$$\delta_x s_{i+1,j+1/2} = s_{i+3/2,j+1/2} - s_{i+1/2,j+1/2}, \quad (3.20)$$

$$\delta_y s_{i+1/2,j+1} = s_{i+1/2,j+3/2} - s_{i+1/2,j+1/2}, \quad (3.21)$$

$$a_{i+1,j+1/2} = -\frac{d\phi}{ds} (0.5(s_{i+1/2,j+1/2} + s_{i+3/2,j+1/2})) w_{x,i+1,j+1/2}, \quad (3.22)$$

$$b_{i+1/2,j+1} = -\frac{d\phi}{ds} (0.5(s_{i+1/2,j+1/2} + s_{i+1/2,j+3/2})) w_{y,i+1/2,j+1}. \quad (3.23)$$

$$a_{i+1/2,j+1} = -\frac{d\phi}{ds} (0.5(s_{i+1,j+1} + s_{i,j+1})) w_{x,i+1/2,j+1}, \quad (3.24)$$

$$b_{i+1,j+1/2} = -\frac{d\phi}{ds} (0.5(s_{i+1,j+1} + s_{i+1,j})) w_{y,i+1,j+1/2}. \quad (3.25)$$

$\bar{\delta}$ называют лимитером или ограничителем потока. Простейшая его реализация дается функцией

$$\min \text{mod}(x, y) = \max(0, xy) \text{sign}(x) \max(|x|, |y|). \quad (3.24)$$

Случай других знаков компонент потока W приводит к повороту шаблона и рассматривается аналогично.

Далее при известной насыщенности пересчитывается давление. Необходимые формулы имеют вид (3.2)-(3.9) с единственным отличием: усреднять насыщенность уже не нужно. Для окончания предиктора необходимо определить потоки \bar{F} и \bar{G} в соответствующих точках:

$$\bar{F}_{i+1,j+1/2} = -\varphi(\bar{s}_{i+1,j+1/2}) \frac{P_{i+3/2,j+1/2} - P_{i+1/2,j+1/2}}{h_x}, \quad (3.25)$$

$$\bar{G}_{i+1/2,j+1} = -\varphi(\bar{s}_{i+1/2,j+1}) \frac{P_{i+1/2,j+3/2} - P_{i+1/2,j+1/2}}{h_y}, \quad (3.25)$$

где давление берется с предиктора.

Для уравнения (3.11) потоки определяются аналогично.

Полученная разностная схема консервативна и имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$.

Результаты расчета

Цель настоящей работы – рассмотрение различных аспектов задачи вытеснения. Процесс вытеснения представляет собой распространение скачка насыщенности. Поэтому первоначально численными методами будет исследован одномерный процесс вытеснения. Сначала отметим, что если $A = 0$, то задача получается одномерной: решение не зависит от y . Движение различных разрывов в начальных условиях и соответствующие им распределения давлений показаны на рис.4.2-4.4. Входные данные:

$x_0 = 0.3$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 0.1$, $s_0 = 0.1$. Для простоты положим $k = m = 1$ (т.к. они лишь меняют шаги по времени и по пространству).

Из рисунков можно сделать вывод, что скорость движения скачка насыщенности сильно зависит от величины разрыва. Распределение давления в одномерном случае есть ломаная: разрыв производной соответствует условию непрерывности скорости фильтрации.

Для точного определения вида движения скачка необходимо для каждого случая решить задачу Римана о распаде разрыва. Рассмотрим движение скачка $(s^-; s^+)$ в положительном направлении оси Ox , т.е. предполагается, что $\nabla p < 0$. Представим уравнение для 1-ой и 2-ой фаз (воды и нефти, соответственно) в виде

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

и

$$m \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$$

где

$$u_1 = -\frac{k}{\mu_1} k_1(s) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{k}{\mu_2} k_2(s) \frac{\partial p}{\partial x},$$

что означает, что движение происходит от большего давления к меньшему. Тогда для скорости движения фронта из закона сохранения массы для 1-ой и 2-ой фаз имеем:

$$V = \frac{u_1^- - u_1^+}{m(s^- - s^+)} = -\frac{u_2^- - u_2^+}{m(s^- - s^+)}.$$

Значит, $w = -(u_1 + u_2)$ непрерывно через скачок. Но $u_1 = -\phi(s)w$, следовательно,

$$V = -\frac{\phi(s^-) - \phi(s^+)}{m(s^- - s^+)} w \quad (4.1)$$

Рассмотрим более подробно распространение скачка. В одномерном случае (2.4) переписывается в виде

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - w \phi'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad w = w(t).$$

Для него можно получить уравнение характеристик

$$\frac{dx}{dt} = -w \frac{\phi'(s)}{m}, \quad (4.2)$$

а, значит, его решение имеет вид

$$x = x_0(s) - U \frac{\phi'(s)}{m}, \quad U = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

Т.к. функция $\phi'(s)$ имеет максимум, решение может становиться неоднозначным. Это произойдет в момент времени t^* , когда касательная к кривой $s(x, t^*)$ станет вертикальной. Дифференцируя (4.3) на скачке, имеем

$$\frac{dx_l}{dt} = -w \frac{\phi'(s_l)}{m} + (-U \phi''(s_l) + x_0(s_l)) \frac{ds_l}{dt} \quad (4.4)$$

Приравнявая (4.1) и (4.4), получим уравнение для насыщенности на скачке s_l

$$\frac{ds_l}{dt} = -\frac{w(\phi(s_l) - \phi(s_r) - \phi'(s_l)(s_l - s_r))}{(s_l - s_r)(-U \phi''(s_l) + m x_0(s_l))} \quad (4.5)$$

Чтобы определить значение s_r , необходимо использовать $x(s_l) = x(s_r)$ или $-U \phi'(s_l) + m x_0(s_l) = -U \phi'(s_r) + m x_0(s_r)$. Из (4.5) следует, что если $\frac{ds_l}{dt} = 0$, т.е. насыщенность на скачке при его распространении остается неизменной, то она должна удовлетворять соотношению

$$\phi'(s_l) = \frac{\phi(s_l) - \phi(s_r)}{s_l - s_r}. \quad (4.6)$$

Это условие имеет простую геометрическую интерпретацию: из точки s_r проведена касательная к $\phi(s)$ в точке s_l . Из формул (4.1) и (4.6) следует простой способ построения решения задачи о распаде разрыва:

- 1) если $s^- > s^+$, то нужно построить выпуклую вверх оболочку функции $\phi(s)$ на отрезке $[s^+; s^-]$, т.е. функцию

$\hat{\varphi}(s) = \inf_{\sigma \in F} \sigma(s)$, где F - совокупность всех выпуклых вверх функций $\sigma(s)$ таких, что $\sigma(s) > \varphi(s) \quad \forall s \in [s^+; s^-]$. Каждый отрезок $\hat{\varphi}(s)$ определяет ударную волну, движущуюся со скоростью (4.1). Кусок $\hat{\varphi}(s)$, являющийся частью $\varphi(s)$, дает центрированную волну.

- 2) если $s^- < s^+$, то нужно построить выпуклую вниз оболочку функции $\varphi(s)$ на отрезке $[s^-; s^+]$, т.е. функцию $\tilde{\varphi}(s) = \sup_{\sigma \in G} \sigma(s)$, где G - совокупность всех выпуклых вниз функций $\sigma(s)$ таких, что $\sigma(s) \leq \varphi(s) \quad \forall s \in [s^+; s^-]$. Каждый отрезок $\tilde{\varphi}(s)$ определяет ударную волну, движущуюся со скоростью (4.1). Кусок $\tilde{\varphi}(s)$, являющийся частью $\varphi(s)$, дает центрированную волну.

Поясним сказанное на примере. Рассмотрим движение скачка $s^- = 0.9, s^+ = 0.2$. Согласно вышеуказанному способу построения решения, нужно найти выпуклую вверх оболочку $\varphi(s)$ на отрезке $[s^+; s^-]$. Она будет состоять из отрезка $(s^+; \varphi(s^+)) - (s^0; \varphi(s^0))$ - касательного к $\varphi(s)$ в точке s^0 и куска $\varphi(s)$, $s \in [s^0; s^-]$ (см. рис 4.1). Тогда решением будет скачок $(s^+; s^0)$ и центрированная волна между s^0 и s^- . График численного решения подтверждает проведенное исследование (см. рис. 4.3, нижний рисунок).

При $s^- = 0.1, s^+ = 0.4, s^- = 0.3, s^+ = 0.55$ и $s^- = 0.1, s^+ = 0.55$ нужно построить выпуклую вниз оболочку $\varphi(s)$ на отрезке $[s^-; s^+]$. В первых двух случаях в графике $\tilde{\varphi}(s)$ отрезков не будет, значит, решение будет иметь вид центрированных волн (см. рис. 4.2 и рис 4.3, верхние рисунки). В последнем случае возникнет также ударная волна (см. рис. 4.2, нижний рисунок). При $s^- = 0.5, s^+ = 0.2$ строим выпуклую вверх оболочку $\varphi(s)$ на отрезке $[s^-; s^+]$. Тогда $\hat{\varphi}(s)$ имеет вид отрезка, и решением будет ударная волна (см. рис. 4.4)

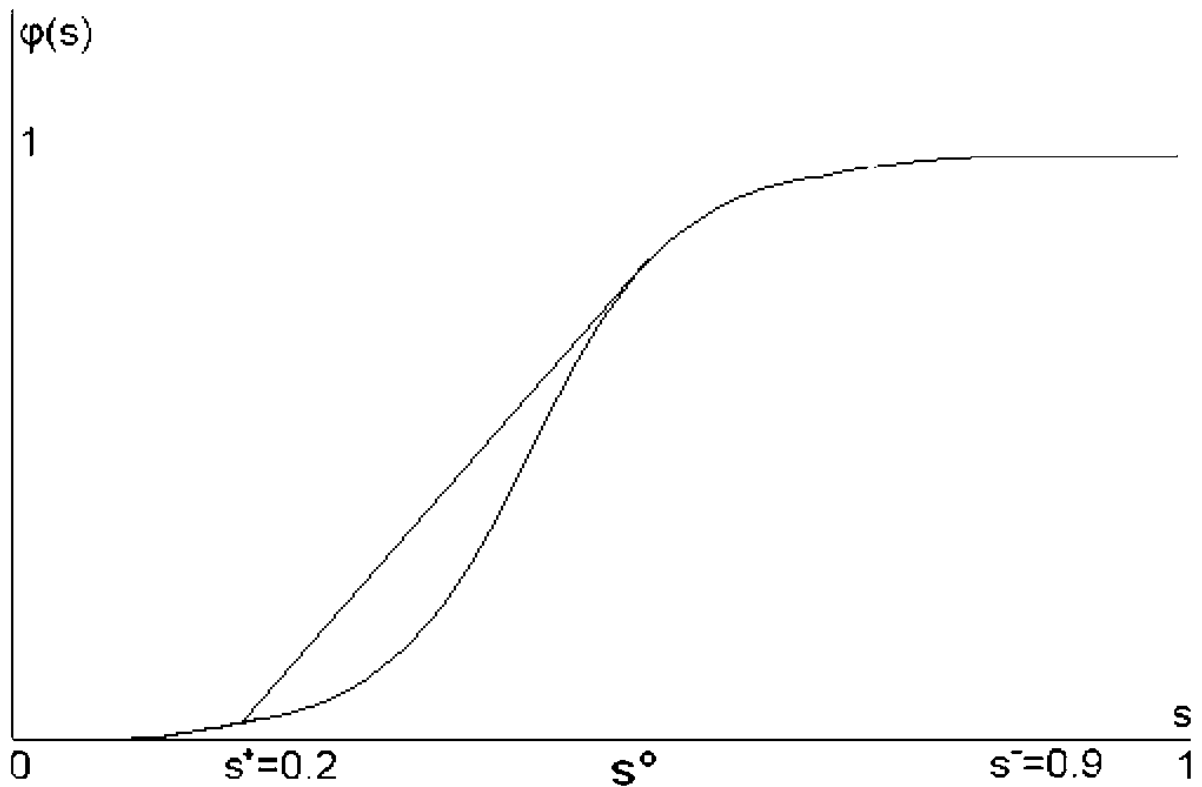


Рис. 4.1

Результат одного из вариантов двумерного счета представлен на рис. 4.5. Программа считала до $t_{\max} = 8$ с $h_x = h_y = 1/30$ и $\tau = 0.02$. Началь-

ные условия: $s|_{t=0} = \begin{cases} 0.5, & x \leq x_0 + 0.2 \sin^2(3\pi y) \\ 0.1, & x > x_0 + 0.2 \sin^2(3\pi y) \end{cases}$.

$x_0 = 0.3, \mu_0 = 0.1, s_0 = 0.1, p_0 = 0.9, p_1 = 0.1, \mu_1 = 0.1$

$k_1(s) = \begin{cases} \left(\frac{s-s_0}{1-s_0}\right)^2, & s \geq s_0 \\ 0, & s < s_0 \end{cases}, k_2(s) = \begin{cases} \left(\frac{s-s_0}{1-s_0}\right)^2, & s \geq s_0 \\ 0, & s < s_0 \end{cases}$ Область, в которой

решалась задача, определялась $x_{\max} = 2, y_0 = 1$.

На рис. 4.5 представлено развитие неустойчивости. Очевиден рост амплитуды возмущений (на рис. 4.5, 4.7, 4.8 на верхних рисунках показаны линии уровня насыщенности воды, на нижних – профили насыщенности).

Целесообразно сравнить результаты математического моделирования задачи неустойчивости вытеснения с результатами теоретического исследования [Баренблатт и др., 1984]. Параметры расчетов близки к рассмотренным

в работе, в частности, первоначальное значение величины $\frac{q_0 \mu_1 L}{k p_0} = 0.275$,

где q_0 - расход, а L - длина волны возмущения (0.3 в работе),

$\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0.1$ так же, как и в опубликованных расчетах.

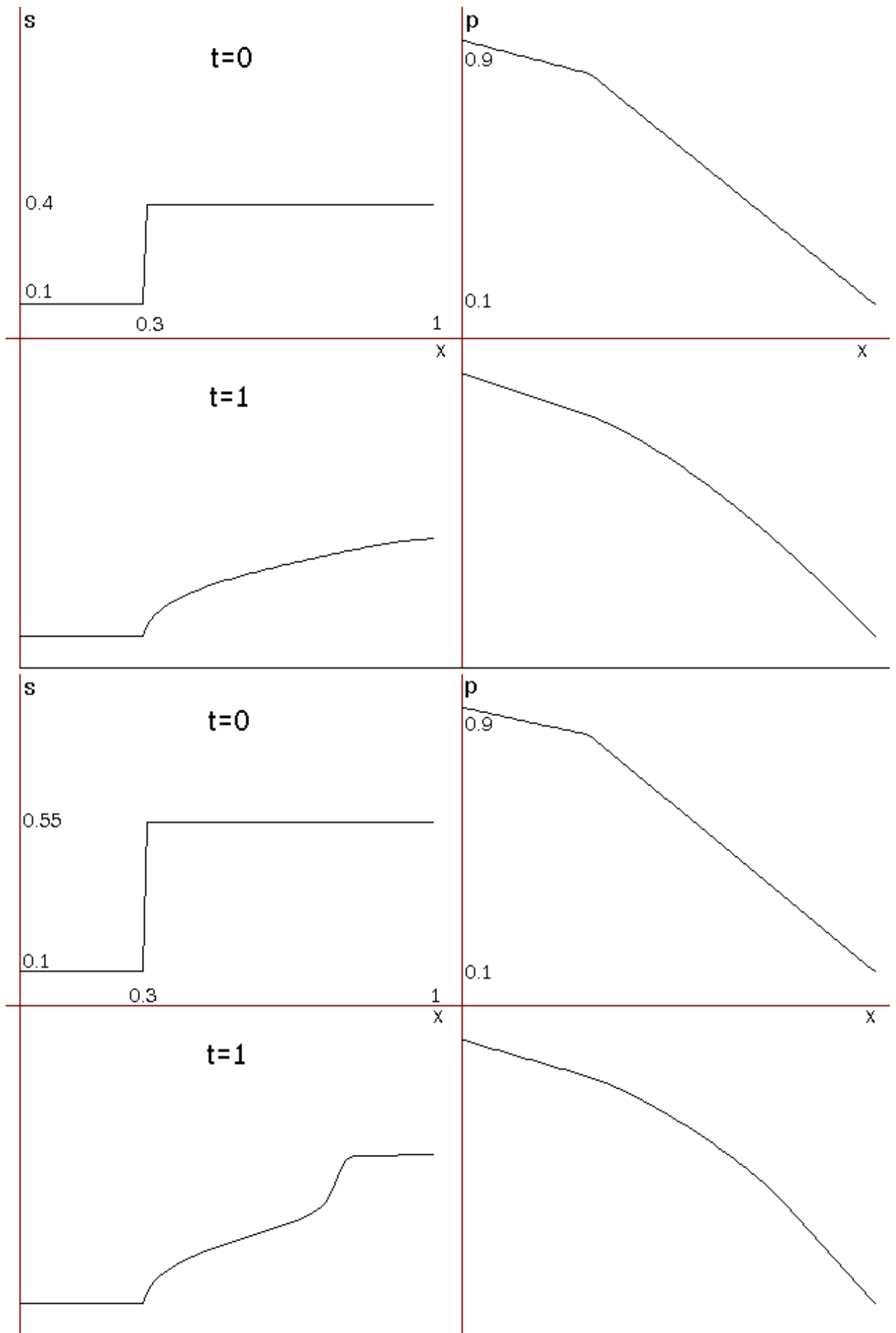


Рис. 4.2

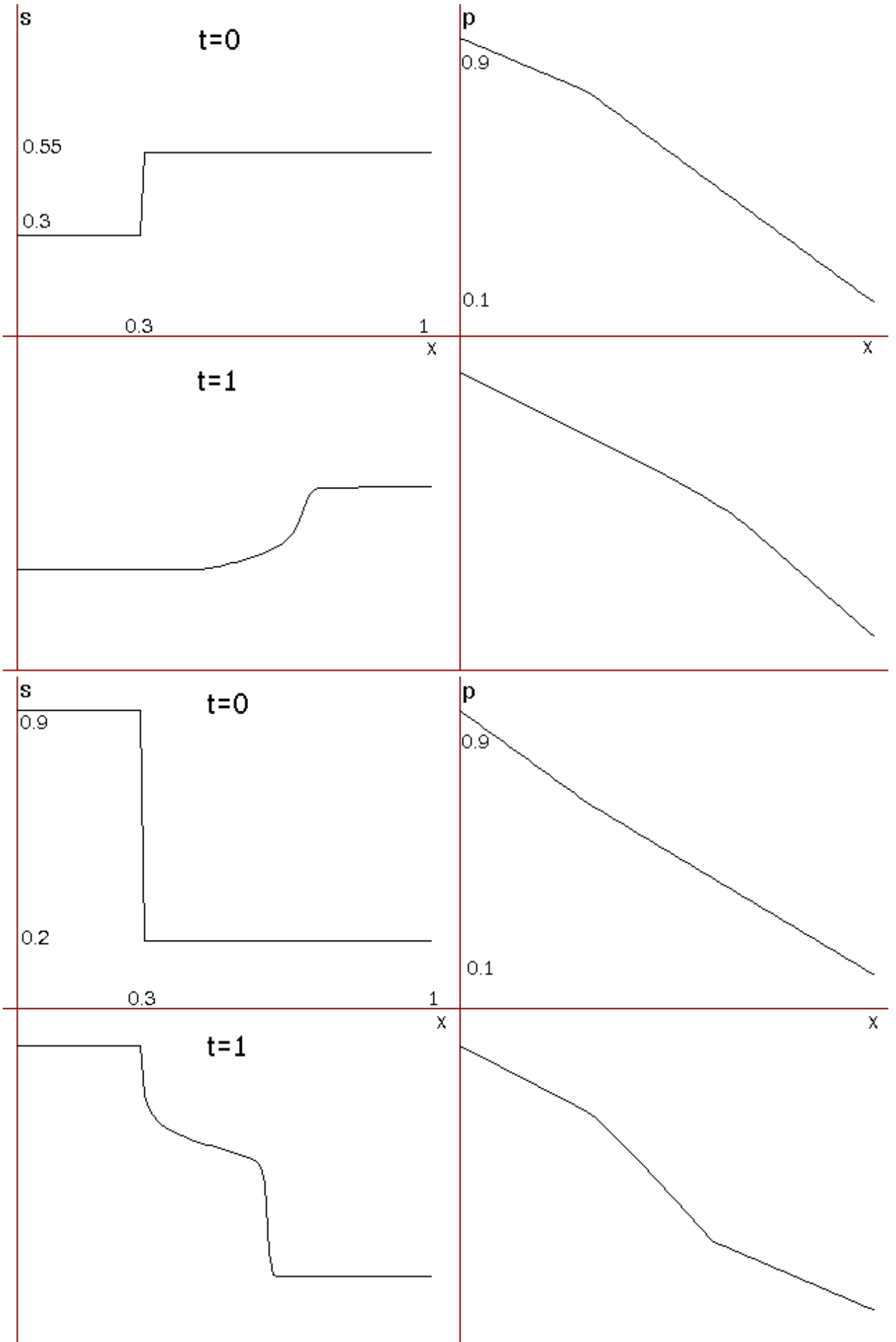


Рис. 4.3.

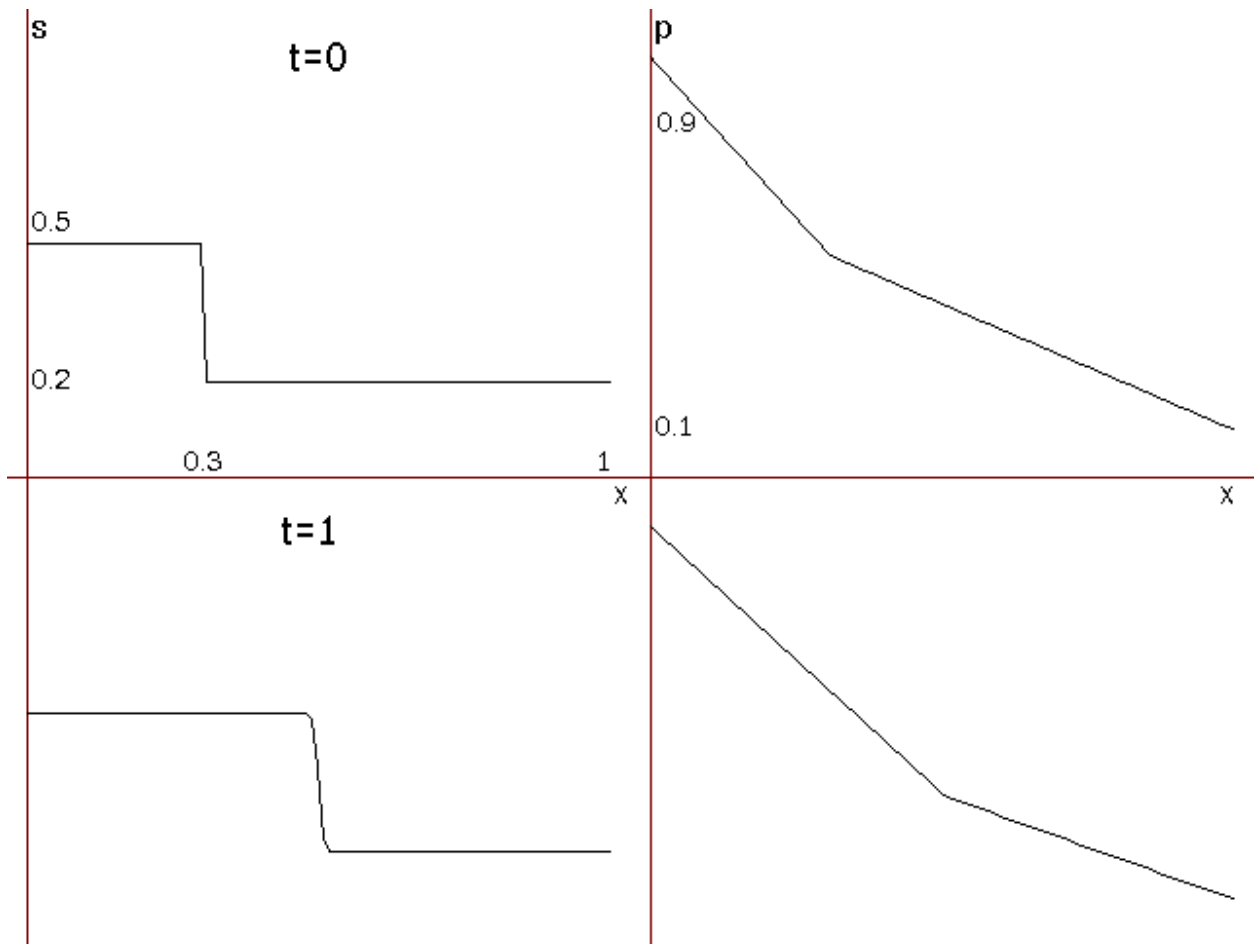


Рис. 4.4.

Согласно результатам этой работы инкремент неустойчивости тем больше, чем больше пространственная частота возмущения. Если первоначальное возмущение фронта синусоидально, например, $\sin \beta y$ или $\cos \beta y$, то инкремент имеет вид

$$\gamma = \frac{w_0 \beta \left(\frac{1}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(s_-)} - \frac{1}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(s_+)} \right)}{m(s_- - s_+) \left(\frac{1}{k_1(s_-) + \mu_0 k_2(s_-)} + \frac{1}{k_1(s_+) + \mu_0 k_2(s_+)} \right)}, \quad (4.7)$$

а амплитуда возмущения ведет себя как $X(t) = X_0 e^{\gamma t}$. Определим зависи-

мость величины $\alpha = \ln \frac{X}{X_0}$ как функцию времени. Мы видим, что значение

показателя степени тем больше, чем больше β , но зависимость от времени не линейная, т.к. мы рассматриваем первую краевую задачу вдоль направления движения фронта, т.е. $p(0, y, t) = p_0$, $p(x_{\max}, y, t) = p_1$, и скорость движения фронта в нашей задаче не постоянна. Действительно, согласно общим представлениям скорость движения разрыва V удовлетворяет усло-

вию $V = \frac{w}{m} \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{s_+ - s_-}$, где w - скорость фильтрации. Величина w для одно-

мерного течения постоянна, если на границе задан поток флюида. В случае краевых условий первого рода $w \sim \frac{1}{\sqrt{t+c}}$, так что зависимость α от вре-

мени нелинейна и не совпадает со значением γt , где γ определяется соотношением (4.7). Однако, общая тенденция роста α с ростом значения пространственной частоты подтверждается (см. рис.4.6).

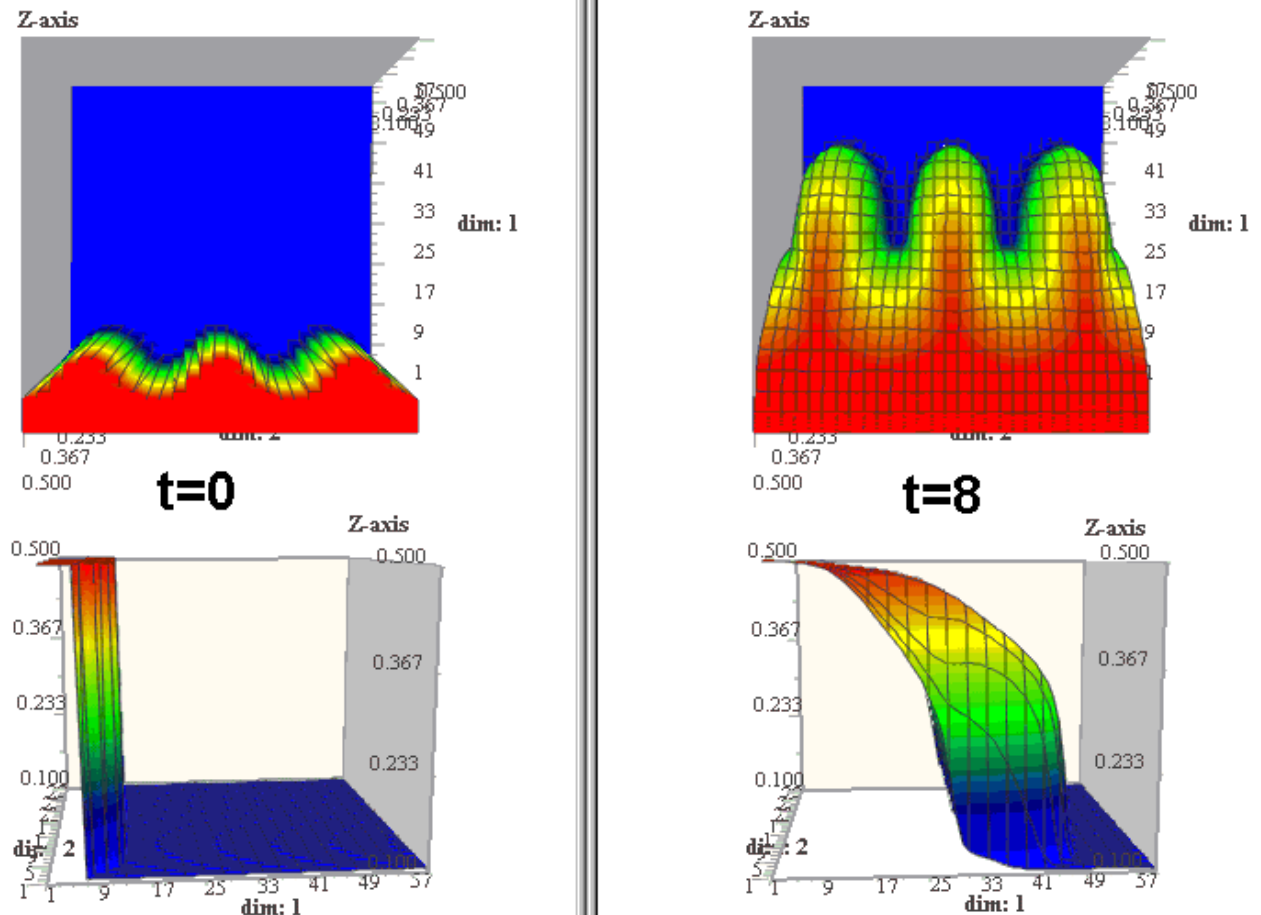


Рис. 4.5

Следует отметить, что расчеты подобного рода весьма трудоемки, т.к. требуется высокая точность вычислений, как всегда при исследовании неустойчивостей. Особую проблему представляет решение уравнения для порового давления p . Необходимо, чтобы итерации для расчета порового давления сходились с высокой точностью. В противном случае значения инкрементов определяются с заметной погрешностью.

Вышеизложенные результаты справедливы в том случае, если остаточная насыщенность s_0 равна 0. Если $s_0 > 0$, то инкременты имеют иные значения. Структура фронта также меняется. В случае $s_0 \neq 0$ фронт более

крутой, но скорость его меньше, чем при отсутствии остаточной насыщенности.

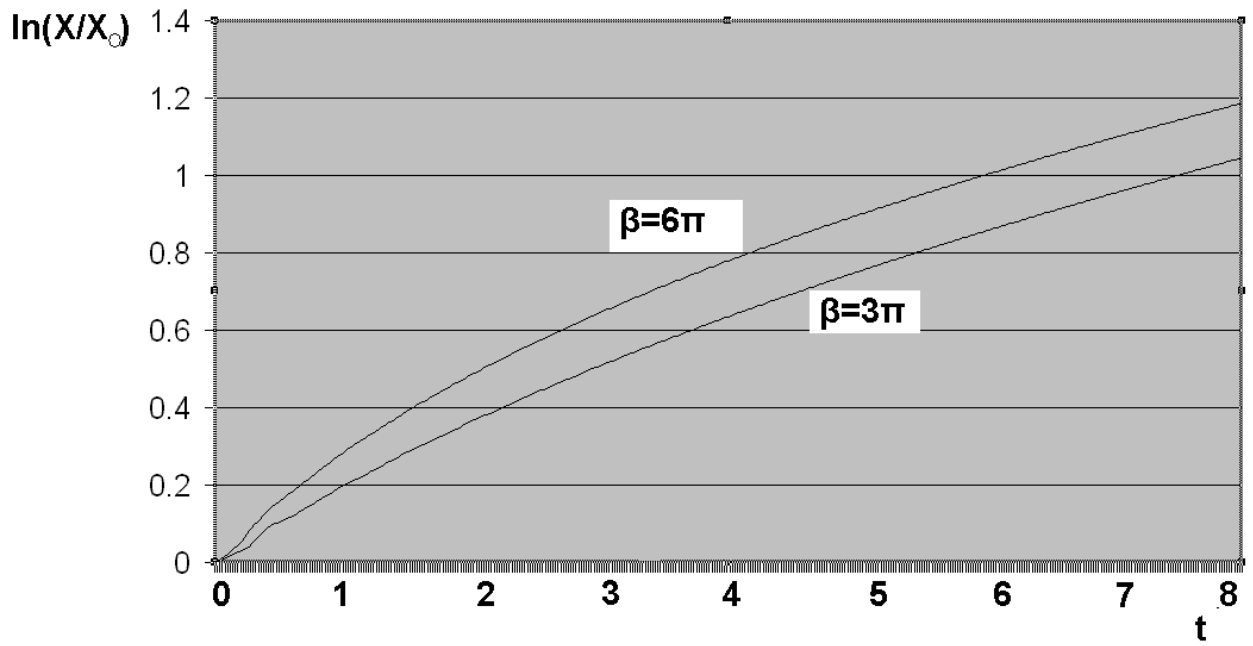


Рис. 4.6

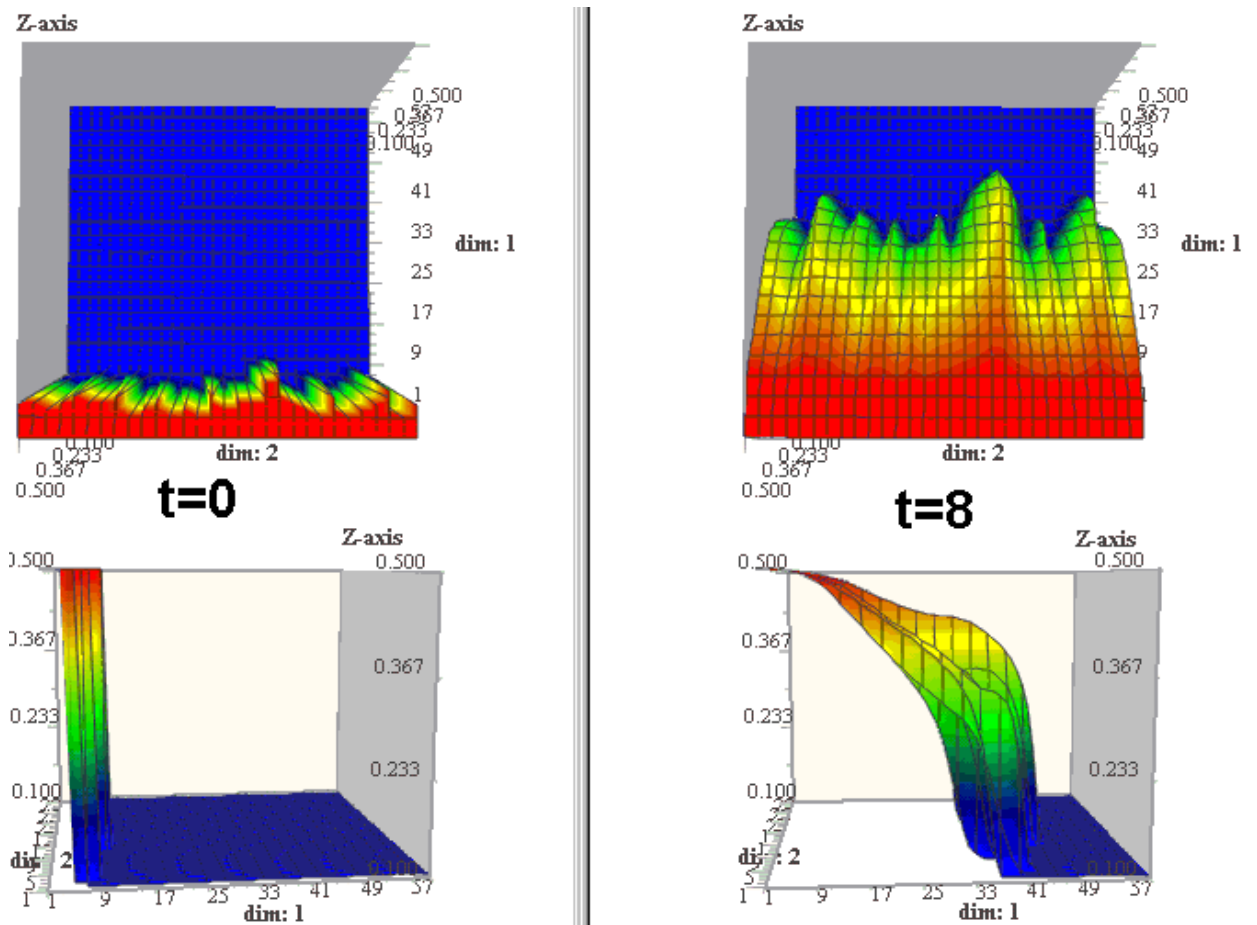
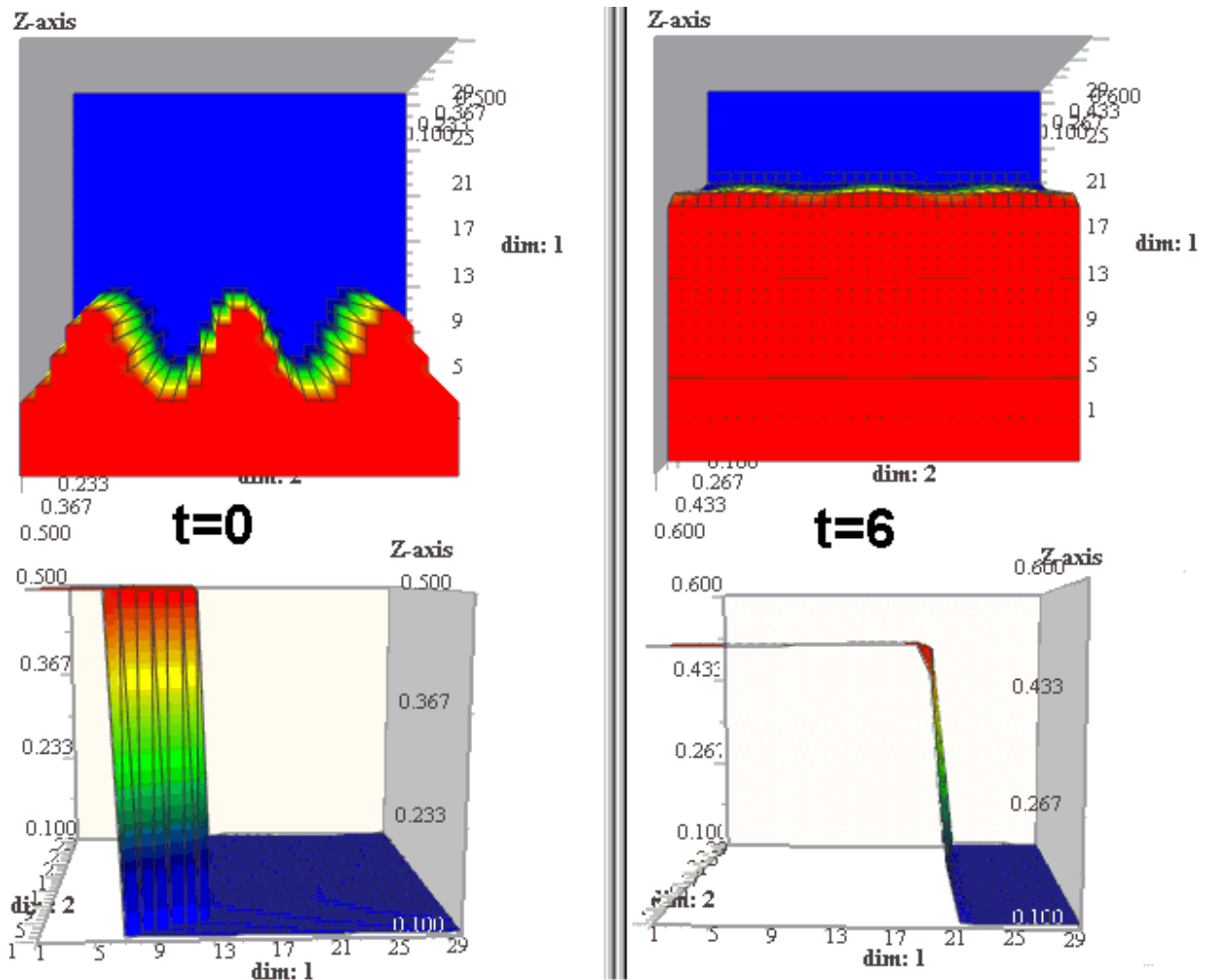


Рис. 4.7

Т.к. инкремент неустойчивости тем больше, чем больше пространственная частота возмущения, то не происходит дискриминации по частоте. Если первоначальное возмущение случайно, причем различные гармоники равновероятны, как, например, в случае гауссовского стационарного (однородного по пространству) случайного процесса, то в пределе при достаточно больших временах весь объем флюида расслаивается на тонкие струи соответственно максимальной частоте возмущения. (см. рис. 4.7)

Был рассмотрен также случай, когда $\mu_0 > 1$, т.е. подвижность вытесняемой жидкости была больше, чем вытесняющей. Тогда первоначальное возмущение рассасывается. Это достаточно очевидно, т.к. в таком случае велика подвижность вытесняемой жидкости в перпендикулярном направлении



(см. рис. 4.8).

Рис. 4.8

В заключение авторы пользуются возможностью выразить благодарность Ю.Б. Радвогину за многократное обсуждение некоторых аспектов применения TVD алгоритмов к рассмотренным задачам.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г.И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С.144-151.
2. Баренблатт Г.И., Виниченко А.П. Неравновесная фильтрация несмешивающихся жидкостей // Успехи механики. 1980. Т.3, № 3. С.35-50.
3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М. Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей // Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости: Сб. науч. тр. СО. АН СССР. Вычисл. центр. Новосибирск, 1972. С.33-43.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., "Недра", 1984.
5. Бедриковецкий П.Г. Вытеснение нефти оторочками растворов активных примесей // Докл. АН СССР. 1982. Т.264, № 1. С.60-65
6. Бочаров О.Б. Влияние неравновесности на двухфазное течение в пористой среде // Гидродинамика и теплообмен в неподвижных зернистых слоях./АН СССР. СО. Ин-т теплофизики. Новосибирск, 1991. С.89-95.
7. Бочаров О.Б., Витковский О.В., Кузнецов В.В. Структура скачков насыщенности при неравновесном вытеснении в пористых средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С.97-104.
8. Бузинов С.Н., Умрихин И.Д. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. М., Недра, 1973. 243 с.
9. Виниченко А.П. К теории нестационарной неравновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 9. С.51-58.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1981.
11. Голф-Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. М., Недра, 1986. 607 с.
12. Ентов В.М. К теории неравновесных эффектов при фильтрации неоднородных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С.52-57.

13. Ентов В.М., Чен-Син Э. Микромеханика двухфазного течения в пористых средах // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1987. С.120-129.
14. Кайгородова М.В., Панфилов М.Б. Кинетика диффузионного перемешивания фаз при неустойчивом вытеснении нефти смешивающимися агентами // Докл. Междунар. конф. "Разработка газоконденсатных месторождений", Краснодар, 29 мая - 2 июня 1990 г., секция 6. Краснодар, 1990. С.262-266.
15. Мартос В.Н. О возможности заводнения газоконденсатных пластов // Вопросы нелинейной фильтрации и нефтегазоотдачи при разработке нефтяных и газовых месторождений. М., Наука, 1972.
16. Митлин В.С. Безитерационный метод численного решения одно- и двумерных задач многокомпонентной фильтрации // Числ. Методы механики сплош. среды. 1986. Т.17, № 4
17. Панфилов М.Б. Прогнозирование разработки газового месторождения в водоносном пласте. М., МИНХ и ГП, 1986. 22 с.
18. Радвогин Ю.Б. О квазимонотонных разностных схемах второго порядка. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991, № 9.
19. Чарный И.А. Подземная гидродинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
20. Arbogast T., Douglas J. Two-phase immiscible flow in naturally fractured reservoirs // Numer. simul. oil recov.: Peor. Symp., Munneapolis, Minn., Dec. 1-12, 1986. N.Y. etc., 1988. P. 47-66.
21. Bachmat Y., Bear J. Macroscopic modeling of transport phenomena in porous media. 1. The continuum approach // Transport Porous Media. 1986. № 1. P. 213-240
22. Koldoba A.V., Koldoba E.V. Computer simulation of two-component filtration. Preprint of KIAM, №87, Moscow, 1999 (in Russia)
23. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // Ibid. 1983. № 6. P. 531-543.
24. Radvogin Yu.B., Zaitsev N.A. Multidimensional minimal stencil supported second order accurate upwind schemes for solving hyperbolic and Euler systems. Preprint, Keldysh institute of applied mathematics, Russian Academy of Science, 1996, № 22.
25. Tang D.H.E., Peaceman D.W. New analytical and numerical solutions for the radial convection-dispersion problem // SPE Res. Eng. 1987. Aug. P. 343-359