РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

**Ю.Р.Банит, М.Ю.Беляев, Т.А.Добринская,
Н.И.Ефимов, В.В.Сазонов, В.М.Стажков**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ ПО ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Москва - 2002

Аннотация.

Описаны метод и результаты определения тензора инерции Международной космической станции по телеметрической информации о ее движении относительно центра масс и суммарном кинетическом моменте гиродинов. Информация о движении станции представляет собой значения кватерниона ориентации в дискретные моменты времени. По этим значениям, относящимся к некоторому временному интервалу, с помощью сплайнов или рядов Фурье строится аппроксимация фактического движения станции относительно центра масс, которая затем используется в линейной системе дифференциальных уравнений, описывающей изменение на том же интервале суммарного кинетического момента гиродинов. Указанная линейная система выражает теорему об изменении полного кинетического момента станции и гиродинов и записана с учетом действия на станцию гравитационного и аэродинамического моментов. Решение системы линейно зависит от компонент тензора инерции станции и параметров, характеризующих аэродинамический момент. Оценки этих величин находятся методом наименьших квадратов из условия наилучшей аппроксимации телеметрических значений суммарного кинетического момента гиродинов решениями указанной линейной системы. Приведены примеры обработки реальной измерительной информации. Погрешность определения диагональных (наиболее значительных) компонент тензора инерции составила в этих примерах 10 — 20 %.

Yu.R.Banit, M.Yu.Belyaev, T.A.Dobrinskaya, N.I.Efimov, V.V.Sazonov, V.M.Stazhkov. Estimating the inertia tensor of the International Space Station on the base of the telemetry information. The paper presents the method and the results of estimating the inertia tensor of the International Space Station on the base of the telemetry information about its attitude motion and the total angular momentum of gyrodines. The information about an attitude motion contains values of the quaternion of the station attitude with respect to an inertial coordinate system at some instants. Basing on the information, we reconstruct the station motion using splines or Fourie series. Such an approximation is used in the linear differential equations which describe the variation of the total angular momentum of gyrodines during the motion. Solutions of the equations depend linearly upon inertia tensor components and station aerodynamic parameters. We find estimations of these quantities from the condition of the best approximation of angular momentum measurement data by those solutions using the least squares method. The method was applied for processing real telemetry data. The errors of estimating the diagonal (the most large) inertia tensor components were in limits of 10 — 20 %.

1. Введение. При математическом моделировании вращательного движения Международной космической станции (МКС) для нужд управления полетом и решения ряда научных и прикладных задач необходимо достаточно точно знать ее динамические характеристики: тензор инерции, параметры аэродинамического момента и т. п. Время от времени эти характеристики меняются, и не всегда их изменение правильно отражено в проектных расчетах. Проводимый в настоящее время эксперимент "Тензор"посвящен уточнению фактических значений этих характеристик путем специальной статистической обработки телеметрической информации с борта станции. В данной работе рассматривается один из способов уточнения тензора инерции станции по телеметрической информации о ее ориентации и суммарном кинетическом моменте гиродинов.

Уточнение тензора инерции проводилось еще для станции "Мир". Применялись два способа. Первый состоял в определении неуправляемого вращательного движения станции по данным измерений бортовых датчиков или по телеметрической информации о ее ориентации. Определение движения сводилось к построению функций, аппроксимирующих данные измерений или телеметрическую информацию и рассчитываемых вдоль решений полной системы уравнений вращательного движения станции. В результате обработки уточнялись начальные условия движения и некоторые параметры математической модели, в том числе 5 параметров, характеризующих тензор инерции станции — три угла, задающих направления главных центральных осей инерции в строительной системе координат, и две безразмерных комбинации главных центральных моментов инерции. Приемлемые по точности оценки получались только в результате обработки показаний оптического звездного датчика и значений кватерниона, задающего ориентацию станции [1,2].

Второй способ использовал данные измерений суммарного кинетического момента гиродинов, полученные при поддержании неизменной ориентации станции в абсолютном пространстве. Как оказалось, при обработке измерений, выполненных на интервале поддержания одной ориентации, можно оценить только четыре специально выбранные линейные комбинации шести компонент тензора инерции. В частности, если кинетический момент гиродинов измеряется в системе главных центральных осей инерции станции, то можно оценить разности ее главных моментов инерции. При совместной обработке измерений, выполненных на нескольких временных интервалах при разных ориентациях станции, можно оценить недиагональные компоненты тензора инерции и разности его диагональных компонент. Оценки, найденные при совместной обработке двух и трех интервалов, достаточно точно совпадали с результатами проектных расчетов [3,4].

Указанные способы можно применить и для оценивания тензора инерции МКС. При выборе способа оценивания следует учитывать тип вращательного движения станции и вид имеющейся телеметрической информации. В настоящее время первый способ модифицирован так, что его можно использовать и в случае управляемых движений (неуправляемые движения станции практически отсутствуют). При этом необходимо располагать информацией об ориентации станции, например, в виде значений кватерниона ориентации, о суммарном кинетическом моменте гиродинов и о работе двигателей ориентации. Этот способ в настоящее время опробован, и полученным в его рамках результатам будет посвящена отдельная работа. Модифицированный первый способ требует особого рассмотрения, поскольку самой трудоемкой его составляющей является сбор и учет информации о работе реактивных двигателей ориентации станции.

Первый способ можно существенно упростить, если ограничиться рассмотрением интервалов, на которых двигатели ориентации не были задействованы. В этом случае в рамках первого способа задача оценивания тензора инерции может решаться примерно также, как в случае неуправляемого движения станции. Однако при таком подходе информации о кинетическом моменте гиродинов приписывается существенно больший вес, чем информации об ориентации станции. Это отнюдь не так, и хотя применение первого способа в описываемой ситуации представляет большой методический интерес, второй способ здесь является более предпочтительным — в рамках второго способа наибольший вес приписывается информации об ориентации станции. Ниже рассматривается именно второй способ. Он применялся на отрезках движения станции без срабатывания двигателей ориентации. На этих отрезках движение станции было близко покою в абсолютном пространстве, но не сводилось к полному покою. Это обстоятельство позволило преодолеть ограничения подхода, использованного в [3,4], и получить оценки всех компонент тензора инерции.

2. Изменение кинетического момента гиродинов. Станцию будем считать гиростатом, геоцентрическое движение центра масс которого — кеплерово эллиптическое. Элементы этого движения находятся по данным радиоконтроля орбиты. Для записи уравнений изменения суммарного кинетического момента гиродинов станции введем две правые декартовы системы координат. Начала обеих систем поместим в центр масс станции — точку O.

В качестве базовой системы координат примем систему $OY_1Y_2Y_3$, плоскость OY_1Y_2 которой параллельна среднему земному экватору эпохи 2000.0. Ось OY_1 направлена в точку весеннего равноденствия указанной эпохи, ось OY_3 направлена в соответствующий северный полюс мира. Под ориентацией станции будем понимать ориентацию жестко связанной с ее корпусом строительной системы координат $Oy_1y_2y_3$. Ось Oy_1 параллельна продольной оси Служебного модуля (СМ) и направлена от его переходного отсека к агрегатному отсеку, ось Oy_2 параллельна оси вращения солнечных батарей СМ.

Положение системы $Oy_1y_2y_3$ относительно системы $OY_1Y_2Y_3$ задается с помощью нормированного кватерниона $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к системе $OY_1Y_2Y_3$ обозначим $\| \; a_{ij} \; \|_{i,j=1}^{3}$, где a_{ij} — косинус угла между осями OY_i и Oy_j. Элементы этой матрицы выражаются через компоненты Q с помощью известных формул $a_{11} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$, $a_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3)$, $a_{21} = 2(q_1q_2 + q_0q_3)$ и т. п. Ниже компоненты векторов и координаты точек указываются в системе $Oy_1y_2y_3$.

Из моментов внешних сил, приложенных к станции, будем учитывать гравитационный и восстанавливающий аэродинамический. Компоненты гравитационного момента задаются формулами

$$M_{g1} = \nu \sum_{i=1}^{3} x_i(x_2 I_{3i} - x_3 I_{2i}) \,, \quad M_{g2} = \nu \sum_{i=1}^{3} x_i(x_3 I_{1i} - x_1 I_{3i}) \,,$$

$$M_{g3} = \nu \sum_{i=1}^{3} x_i(x_1 I_{2i} - x_2 I_{1i}) \,, \quad \nu = \frac{3\mu_E}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \,.$$

Здесь x_i — компоненты геоцентрического радиуса-вектора центра масс станции, I_{ij} — компоненты тензора инерции станции в строительной системе координат, $I_{ji} = I_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, μ_E — гравитационный параметр Земли.

Аэродинамический момент аппроксимируем выражениями

$$M_{a1} = \varrho v(P_3 v_2 - P_2 v_3) \,, \quad M_{a2} = \varrho v(P_1 v_3 - P_3 v_1) \,,$$

$$M_{a3} = \varrho v(P_2 v_1 - P_1 v_2) \,, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \,,$$

Здесь ϱ — плотность набегающего на станцию аэродинамического потока (плотность атмосферы в точке O), v_i — компоненты скорости центра масс станции относительно поверхности Земли, P_i — постоянные коэффициенты. Эти выражения получены в предположении, что атмосфера вращается вместе с Землей и что станция имеет форму сферы, центр которой смещен относительно точки O. Второе предположение может оказаться слишком упрощенным, однако опыт определения вращательного движения орбитальных станций "Салют-6", "Салют-7"и "Мир"показывает, что основанные на этом предположении выражения для аэродинамического момента позволяют достаточно точно определять движение на интервалах времени порядка орбитального периода при условии уточнения значений коэффициентов P_i в процессе обработки измерительной информации. Аналогичным образом приведенные выражения будут использованы ниже.

Компоненты кинетического момента станции в ее движении относительно центра масс имеют вид

$$K_i = H_i + \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

где H_i и ω_i — компоненты суммарного кинетического момента гиродинов и угловой скорости станции. При сделанных предположениях теорема об изменении кинетического момента станции выражается соотношениями

$$\begin{aligned}
\dot K_1 + \omega_2 K_3 - \omega_3 K_2 &= M_{g1} + M_{a1}\,,\\
\dot K_2 + \omega_3 K_1 - \omega_1 K_3 &= M_{g2} + M_{a2}\,,\\
\dot K_3 + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 &= M_{g3} + M_{a3}\,.
\end{aligned}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t. Подставив в эти соотношения выписанные выше выражения для величин K_i, M_{gi} и M_{ai}, получим уравнения

$$\begin{gathered}
\dot H_1 = \omega_3 H_2 - \omega_2 H_3 - I_{11}\dot\omega_1 + (I_{22} - I_{33})F_1 + I_{12}(F_2 - \dot\omega_2) -\\
- I_{13}(F_3 + \dot\omega_3) + I_{23}(G_3 - G_2) + E\varrho v(P_3 v_2 - P_2 v_3)\,,\\
\dot H_2 = \omega_1 H_3 - \omega_3 H_1 - I_{22}\dot\omega_2 + (I_{33} - I_{11})F_2 + I_{23}(F_3 - \dot\omega_3) -\\
- I_{12}(F_1 + \dot\omega_1) + I_{13}(G_1 - G_3) + E\varrho v(P_1 v_3 - P_3 v_1)\,,\\
\dot H_3 = \omega_2 H_1 - \omega_1 H_2 - I_{33}\dot\omega_3 + (I_{11} - I_{22})F_3 + I_{13}(F_1 - \dot\omega_1) -\\
- I_{23}(F_2 + \dot\omega_2) + I_{12}(G_2 - G_1) + E\varrho v(P_2 v_1 - P_1 v_2)\,,\\
F_1 = \omega_2\omega_3 - \nu x_2 x_3\,, \quad F_2 = \omega_3\omega_1 - \nu x_3 x_1\,, \quad F_3 = \omega_1\omega_2 - \nu x_1 x_2\,,\\
G_1 = \omega_1^2 - \nu x_1^2\,, \quad G_2 = \omega_2^2 - \nu x_2^2\,, \quad G_3 = \omega_3^2 - \nu x_3^2\,.
\end{gathered} \tag{1}$$

С помощью соотношений $I_{ij} = I_{ji}$ из этих уравнений исключены компоненты тензора инерции I_{ij} при $i > j$, и для использования удобных единиц измерения физических величин введен масштабирующий множитель E. В уравнениях (1) кинетический момент измеряется в 10^3 Нмс, время — в 10^3 с, единицей измерения компонент тензора инерции служит 10^6

кгм^2, единицей измерения аэродинамических параметров — 10^3 м^3, плотность атмосферы рассчитывается в кг/м^3 согласно модели [5], $E = 10^9$. Указанные единицы измерения величин H_i, I_{ij} и P_i используются ниже без дополнительных оговорок.

Выписанные уравнения будем использовать следующим образом. На некотором отрезке времени длиной не более нескольких часов по телеметрической информации — значениям кватерниона ориентации — восстановим фактическое движение станции относительно центра масс, в том числе, ее угловую скорость и угловое ускорение. В результате уравнения (1) станут замкнутой системой относительно переменных H_i $(i = 1, 2, 3)$. В этой системе величины I_{ij} и P_i будем рассматривать как параметры. Общее решение этих уравнений, указав явно его зависимость от параметров и начальных условий, представим следующим образом

$$H_i = \sum_{j=1}^{12} F_{ij}(t) a_j \quad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{2}$$

где $a_i = H_i(t_0)$ $(i = 1, 2, 3)$ — начальные условия, t_0 — заданный момент времени, $a_4 = I_{11}$, $a_5 = I_{22}$, $a_6 = I_{33}$, $a_7 = I_{12}$, $a_8 = I_{13}$, $a_9 = I_{33}$, $a_{10} = p_1$, $a_{11} = p_2$, $a_{12} = p_3$. Функции $F_{ij}(t)$ определяются начальными задачами для линейных дифференциальных уравнений, не содержащих параметров.

Математическое обеспечение гиродинов позволяет в некоторые моменты времени t_n^H $(n = 1, 2, \ldots, N)$, $t_1^H < t_2^H < \ldots < t_N^H$, измерять значения $H_i\big(t_n^H\big)$ компонент их суммарного кинетического момента (измеряются угловые скорости роторов и углы поворота несущих их рамок, затем по этим данным рассчитываются компоненты H_i). Результаты измерений обозначим $H_i^{(n)}$. Если указанные измерения приходятся на отрезок времени, для которого построена аппроксимация движения станции, то с помощью соотношений (2) их можно обработать каким-либо статистическим методом и определить вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{12})^T$. Поскольку вычисляемые по формулам (2) величины $H_i\big(t_n^H\big)$ зависят от a линейно, наиболее подходящим в данном случае методом обработки является метод наименьших квадратов. В рамках этого метода оценкой вектора a служит его значение, минимизирующее функцию

$$\Phi(a) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left[H_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{12} F_{ij}\big(t_n^H\big) a_j \right]^2 .$$

Это значение определяется так называемыми нормальными уравнениями, которые в данном случае имеют вид

$$\sum_{j=1}^{12} b_{ij} a_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 12)\,, \tag{3}$$

$$b_{ij} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} F_{ki}\big(t_n^H\big) F_{kj}\big(t_n^H\big)\,, \quad b_i = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} H_k^{(n)} F_{ki}\big(t_n^H\big)\,.$$

Если ошибки в измерениях величин $H_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3;\ n = 1, 2, \ldots N)$ независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ, то оценка $\hat{a}$ вектора a, определяемая системой (3), является несмещенной с ковариационной матрицей $\sigma^2 B^{-1}$, где B — матрица системы (3). Поскольку значение σ неизвестно, его квадрат — дисперсию ошибок измерений — при расчете ковариационной матрицы можно заменить оценкой

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\Phi(\hat{a})}{3N - 12}\,.$$

Чтобы реализовать описанный подход к оцениванию тензора инерции станции, необходимо располагать методом восстановления фактического движения станции по телеметрической информации. Ниже используются два таких метода. Один из них основан на аппроксимации вращательного движения станции сплайнами, в другом такая аппроксимация строится с помощью рядов Фурье. Первый способ применялся при сглаживании российской телеметрической информации, в которой шаг задания кватерниона ориентации по времени составляет около 1.5 мин. Второй способ применялся при сглаживания американской информации, в которой шаг задания кватерниона ориентации по времени составляет, как правило, 1 с.

3. Аппроксимация вращательного движения станции сплайнами. Телеметрическая информация собирается на временном интервале не более нескольких часов и содержит последовательность моментов времени и кватернионов

$$t_m^Q\,,\ Q_m = \left(q_0^{(m)},\, q_1^{(m)},\, q_2^{(m)}, q_3^{(m)}\right) \quad (m = 0, 1, \ldots, M)\,. \tag{4}$$

Здесь $t_0^Q < t_1^Q < \ldots < t_M^Q$, Q_m — значение кватерниона Q, вычисленное на момент времени t_m^Q. Для российской телеметрической информации $t_{m+1}^Q - t_m^Q \approx 1.5$ мин, $M < 100$. Кватернион, задающий ориентацию станции, определен с точностью до знака. Знаки $Q^{(m)}$ и момент t_0^Q в (2) выбираются из условия

$$q_0^{(0)} > 0\,, \quad \sum_{i=0}^{3} q_i^{(m-1)} q_i^{(m)} > 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, M)\,.$$

Сглаживание последовательности кватернионов (4) выполняется покомпонентно с использованием решения следующей задачи. Пусть для моментов времени t_m $(m = 0, 1, \ldots, M)$, $t_m < t_{m+1}$, известны приближенные значения $x_m \approx f(t_m)$ некоторой гладкой функции $f(t)$. Требуется восстановить эту функцию на отрезке $t_0 \le t \le t_M$.

В [6] отыскание $f(t)$ в предположении, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема, сводится к решению вариационной задачи

$$\int\limits_{t_0}^{t_M} [\ddot{f}(t)]^2\,dt \to \min\,, \qquad \sum_{m=0}^{M} [x_m - f(t_m)]^2 \le S\,. \tag{5}$$

Здесь S – заданное положительное число. Решением задачи (5) является кубический сплайн. В [6] приведена программа на алголе-60 вычисления коэффициентов этого сплайна по величинам S, t_m, x_m $(m = 0, 1, \ldots, M)$. Эта программа, переписанная на турбо-паскаль, применялась для аппроксимации движения станции.

Норма кватерниона, который образован сплайнами, сглаживающими компоненты кватернионов (4), не равна единице, но мало отличается от нее. Полученная кватернионная функция нормируется на единицу и служит аппроксимацией вращения системы $Oy_1y_2y_3$ относительно системы $OY_1Y_2Y_3$ на отрезке $t_0^Q \le t \le t_M^Q$. Компоненты абсолютной угловой скорости станции выражаются через компоненты этой функции и их производные по формулам

$$\omega_1 = 2(q_0\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_0 + q_3\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_3)\,,$$
$$\omega_2 = 2(q_0\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_0 + q_1\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_1)\,,$$
$$\omega_3 = 2(q_0\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_0 + q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2)\,.$$

Продифференцировав последние соотношения по времени и подставив в полученные выражения первую и вторую производные нормированной кватернионной функции, можно найти $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ и $\dot{\omega}_3$. Теперь все готово для расчета функций $F_{ij}(t)$ в формулах (2). Начальные задачи для дифференциальных уравнений, определяющих эти функции, интегрировались методом Рунге - Кутты. При этом узлы сплайнов, сглаживающих значения (4) кватерниона ориентации, входили в число точек разделяющих шаги интегрирования. В результате уравнения, определяющие функции $F_{ij}(t)$, внутри каждого шага интегрирования имели достаточно гладкие правые части.

Примеры построенной описанным способом аппроксимации вращательного движения станции приведены на рис. 1 — 4. Эти рисунки иллюстрируют два временных интервала так называемого покоя станции в абсолютном пространстве. На рис. 1a и 3a маркеры указывают точки $\left(t_m^Q, q_i^{(m)}\right)$, отвечающие телеметрическим данным (4), кривые изображают сглаживающие эти данные сплайны. Для интервала, представленного на рис. 1 и 2, $M = 44$; для интервала на рис. 3 и 4 — $M = 41$. В обоих случаях сглаживающие сплайны строились при $S = 10^{-9}(M+1)$.

Детали движения станции на этих интервалах показаны на рис. 2, 4. Здесь слева сплошными кривыми изображены графики рассчитанной с помощью сплайнов зависимости от времени углов, задающих положение системы координат $Oy_1y_2y_3$ относительно системы $OY_1Y_2Y_3$, маркерами указаны значения тех же углов, рассчитанные по данным (4). Углы введены условием, что система $Oy_1y_2y_3$ получается из системы $OY_1Y_2Y_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OY_2, 2) на угол β вокруг новой оси OY_3, 3) на угол γ вокруг новой оси OY_1, совпадающей с осью Oy_1. Однако способ введения углов в данном случае не важен. Важны только диапазоны их изменения, характеризующие точность поддержания неизменной ориентации станции в абсолютном пространстве. Показанное на рисунках изменение углов было запланировано. В средней части рис. 2 и 4 приведены графики компонент угловой скорости станции. Кривые — результат расчета с помощью сплайнов, маркеры — данные телеметрии. Справа на рисунках приведены графики углового ускорения станции, горизонтальные прямые указывают нуль.

В рассмотренных примерах покой станции поддерживался одними лишь гиродинами. Реактивные двигатели системы управления движением станции не включались. Это обстоятельство позволило использовать полученные на соответствующих временных интервалах данные измерений кинетического момента гиродинов для оценивания тензора инерции станции. Оценки для пяти таких интервалов приведены в табл. 1. В таблице указаны номер интервала, дата (число ноября 2001 г.), на которую этот интервал приходится, начальная временная точка t_1^H обрабатываемого отрезка данных (эта точка принималась в качестве точки t_0), значения чисел M и N, оценка $\hat{\sigma}$ стандартного отклонения ошибок в данных измерений кинетического момента гиродинов, отношение λ максимального и минимального собственных чисел матрицы B, характеризующее ее обусловленность, оценки параметров I_{ij} и P_i, а также стандартные отклонения этих оценок $\sigma_{I_{ij}}$ и σ_{P_i}. В нижней строке таблицы указаны расчетные значения компонент тензора инерции станции.

Таблица 1

Ин.	Дата	t_0^H	M	N	$\hat{\sigma}$	λ	I_{11}	$\sigma_{I_{11}}$
1	3	01:59:41	34	192	0.246	$1.21 \cdot 10^5$	3.819	0.757
$1'$	3	01:59:41	34	174	0.224	$1.10 \cdot 10^5$	6.164	0.765
2	4	01:02:30	44	179	0.307	$2.56 \cdot 10^4$	6.760	0.479
3	4	11:55:56	42	186	0.181	$2.02 \cdot 10^4$	6.334	0.233
4	5	07:57:18	34	207	0.178	$2.38 \cdot 10^4$	5.056	0.226
5	5	09:28:59	41	209	0.241	$2.44 \cdot 10^4$	5.853	0.303
							4.853	

Ин.	I_{22}	$\sigma_{I_{22}}$	I_{33}	$\sigma_{I_{22}}$	I_{12}	$\sigma_{I_{12}}$	I_{13}	$\sigma_{I_{13}}$
1	19.781	0.580	21.691	0.571	1.735	0.025	-0.099	0.008
$1'$	24.253	0.658	25.808	0.632	1.974	0.040	-0.194	0.024
2	23.380	0.383	25.332	0.391	1.770	0.022	-0.102	0.014
3	22.693	0.194	24.688	0.202	1.710	0.009	0.117	0.006
4	20.001	0.197	21.937	0.197	1.808	0.009	0.198	0.011
5	21.787	0.241	23.706	0.244	1.811	0.012	0.076	0.011
	23.601		26.278		1.675		-0.266	

Ин.	I_{23}	$\sigma_{I_{23}}$	P_1	σ_{P_1}	P_2	σ_{P_2}	P_3	σ_{P_3}
1	-0.002	0.018	-2.262	0.136	4.828	0.136	-0.055	0.080
$1'$	0.022	0.017	-3.193	0.157	3.568	0.239	-0.394	0.087
2	-0.020	0.024	-2.401	0.096	4.843	0.166	0.500	0.121
3	-0.011	0.012	-3.655	0.077	5.101	0.075	0.506	0.124
4	-0.011	0.013	-2.210	0.062	4.621	0.091	0.367	0.058
5	-0.005	0.016	-2.460	0.077	4.611	0.109	0.367	0.074
	-0.033							

Интервалы, представленные на рис. 1, 2 и 3, 4, имеют в таблице номера 3 и 5 соответственно. Погрешности наилучшей аппроксимации функциями (2) данных измерений кинетического момента гиродинов на этих интервалах иллюстрируются рис. 1*б* и 3*б*. На этих рисунках маркерами обозначены точки $\left(t_n^H, H_i^{(n)}\right)$, сплошные кривые изображают графики функций (2). Аналогичные графики для остальных интервалов таблицы представлены на рис. 5, 6.

Поскольку движение станции на всех интервалах табл. 1 было почти одинаковым (ср. рис. 1, 2 и 3, 4), оценки компонент тензора инерции и аэродинамических параметров на этих интервалах оказались похожими. Несколько выделяется на общем фоне интервал 1, что можно объяснить сравнительно плохой обусловленностью матрицы B на этом интервале (ср. значения λ в таблице). Если 18 последних точек $\left(t_n^H, H_i^{(n)}\right)$ на этом интервале отбросить (см. рис. 5), то получим интервал, имеющий в табл. 1 номер $1'$. Хотя этот интервал имеет почти такое же значение λ, как интервал 1, оценки компонент тензора инерции на нем близки оценкам на интервалах 2 — 5. Все полученные оценки заметно отличаются от расчетных значений величин I_{ij}, что можно объяснить или большими ошибками в данных измерений кинетического момента гиродинов, или недостаточной точностью уравнений (1). На точность этих уравнений может повлиять, например, принятый способ аппроксимации приложенного к станции аэродинамического момента.

4. Аппроксимация вращательного движения станции с помощью рядов Фурье. Если в последовательности (4) $t_M^Q - t_0^Q \approx 100$ мин, $\left(t_M^Q - t_0^Q\right)/M \approx 1$ с (американская телеметрическая информация), то для аппроксимации движения станции целесообразно либо воспользоваться описанным выше способом, оставив в (4) сравнительно небольшое число членов, например, взяв для построения сплайнов кватернион в каждой пятидесятой или сотой из имеющихся временных точек, либо применить другой, менее чувствительный к значениям отдельных членов последовательности, способ сглаживания. Опишем применение метода сглаживания, основанного на рядах Фурье.

В рамках этого метода последовательность (4) сглаживалась выражениями

$$q_i(t) = \alpha_i + \beta_i\left(t - t_0^Q\right) + \sum_{l=1}^{L-1} d_{il} \sin\frac{\pi l\left(t - t_0^Q\right)}{t_M^Q - t_0^Q} \quad (i = 0, 1, 2, 3)\,, \qquad (6)$$

в которых L выбиралось из условия $\left(t_M^Q - t_0^Q\right)/L \approx 2$ мин, а коэффициенты α_i, β_i и d_{il} находились методом наименьших квадратов [7]. Перед построением выражений (6) из данных (4) исключались значения t_m^Q, $q_i^{(m)}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ при тех m, для которых значение хотя бы одной компоненты кватерниона признавалось ошибочным. С этой целью данные (4) разбивались на непересекающиеся отрезки

$$t_m^Q\,, \quad q_i^{(m)} \quad (i = 0, 1, 2, 3;\ m = M' + 1, M' + 2, \ldots, M'')$$

длиной $M'' - M' = 20$. Эти отрезки данных аппроксимировались линейными функциями $q_i^{(m)} \approx a_i + b_i t_m^Q$, коэффициенты a_i и b_i которых находились методом наименьших квадратов. Затем вычислялись модули ошибок аппроксимации $e_i^{(m)} = \left|\, q_i^{(m)} - a_i - b_i t_m^Q \,\right|$ $(m = M' + 1, M' + 2, \ldots, M'')$ и медианы μ_i этих модулей. Измерение $q_i^{(m)}$ признавалось ошибочным, если выполнялось неравенство $e_i^{(m)} > 3.7\mu_i$. Обычно число отброшенных временных точек в (4) не превосходило нескольких процентов числа M.

Таблица 2

Ин.	Дата	t_0^H	M	N	$\hat{\sigma}$	λ	I_{11}	$\sigma_{I_{11}}$
1	3	02:00:01	3244	174	0.229	$1.05 \cdot 10^5$	5.270	0.759
2	4	01:00:01	3290	178	0.245	$2.47 \cdot 10^4$	6.018	0.381
3	4	11:00:01	3143	168	0.081	$2.41 \cdot 10^4$	4.570	0.123
4	4	12:12:15	4132	222	0.232	$2.77 \cdot 10^4$	5.784	0.265
5	5	08:04:13	3737	197	0.127	$3.33 \cdot 10^4$	5.094	0.209
6	5	09:26:58	8232	440	0.392	$5.99 \cdot 10^4$	5.570	0.322
							4.853	

Ин.	I_{22}	$\sigma_{I_{22}}$	I_{33}	$\sigma_{I_{22}}$	I_{12}	$\sigma_{I_{12}}$	I_{13}	$\sigma_{I_{13}}$
1	24.226	0.662	25.794	0.637	2.059	0.042	-0.200	0.025
2	26.672	0.332	28.675	0.339	2.322	0.031	-0.456	0.019
3	25.985	0.138	28.115	0.138	1.800	0.006	0.213	0.009
4	24.313	0.223	26.428	0.223	1.726	0.010	0.066	0.006
5	19.755	0.172	21.681	0.174	1.837	0.069	0.257	0.079
6	23.174	0.247	25.198	0.249	1.741	0.011	-0.136	0.005
	23.601		26.278		1.675		-0.266	

Ин.	I_{23}	$\sigma_{I_{23}}$	P_1	σ_{P_1}	P_2	σ_{P_2}	P_3	σ_{P_3}
1	0.020	0.017	-3.266	0.160	4.568	0.250	-0.382	0.088
2	0.044	0.026	-2.948	0.082	5.046	0.200	0.421	0.138
3	0.198	0.012	-3.245	0.048	6.035	0.125	2.420	0.098
4	-0.026	0.013	-4.073	0.085	5.022	0.090	0.951	0.086
5	0.046	0.122	-2.359	0.058	4.970	0.074	0.045	0.062
6	-0.026	0.016	-2.685	0.075	5.563	0.085	0.380	0.085
	-0.033							

Примеры аппроксимации вращательного движения станции с использованием рядов Фурье приведены на рис. 7 — 10. Эти рисунки аналогичны рис. 1 — 4 и описывают движение станции практически на тех же интервалах времени. На рис. 7*a* и 9*a* маркерами указаны точки $\left(t_m^Q, q_i^{(m)}\right)$, отвечающие телеметрическим данным (4), причем изображена только каждая тридцатая такая точка. Сплошными кривыми изображены графики сглаживающих эти данные выражений (6). Для интервала, представленного на рис. 7, 8, $M = 4132$; для интервала на рис. 9, 10 — $M = 8232$. В обоих случаях $L = 50$.

Движение станции на рассматриваемых временных интервалах представлено на рис. 8, 10. Здесь слева сплошными кривыми изображены графики рассчитанной с помощью выражений (6) зависимости от времени углов, задающих положение системы координат $Oy_1y_2y_3$ относительно системы $OY_1Y_2Y_3$, маркерами указаны значения тех же углов, рассчитанные по данным (4) (представлена каждая тридцатая точка). В средней части рис. 8 и 10 приведены графики компонент угловой скорости станции. Кривые — результат расчетов с помощью выражений (6), маркеры — данные американской телеметрии (представлена каждая двадцатая точка). Справа на рисунках приведены графики углового ускорения станции.

Табл. 2 содержит оценки тензора инерции и аэродинамических параметров станции для шести временных интервалов, на которых ее вращательное движение аппроксимировалось выражениями (6) при $L = 50$. Эта таблица устроена аналогично табл. 1. Интервалы, представленные на рис. 7, 8 и 9, 10, имеют в табл. 2 номера 4 и 6. Погрешность аппроксимации функциями (2) данных измерений кинетического момента гиродинов на этих интервалах иллюстрируется рис. 7*б* и 9*б*. Здесь по-прежнему маркерами обозначены точки $\left(t_n^H, H_i^{(n)}\right)$, сплошные кривые изображают графики функций (2). Аналогичные графики для остальных интервалов таблицы представлены на рис. 11, 12. Поскольку границы интервалов в табл. 1 и 2 близки, оценки компонент тензора инерции в этих таблицах также оказались близкими.

5. О повышении точности определения тензора инерции. Описанные выше результаты получены в предположении, что матрица перехода от системы координат, в которой интерпретируются данные измерений суммарного кинетического момента гиродинов, к строительной системе координат СМ известна. Это предположение может оказаться не вполне точным. Уточнение указанной матрицы совместно с определением параметров выражений (2), в принципе, могло бы повысить точность такого определения.

Уточнение указанной матрицы проводилось следующим образом. Введем систему координат $Oz_1z_2z_3$, в которой интерпретируются данные измерений суммарного кинетического момента гиродинов. Будем считать, что оси этой системы составляют острые углы с осями системы $Oy_1y_2y_3$, имеющими те же индексы (дополнительные слагаемые этих углов, кратные 90°, учитывались в соответствии с действующими документами, но здесь они для простоты не рассматриваются). Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к системе $Oz_1z_2z_3$ обозначим $\| \, b_{ij} \, \|_{i,j=1}^{3}$, где b_{ij} — косинус угла между осями Oz_i и Oy_j. Элементы этой матрицы выражаются в функции углов γ_c, α_c и β_c, на которые надо повернуть систему $Oz_1z_2z_3$

последовательно вокруг осей Oz_2, Oz_3 и Oz_1, чтобы перевести ее в систему $Oy_1y_2y_3$. Оценки этих углов и параметров выражений (2) находились из условия минимума функции

$$\Phi' = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{k=1}^{3} H_k^{(n)} b_{ki} - \sum_{j=1}^{12} F_{ij}\left(t_n^H\right) a_j \right]^2 .$$

Минимизация Φ' проводилась методом Гаусса-Ньютона. Ее результаты в случае аппроксимации движения станции сплайнами и телеметрической информации, рассматривавшейся в п. 3, представлены в части II табл. 3. В первом столбце этой таблицы указан номер соответствующего интервала с измерениями в табл. 1. Часть I табл. 3 построена по данным табл. 1 и приведена для сравнения. Оценки тензора инерции в табл. 3 характеризуются величиной d_J — евклидовым расстоянием между точками $J = (I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13}, I_{23}) \in R^6$, одна из которых найдена расчетными путем, а вторая — из обработки телеметрической информации. Координаты первой точки указаны в последней строке табл. 1; координаты второй точки для части I брались в строке табл. 1, отвечающей данному интервалу, т.е. получались минимизацией функции Φ, для части II эти координаты находились минимизацией функции Φ'. Углы в таблице выражены в радианах. Приведенная в части II оценка стандартного отклонения ошибок измерения компонент H_i находилась по формуле

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Phi'_{\min}}{3N - 15}} .$$

Как видно из таблицы, оценки углов γ_c, α_c и β_c имеют неоправданно большие абсолютные значения и меняются от интервалу к интервалу, причем изменение существенно превосходит стандартные отклонения этих оценок. Величина d_J в части II таблицы, как правило, меньше чем в части I, но это уменьшение значительно только для "неблагополучного"интервала 1 (см. п. 3). Таким образом, попытка уточнения матрицы перехода $\| \, b_{ij} \, \|$ не приводит к улучшению оценок компонент тензора инерции станции.

Таблица 3

Ин.	I		II				
	d_J	$\hat{\sigma}$	d_J	$\hat{\sigma}$	γ_c	α_c	β_c
1	6.065	0.246	3.345	0.214	−0.085	0.133	−0.129
2	2.149	0.307	3.570	0.252	−0.324	−0.105	−0.348
3	2.386	0.181	2.320	0.124	0.137	0.027	−0.177
4	5.661	0.178	5.474	0.167	0.020	0.046	−0.105
5	3.323	0.241	3.291	0.222	−0.053	−0.010	−0.179

Рассмотрим обобщение задачи уточнения матрицы $\| \, b_{ij} \, \|$. Телеметрическая информация позволяет рассчитать компоненты кинетического момента каждого из четырех гиродинов, находящихся на станции, причем значения всех компонент даются на единые моменты времени. Пусть $H_{ki}^{(n)}$ — значение компоненты с номером i гиродина с номером k в момент времени t_n. Введенные выше величины $H_i^{(n)}$ определяются соотношениями

$$H_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{4} H_{ki}^{(n)} \quad (i = 1, 2, 3) \, .$$

Предположим, что из-за погрешностей в задании матриц перехода, используемых при интерпретации телеметрической информации, компоненты вектора кинетического момента гиродина с номером k $(k = 1, 2, 3)$ указаны в строительной системе координат СМ с систематической ошибкой, которую можно характеризовать как поворот этого вектора на малый угол с компонентами $(-\theta_{k1}, -\theta_{k2}, -\theta_{k3})$. Иными словами, компоненты вектора кинетического момента k-го гиродина с исправленной ошибкой имеют вид

$$\begin{gathered} H_{k1}^{(n)} + \theta_{k2} H_{k3}^{(n)} - \theta_{k3} H_{k2}^{(n)} \, , \\ H_{k2}^{(n)} + \theta_{k3} H_{k1}^{(n)} - \theta_{k1} H_{k3}^{(n)} \, , \\ H_{k3}^{(n)} + \theta_{k1} H_{k2}^{(n)} - \theta_{k2} H_{k1}^{(n)} \, . \end{gathered}$$

Оценки величин θ_{ki} и a_j находились из условия минимума функции

$$\Phi'' = \kappa \sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} \theta_{ki}^2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{k=1}^{4} \left[H_{k1}^{(n)} + \theta_{k2} H_{k3}^{(n)} - \theta_{k3} H_{k2}^{(n)} \right] - \sum_{j=1}^{12} F_{1j}\big(t_n^H\big) a_j \right\}^2 + \cdots \, .$$

Здесь κ — неотрицательный параметр, многоточие обозначает выражения для компонент H_2 и H_3, аналогичные выписанному явно выражению для компоненты H_1. Слагаемое с множителем κ служит для учета априорной информации о величинах θ_{ki} — по своему смыслу эти величины должны быть малыми. При $\kappa \to +\infty$ оценки величин θ_{ki} стремятся к нулю и рассматриваемая задача сводится к задаче п. 3.

Результаты решения сформулированной линейной задачи метода наименьших квадратов для телеметрической информации, собранной на интервалах из табл. 1, приведены в табл. 4 — 8. В этих таблицах основное внимание уделено зависимости найденных решений от параметра κ. В таблицах указаны величина d_J, оценка стандартного отклонения ошибок измерения компонент H_i

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Phi''_{\min}}{3N - 24}}$$

и среднее квадратическое значение модулей малых углов, задающих систематические ошибки в измерениях компонент $H_{ki}^{(n)}$,

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}\theta_{ki}^2}\,.$$

Данные измерений величин $H_{ki}^{(n)}$, использованные в описываемых расчетах, были получены несколько иначе, чем данные $H_i^{(n)}$, о которых говорилось в п.п. 3, 4, поэтому при $\kappa = 0$ характеристики найденных решений отличаются от аналогичных характеристик, указанных в табл. 1, 3. Телеметрические данные $H_{ki}^{(n)}$ были выданы с малым шагом по времени, и в обработку была включена только их часть. Соответствующие значения N указаны в заголовках таблиц.

Таблица 4. Интервал 1, $N = 189$

κ	0	10	40	52	60	100	300	1000	∞
d_J	7.790	3.472	0.859	0.649	0.716	1.492	3.260	4.621	6.494
$\hat{\sigma}$	0.071	0.097	0.128	0.134	0.135	0.144	0.160	0.175	0.232
θ	0.565	0.258	0.146	0.109	0.101	0.076	0.046	0.029	0.000

Таблица 5. Интервал 2, $N = 177$

κ	0	1	10	20	50	100	300	1000	∞
d_J	7.984	6.751	5.966	5.678	5.316	5.069	4.524	3.645	2.285
$\hat{\sigma}$	0.077	0.083	0.106	0.117	0.124	0.140	0.153	0.172	0.290
θ	0.824	0.457	0.218	0.157	0.100	0.075	0.052	0.036	0.000

Таблица 6. Интервал 3, $N = 184$

κ	0	8	10	12	100	1000	1500	2000	∞
d_J	3.038	3.270	3.276	3.272	2.618	2.034	2.024	2.030	2.285
$\hat{\sigma}$	0.046	0.060	0.061	0.063	0.082	0.107	0.113	0.118	0.199
θ	0.514	0.133	0.124	0.117	0.055	0.025	0.022	0.020	0.000

Таблица 7. Интервал 4, $N = 206$

κ	0	0.2	0.55	1	3	10	20	50	∞
d_J	4.133	3.961	3.909	3.934	4.144	4.565	4.832	5.110	5.413
$\hat{\sigma}$	0.082	0.083	0.089	0.086	0.091	0.104	0.115	0.130	0.188
θ	0.803	0.603	0.491	0.437	0.346	0.228	0.129	0.092	0.000

Таблица 8. Интервал 5, $N = 207$

κ	0	1	10	20	30	50	100	500	∞
d_J	5.233	4.844	4.345	4.190	4.104	4.007	3.899	3.678	3.370
$\hat{\sigma}$	0.099	0.102	0.117	0.125	0.131	0.139	0.149	0.168	0.241
θ	0.671	0.446	0.227	0.172	0.143	0.110	0.074	0.040	0.000

Как показывают таблицы, поведение функции $d_J = d_J(\kappa)$ может быть весьма разнообразным. У этой функции для интервала 1 был обнаружен единственный минимум при $\kappa \approx 52$, которому отвечают весьма точные оценки тензора инерции станции с $d_J \approx 0.649$. Аналогичное поведение демонстрирует эта функция и в случае интервала 4, только здесь ее минимальное значение существенно больше: $d_J \approx 3.909$ при $\kappa \approx 0.55$. В случае интервалов 2 и 5 функция $d_J(\kappa)$ монотонно убывает, и ее минимальное значение достигается при $\kappa = +\infty$. Сложнее всего эта функция ведет себя на интервале 3. Здесь эта функция имеет и максимум (при $\kappa \approx 10$), и минимум (при $\kappa \approx 1500$), однако соответствующие экстремальные значения d_J не очень сильно отличаются друг от друга.

5. Заключение. Полученные результаты показывают принципиальную возможность оценивания тензора инерции станции по измерениям суммарного кинетического момента гиродинов. Погрешность оценок, характеризуемая отношением $d_J/||J||$ ($||\cdot||$ — евклидова норма в R^6), в наиболее точных случаях обработки телеметрической информации на интервалах 2 и 3 составила менее 7 %. В худшем случае на интервале 4 эта погрешность составила около 20 %. Найденные оценки меняются от интервалу, и наблюдаемый разброс дает дополнительную характеристику их точности — примерно 10 %. Такая точность недостаточна для нужд практики. Повышение точности может быть достигнуто как за счет повышения точности телеметрической информации, так и за счет совершенствования используемой для ее обработки математической модели. Реализация первого пути требует дальнейшего изучения телеметрических данных о кинетических моментах гиродинов, второй путь требует повышения точности вычисления действующего на станцию аэродинамического момента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00323).

Литература

[1] Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В. Определение ориентации орбитального комплекса "Мир"по показаниям оптического звездного датчика. Космические исследования, 1995, т. 33, N 4, с. 395-402.

[2] Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции "Мир". Космические исследования, 2001, т. 39, N 1, с 27-42.

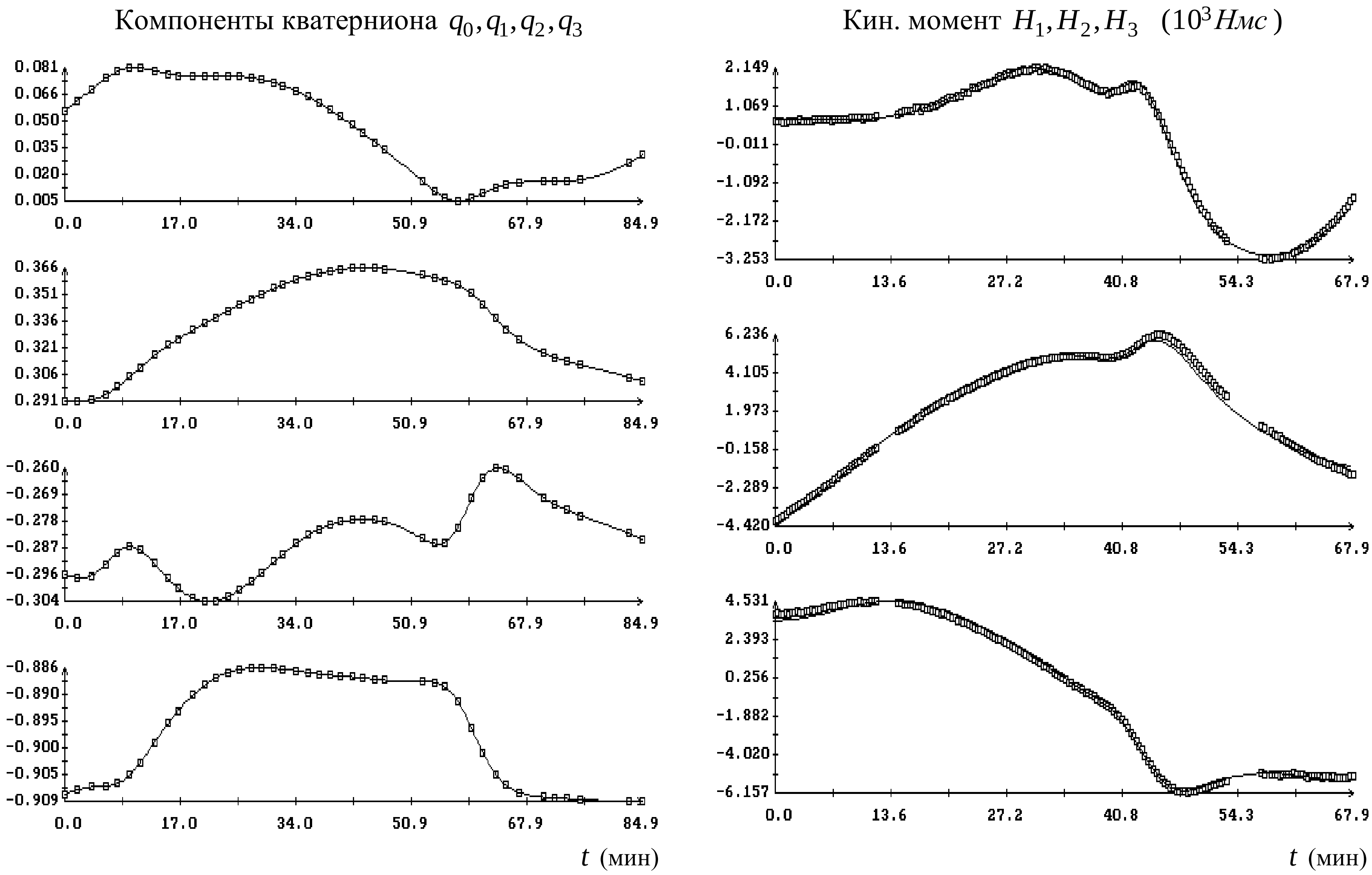
[3] Сазонов В.В., Беляев М.Ю., Зыков С.Г. Исследование задачи оценивания тензора инерции орбитальной станции "Мир"по данным измерений кинетического момента гиродинов. Космические исследования, 1994, т. 32, N 3, с. 3-16.

[4] Сарычев В.А., Сазонов В.В., Беляев М.Ю., Зыков С.Г., Чебукова Е.Ю. Оценивание тензора инерции орбитальной станции "Мир"по данным измерений кинетического момента гиродинов. Космические исследования, 1994, т. 32, N 4-5, с. 22-42.

[5] Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов. ГОСТ 22721-77. М., Изд-во стандартов, 1978.

[6] Reinsch C.H. Smoothing by spline functions. Numerische mathematik, 1975, B. 24, N 5, S. 383-393.

[7] Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.



(а) (б)

Рис. 1. Момент $t = 0$ соответствует 11:55:56 ДМВ 04.11.2001.

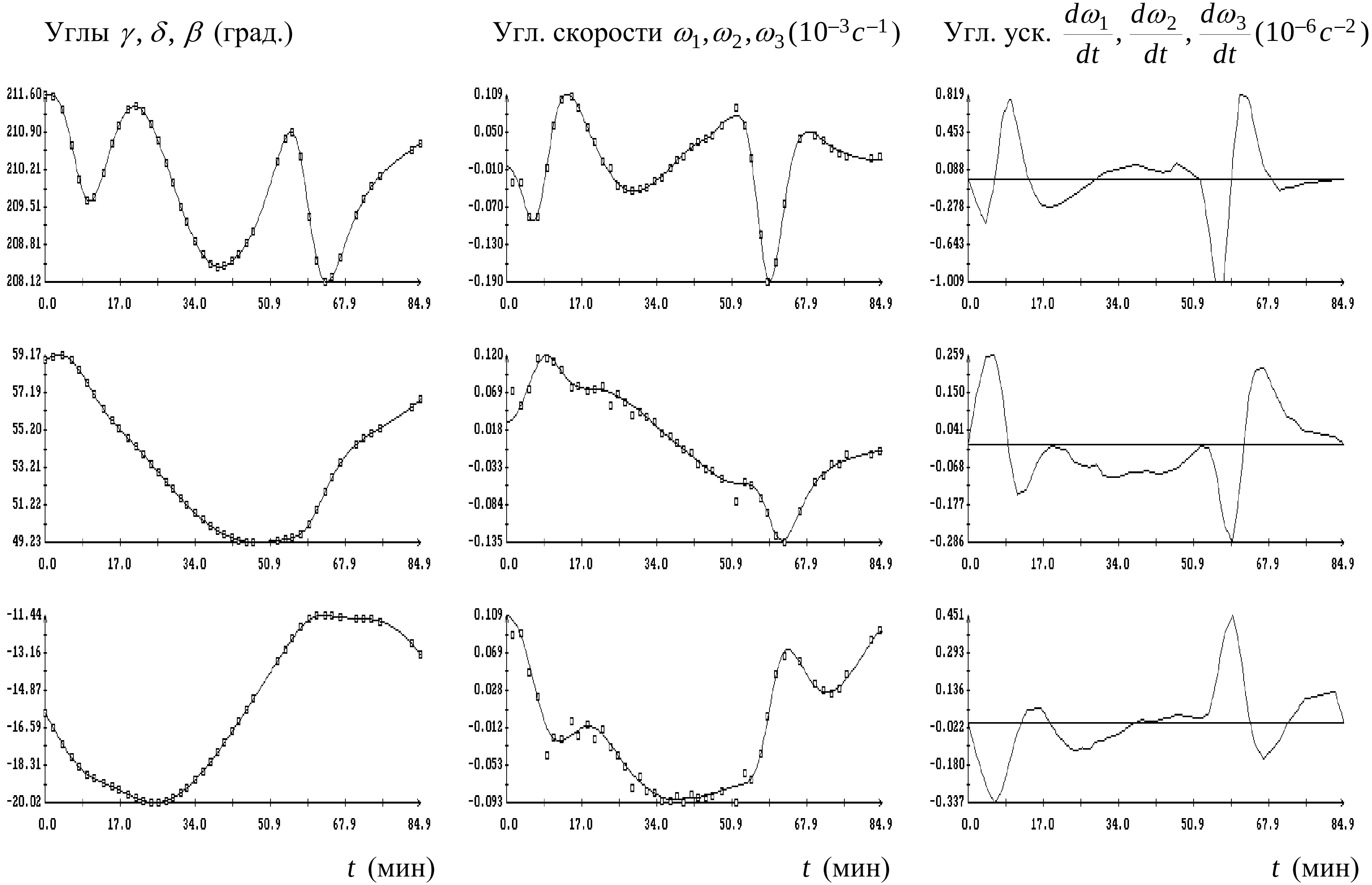


Рис. 2. Момент $t = 0$ соответствует 11:55:56 ДМВ 04.11.2001.

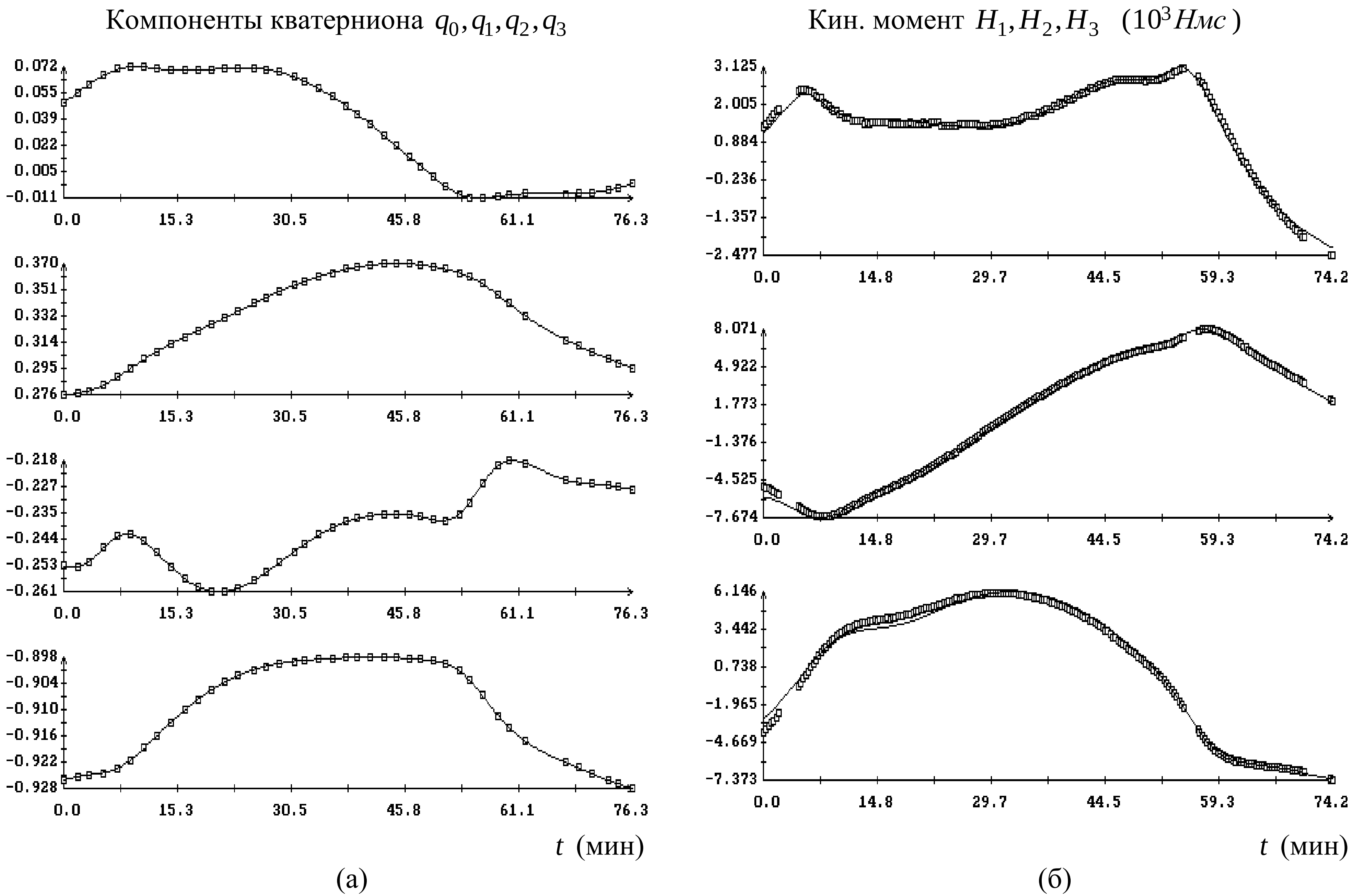


Рис. 3. Момент $t = 0$ соответствует 09:28:59 ДМВ 05.11.2001.

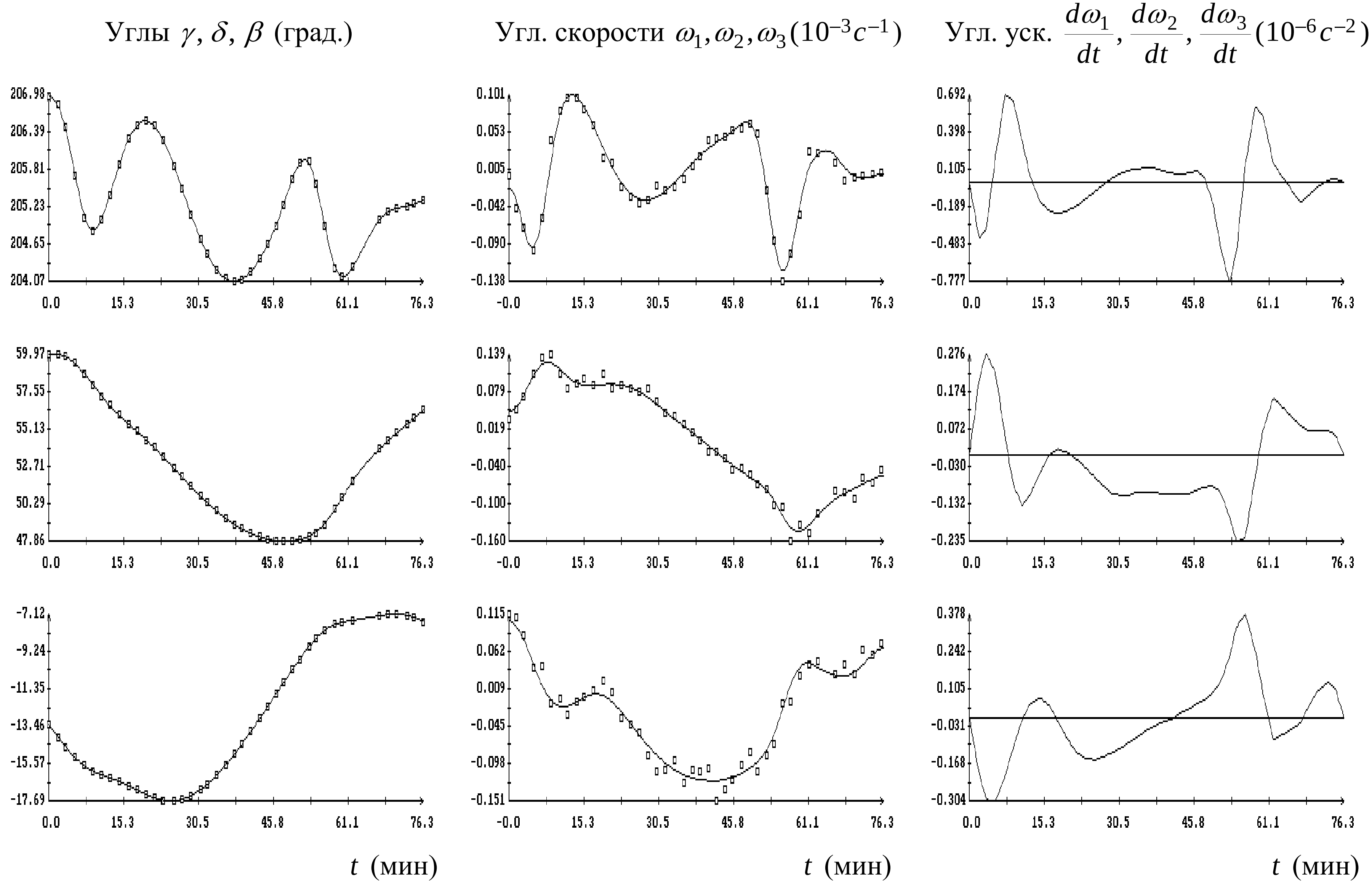


Рис. 4. Момент $t = 0$ соответствует 09:28:59 ДМВ 05.11.2001.

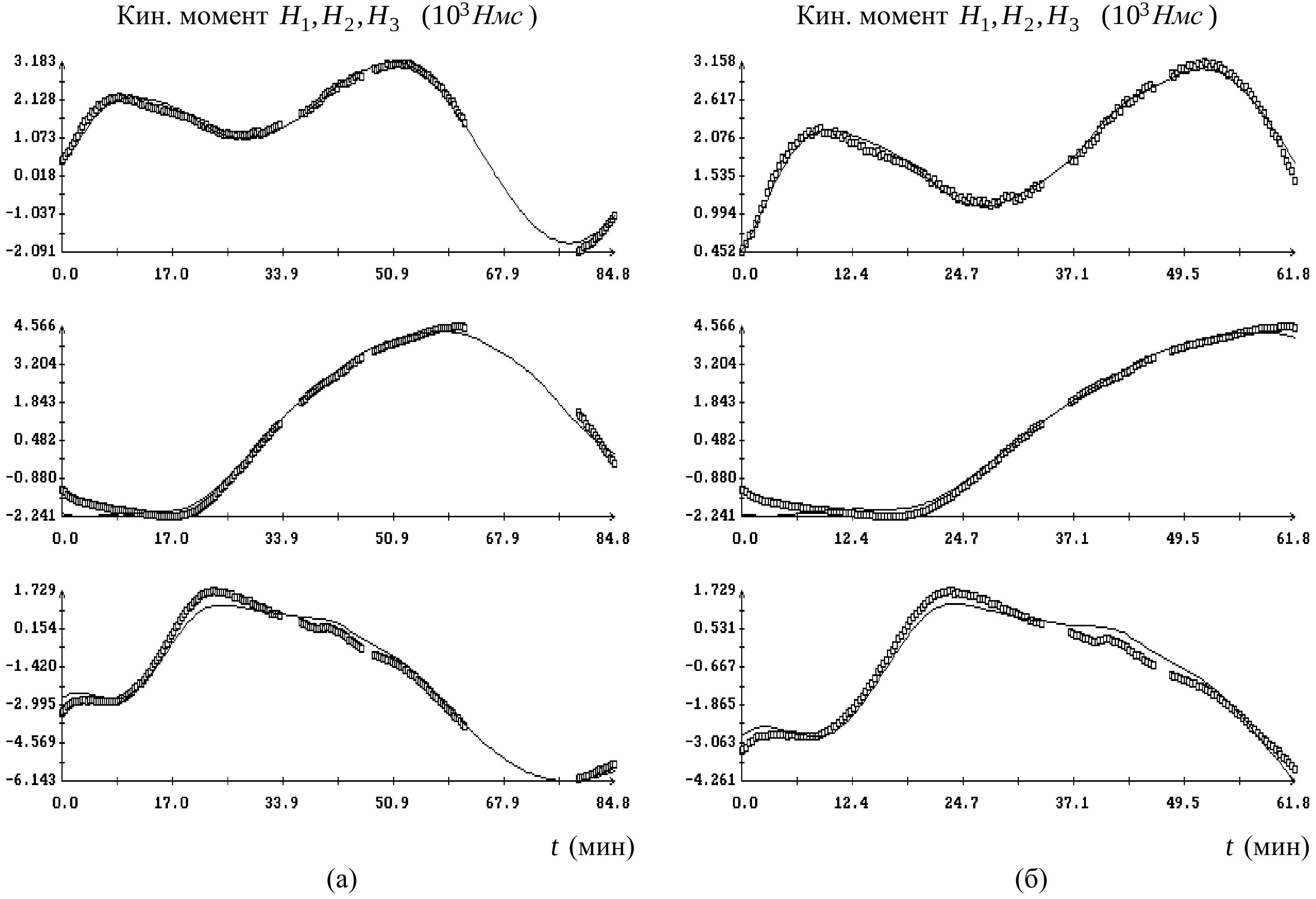


Рис. 5. (а) – интервал 1, (б) – интервал 1′ (табл. 1).

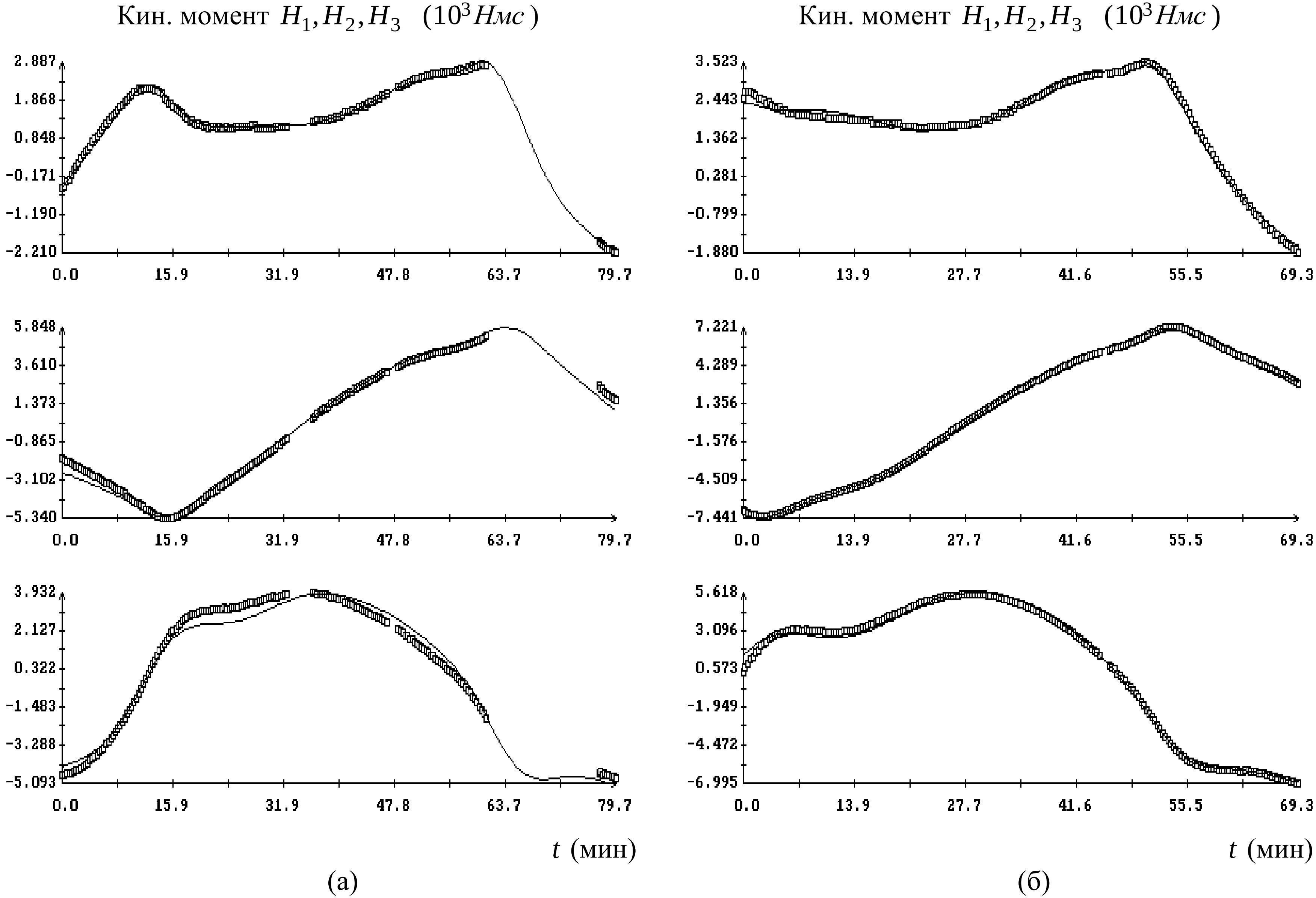
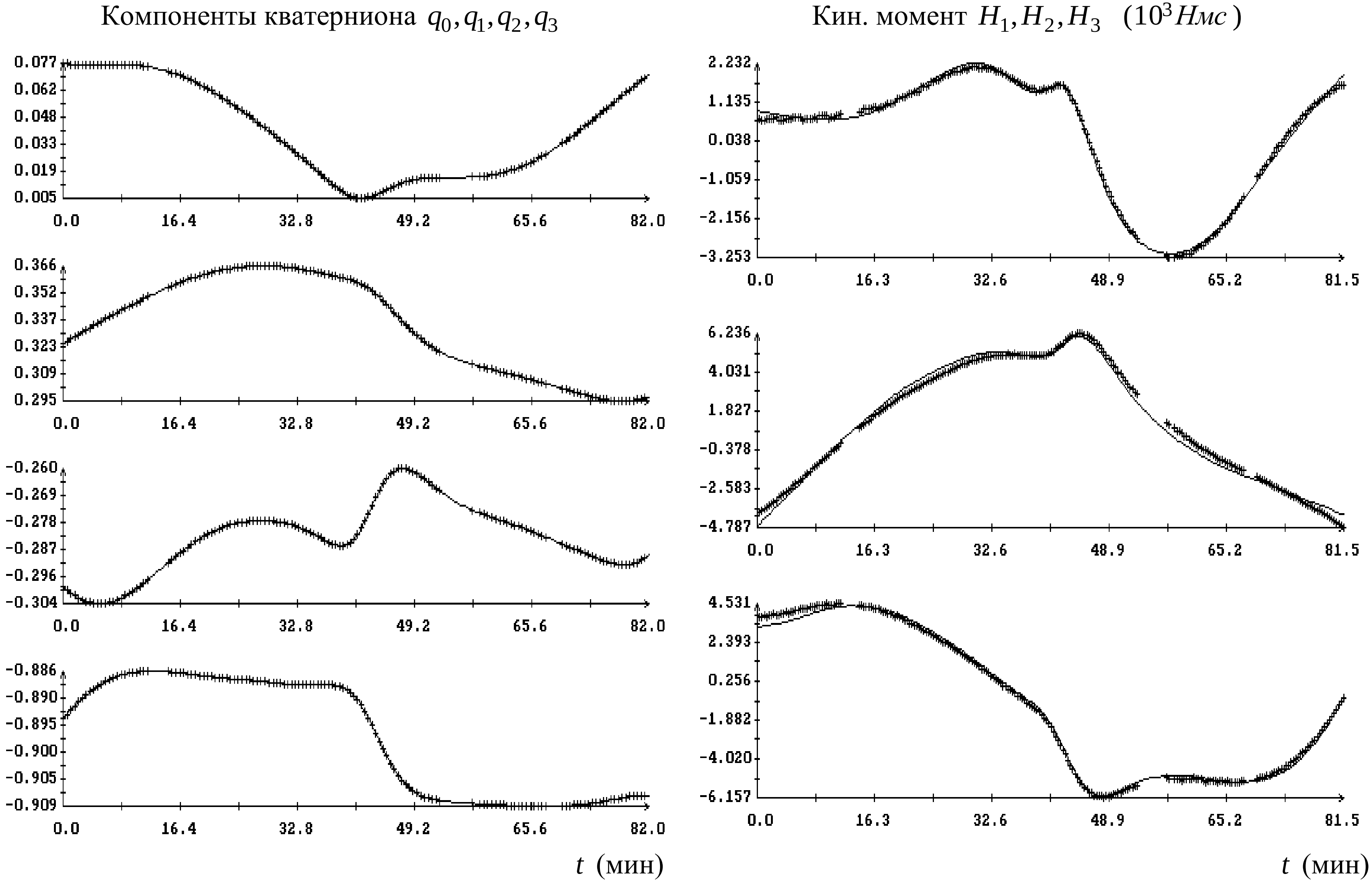


Рис. 6. (а) – интервал 2, (б) – интервал 4 (табл. 1).



(а) (б)

Рис. 7. Момент $t = 0$ соответствует 12:12:15 ДМВ 04.11.2001.

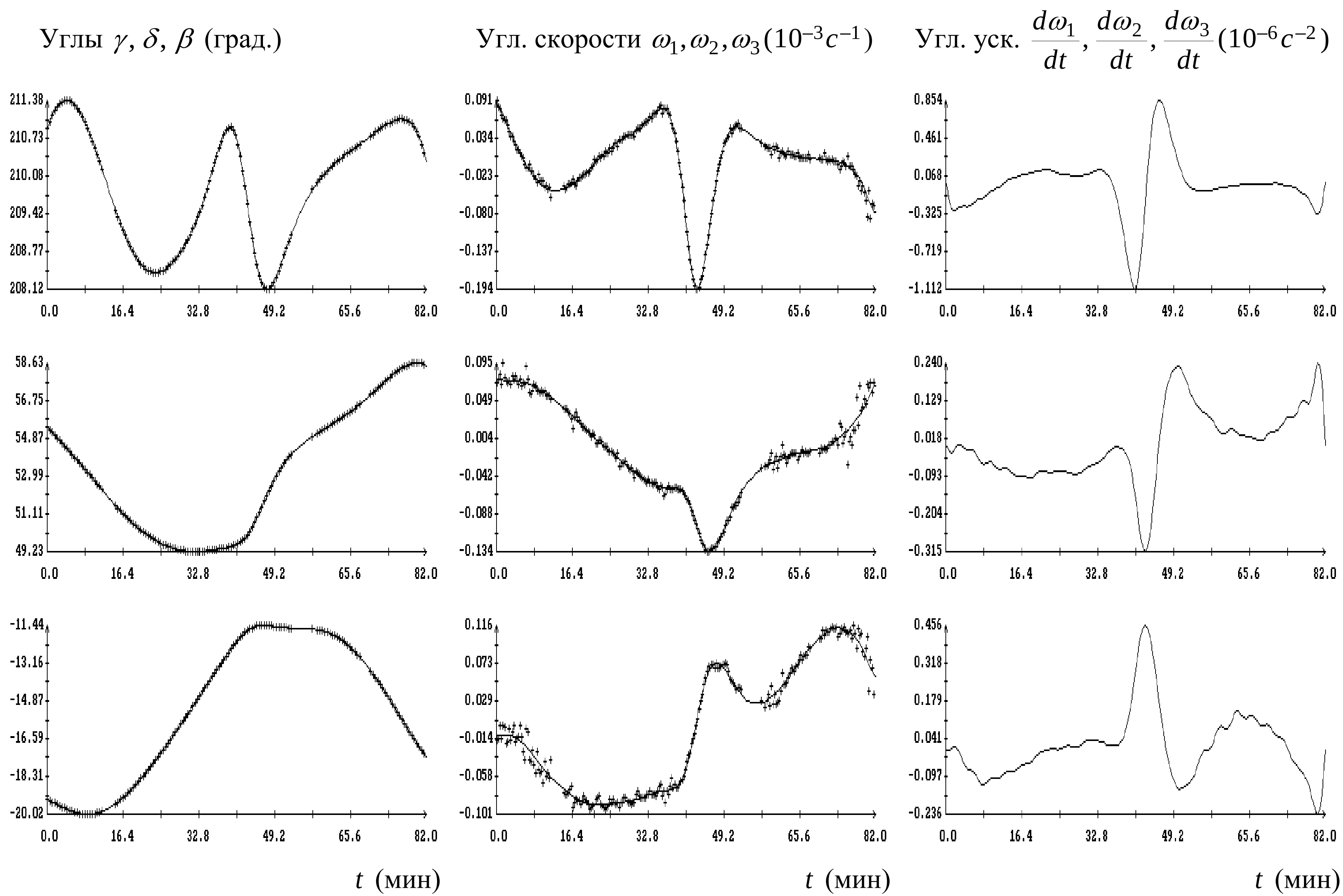
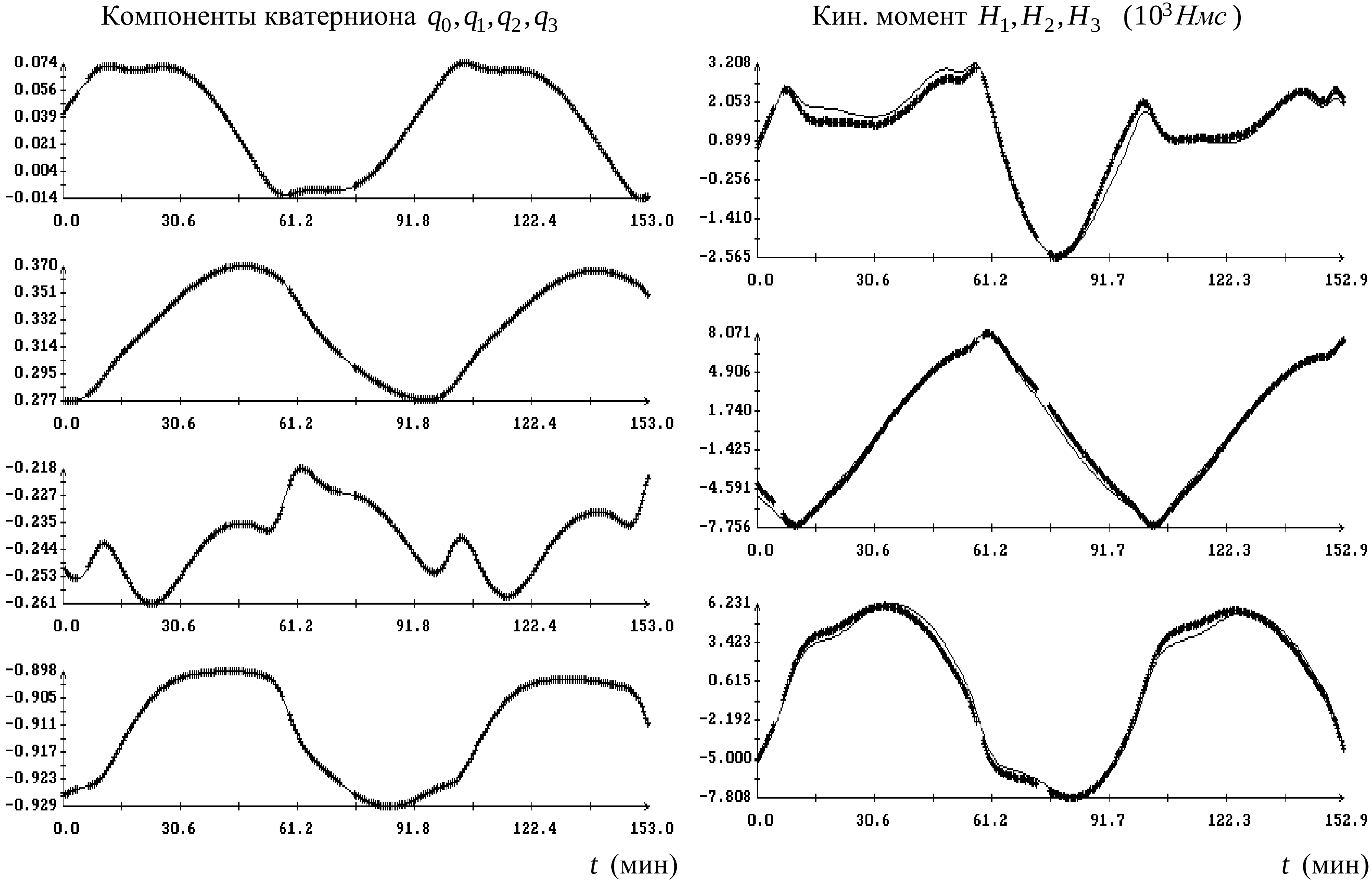


Рис. 8. Момент $t = 0$ соответствует 12:12:12 ДМВ 04.11.2001.



(а) (б)

Рис. 9. Момент $t = 0$ соответствует 09:26:58 ДМВ 05.11.2001.

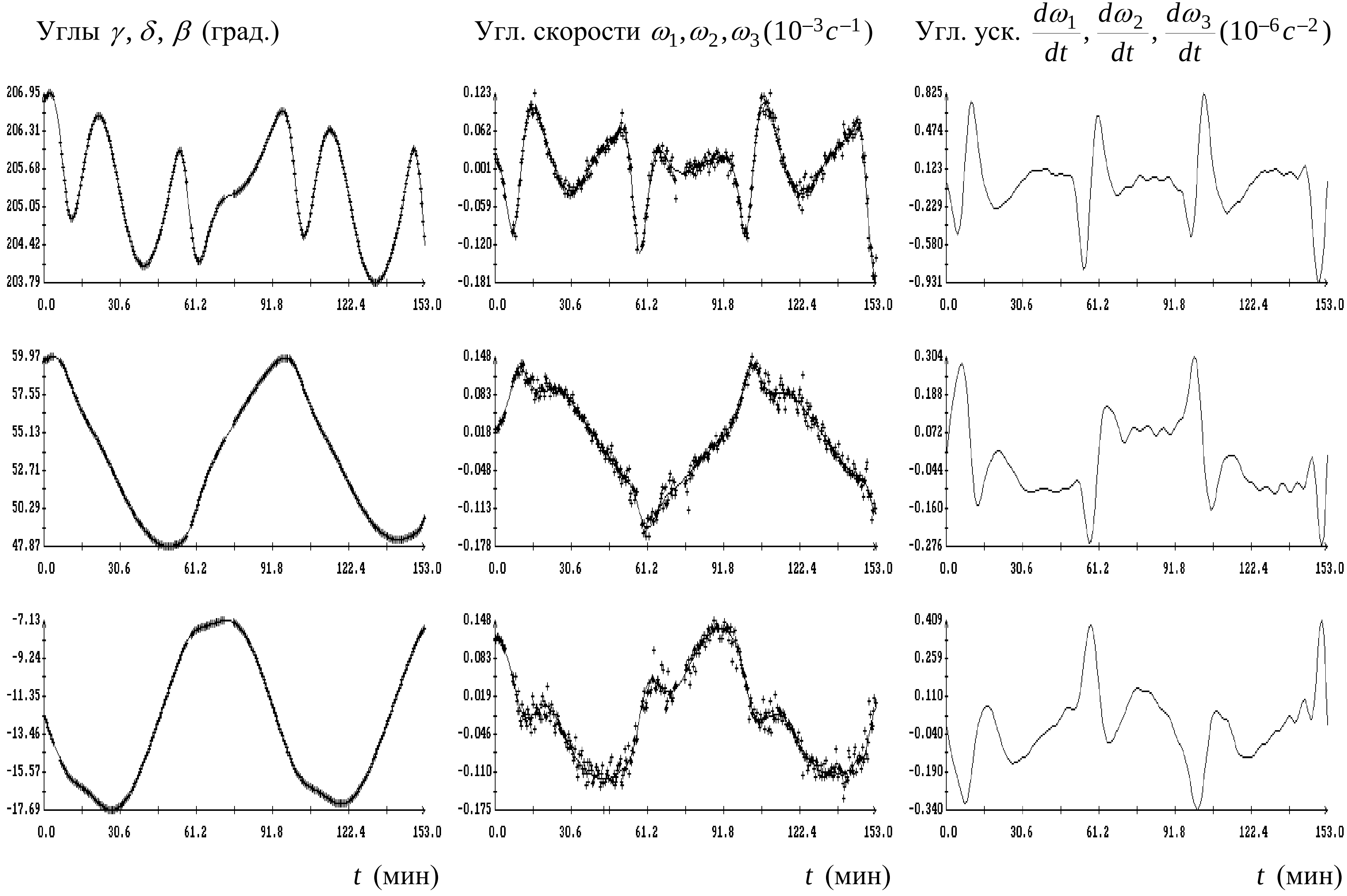
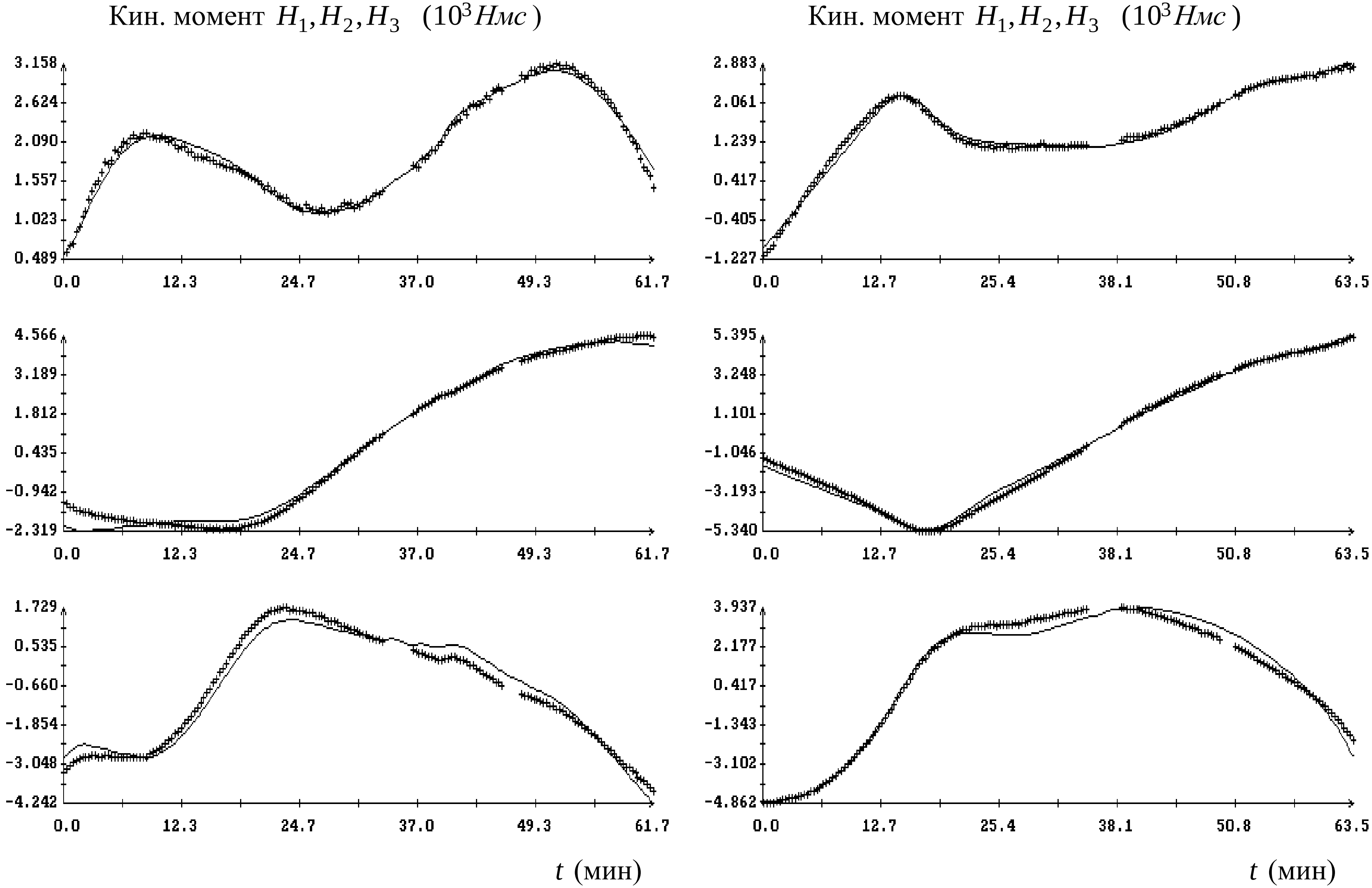
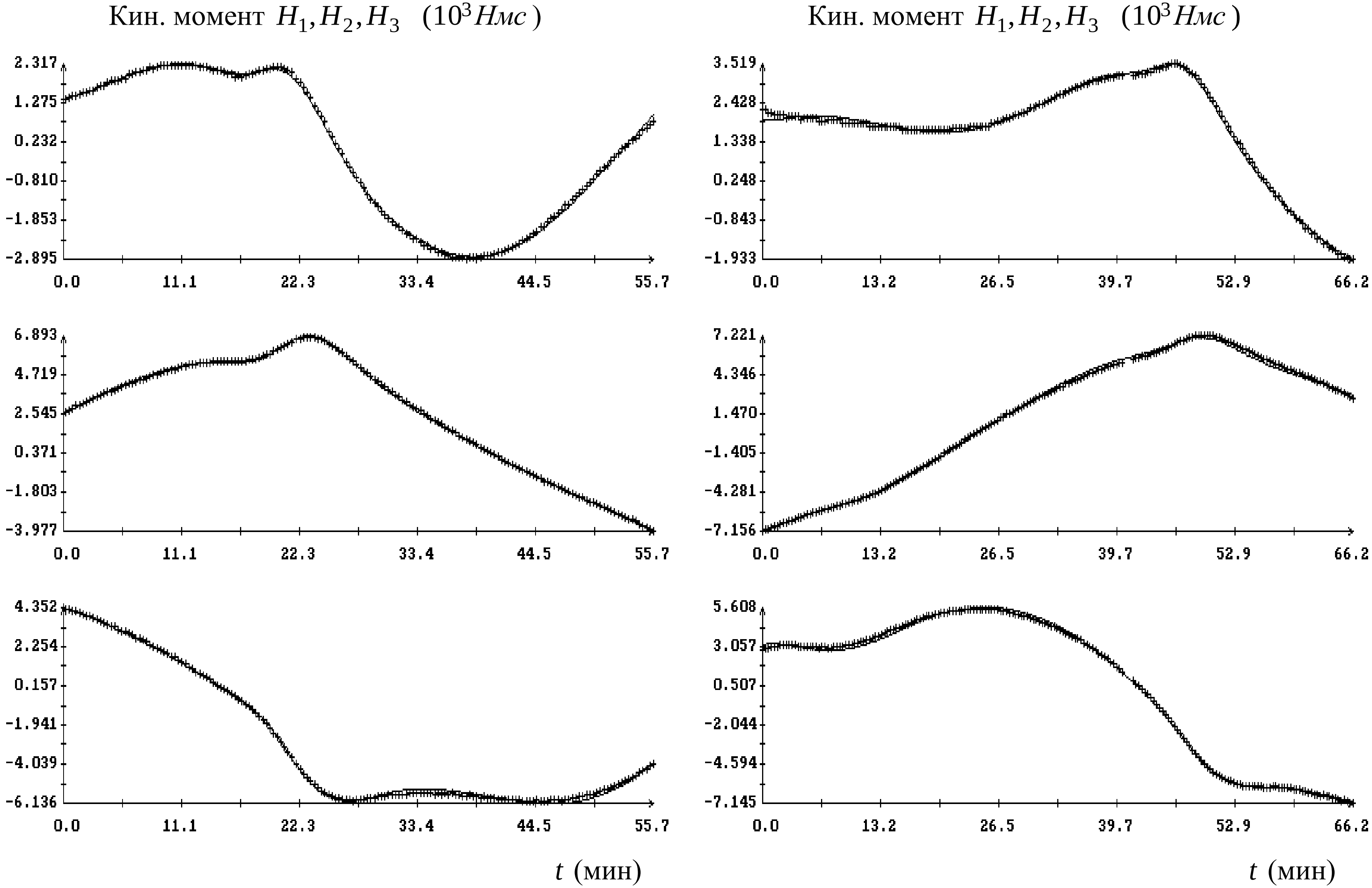


Рис. 10. Момент $t = 0$ соответствует 09:26:58 ДМВ 05.11.2001.



(а) (б)

Рис. 11. (а) – интервал 1, (б) – интервал 2 (табл. 2).



(а) (б)

Рис. 12. (а) – интервал 3, (б) – интервал 5 (табл. 2).