

**ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша РАН**

**Секистова Н.А., Хайруллин Р.З.**

**К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ОБЪЕДИНЕНИЕ  
МОНОПРОДУКТОВЫХ ГОРНОДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ**

**Москва**

УДК 622.224.863, 519.866.6

Секистова Н.А., Хайруллин Р.З.

## **К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ОБЪЕДИНЕНИЕ МОНОПРОДУКТОВЫХ ГОРНОДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ**

Разработаны экономико – математические модели оптимального инвестирования в объединения монопродуктовых горнодобывающих предприятий с целью максимизации суммарной пропускной способности. Создано специализированное программное обеспечение. Представлены и проанализированы результаты моделирования. Разработаны простые методики расчета оптимальной последовательности и размеров инвестирования предприятий.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, инвестирование, монопродуктовое горнодобывающее предприятие.

Sekistova N.A., Khairoullin R.Z.

## **ON THE OPTIMIZATION OF CAPITAL INVESTMENT TO CORPORATION OF SINGLE PRODUCTION MINING FACTORIES**

Econo-mathematical models of optimal investment of capital to corporation of single production mining factories in order to maximize the total capacity have been developed. The special-purpose software has been created. Results of simulation have been suggested and analyzed. Simple methods for calculation of investment sequence and investment volumes to each factory have been developed.

**Key Words:** optimal control, investment, single production mining factory.

### **Содержание**

Введение.....	3
1. Математическая модель распределения инвестиций между технологическими звеньями одной шахты.....	3
2. Модель 1. Максимизация суммарной пропускной способности шахт объединения при сохранении средней зольности по всем шахтам.....	8
3. Модель 2. Максимизация суммарной пропускной способности шахт объединения при сохранении средней зольности по двум группам шахт, на которых добывается энергетический и коксующийся уголь.....	12
4. Исходные данные и результаты моделирования.....	15
5. Аналитические методики расчета оптимальной последовательности и размеров инвестирования.....	18
Заключение.....	24
Литература.....	24
Приложение.....	25

## **Введение**

Модуль управления капиталовложениями IM (Investment Management) входит в состав всех современных ERP (Enterprise Resource Planning) систем управления предприятием [1]. Этот модуль предназначен для поддержки процесса инвестирования от начальной стадии планирования до завершающих мероприятий. Математические модели, входящие в указанный модуль, являясь достаточно универсальными, не всегда адекватно и полно описывают особенности конкретного предприятия (объединения). Как показывает практика в настоящее время для учета конкретной специфики, модуль IM интегрируется со специализированными программными продуктами других разработчиков. Настоящая практика по всей видимости сохранится и в будущем. Поэтому проблема разработки специализированных программных продуктов, включающих экономико – математические модели, учитывающие особенности конкретных предприятий отрасли, и могущих быть интегрированными с модулями ERP системы, является актуальной.

В настоящей работе представлены экономико - математические модели оптимального инвестирования монопродуктовых горнодобывающих предприятий, которые лежат в основе специализированного программного продукта. Предлагаемое программное математическое обеспечение легко интегрируется с модулями ERP систем. Представлены результаты моделирования последовательности и размеров инвестирования угольных шахт, входящих в объединение. Полученные результаты позволят оптимально распоряжаться инвестициями на каждом шаге инвестирования и максимально увеличить суммарную пропускную способность шахт объединения. Предлагаемая технология инвестирования позволит оптимально распределять бюджет, планировать затраты на инвестиционные программы в рамках объединения, контролировать доступные ресурсы, сравнивать фактические издержки с плановыми и т.д. Работа выполнена в рамках концепции [2].

Все рисунки и таблицы вынесены в приложение.

### **1. Математическая модель распределения инвестиций между технологическими звеньями одной шахты**

Технологическая структура монопродуктового горнодобывающего предприятия (шахты) может быть представлена в виде цепочки технологических звеньев, изображенной на рис. 1а [3]. Каждое  $j$  – тое звено цепочки (например: очистные, подготовительные, проходческие работы; подземный транспорт; вентиляция и др.), будем характеризовать двумя

параметрами  $p^j$  и  $v^j$  - пропускной способностью звена и эффективностью инвестирования в технологическое звено. Пропускная способность измеряется в условных единицах пропускной способности (условных единицах производительности): *у.е.п.* Под эффективностью инвестирования будем понимать коэффициент, показывающий на сколько единиц увеличит условную пропускную способность (производительность) технологического звена после инвестирования каждая условная единица инвестирования: *у.е.и.* Коэффициент эффективности инвестирования имеет размерность  $(\text{у.е.п.})/(\text{у.е.и.})$ . В настоящей работе предполагается, что в результате инвестирования в технологическое звено некоторой суммы, равной  $S_{ин}$ , пропускная способность звена  $p^j$  “мгновенно” увеличивается до величины  $p^j + v^j \cdot S_{ин}$ .

Примем, что пропускная способность шахты определяется пропускной способностью звена (группы звеньев) с наименьшей производительностью [3]. В дальнейшем это звено (группу звеньев) будем называть узким местом технологической цепи. Поэтому для максимизации производительности шахты в целом при распределении инвестиций между отдельными технологическими звеньями, в первую очередь инвестиции следует направлять на ликвидацию узкого места. Для удобства рассуждений перенумеруем технологические звенья шахты в порядке возрастания их пропускных способностей (рис.1б). Тогда при распределении инвестиций между технологическими звеньями шахты сначала следует направлять инвестиции в первое звено, затем, после того как пропускные способности двух звеньев сравниваются между собой, одновременно в первое и второе (в определенных пропорциях, чтобы пропускные способности этих звеньев увеличились одинаково), затем, после того как пропускные способности первых трех звеньев сравниваются между собой, одновременно в первое, второе и третье звено и т.д. После того, как пропускные способности всех технологических звеньев сравниваются и станут равными пропускной способности последнего технологического звена, инвестиции следует направлять во все звенья одновременно (в определенных пропорциях, чтобы пропускные способности всех звеньев увеличились одинаково). В дальнейшем будем говорить, что узкое место ликвидируется на 100%, если в результате инвестирования в узкое место его пропускная способность увеличится до пропускной способности следующего за ним технологического звена.

Рассмотрим шахту, имеющую  $k$  технологических звеньев с отличными друг от друга пропускными способностями и конечными ненулевыми эффективностями. Обозначим  $S_{ин}^{\Sigma}$  - общую сумму инвестирования, превышающую некоторую величину, достаточную чтобы пропускные способности всех звеньев шахты сравнялись между собой. Найдем конечную последовательность инвестиций

$$S_{ин}^{1,2}, S_{ин}^{1,2,3}, S_{ин}^{1,2,3,4}, \dots, S_{ин}^{1,2,\dots,k}, \quad (1)$$

члены которой удовлетворяют условию

$$0 < S_{ин}^{1,2} < S_{ин}^{1,2,3} < S_{ин}^{1,2,3,4} < \dots < S_{ин}^{1,2,\dots,k} < S_{ин}^{\Sigma}, \quad (2)$$

такую что при инвестировании суммы  $S_{ин} = S_{ин}^{1,2,\dots,j}$ , ( $j=2,3,\dots,k$ ) пропускные способности звеньев с первого по  $j$  – тое становятся равными. Опишем также алгоритм распределения инвестиций между отдельными технологическими звеньями.

Первый член последовательности (1) находится по формуле:

$$S_{ин}^{1,2} = \frac{(p^2 - p^1)}{v^1}. \quad (3)$$

Если сумма инвестирования  $S_{ин}$  удовлетворяет неравенству  $0 < S_{ин} \leq S_{ин}^{1,2}$ , то все средства следует направлять на увеличение пропускной способности первого звена.

При инвестировании в размере  $S_{ин} = S_{ин}^{1,2}$  пропускные способности первых двух звеньев сравниваются. После этого узким местом становится объединенный участок, включающий первые два звена. Эффективность объединенного участка  $v^{1,2}$  может быть найдена из уравнения

$$\frac{1}{v^1} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v^{1,2}}. \quad (4)$$

Второй член последовательности (1) находится по формуле:

$$S_{ин}^{1,2,3} = S_{ин}^{1,2} + \frac{(p^3 - p^2)}{v^{1,2}} \quad (5)$$

Если  $S_{ин}^{1,2} < S_{ин} \leq S_{ин}^{1,2,3}$ , то часть инвестиций в размере  $S_{ин} = S_{ин}^{1,2}$  следует распределить описанным выше способом (направлять на увеличение пропускной способности первого звена). После этого часть инвестиций в размере  $\Delta S_{ин} = (S_{ин} - S_{ин}^{1,2})$  следует распределить между первым и вторым звеном так, чтобы пропускные способности этих звеньев увеличились на одну и ту же величину. Обозначим  $x^1$  и  $x^2$  - искомые суммы, инвестируемые в первое и второе звено. Тогда имеем систему

$$\Delta S_{ин} = x^1 + x^2, \quad x^1 \cdot v^1 = x^2 \cdot v^2,$$

откуда находим

$$x^1 = \frac{\Delta S_{ин} \cdot v^2}{v^1 + v^2} , \quad (6)$$

$$x^2 = \frac{\Delta S_{ин} \cdot v^1}{v^1 + v^2} . \quad (7)$$

При  $S_{ин} = S_{ин}^{1,2,3}$  пропускные способности первых трех звеньев сравниваются. После этого узким местом становится объединенный участок первого, второго и третьего звена. Эффективность этого объединенного участка  $v^{1,2,3}$  может быть найдена из уравнения

$$\frac{1}{v^{1,2}} + \frac{1}{v^3} = \frac{1}{v^{1,2,3}} . \quad (8)$$

В результате аналогичных рассуждений найдем  $(k-1)$  – ый член последовательности  $S_{ин}^{1,2,3,\dots,k}$  (сумму, необходимую для того, чтобы пропускные способности звеньев с первого по  $k$  – тое стали равными):

$$S_{ин}^{1,2,\dots,k} = S_{ин}^{1,2} + S_{ин}^{1,2,3} + \dots + S_{ин}^{1,2,\dots,(k-1)} + \frac{(p^k - p^{k-1})}{v^{1,2,\dots,(k-1)}} . \quad (9)$$

Если  $S_{ин}^{1,2,\dots,(k-1)} < S_{ин} \leq S_{ин}^{1,2,\dots,k}$ , то инвестиции в размере  $S_{ин} = S_{ин}^{1,2,\dots,(k-1)}$  следует распределять описанным выше способом (направлять на увеличение пропускных способностей с первого звена по  $(k-2)$  – е звено). После этого оставшуюся часть инвестиций в размере  $\Delta S_{ин} = (S_{ин} - S_{ин}^{1,2,\dots,(k-1)})$  следует распределить между первыми  $(k-1)$  звеньями так, чтобы пропускные способности всех инвестируемых звеньев увеличились на одну и ту же величину. Обозначим  $x^{1,2,\dots,(k-2)}$  и  $x^{k-1}$  - искомые суммы, инвестируемые в объединенный участок, состоящий из первых  $(k-2)$  звеньев, и в  $(k-1)$  – е звено соответственно. Тогда имеем систему

$$\Delta S_{ин} = x^{1,2,\dots,(k-2)} + x^{k-1} , \quad x^{1,2,\dots,(k-2)} \cdot v^{1,2,\dots,(k-2)} = x^{k-1} \cdot v^{k-1} ,$$

откуда находим

$$x^{1,2,\dots,(k-2)} = \frac{\Delta S_{ин} \cdot v^{k-1}}{v^{1,2,\dots,(k-2)} + v^{k-1}}, \quad (10)$$

$$x^{k-1} = \frac{\Delta S_{ин} \cdot v^{1,2,\dots,(k-2)}}{v^{1,2,\dots,(k-2)} + v^{k-1}}. \quad (11)$$

При  $S_{ин} = S_{ин}^{1,2,\dots,k}$  пропускные способности первых  $k$  звеньев сравниваются. После этого узким местом становится объединенный участок, включающий все  $k$  звеньев. Эффективность объединенного участка  $v^{1,2,\dots,k}$  может быть найдена из уравнения

$$\frac{1}{v^{1,2,\dots,(k-1)}} + \frac{1}{v^k} = \frac{1}{v^{1,2,\dots,k}}. \quad (12)$$

Если  $S_{ин}^{1,2,\dots,k} < S_{ин}$ , то инвестиции в размере  $S_{ин} = S_{ин}^{1,2,\dots,k}$  следует распределять описанным выше способом (направлять на увеличение пропускных способностей с первого звена по  $(k-1)$ -ое звено). После этого оставшуюся часть инвестиций в размере  $\Delta S_{ин} = (S_{ин} - S_{ин}^{1,2,\dots,k})$  следует распределить между  $k$  звеньями так, чтобы пропускные способности всех инвестируемых звеньев увеличились на одну и ту же величину. Обозначим  $x^{1,2,\dots,(k-1)}$  и  $x^k$  - искомые суммы, инвестируемые в объединенный участок, состоящий из первых  $(k-1)$  звеньев, и в  $k$ -тое звено соответственно. Тогда имеем систему

$$\Delta S_{ин} = x^{1,2,\dots,(k-1)} + x^k, \quad x^{1,2,\dots,(k-1)} \cdot v^{1,2,\dots,(k-1)} = x^k \cdot v^k,$$

откуда находим

$$x^{1,2,\dots,(k-1)} = \frac{\Delta S_{ин} \cdot v^k}{v^{1,2,\dots,(k-1)} + v^k}, \quad (13)$$

$$x^k = \frac{\Delta S_{ин} \cdot v^{1,2,\dots,(k-1)}}{v^{1,2,\dots,(k-1)} + v^k}. \quad (14)$$

В соответствии с представленной моделью для максимизации пропускной способности шахты инвестирование следует осуществлять в узкое место технологической цепи. Узким местом, после соответствующей

перенумерации, является либо первое технологическое звено, либо объединенный участок, включающий группу технологических звеньев с первого по  $j$  – тое ( $j=2,3,\dots,k$ ). С помощью соотношений (6)-(7), (10)-(11), (13)-(14) могут быть вычислены размеры инвестирования в каждое технологическое звено в отдельности.

## **2. Модель 1. Максимизация суммарной пропускной способности шахт объединения при сохранении средней зольности по всем шахтам.**

Рассмотрим объединение, включающее  $n$  шахт. Каждая шахта имеет описанные выше технологическую структуру и механизм распределения инвестиций между технологическими звеньями. Предположим, что перед началом инвестирования технологические звенья каждой шахты имеют отличные друг от друга пропускные способности и конечные ненулевые эффективности.

Перенумеруем технологические звенья каждой шахты в порядке возрастания их пропускных способностей. Обозначим через  $k_i$ , ( $i=1,2,\dots,n$ ) - количество технологических звеньев  $i$ -той шахты. Тогда в соответствии с математической моделью, описанной в первом параграфе, при инвестировании конкретной шахты инвестиции могут быть направлены либо в первое технологическое звено, либо в объединенный участок, включающий звенья с первого по  $m_i$ , причем  $2 \leq m_i \leq k_i$ , ( $i=1,2,\dots,n$ ). Обозначим через  $p_i$ ,  $u_i$  - пропускную способность и эффективность соответствующих узких мест, в которые могут быть направлены инвестиции на данном этапе инвестирования. Если  $m_i=1$ , то под  $u_i$  будем понимать эффективность инвестирования в первое технологическое звено  $i$ -той шахты. Если  $m_i \neq 1$ , то  $u_i$  может быть найдена с использованием соотношений (4),(8),(12). Зольность угля, добываемого на  $i$ -той шахте, обозначим  $Z_i$ , сумму инвестирования, при которой текущее узкое место технологической цепи (объединенный участок, в который осуществляется инвестирование)  $i$ -той шахты ликвидируется на 100%, обозначим  $G_i$ .

Сформулируем сначала первую вспомогательную задачу, которая используется при построении последовательности инвестирования шахт с целью максимизации суммарной пропускной способности шахт объединения при сохранении средней зольности по всем шахтам. Затем опишем методику построения оптимальной последовательности инвестирования, основанную на решении конечной серии вспомогательных задач для разных значений сумм инвестирования.

**2.1. Вспомогательная задача 1.** Требуется максимизировать суммарную пропускную способность всех шахт после инвестирования



$$F = \sum_{i=1}^n (p_i + u_i \cdot x_i) \rightarrow \max , \quad (15)$$

при ограничении на сумму инвестирования в целом

$$\sum_{i=1}^n x_i = S_{ин} , \quad (16)$$

при условии, что средняя зольность по всем шахтам

$$Z_{CP} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot Z_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

не изменится и после инвестирования останется равной средней зольности до инвестирования

$$\frac{\sum_{i=1}^n (p_i + u_i \cdot x_i) \cdot Z_i}{\sum_{i=1}^n (p_i + u_i \cdot x_i)} = Z_{CP} . \quad (17)$$

Предполагается, что величина инвестиции в каждую шахту не может быть отрицательной

$$x_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (18)$$

Отметим, что сформулированная вспомогательная задача (15)-(18) является стандартной задачей линейного программирования.

Дополнительно потребуем, чтобы при распределении  $S_{ин}$  между отдельными шахтами ни одно из узких мест не ликвидировалось более чем на 100%

$$x_i \leq G_i , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (19)$$

В частности, если для  $i$  - той шахты инвестирование осуществляется в объединенный участок, включающий звенья с 1 по  $m_i$ , то

$$G_i = \frac{p_i^{m_i+1} - p_i}{u_i} , \quad m_i < k_i , \quad (20)$$

где  $p_i^{m_i+1}$  - пропускная способность  $(m_i + 1)$  – го звена  $i$ -той шахты. Если для некоторой шахты инвестирование осуществляется в объединенный участок, включающий все технологические звенья:  $m_i = k_i$ , то для этой шахты ограничение (19) не учитывается.

Условия (19) в стандартную задачу линейного программирования (15)-(18) включать не будем. Эти условия вместе с (20) будем использовать для формирования признака окончания расчетов при решении каждой серии вспомогательных задач 1.

## 2.2. Построение оптимальной последовательности инвестирования.

Обозначим  $\Sigma_{ин}^{\Sigma}$  - некоторую сумму инвестирования, превышающую величину, достаточную чтобы при инвестировании объединения пропускные способности всех шахт стали равными пропускным способностям последних технологических звеньев. Обозначим через

$$\Sigma_{ин}^1, \Sigma_{ин}^2, \Sigma_{ин}^3, \dots, \Sigma_{ин}^L \quad (21)$$

- искомую конечную последовательность инвестирования, аналогичную (1), члены которой удовлетворяют условию

$$0 < \Sigma_{ин}^1 < \Sigma_{ин}^2 < \Sigma_{ин}^3 < \dots < \Sigma_{ин}^L < \Sigma_{ин}^{\Sigma}, \quad (22)$$

причем количество членов  $L$  заранее неизвестно и находится в результате расчетов ( $L$  зависит от конкретных значений исходных данных: пропускных способностей и эффективностей технологических звеньев шахт). Смысл членов последовательности (21) таков: при инвестировании в объединение суммы  $S_{ин} = \Sigma_{ин}^j$ , ( $j=1,2,\dots,L$ ) и ее оптимальном распределении между шахтами, пропускная способность текущего узкого места (первого технологического звена или объединенного участка, включающего несколько технологических звеньев некоторой шахты) ликвидируется на 100%, причем при инвестировании суммы  $S_{ин} < \Sigma_{ин}^j$  пропускная способность узкого места каждой шахты, в которое осуществляется инвестирование, строго меньше пропускной способности следующего за ним технологического звена.

Поиск каждого члена последовательности (21) осуществляется в два этапа. На первом этапе решается серия вспомогательных задач линейного программирования (15)-(18) для разных значений  $S_{ин}$  с некоторым шагом  $\delta S_{ин}$ :  $S_{ин} := S_{ин} + \delta S_{ин}$ , и ищется промежуток  $[S_{ин} - \delta S_{ин}, S_{ин}]$ , внутри которого находится точное значение члена последовательности (21). На втором этапе непосредственно вычисляется значение члена последовательности (21) - это минимальное предельное значение суммы

инвестирования, при котором ровно одно из условий (19) выполняется в виде равенства, а все остальные условия выполняются в виде строгого неравенства.

Перед началом инвестирования (при  $S_{ин} = 0$ ), пропускные способности каждой шахты равны пропускным способностям первых технологических звеньев (первое технологическое звено является узким местом каждой шахты). При этом все условия (19) выполняются в виде строгого неравенства.

Первый член последовательности (21) находится из условия того, что в результате инвестирования пропускная способность одной из  $n$  шахт увеличится до пропускной способности второго технологического звена этой же шахты. На первом этапе расчетов для нахождения первого члена последовательности (21) решается серия вспомогательных задач линейного программирования (15)-(18) для разных значений  $S_{ин}$  с некоторым шагом  $\delta S_{ин} : S_{ин} := S_{ин} + \delta S_{ин}$ , и находится промежуток  $[S_{ин} - \delta S_{ин}, S_{ин}]$ , внутри которого впервые одно из условий (19) выполняется в виде равенства. Ясно, что точное минимальное предельное значение  $S_{ин}^*$ , при котором ровно одно из условий выполняется в виде равенства, а все остальные условия (19) выполняются в виде строгого неравенства, находится в промежутке  $[S_{ин} - \delta S_{ин}, S_{ин}]$ .

На втором этапе расчетов уточняется минимальное предельное значение  $S_{ин}^*$ , при котором только одно условие (19) выполняется в виде равенства, а все остальные условия выполняются в виде неравенства. Уточнение осуществляется методом деления отрезка пополам в диалоговом режиме [4].

Первый член последовательности (19) полагается равным найденному предельному значению  $\Sigma_{ин}^1 = S_{ин}^*$ .

После этого пересчитываются пропускные способности  $p_i$  технологических звеньев тех шахт, в которые осуществлялось инвестирование. Для шахты, у которой условие (19) выполнилось в виде равенства, пересчитываются эффективность следующего объединенного участка  $u_i$  (включающего первые два звена), и ограничение сверху  $G_i$  (20) на сумму инвестирования.

Далее вычисляется второй член последовательности (21). На первом этапе расчетов решается серия вспомогательных задач линейного программирования (15)-(18) с другими коэффициентами:  $u_i, p_i, G_i, (i=1,2,\dots,n)$  для ряда значений  $S_{ин} := S_{ин} + \delta S_{ин}$ , и находится промежуток  $[S_{ин} - \delta S_{ин}, S_{ин}]$ , внутри которого впервые одно из условий (19) выполняется в виде равенства. На втором этапе расчетов уточняется минимальное предельное значение суммы инвестирования  $S_{ин}^*$  для задачи (15)-(18) и вычислялся второй член последовательности (21):  $\Sigma_{ин}^2 = \Sigma_{ин}^1 + S_{ин}^*$ .

В дальнейшем процесс построения членов последовательности (21) продолжается по описанной выше схеме  $\Sigma_{ин}^{s+1} = \Sigma_{ин}^s + S_{ин}^*$ ,  $s = 1, 2, \dots, (L-1)$ .

Через конечное число шагов построения последовательности инвестирования  $(L \leq \sum_{i=1}^n m_i - n)$  инвестиции начнут распределяться исключительно по объединенным участкам, включающим все технологические звенья. После этого при дальнейшем увеличении общей суммы инвестирования качественная картина распределения инвестиций по шахтам и объединенным участкам не изменится, поскольку в этом случае ограничения (19) становятся несущественными. Все инвестиции будут направляться в одни и те же шахты в фиксированных пропорциях. В этом случае оптимальная последовательность инвестирования (21) считается построенной.

### **3. Модель 2. Максимизация суммарной пропускной способности шахт объединения при сохранении средней зольности по двум группам шахт, на которых добывается энергетический и коксующийся уголь.**

Рассмотрим две группы шахт с описанной в первом параграфе технологической структурой и механизмом распределения инвестиций между технологическими звеньями. Первая группа включает  $n_1$  шахт. На этих шахтах добывается энергетический уголь с высокой зольностью. Вторая группа включает  $n_2$  шахт. На этих шахтах добывается коксующийся уголь с низкой зольностью. Пусть  $n = n_1 + n_2$ . Перенумеруем технологические звенья каждой шахты в порядке возрастания их пропускных способностей. Пусть, как и в модели 1, на некотором этапе инвестирования шахта с номером  $i$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  характеризуется пропускной способностью  $p_i$ , эффективностью инвестирования  $u_i$ . Зольность угля, добываемого на  $i$ -той шахте, обозначим  $Z_i$ , сумму инвестирования, при которой текущее узкое место технологической цепи  $i$ -той шахты ликвидируется на 100%, обозначим  $G_i$ .

Сформулируем вторую вспомогательную задачу, которая используется при построении последовательности инвестирования шахт объединения (21) с целью максимизации суммарной пропускной способности шахт объединения при сохранении средней зольности по двум группам шахтам. Затем опишем методику построения оптимальной последовательности инвестирования, основанную на решении конечной серии вспомогательных задач для разных значений сумм инвестирования.

**3.1. Вспомогательная задача 2.** Требуется максимизировать суммарную пропускную способность всех шахт после инвестирования

$$F = \sum_{i=1}^n (p_i + u_i \cdot x_i) \rightarrow \max, \quad (23)$$

при ограничении на сумму инвестирования в целом

$$\sum_{i=1}^n x_i = S_{ин}, \quad (24)$$

при условии, что средняя зольность по шахтам первой группы до инвестирования

$$Z_{CP}^1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} p_i \cdot Z_i}{\sum_{i=1}^{n_1} p_i}$$

не изменится и после инвестирования останется равной средней зольности до инвестирования

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (p_i + u_i \cdot x_i) \cdot Z_i}{\sum_{i=1}^{n_1} (p_i + u_i \cdot x_i)} = Z_{CP}^1, \quad (25)$$

при условии, что средняя зольность по шахтам второй группы до инвестирования

$$Z_{CP}^2 = \frac{\sum_{i=n_1+1}^n p_i \cdot Z_i}{\sum_{i=n_1+1}^n p_i}$$

не изменится и после инвестирования останется равной средней зольности до инвестирования

$$\frac{\sum_{i=n_1+1}^n (p_i + u_i \cdot x_i) \cdot Z_i}{\sum_{i=n_1+1}^n (p_i + u_i \cdot x_i)} = Z_{CP}^2, \quad (26)$$

при фиксированном соотношении между общим количеством энергетического и коксующегося угля до инвестирования и после инвестирования

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (p_i + u_i \cdot x_i)}{\sum_{i=n_1+1}^n (p_i + u_i \cdot x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} p_i}{\sum_{i=n_1+1}^n p_i} . \quad (27)$$

Предполагается, что величина инвестиции в каждую шахту не может быть отрицательной

$$x_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n , \quad (28)$$

а общая сумма инвестирования  $S_{ин}$  такова, что при ее распределении между шахтами ни одно из узких мест не ликвидируется, более чем на 100%

$$x_i \leq G_i , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (29)$$

В частности, если для  $i$  - той шахты инвестирование осуществляется в объединенный участок, включающий звенья с 1 по  $m_i$ , то

$$G_i = \frac{p_i^{m_i+1} - p_i}{u_i} , \quad m_i < k_i , \quad (30)$$

где  $p_i^{m_i+1}$  - пропускная способность  $(m_i + 1)$  - го звена  $i$ -той шахты. Если для некоторой шахты инвестирование осуществляется в объединенный участок, включающий все технологические звенья:  $m_i = k_i$ , то для этой шахты ограничение (29) не учитывается.

Отметим, что задача (23)-(28) является стандартной задачей линейного программирования. Условия (29) в стандартную задачу линейного программирования (23)-(28) включать не будем. Эти условия вместе с (30) будем использовать для формирования признака окончания расчетов при решении каждой серии вспомогательных задач 2.

### **3.2. Построение оптимальной последовательности инвестирования.**

Каждый член последовательности (21) для модели 2 вычисляется в соответствии с методикой параграфа 2.2 в два этапа. На первом этапе решается серия вспомогательных задач линейного программирования (23)-(28) для разных значений  $S_{ин}$  с некоторым шагом  $\delta S_{ин}$ :  $S_{ин} := S_{ин} + \delta S_{ин}$ , и находится промежуток  $[S_{ин} - \delta S_{ин}, S_{ин}]$ , внутри которого впервые хотя бы

одно из условий (29) выполняется в виде равенства. На втором этапе непосредственно вычисляется член последовательности (21) - минимальное предельное значение суммы инвестирования, при котором ровно одно из условий (29) выполняется в виде равенства, а все остальные условия выполняются в виде строгого неравенства.

#### 4. Исходные данные и результаты моделирования.

Расчеты проводились для типового объединения, включающего восемь шахт. На трех шахтах добывается энергетический уголь, на пяти шахтах добывается коксующийся уголь:  $n=8$ ,  $n_1=3$ ,  $n_2=5$ . Данные по пропускным способностям звеньев технологической цепи и зольности приведены в Таблице 1, а по эффективностям инвестирования в отдельные технологические звенья – в Таблице 2. Видно, что первые три шахты имеют по пять технологических звеньев; четвертая, шестая и седьмая шахты имеют по четыре технологических звена; пятая шахта имеет три технологических звена; восьмая шахта имеет шесть технологических звеньев. Напомним, что пропускные способности измеряются в *у.е.п.*, а эффективности инвестирования имеют размерность:  $(у.е.п.)/(у.е.и.)$ .

Расчеты показали, что средняя зольность по всем шахтам до инвестирования составляет  $Z_{CP} = 25,36\%$ , а средние зольности по двум группам шахт, на которых добывается энергетический и коксующийся уголь, соответственно равны  $Z_{CP}^1 = 29,98\%$ ,  $Z_{CP}^2 = 21,03\%$ .

Эффективности инвестирования в объединенные технологические звенья, вычисленные с использованием (4),(8),(12) представлены в Таблице 3. Видно, что по мере увеличения количества участков технологической цепи, эффективности инвестирования уменьшаются.

Результаты расчетов по модели 1 представлены в Таблице 4. В первой строке таблицы римскими цифрами обозначены порядковые номера шахт объединения. В последнем столбце первой строки приведена суммарная пропускная способность шахт объединения до начала инвестирования. В первом столбце таблицы приведены порядковые номера  $j$  этапов инвестирования (номера членов последовательности инвестирования (21)). В следующих восьми столбцах приведены суммы, инвестируемые в каждую шахту в отдельности на  $j$ -том этапе инвестирования, и порядковые номера узких мест технологической цепи шахт (в строках с затененным первым полем), в которые на данном этапе инвестирования могут быть направлены инвестиции. В десятом столбце приведены предельные значения сумм инвестирования  $S_{ин}^*$  для соответствующих вспомогательных задач 1. В последнем столбце приведены соответствующие максимальные значения

суммарной пропускной способности объединения после каждого шага инвестирования.

Прокомментируем более подробно результаты расчетов по модели 1. Суммарная пропускной способности всех шахт объединения до начала инвестирования составляет 7621.8 *у.е.п.* Первый член последовательности инвестирования (21) равен 82316 *у.е.и.* Инвестиции направляются в первые технологические звенья первой и пятой шахты (по 32636 *у.е.и.* и 49680 *у.е.и.* соответственно). После этого на пятой шахте пропускная способность первого технологического звена увеличится до пропускной способности второго технологического звена. Узким местом на пятой шахте становится объединенный участок, включающий первые два звена. Суммарная пропускная способность всех шахт объединения составляет 7935.4 *у.е.п.*

При дальнейшем инвестировании суммы 10334 *у.е.и.* инвестиции распределяются между первыми технологическими звеньями первой и седьмой шахты (по 3134 *у.е.и.* и 7200 *у.е.и.* соответственно). После этого на седьмой шахте пропускная способность первого технологического звена увеличится до пропускной способности второго технологического звена. Узким местом на седьмой шахте становится объединенный участок, включающий первые два звена. Второй член последовательности инвестирования (21) равен 92650 *у.е.и.* Суммарная пропускная способность всех шахт объединения составляет 7963.2 *у.е.п.*

Следующая сумма в размере 93042 *у.е.и.* распределяется между первым технологическим звеном первой шахты и вторым технологическим звеном пятой шахты (по 24580 *у.е.и.* и 68462 *у.е.и.* соответственно). После этого на первой шахте пропускная способность первого технологического звена увеличится до пропускной способности второго технологического звена. Узким местом на первой шахте становится объединенный участок, включающий первые два звена. Третий член последовательности инвестирования (21) равен 185692 *у.е.и.* Суммарная пропускная способность всех шахт объединения составляет 8199.1 *у.е.п.* и т.д.

На четырнадцатом шаге инвестирования сумма в размере 2845532 *у.е.и.* распределяется между четвертым технологическим звеном первой шахты и третьим технологическим звеном пятой шахты (по 860151 *у.е.и.* и 1985381 *у.е.и.* соответственно). После этого на первой шахте пропускная способность четвертого технологического звена увеличится до пропускной способности пятого технологического звена. Узким местом на первой шахте становится объединенный участок, включающий все пять звеньев. Четырнадцатый член последовательности инвестирования (21) равен 8419522 *у.е.и.* Суммарная пропускная способность всех шахт объединения составляет 18513.6 *у.е.п.*

Начиная с пятнадцатого шага инвестирования, все средства направляются в узкие места первой и пятой шахты. При этом узкими местами являются объединенные участки, включающие все технологические звенья.



При дальнейшем инвестировании шахт объединения общая картина распределения инвестиций не изменяется, что хорошо видно из 15-17 шагов. Количество  $L$  членов последовательности инвестирования (21) равно 14.

Опишем теперь алгоритм распределения произвольной суммы  $S_{ин}$  между шахтами объединения и между технологическими звеньями шахт.

1. Если  $S_{ин} = \Sigma_{ин}^j$ , то инвестиции распределяются с использованием алгоритма построения последовательности (21).
2. Если  $S_{ин} \neq \Sigma_{ин}^j$ , то находится интервал  $(\Sigma_{ин}^j, \Sigma_{ин}^{j+1})$ , удовлетворяющий условию  $\Sigma_{ин}^j < S_{ин} < \Sigma_{ин}^{j+1}$ .
3. Часть инвестиций в размере  $\Sigma_{ин}^j$  распределяется с использованием алгоритма построения последовательности (21).
4. Оставшаяся часть инвестиций в размере  $S_{ин} - \Sigma_{ин}^j$  распределяется точно также (по тем же шахтам и в тех же пропорциях), как распределялись бы инвестиции в размере  $S_{ин} = \Sigma_{ин}^{j+1} - \Sigma_{ин}^j$  после распределения  $S_{ин} = \Sigma_{ин}^j$ .
5. Между технологическими звеньями каждой шахты инвестиции распределяются в соответствии с алгоритмом параграфа 1.

Из Таблицы 4 видно, что на каждом этапе инвестирования средства распределяются только по двум шахтам. Причем зольность угля, добываемого на одной из шахт, больше средней зольности по объединению, а зольность угля, добываемого на второй шахте, меньше средней зольности по объединению.

В таблице 5 приведены результаты расчетов по модели 2. Структура таблицы 5 совпадает со структурой таблицы 4. Отметим, что на каждом этапе инвестирования инвестиции направляются в четыре шахты. Количество  $L$  членов последовательности инвестирования (21) равно 21.

Приведенные в Таблицах 4 и 5 результаты могут быть использованы для технико-экономического обоснования эффективности инвестирования в объединение, для расчета эффективности инвестирования в отдельные шахты объединения, для разработки инвестиционной политики и т.д.

Представленные в настоящей работе результаты оптимизации, а также промежуточные результаты и исходные данные могут быть представлены на электронной карте. По желанию пользователя программного математического обеспечения по каждой шахте объединения могут быть получены требуемые производственно – экономические характеристики как в виде круговых или ступенчатых диаграмм, так и в виде разрезов многомерных таблиц и баз данных.

## 5. Аналитические методики расчета оптимальной последовательности и размеров инвестирования

На основе качественного анализа результатов моделирования разработаны простые аналитические методики расчета последовательности и размеров оптимального инвестирования шахт.

**5.1. Методика расчета для модели 1.** Предположим, что сумма инвестирования  $S_{ин}$  достаточно мала и ограничения (19) не нарушаются. Тогда имеем задачу линейного программирования (15)-(18) с одной максимизируемой функцией, двумя ограничениями в виде равенства и восемью переменными. Если эта задача не является вырожденной (имеет единственное решение), то при реализации симплекс метода следует выбрать шесть свободных независимых переменных. Оставшиеся две переменные будут базисными. В соответствующем оптимальном плане свободные переменные полагаются равными нулю, а базисные, в общем случае, оказываются не равными нулю. Таким образом, в оптимальном решении только две переменные из восьми могут оказаться ненулевыми (при оптимальном распределении инвестиций между шахтами, одновременно инвестируются не более двух шахт).

Рассмотрим задачу линейного программирования с двумя переменными. Требуется максимизировать увеличение суммарной пропускной способности при инвестировании двух шахт

$$\Delta F = v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 \rightarrow \max, \quad (31)$$

при ограничении на сумму инвестирования

$$x_1 + x_2 = S_{ин} \quad (32)$$

и при условии, что средняя зольность дополнительно добываемого угля за счет инвестирования двух шахт равняется средней зольности  $Z_{CP}$  по всем шахтам до инвестирования

$$\frac{v_1 \cdot x_1 \cdot Z_1 + v_2 \cdot x_2 \cdot Z_2}{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2} = Z_{CP}, \quad (33)$$

Выразив из (32), (33) величины  $x_1$  и  $x_2$  через  $v_1, Z_1, v_2, Z_2, S_{ин}, Z_{CP}$ :

$$x_1 = \frac{S_{ин}}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}}\right)}, \quad (34)$$

$$x_2 = \frac{S_{ин} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}}\right)}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}}\right)}, \quad (35)$$

и подставив в (31), получим

$$\Delta F = \frac{v_1 \cdot \left(1 + \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}}\right) \cdot S_{ин}}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}}\right)} \rightarrow \max. \quad (36)$$

Таким образом, имеем выражение для функции  $\Delta F$ , зависящее от двух постоянных величин  $S_{ин}$  и  $Z_{CP}$ , а также характеристик двух шахт. Первая шахта характеризуется вектором  $(v_1, Z_1)$ , а вторая шахта - вектором  $(v_2, Z_2)$ .

Опишем аналитическую методику расчета последовательности и размеров инвестирования для модели 1.

1. Все шахты разбиваются на два семейства. В первое семейство включаются шахты с зольностью, большей средней зольности по всем шахтам. Во второе семейство включаются шахты с зольностью, меньшей средней зольности по всем шахтам (случай, когда зольность угля, добываемого на некоторой шахте, строго равняется средней зольности по всем шахтам, в настоящей работе не исследуется, поскольку на практике не встречается).
2. В выражение (36) вместо  $(v_1, Z_1)$  подставляются всевозможные соответствующие векторы для первого семейства шахт, а вместо  $(v_2, Z_2)$  подставляются всевозможные соответствующие векторы для второго семейства шахт. Ищется пара векторов  $(v_1, Z_1)$  и  $(v_2, Z_2)$ , для которой функция (36) принимает наибольшее значение. Эта пара векторов и определяет по одной шахте из первой и второй группы, в которые целесообразно производить инвестирование. Для найденной пары шахт сумма инвестирования распределяется в соответствии с (34), (35).

3. Пропускные способности узких мест шахт, в которые осуществляется инвестирование, обозначим  $p_1$  и  $p_2$ . Пропускные способности следующих за узкими местами технологических звеньев обозначим  $p_1^*$  и  $p_2^*$ .
4. Находится наименьшее значение суммы инвестирования  $S_{ин}^*$ , при котором ровно одно из двух ограничений (19):

$$x_1 \leq \frac{p_1^* - p_1}{v_1}, \quad x_2 \leq \frac{p_2^* - p_2}{v_2}$$

выполняется в виде равенства, а другое ограничение выполняется в виде строгого неравенства:

$$S_{ин}^* = \min \left\{ \frac{p_1^* - p_1}{v_1} \cdot \left( 1 + \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}} \right), \frac{p_2^* - p_2}{v_2} \cdot \frac{\left( 1 + \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}} \right)}{\left( \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{Z_{CP} - Z_1}{Z_2 - Z_{CP}} \right)} \right\}. \quad (37)$$

5. Вычисляется очередной член последовательности (21):  $\Sigma_{ин}^{s+1} = \Sigma_{ин}^s + S_{ин}^*$ , где  $\Sigma_{ин}^0 = 0$ .
6. Для той инвестируемой шахты, для которой одна переменная выходит на ограничение, пересчитываются показатель эффективности инвестирования и ограничение на сумму инвестирования (20). Для другой инвестируемой шахты пересчитывается только ограничение (20). Для остальных шахт, не инвестируемых на данном этапе, все характеристики остаются неизменными
7. Осуществляется переход к пункту 2
8. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока инвестиции не начнут распределяться исключительно по объединенным участкам, включающим все технологические звенья.

Результаты, полученные с применением этой методики, совпадают с результатами численных расчетов по модели 1.

**5.2. Методика расчета для модели 2.** Предположим, что сумма инвестирования  $S_{ин}$  достаточно мала и ограничения (29) не нарушаются. Тогда имеем задачу линейного программирования (23)-(28) с одной максимизируемой функцией, четырьмя ограничениями в виде равенства и восемью переменными. Если эта задача не является вырожденной (имеет единственное решение), то при реализации симплекс метода следует выбрать четыре свободные независимые переменных. Оставшиеся четыре переменные будут базисными. В соответствующем оптимальном плане свободные переменные полагаются равными нулю, а базисные, в общем случае, оказываются не равными нулю. Таким образом, в оптимальном решении только четыре переменные из восьми могут оказаться ненулевыми (при оптимальном распределении инвестиций между шахтами, инвестиции направляются не более чем в четыре шахты).

Рассмотрим задачу линейного программирования с четырьмя переменными. Требуется максимизировать увеличение суммарной пропускной способности четырех шахт объединения

$$\Delta F = v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4 \rightarrow \max , \quad (38)$$

при ограничении на сумму инвестирования

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S_{ин} , \quad (39)$$

при условии, что средняя зольность дополнительно добываемого угля за счет инвестирования по первой группе шахт равняется средней зольности  $Z_{CP}^1$  по первой группе шахт до инвестирования

$$\frac{v_1 \cdot x_1 \cdot Z_1 + v_2 \cdot x_2 \cdot Z_2}{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2} = Z_{CP}^1 , \quad (40)$$

средняя зольность дополнительно добываемого угля за счет инвестирования по второй группе шахт равняется средней зольности  $Z_{CP}^2$  по второй группе шахт до инвестирования

$$\frac{v_3 \cdot x_3 \cdot Z_3 + v_4 \cdot x_4 \cdot Z_4}{v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4} = Z_{CP}^2 . \quad (41)$$

Условие сохранения соотношения между количеством добываемого энергетического и коксующегося угля имеет вид

$$\frac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2}{v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4} = \frac{p_1 + p_2}{p_3 + p_4} . \quad (42)$$

Аналогично методике расчета по модели 1 выразим из (39)-(42) переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  через  $p_1, v_1, Z_1, p_2, v_2, Z_2, p_3, v_3, Z_3, p_4, v_4, Z_4$  и некоторые постоянные величины:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{S_{ин} \cdot (p_1 + p_2) \cdot v_2 \cdot v_4 \cdot A_{21} \cdot A_{43}^1}{v_1 \cdot B} , \\ x_2 &= \frac{S_{ин} \cdot (p_1 + p_2) \cdot v_4 \cdot A_{43}^1}{B} , \\ x_3 &= -\frac{S_{ин} \cdot (p_3 + p_4) \cdot v_2 \cdot v_4 \cdot A_{43} \cdot A_{21}^1}{v_3 \cdot B} , \\ x_4 &= \frac{S_{ин} \cdot (p_3 + p_4) \cdot v_2 \cdot A_{21}^1}{B} , \end{aligned} \quad (43)$$

и подставив в (38), получим выражение для функции  $\Delta F$ , зависящее от характеристик четырех шахт  $(p_1, v_1, Z_1), (p_2, v_2, Z_2), (p_3, v_3, Z_3), (p_4, v_4, Z_4)$  и некоторых постоянных величин:

$$\Delta F = \frac{S_{ин} \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \cdot v_2 \cdot v_4 \cdot A_{21}^1 \cdot A_{43}^1}{B} . \quad (44)$$

В (43)-(44) использованы обозначения

$$A_{21} = \frac{Z_2 - Z_{CP}^1}{Z_1 - Z_{CP}^1} , \quad A_{43} = \frac{Z_4 - Z_{CP}^2}{Z_3 - Z_{CP}^2} ,$$

$$A_{21}^1 = 1 - A_{21} , \quad A_{43}^1 = 1 - A_{43} ,$$

$$A_{21}^V = 1 - \frac{v_2}{v_1} A_{21} , \quad A_{43}^V = 1 - \frac{v_4}{v_3} A_{43} ,$$

$$B = (p_1 + p_2) \cdot v_4 \cdot A_{43}^1 \cdot A_{21}^V + (p_3 + p_4) \cdot v_2 \cdot A_{21}^1 \cdot A_{43}^V .$$

Опишем аналитическую методику расчета последовательности и размеров инвестирования для модели 2.

1. Все шахты первой группы, на которых добывается энергетический уголь, разбиваются на две подгруппы. В первую подгруппу включаются шахты с зольностью, большей средней зольности по первой группе шахт. Во вторую подгруппу включаются шахты с зольностью, меньшей средней зольности по первой группе шахт (случай, когда зольность угля, добываемого на некоторой шахте, строго равняется средней зольности по группе, в настоящей работе не исследуется, поскольку на практике не встречается).
2. Все шахты второй группы, на которых добывается коксующийся уголь, также разбиваются на две подгруппы. В первую подгруппу включаются шахты с зольностью, большей средней зольности по второй группе шахт. Во вторую подгруппу включаются шахты с зольностью, меньшей средней зольности по второй группе шахт (случай, когда зольность угля, добываемого на некоторой шахте, строго равняется средней зольности по группе, в настоящей работе не исследуется, поскольку на практике не встречается).
3. В выражение (44) вместо  $(p_1, v_1, Z_1)$  и  $(p_2, v_2, Z_2)$  подставляются всевозможные сочетания пар векторов для первой и второй подгрупп первой группы шахт, а вместо  $(p_3, v_3, Z_3)$  и  $(p_4, v_4, Z_4)$  подставляются всевозможные сочетания пар векторов для первой и второй подгрупп второй группы шахт. Ищется четверка векторов  $(p_1, v_1, Z_1)$ ,  $(p_2, v_2, Z_2)$ ,  $(p_3, v_3, Z_3)$ ,  $(p_4, v_4, Z_4)$ , для которой функция (44) принимает наибольшее значение. Эта четверка векторов и определяет по две шахты из первой и второй группы, в которые целесообразно производить инвестирование.
4. Находятся суммы инвестирования в каждую шахту в отдельности (43).
5. С использованием соотношения, аналогичного (37), находится наименьшее значение  $S_{ин}^*$ , при котором ровно одно из ограничений (29) выполняется в виде равенства, а все остальные ограничения (29) выполняются в виде строгого неравенства.
6. Вычисляется очередной член последовательности (21):  $\Sigma_{ин}^{s+1} = \Sigma_{ин}^s + S_{ин}^*$ , где  $\Sigma_{ин}^0 = 0$ .
7. Для той инвестируемой шахты, для которой одна из переменных выходит на ограничение, пересчитываются показатель эффективности инвестирования и ограничение на сумму инвестирования. Для других трех инвестируемых шахт пересчитываются только ограничения (29). Для

остальных четырех неинвестируемых шахт все характеристики остаются неизменными.

8. Осуществляется переход к пункту 3.
9. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока инвестиции не начнут распределяться исключительно по объединенным участкам, включающим все технологические звенья.

Результаты, полученные с применением этой методики, совпадают с результатами численных расчетов по модели 2.

### **Заключение.**

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Разработаны экономико-математические модели оптимального инвестирования монопродуктовых горнодобывающих предприятий. Решены две задачи об оптимальном инвестировании с целью максимизации суммарной пропускной способности шахт объединения.
2. Создано программное математическое обеспечение, позволяющее эффективно управлять процессом инвестирования в объединение монопродуктовых горнодобывающих предприятий на каждом шаге инвестирования.
3. Предложены простые аналитические методики расчета оптимальной последовательности и размеров инвестирования шахт объединения

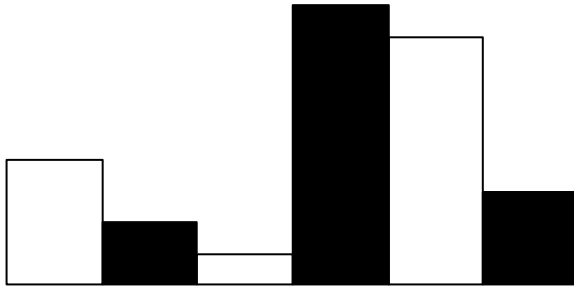
### **Литература**

1. Гайфуллин Б.Н., Обухов И.А. Автоматизированные системы управления предприятиями стандарта ERP/MRP II. Издательство "Интерфейс-Пресс", 2001, 104 стр.
2. Хайруллин Р.З. Технология исследования управляемых систем. Горный информационно-аналитический бюллетень. 1999, №4, стр.111-113.
3. Астахов А.С., Каменецкий Л.Е., Чернегов Ю.А. Экономика горной промышленности. Москва, Недра, 1982, 408 стр.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. Москва, Наука, 1978, 488 стр.

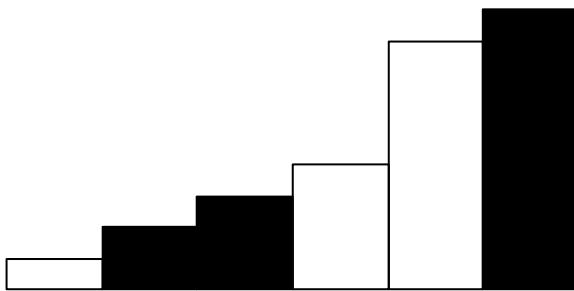


**Приложение**

а)



б)

**Рис. 1**

Технологическая структура монопродуктового горнодобывающего предприятия

а) исходная технологическая структура,

б) технологическая структура после соответствующей перенумерации.

**Таблица 1.** Пропускные способности технологических звеньев шахт до инвестирования

шахты	$p^1$	$p^2$	$p^3$	$p^4$	$p^5$	$p^6$	$Z_i$
I	754,3	875,0	1206,9	1357,7	2014,0	-	39,6
II	2022,3	2288,7	3438,9	5461,8	6877,9	-	26,9
III	912,2	917,4	919,2	1086,2	1460,5	-	29,1
IV	62,2	74,5	89,2	129,1	-	-	21,1
V	1242,2	1490,6	1863,3	-	-	-	21,7
VI	1061,7	1294,8	1553,8	2201,2	-	-	21,4
VII	539,3	560,9	862,9	1715,0	-	-	21,3
VIII	1027,0	4337,1	4977,0	5011,8	5688,0	8279,6	19,7

**Таблица 2.** Эффективности инвестирования в отдельные технологические звенья шахт

№ шахты	$v^1$	$v^2$	$v^3$	$v^4$	$v^5$	$v^6$
I	0,0020	0,0030	0,0040	0,0044	0,0060	-
II	0,0020	0,0190	0,0030	0,0040	0,0060	-
III	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0030	-
IV	0,0005	0,0006	0,0007	0,0010	-	-
V	0,0050	0,0060	0,0023	-	-	-
VI	0,0020	0,0020	0,0030	0,0040	-	-
VII	0,0030	0,0030	0,0050	0,0100	-	-
VIII	0,0006	0,0030	0,0020	0,0030	0,0030	0,0050

**Таблица 3.** Эффективности инвестирования в объединенные участки технологической цепи

№ шахты	$v^1$	$v^{1,2}$	$v^{1,2,3}$	$v^{1,2,3,4}$	$v^{1,2,3,4,5}$	$v^{1,2,3,4,5,6}$
I	0,00200	0,00120	0,00093	0,00076	0,00067	-
II	0,00200	0,00181	0,00113	0,00088	0,00076	-
III	0,00200	0,00100	0,00067	0,00050	0,00042	-
IV	0,00050	0,00027	0,00019	0,00016	-	-
V	0,00500	0,00273	0,00126	-	-	-
VI	0,00200	0,00100	0,00075	0,00063	-	-
VII	0,00300	0,00150	0,00115	0,00103	-	-
VIII	0,00060	0,00050	0,00040	0,00035	0,00031	0,00029

**Таблица 4**  
**Результаты моделирования по модели 1**

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		7621,8
	1	1	1	1	1	1	1	1		
1	32636	-	-	-	49680	-	-	-	82316	7935,4
	1	1	1	1	2	1	1	1		
2	3134	-	-	-	-	-	7200	-	10334	7963,2
	1	1	1	1	2	1	2	1		
3	24580	-	-	-	68462	-	-	-	93042	8199,1
	2	1	1	1	2	1	2	1		
4	-	-	2300	-	1690	-	-	-	3990	8208,3
	2	1	2	1	2	1	2	1		
5	-	133200	-	-	40955	-	-	-	174155	8586,4
	2	2	2	1	2	1	2	1		
6	15476	-	-	-	25916	-	-	-	41392	8675,7
	2	2	2	1	3	1	2	1		
7	-	332178	-	-	-	116550	-	-	448728	9509,9
	2	2	2	1	3	2	2	1		
8	-	303458	-	-	-	-	138425	-	441883	10266,6
	2	3	2	1	3	2	2	1		
9	22918	-	-	-	-	-	62909	-	85827	10388,5
	2	3	2	1	3	2	3	1		
10	238190	-	-	-	864480	-	-	-	1102670	11761,4
	3	3	2	1	3	2	3	1		
11	163367	-	-	-	456153	-	-	-	619520	12485,9
	4	3	2	1	3	2	3	1		
12	-	1792218	-	-	674678	-	-	-	2466896	15357,1
	4	4	2	1	3	2	3	1		
13	-	-	1790	-	1447	-	-	-	3237	15360,8
	4	4	3	1	3	2	3	1		
14	860151	-	-	-	1985381	-	-	-	2845532	18513,6
	5	4	3	1	3	2	3	1		
15	328102	-	-	-	671898	-	-	-	1000000	19580,7
	5	4	3	1	3	2	3	1		
16	1640512	-	-	-	3359488	-	-	-	5000000	23848,7
	5	4	3	1	3	2	3	1		
17	3281023	-	-	-	6718977	-	-	-	10000000	29183,7

**Таблица 5**  
**Результаты моделирования по модели 2**

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		7621,8
	1	1	1	1	1	1	1	1		
1	217	-	2300	-	-	-	1489	1495	5501	7632,2
	1	1	2	1	1	1	1	1		
2	2397	7255	-	-	-	-	5711	5737	21100	7672,1
	1	1	2	1	1	1	2	1		
3	41604	125945	-	-	47580	-	-	198696	413825	8364,2
	1	2	2	1	1	1	2	1		
4	1822	6094	-	-	2100	-	-	8701	18717	8394,6
	1	2	2	1	2	1	2	1		
5	14310	47843	-	-	-	48106	-	44250	154509	8632,6
	2	2	2	1	2	1	2	1		
6	33901	68045	-	-	-	68444	-	62934	233324	8971,1
	2	2	2	1	2	2	2	1		
7	108615	218006	-	-	136657	-	-	311238	774516	10055,3
	2	2	2	1	3	2	2	1		
8	70413	141328	-	-	-	-	201333	101107	514181	10758,2
	2	2	2	1	3	2	3	1		
9	63654	127734	-	-	-	-	236546	91381	519315	11399,5
	3	2	2	1	3	2	3	1		
10	17211	26588	-	-	-	-	49208	19010	112017	11525,7
	3	3	2	1	3	2	3	1		
11	146156	361687	-	-	-	-	417791	161399	1087033	12647,8
	4	3	2	1	3	2	3	1		
12	14784	30248	-	-	-	-	34942	13498	93472	12741,6
	4	3	2	1	3	2	4	1		
13	684406	1400284	-	-	-	-	1804091	624849	4513630	17085,5
	4	4	2	1	3	2	4	1		
14	220	-	1790	-	-	-	1671	579	4260	17089,6
	4	4	3	1	3	2	4	1		
15	160741	421678	-	-	-	-	423721	146756	1152896	18109,8
	5	4	3	1	3	2	4	1		
16	509998	1186962	-	-	-	-	1192684	413087	3302731	20981,6
	5	5	3	1	3	2	4	1		
17	4089112	10912991	-	-	-	-	9562808	3312117	27877028	44007,1
	5	5	3	1	3	2	4	2		
18	1316666	3513907	-	-	-	-	3079158	1279800	9189531	51421,2
	5	5	3	1	3	2	4	3		
19	71583	191041	-	-	-	-	167405	87000	517029	51824,3
	5	5	3	1	3	2	4	4		
20	1391344	3713208	-	-	-	-	3253800	1915900	10274252	59658,8
	5	5	3	1	3	2	4	5		
21	5332581	14231551	-	-	-	-	12470788	8206733	40241653	89686,2
	5	5	3	1	3	2	4	6		
22	130829	349155	-	-	-	-	305957	214059	1000000	90422,9
	5	5	3	1	3	2	4	6		
23	1308289	3491551	-	-	-	-	3059567	2140593	10000000	97051,1
	5	5	3	1	3	2	4	6		
24	6541444	17457754	-	-	-	-	15297837	10702965	50000000	126520,7

**Секистова Н.А., Хайруллин Р.З.**

**К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ  
В ОБЪЕДИНЕНИЕ МОНОПРОДУКТОВЫХ  
ГОРНОДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ**

**Секистова Н.А., Хайруллин Р.З.**

**К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ  
В ОБЪЕДИНЕНИЕ МОНОПРОДУКТОВЫХ  
ГОРНОДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ**

**Секистова Н.А., Хайруллин Р.З.**

**К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ  
В ОБЪЕДИНЕНИЕ МОНОПРОДУКТОВЫХ  
ГОРНОДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ**