1. Постановка задачи

Для определения решения $\rho(x,t)$ смешанной задачи на отрезке $[x_1, x_2]$ для одномерного уравнения переноса со знакопеременной ограниченной скоростью $u(x,t)$, $\{z\} = (\, z \mid u(z,t) = 0, z \in (x_1, x_2)\,) \neq \varnothing$, с начальным условием $\rho_0(x)$ и граничными условиями $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x),\ z \in [x_1, x_2],$$

$$\rho(x_1,t) = \rho_1(t), \text{ при } \operatorname{sign}(u(x_1,t)) > 0,\ t > 0,$$

$$\rho(x_2,t) = \rho_2(t), \text{ при } \operatorname{sign}(u(x_2,t)) < 0,\ t > 0$$

в [1] предложена нелинейная монотонизированная разностная схема К. И. Бабенко («квадрат») [2]. Особенность схемы заключается в различии нелинейных разностных уравнений на участках знакопостоянства скорости и в окрестностях точек перемены ее знака. Уравнения имеют следующий вид.

1. При $u(x_{i-1},t) > 0$, $u(x_i,t) > 0$, $u(x_{i+1},t) \geq 0$:

$$y_i(1+\gamma_i + (1-\gamma_i)\mu(\gamma_i, w_{i+1/2}/y_i)) +$$
$$y_{i-1}(1-\gamma_{i-1})(1-\mu(\gamma_{i-1}, w_{i-1/2}/y_{i-1})) + 2w_{i-1/2} = 0. \tag{2}$$

2. При $u(x_{i-2},t) \leq 0$, $u(x_{i-1},t) < 0$, $u(x_i,t) < 0$:

$$y_{i-1}(1-\gamma_{i-1} + (1+\gamma_{i-1})\mu(-\gamma_{i-1}, w_{i-3/2}/y_{i-1})) +$$
$$y_i(1+\gamma_i)(1-\mu(-\gamma_i, w_{i-1/2}/y_i)) + 2w_{i-1/2} = 0. \tag{3}$$

3. При $u(x_{i-3},t) < 0$, $u(x_{i-2},t) < 0$, $u(x_{i-1},t) \leq 0$, $u(x_i,t) \geq 0$, $u(x_{i+1},t) > 0$, $u(x_{i+2},t) > 0$ (перемена знака скорости типа (–, +)):

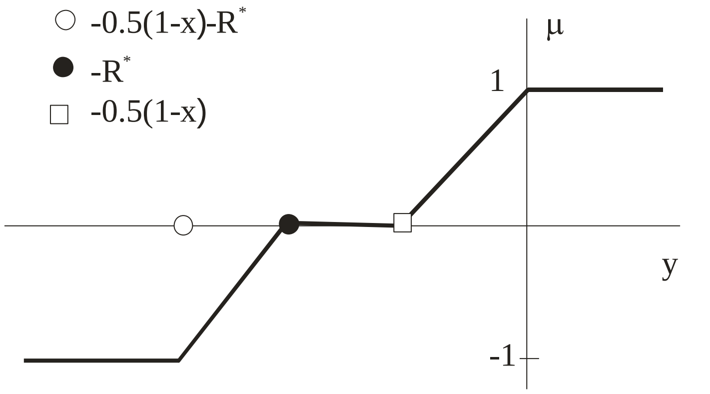
$$y_{i-1}(1-\gamma_{i-1} + (1+\gamma_{i-1})\mu(-\gamma_{i-1}, w_{i-3/2}/y_{i-1})) - 2\gamma_{i-1}\rho(x_{i-1},t) = 0,$$
$$y_i(1+\gamma_i + (1-\gamma_i)\mu(\gamma_i, w_{i+1/2}/y_i)) + 2\gamma_i\rho(x_i,t) = 0. \tag{4}$$

4. При $u(x_{i-3},t) > 0$, $u(x_{i-2},t) > 0$, $u(x_{i-1},t) \geq 0$, $u(x_i,t) \leq 0$, $u(x_{i+1},t) < 0$, $u(x_{i+2},t) < 0$ (перемена знака скорости типа (+, –)):

$$y_{i-1}(1+0.25\gamma_{i-1}(1-\mu(0,y))+0.25y_i\gamma_i(1-\mu(0,y))+$$
$$0.5(1-\gamma_{i-2})(1-\mu(\gamma_{i-2},w_{i-3/2}/y_{i-2}))y_{i-2}+w_{i-3/2}+0.5w_{i-1/2}=0,$$
$$y_i(1-0.25\gamma_i(1-\mu(0,y))-0.25y_{i-1}\gamma_{i-1}(1-\mu(0,y))+$$
$$0.5(1+\gamma_{i+1})(1-\mu(-\gamma_{i+1},w_{i+1/2}/y_{i+1}))y_{i+1}+w_{i+1/2}+0.5w_{i-1/2}=0. \quad (5)$$

где $y_i=\rho(x_i,t+\tau)-\rho(x_i,t)$, $\gamma_i=u(x_i,t)\tau/h$, $w_{i-1/2}=\rho(x_i,t)u(x_i,t)-\rho(x_{i-1},t)u(x_{i-1},t)$, $y=\max(w_{i-1/2}/y_i,w_{i-1/2}/y_{i-1})$, τ, h – соответственно временной и пространственный шаг разностной сетки, а функция $\mu(x,y)$ определена в [1] и имеет вид

$$\mu(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le y,\\ 1+2y/(1-x), & -0.5(1-x)\le y<0,\\ 0, & -R^*\le y<-0.5(1-x),\\ 2(y+R^*)/(1-x), & -(R^*+0.5(1-x))\le y<-R^*,\\ -1, & y<-(R^*+0.5(1-x)).\end{cases}$$



В первых двух случаях неизвестной является соответственно либо y_i, либо y_{i-1}, а в последних двух случаях обе неизвестные y_{i-1} и y_i подлежат определению. Окончательно, $\rho(x_i,t+\tau)=\rho(x_i,t)+y_i$, $\rho(x_{i-1},t+\tau)=\rho(x_{i-1},t)+y_{i-1}$.

Представляет интерес найти расчетные формулы для точного решения нелинейной разностной схемы. Альтернативой рассматриваемого ниже прямого метода является итерационный метод.

2. Разностное решение при сохранении знака скорости

2.1. В случае $u(x_{i-1},t)>0$, $u(x_i,t)>0$, $u(x_{i+1},t)\ge 0$ неизвестная величина y_i удовлетворяет нелинейному уравнению

$$y_i(1+\gamma_i+(1-\gamma_i)\mu(\gamma_i,w_{i+1/2}/y_i))=2b_+,$$

где $b_+=-0.5(y_{i-1}(1-\gamma_{i-1})(1-\mu(\gamma_{i-1},w_{i-1/2}/y_{i-1}))+2w_{i-1/2})$ – известное значение. Уравнение является дробно-рациональным и имеет решение следующего вида:

$$y_i=\begin{cases} 0, & (b_+=0)\,|\,(b_+=w_{i+1/2});\\ b_+, & ((0<b_+)\,\&\,(0\le w_{i+1/2}))\,|\,((b_+<0)\,\&\,(w_{i+1/2}\le 0));\\ b_+-w_{i+1/2}, & (-((1-\gamma_i)/(1+\gamma_i))b_+\le w_{i+1/2}<0)\,|\\ & \quad (0<w_{i+1/2}\le-((1-\gamma_i)/(1+\gamma_i))b_+);\\ 2b_+/(1+\gamma_i), & \\ & (-(2\mathrm{R}^*/(1+\gamma_i))b_+\le w_{i+1/2}<-((1-\gamma_i)/(1+\gamma_i))b_+<0)\,|\\ & (0<-((1-\gamma_i)/(1+\gamma_i))b_+<w_{i+1/2}\le-(2\mathrm{R}^*/(1+\gamma_i))b_+);\\ (b_+-w_{i+1/2})/(R^*+0.5(1+\gamma_i)), & \\ & (-(R^*+0.5(1-\gamma_i))b_+/\gamma_i\le w_{i+1/2}<-2R^*b_+/(1+\gamma_i)<0)\,|\\ & (0<-2R^*b_+/(1+\gamma_i)<w_{i+1/2}\le-(R^*+0.5(1-\gamma_i))b_+/\gamma_i);\\ b_+/\gamma_i, & (w_{i+1/2}<-(R^*+0.5(1-\gamma_i))b_+/\gamma_i<0)\,|\\ & (0<-(R^*+0.5(1-\gamma_i))b_+/\gamma_i<w_{i+1/2}), \end{cases}$$

где & – логическое «и», | – логическое «или». Очевидно, что решение y_i существует и единственно для любых значений известных величин b_+ и $w_{i-1/2}$.

2.2. В случае $u(x_{i-2},t)\le 0$, $u(x_{i-1},t)<0$, $u(x_i,t)<0$ неизвестная величина y_{i-1} удовлетворяет нелинейному уравнению

$$y_{i-1}(1-\gamma_{i-1}+(1+\gamma_{i-1})\mu(-\gamma_{i-1},w_{i-3/2}/y_{i-1}))=2b_-,$$

где $b_-=-0.5(y_i(1+\gamma_i)(1-\mu(-\gamma_i,w_{i-1/2}/y_i))+2w_{i-1/2})$,

Уравнение имеет решение следующего вида:

$$y_{i-1} = \begin{cases} 0, \quad (b_- = 0) \mid (b_- = w_{i-3/2}); \\ b_-, \quad ((0 < b_-) \,\&\, (0 \le w_{i-3/2})) \mid ((b_- < 0) \,\&\, (w_{i-3/2} \le 0)); \\ b_- - w_{i-3/2}, \ (-((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_- \le w_{i-3/2} < 0) \mid \\ \qquad (0 < w_{i-3/2} \le -((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_-); \\ 2b_- /(1-\gamma_{i-1}), \\ \qquad (-(2R^* /(1-\gamma_{i-1}))b_- \le w_{i-3/2} < -((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_- < 0) \mid \\ \qquad (0 < -((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_- < w_{i-3/2} \le -(2R^* /(1-\gamma_{i-1}))b_-); \\ (b_- - w_{i-3/2})/(R^* + 0.5(1-\gamma_{i-1})), \\ \qquad (-(R^* + 0.5(1+\gamma_{i-1}))b_- /\gamma_{i-1} \le w_{i-3/2} < -2R^* b_-/(1-\gamma_{i-1}) < 0) \mid \\ \qquad (0 < -2R^* b_-/(1-\gamma_{i-1}) < w_{i-3/2} \le -(R^* + 0.5(1+\gamma_{i-1}))b_- /\gamma_{i-1}); \\ b_- /\gamma_{i-1}, \ (w_{i-3/2} < -(R^* + 0.5(1+\gamma_{i-1}))b_- /\gamma_{i-1} < 0) \mid \\ \qquad (0 < -(R^* + 0.5(1+\gamma_{i-1}))b_- /\gamma_{i-1} < w_{i-3/2}). \end{cases}$$

Решение y_{i-1} существует и единственно для любых значений известных величин b_- и $w_{i-1/2}$.

3. Решение задачи в окрестности точки перемены знака скорости типа (–, +)

В случае $u(x_{i-3}, t) < 0$, $u(x_{i-2}, t) < 0$, $u(x_{i-1}, t) \le 0$, $u(x_i, t) \ge 0$, $u(x_{i+1}, t) > 0$, $u(x_{i+2}, t) > 0$ необходимо определить неизвестные величины y_{i-1} и y_i из независимых нелинейных уравнений

$$y_i(1+\gamma_i + (1-\gamma_i)\mu(\gamma_i, w_{i+1/2} / y_i)) = b_{+-} = -2\gamma_i \rho(x_i, t),$$

$$y_{i-1}(1-\gamma_{i-1} + (1+\gamma_{i-1})\mu(-\gamma_{i-1}, w_{i-3/2} / y_{i-1})) = b_{-+} = 2\gamma_{i-1}\rho(x_{i-1}, t),$$

которые всегда имеют единственное решение вида:

$$y_{i-1}=\begin{cases}0, & (b_{-+}=0)\,|\,(b_{-+}=w_{i-3/2});\\ b_{-+}, & ((0<b_{-+})\,\&\,(0\le w_{i-3/2}))\,|\,((b_{-+}<0)\,\&\,(w_{i-3/2}\le 0));\\ b_{-+}-w_{i-3/2}, & (-((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_{-+}\le w_{i-3/2}<0)\,|\\ & (0<w_{i-3/2}\le -((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_{-+});\\ 2b_{-+}/(1-\gamma_{i-1}), & \\ & (-(2\mathrm{R}^*/(1-\gamma_{i-1}))b_{-+}\le w_{i-3/2}<-((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_{-+})\,|\\ & (0<-((1+\gamma_{i-1})/(1-\gamma_{i-1}))b_{-+}<w_{i-3/2}\le -(2\mathrm{R}^*/(1-\gamma_{i-1}))b_{-+});\\ (b_{-+}-w_{i-3/2})/(R^*+0.5(1-\gamma_{i-1})), & \\ & (-(R^*+0.5(1+\gamma_{i-1}))b_{-+}/\gamma_{i-1}\le w_{i-3/2}<-2R^*b_{-+}/(1-\gamma_{i-1})<0)\,|\\ & (0<-2R^*b_{-+}/(1-\gamma_{i-1})<w_{i-3/2}\le -(R^*+0.5(1+\gamma_{i-1}))b_{-+}/\gamma_{i-1});\\ -b_{-+}/\gamma_{i-1}, & (w_{i-3/2}<-(R^*+0.5(1+\gamma_{i-1}))b_{-+}/\gamma_{i-1}<0)\,|\\ & (0<-(R^*+0.5(1+\gamma_{i-1}))b_{-+}/\gamma_{i-1}<w_{i-3/2});\end{cases}$$

$$y_{i}=\begin{cases}0, & (b_{+-}=0)\,|\,(b_{+-}=w_{i+1/2});\\ b_{+-}, & ((0<b_{+-})\,\&\,(0\le w_{i+1/2}))\,|\,((b_{+-}<0)\,\&\,(w_{i+1/2}\le 0));\\ b_{+-}-w_{i+1/2}, & (-((1-\gamma_{i})/(1+\gamma_{i}))b_{+-}\le w_{i+1/2}<0)\,|\\ & (0<w_{i+1/2}\le -((1-\gamma_{i})/(1+\gamma_{i}))b_{+-});\\ 2b_{+-}/(1+\gamma_{i}), & \\ & (-(2\mathrm{R}^*/(1+\gamma_{i}))b_{+-}\le w_{i+1/2}<-((1-\gamma_{i})/(1+\gamma_{i}))b_{+-}<0)\,|\\ & (0<-((1-\gamma_{i})/(1+\gamma_{i}))b_{+-}<w_{i+1/2}\le -(2\mathrm{R}^*/(1+\gamma_{i}))b_{+-});\\ (b_{+-}-w_{i+1/2})/(R^*+0.5(1+\gamma_{i})), & \\ & (-(R^*+0.5(1-\gamma_{i}))b_{+-}/\gamma_{i}\le w_{i+1/2}<-2R^*b_{+-}/(1+\gamma_{i})<0)\,|\\ & (0<-2R^*b_{+-}/(1+\gamma_{i})<w_{i+1/2}\le -(R^*+0.5(1-\gamma_{i}))b_{+-}/\gamma_{i});\\ b_{+-}/\gamma_{i}, & (w_{i+1/2}<-(R^*+0.5(1-\gamma_{i}))b_{+-}/\gamma_{i}<0)\,|\\ & (0<-(R^*+0.5(1-\gamma_{i}))b_{+-}/\gamma_{i}<w_{i+1/2}).\end{cases}$$

Отметим, что при $\gamma_{i-1}=0$ неизвестная $y_{i-1}=0$, а при $\gamma_i=0$ величина $y_i=0$.

4. Точное решение в окрестности точки перемены знака скорости типа (+, –)

В окрестности точки типа (+, –) неизвестные величины y_{i-1}, y_i удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений

$$(1+0.25\gamma_{i-1}(1-\mu(0,y))y_{i-1}+0.25\gamma_i(1-\mu(0,y))y_i=b_1=$$
$$-w_{i-3/2}-0.5w_{i-1/2}-0.5(1-\gamma_{i-2})(1-\mu(-\gamma_{i-2},w_{\mathrm{i\text{-}3/2}}/y_{i-2}))y_{i-2},$$
$$-0.25\gamma_{i-1}(1-\mu(0,y))y_{i-1}+(1-0.25\gamma_i(1-\mu(0,y))y_i=b_2=$$
$$-w_{i+1/2}-0.5w_{i-1/2}-0.5(1+\gamma_{i+1})(1-\mu(\gamma_{i+1},w_{i+1/2}/y_{i+1}))y_{i+1}.$$

Величина y определяется нелинейной функцией $\max(w_{i-1/2}/y_i, w_{i-1/2}/y_{i-1})$, а значение $1-\mu(0,y)$ вычисляется по формуле

$$1-\mu(0,y)=\begin{cases}0,\ 0\le y,\\ -2y,\ \ -0.5\le y<0,\\ 1,\ -R^*\le y<-0.5,\\ 1-2(y+R^*),\ -(R^*+0.5)\le y<-R^*,\\ 2,\ y<-(R^*+0.5).\end{cases}$$

Из уравнений вытекает следствие

$$y_i+y_{i-1}=b_1+b_2. \qquad (6)$$

Поэтому ниже будем искать лишь неизвестную y_i, которую обозначим через x. Поиск точного решения системы нелинейных уравнений выполняется по следующей схеме.

1. Определение функции $\max(w_{i-1/2}/y_i, w_{i-1/2}/y_{i-1})$.
2. Приведение исходной системы к уравнению для неизвестной x.
3. Выполнение отбора решений нелинейных уравнений.
4. Нахождение области существования различных ветвей решения.
5. Получение окончательного выражения для решения в окрестности точки перемены знака скорости типа (+, –).

4.1. Функция $\max(w_{i-1/2}/y_i, w_{i-1/2}/y_{i-1})$

Согласно (6), $y_{i-1}=b_1+b_2-x$, поэтому

$$y=\max(\frac{w_{i-1/2}}{y_i},\frac{w_{i-1/2}}{y_{i-1}})=\max(\frac{w_{i-1/2}}{x},\frac{-w_{i-1/2}}{x-(b_1+b_2)})$$ и

$$y(x)=\begin{cases}0, & w_{i-1/2}=0,\\ \left|\dfrac{w_{i-1/2}}{x}\right|, & b_1+b_2=0,\\ \dfrac{w_{i-1/2}}{x}, & A_1=true,\\ \dfrac{-w_{i-1/2}}{x-(b_1+b_2)}, & A_2=true,\end{cases} \tag{7}$$

где булевы переменные A_1 и A_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}A_1 = {} & (((b_1+b_2<0)\,\&\,(w_{i-1/2}>0))\,\&\,((b_1+b_2\le x\le 0.5(b_1+b_2))\,|\,(0<x)))\ |\\ & (((b_1+b_2>0)\,\&\,(w_{i-1/2}<0))\,\&\,((0.5(b_1+b_2)\le x<b_1+b_2)\,|\,(x<0)))\ |\\ & (((b_1+b_2>0)\,\&\,(w_{i-1/2}>0))\,\&\,((0<x\le 0.5(b_1+b_2))\,|\,(b_1+b_2\le x)))\ |\\ & (((b_1+b_2<0)\,\&\,(w_{i-1/2}<0))\,\&\,((x<b_1+b_2)\,|\,(0.5(b_1+b_2)\le x<0))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_2 = {} & (((b_1+b_2<0)\,\&\,(w_{i-1/2}>0))\,\&\,((0.5(b_1+b_2)\le x\le 0)\,|\,(x<b_1+b_2)))\ |\\ & (((b_1+b_2>0)\,\&\,(w_{i-1/2}<0))\,\&\,((0\le x<0.5(b_1+b_2))\,|\,(b_1+b_2<x)))\ |\\ & (((b_1+b_2>0)\,\&\,(w_{i-1/2}>0))\,\&\,((x\le 0)\,|\,(0.5(b_1+b_2)\le x<b_1+b_2)))\ |\\ & (((b_1+b_2<0)\,\&\,(w_{i-1/2}<0))\,\&\,((b_1+b_2<x\le 0.5(b_1+b_2))\,|\,(0\le x)))\end{aligned} \tag{8}$$

Графики качественно различных зависимостей $y=y(x)$ представлены на рис. 1: a) $w_{i-1/2}>0, b_1+b_2<0$; b) $w_{i-1/2}>0, b_1+b_2>0$; c) $w_{i-1/2}<0$, $b_1+b_2<0$; d) $w_{i-1/2}<0, b_1+b_2>0$; e) $b_1+b_2=0$; f) $w=0$.

Отметим, что y может быть отрицательным лишь при выполнении неравенства

$$w_{i-1/2}(b_1+b_2)<0. \tag{9}$$

При выполнении этого неравенства отрицательная ветвь зависимости $y=y(x)$ существует при $w_{i-1/2}>0$ ($w_{i-1/2}<0$) на отрезке $[b_1+b_2, 0]$ ($[0, b_1+b_2]$). На этих отрезках y имеет максимальное значение $y_{\max}=\dfrac{w_{i-1/2}}{b_1+b_2}$ и минимальное значение $y_{\min}=\dfrac{2w_{i-1/2}}{b_1+b_2}$. Минимум достигается в центре указанного отрезка $x_{\min}=0.5(b_1+b_2)$. Максимум достигается на концах отрезка $x_{\max,1}=0$ и $x_{\max,2}=b_1+b_2$. На отрезке

$[\min(b_1+b_2,0),\max(b_1+b_2,0)]$ при выполнении условия (9) функция $y=y(x)$ может быть определена более просто (следует из (7))

$$y=y(x)=\begin{cases}\dfrac{w_{i-1/2}}{x}, & A_3=true,\\ \dfrac{-w_{i-1/2}}{x-(b_1+b_2)}, & A_4=true,\end{cases} \tag{10}$$

где $A_3=((0<w_{i-1/2})\,\&\,(b_1+b_2\le x<0.5(b_1+b_2)<0))\ |$

$((w_{i-1/2}<0)\,\&\,(0<0.5(b_1+b_2)\le x\le b_1+b_2)),$

$$\begin{aligned}A_4=&((0<w_{i-1/2})\,\&\,(0.5(b_1+b_2)\le x\le 0))\ |\\ &((w_{i-1/2}<0)\,\&\,(0\le x<0.5(b_1+b_2))).\end{aligned} \tag{11}$$

4.2. Частные случаи

1. Пусть $\gamma_{i-1}=0$, $\gamma_i=0$. Тогда решение системы (5) имеет следующий вид:

$$y_{i-1}=b_1,\ y_i=b_2\ . \tag{12}$$

2. Пусть $\gamma_{i-1}=0$, $\gamma_i<0$. Тогда решение x удовлетворяет одному из пяти уравнений:

1) $x=b_2$, при $0\le y(x)$;

2) $(1+0.5\gamma_i y(x))x=b_2$, при $-0.5\le y(x)<0$;

3) $(1-0.25\gamma_i)x=b_2$, при $-R^*\le y(x)<-0.5$;

4) $(1-0.25\gamma_i(1-2R^*)+0.5\gamma_i y(x))x=b_2$, при $-(R^*+0.5)\le y(x)<-R^*$;

5) $(1-0.5\gamma_i)x=b_2$, при $y(x)<-(R^*+0.5)$.

Найдем в R^3($(b_1,b_2,w_{i-1/2})\in R^3$) области 1, 2, 3, 4, 5, в которых решение исходной задачи определяется соответственно одним из перечисленных уравнений 1) – 5).

Область 1. Анализ свойств функции $y=y(x)$ показывает, что неравенство $0\le y(b_2)$ справедливо при выполнении условия

$$B_1=true, \tag{13}$$

где $B_1 = (w_{i-1/2} = 0) \,|\, (b_1 + b_2 = 0) \,|\, ((0 < w_{i-1/2})\ \&\ ((0 < b_1) \,|\, (0 < b_2))) \,|$

$((w_{i-1/2} < 0)\ \&\ ((b_1 < 0) \,|\, (b_2 < 0)))$.

При выполнении условия (13) решение системы (5) имеет вид (12).

Области 2 – 5 существует либо при $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, либо при $0 < b_1$, $0 < b_2$.

Область 3. В этой области $(-R^* \le y < -0.5)$ решение x находится по формуле

$$x = b_2(1 - 0.25\gamma_i). \qquad (14)$$

Для определения области 3 необходимо решить следующие системы неравенств 1) – 4):

1) $0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $b_1 + b_2 \le b_2(1 - 0.25\gamma_i)^{-1} < 0.5(b_1 + b_2)$,

$-R^* \le w_{i-1/2}(1 - 0.25\gamma_i)b_2^{-1} < -0.5$;

2) $0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $0.5(b_1 + b_2) \le b_2(1 - 0.25\gamma_i)^{-1} \le 0$,

$-R^* \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - b_2(1 - 0.25\gamma_i)^{-1})^{-1} < -0.5$;

3) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0 \le b_2(1 - 0.25\gamma_i)^{-1} < 0.5(b_1 + b_2)$,

$-R^* \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - b_2(1 - 0.25\gamma_i)^{-1})^{-1} < -0.5$;

4) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0.5(b_1 + b_2) \le b_2(1 - 0.25\gamma_i)^{-1} \le b_1 + b_2$,

$-R^* \le w_{i-1/2}(1 - 0.25\gamma_i)b_2^{-1} < -0.5$.

Граница $\partial(2,3)$ областей 2 и 3 $(y = -0.5)$ в R^3 представляет собой фрагменты плоскостей $w_{i-1/2} = W_{\partial(2,3)}$:

$$W_{\partial(2,3)} = \begin{cases} W_{\partial(2,3),1} = -0.5b_2(1 - 0.25\gamma_i)^{-1}, \\ \quad (b_2 < b_1k_0 < 0) \,|\, (0 < b_1k_0 < b_2; \\ W_{\partial(2,3),2} = -0.5(b_1 - 0.25(b_1 + b_2)\gamma_i)(1 - 0.25\gamma_i)^{-1}, \\ \quad (b_1k_0 \le b_2 < 0) \,|\, (0 < b_2 < b_1k_0), \end{cases} \qquad (15)$$

где $k_0 = (1 - 0.25\gamma_i)(1 + 0.25\gamma_i)^{-1}$.

Граница $\partial(3,4)$ областей 3 и 4 ($y = -R^*$) в R^3 представляет собой фрагменты плоскостей $w_{i-1/2} = W_{\partial(3,4)}$:

$$W_{\partial(3,4)} = \begin{cases} W_{\partial(3,4),1} = -R^* b_2 (1 - 0.25\gamma_i)^{-1}, \\ \quad (b_2 < b_1 k_0 < 0) \mid (0 < b_1 k_0 < b_2); \\ W_{\partial(3,4),2} = -R^* (b_1 - 0.25(b_1 + b_2)\gamma_i)(1 - 0.25\gamma_i)^{-1}, \\ \quad (b_1 k_0 \le b_2 < 0) \mid (0 < b_2 < b_1 k_0). \end{cases} \tag{16}$$

Решение неравенств 1) – 4) определяет область 3:

$$B_3 = true, \tag{17}$$

где $B_3 = (((b_2 < b_1 k_0 < 0)\ \&\ (0 < W_{\partial(2,3),1} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(3,4),1})) \mid$

$((b_1 k_0 \le b_2 < 0)\ \&\ (0 < W_{\partial(2,3),2} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(3,4),2}))) \mid$

$(((0 < b_1 k_0 \le b_2)\ \&\ (W_{\partial(3,4),1} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),1} < 0)) \mid$

$((0 < b_2 < b_1 k_0)\ \&\ (W_{\partial(3,4),2} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),2} < 0)))$.

Область 5. В этой области ($y < -(R^* + 0.5)$) решение x находится по формуле

$$x = b_2 (1 - 0.5\gamma_i)^{-1}. \tag{18}$$

Для определения области 5 необходимо решить следующие системы неравенств 1) – 4):

1) $0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $b_1 + b_2 \le b_2 (1 - 0.5\gamma_i)^{-1} < 0.5(b_1 + b_2)$,

$w_{i-1/2}(1 - 0.5\gamma_i) b_2^{-1} < -(R^* + 0.5)$;

2) $0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $0.5(b_1 + b_2) \le b_2 (1 - 0.5\gamma_i)^{-1} \le 0$,

$w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - b_2 (1 - 0.5\gamma_i)^{-1})^{-1} < -(R^* + 0.5)$;

3) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0 \le b_2 (1 - 0.5\gamma_i)^{-1} \le 0.5(b_1 + b_2)$,

$w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - b_2 (1 - 0.25\gamma_i)^{-1})^{-1} < -(R^* + 0.5)$;

4) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0.5(b_1 + b_2) \le b_2 (1 - 0.5\gamma_i)^{-1} \le b_1 + b_2$,

$w_{i-1/2}(1 - 0.5\gamma_i) b_2^{-1} < -(R^* + 0.5)$.

Граница $\partial(4,5)$ областей 4 и 5 ($y=-(R^*+0.5)$) в R^3 представляет собой фрагменты плоскостей $w_{i-1/2}=W_{\partial(4,5)}$:

$$W_{\partial(4,5)}=\begin{cases} W_{\partial(4,5),1}=-(R^*+0.5)b_2(1-0.5\gamma_i)^{-1}, \\ \quad (b_2<b_1k_1<0)\,|\,(0<b_1k_1<b_2); \\ W_{\partial(4,5),2}=-(R^*+0.5)(b_1-0.5(b_1+b_2)\gamma_i)(1-0.5\gamma_i)^{-1}, \\ \quad (b_1k_1\le b_2<0)\,|\,(0<b_2<b_1k_1), \end{cases} \tag{19}$$

где $k_1=(1-0.5\gamma_i)(1+0.5\gamma_i)^{-1}$.

Решение неравенств 1) – 4) определяет область 5

$$B_5=true, \tag{20}$$

где $B_5=(((b_2<b_1k_1<0)\ \&\ (0<W_{\partial(4,5),1}<w_{i-1/2}))\,|$

$$((b_1k_1\le b_2<0)\ \&\ (0<W_{\partial(4,5),2}<w_{i-1/2})))\,|$$
$$(((0<b_1k_1\le b_2)\ \&\ (w_{i-1/2}<W_{\partial(4,5),1}))\,|$$
$$((0<b_2<b_1k_1)\ \&\ (w_{i-1/2}<W_{\partial(4,5),2}))).$$

Область 2 $(-0.5\le y<0)$ определяется условием

$$B_2=true, \tag{21}$$

где $B_2=(((b_2<b_1k_0<0)\ \&\ (0<w_{i-1/2}\le W_{\partial(2,3),1}))\,|$

$$((b_1k_0\le b_2<0)\ \&\ (0<w_{i-1/2}\le W_{\partial(2,3),2})))\,|$$
$$(((0<b_1k_0\le b_2)\ \&\ (W_{\partial(2,3),1}\le w_{i-1/2}<0))\,|$$
$$((0<b_2<b_1k_0)\ \&\ (W_{\partial(2,3),2}\le w_{i-1/2}<0))).$$

В области 2 существуют три подобласти 21/3, 22, 24, в которых решение находится различным образом.

Соотношение

$$x=b_2-0.5\gamma_i w_{i-1/2} \tag{22}$$

определяет решение в области 21/3. Эта область определяется решением неравенств

1) $0<w_{i-1/2}$, $b_1<0$, $b_2<0$, $b_1+b_2\le b_2-0.5\gamma_i w_{i-1/2}<0.5(b_1+b_2)$,

$-0.5\le w_{i-1/2}(b_2-0.5\gamma_i w_{i-1/2})^{-1}<0$;

2) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0.5(b_1 + b_2) \le b_2 - 0.5\gamma_i w_{i-1/2} \le b_1 + b_2$,

$-0.5 \le w_{i-1/2}(b_2 - 0.5\gamma_i w_{i-1/2})^{-1} < 0$.

Точка $(b_1, b_2, w_{i-1/2})$ принадлежит этой области, если выполняется условие

$$B_{21/3} = true, \tag{23}$$

где $B_{21/3} = (((b_2 < b_1 k_0 < 0)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} \le W_{\partial(2,3),1}))\ |$

$$((b_1 k_0 \le b_2 < b_1)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} < W_1^*)))\ |$$
$$(((0 < b_1 k_0 \le b_2)\ \&\ (W_{\partial(2,3),1} \le w_{i-1/2} < 0))\ |$$
$$((b_1 < b_2 < b_1 k_0)\ \&\ ((b_2 - b_1)\gamma_i^{-1} < w_{i-1/2} < 0))),$$

где $W_1^* = (b_2 - b_1)\gamma_i^{-1}$.

При выполнении неравенств

1) $0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $0.5(b_1 + b_2) \le x \le 0$,

$-0.5 \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - x)^{-1} < 0$;

2) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0 \le x < 0.5(b_1 + b_2)$,

$-0.5 \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - x)^{-1} < 0$

неизвестная величина x удовлетворяет уравнению

$x^2 - (b_1 + 2b_2 + 0.5\gamma_i w_{i-1/2})x + b_2(b_1 + b_2) = 0$ с корнями

$$x_1 = 0.5(b_1 + 2b_2 + 0.5\gamma_i w_{i-1/2} + \sqrt{D}), \tag{24.1}$$

$$x_2 = 0.5(b_1 + 2b_2 + 0.5\gamma_i w_{i-1/2} - \sqrt{D}), \tag{24.2}$$

$$D = (b_1 + 2b_2 + 0.5\gamma_i w_{i-1/2})^2 - 4b_2(b_1 + b_2). \tag{24.3}$$

Корень x_1 дает решение задачи в области 22, которая определяется неравенствами

$0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $0.5(b_1 + b_2) \le x_1 \le 0$,

$-0.5 \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - x_1)^{-1} < 0$.

Решение этой группы неравенств определяет область 22. Точка $(b_1, b_2, w_{i-1/2})$ принадлежит этой области, если выполнено условие

$B_{22} = true,$ (25)

где $B_{22} = ((b_1 k_0 < b_2 < b_1) \,\&\, (0 < W_1^* \le w_{i-1/2} \le W_{\partial(2,3),2}))\,|$

$((b_1 < b_2 < 0) \,\&\, (0 < w_{i-1/2} \le W_{\partial(2,3),2})).$

Корень x_2 дает решение задачи в области 24, определяемой неравенствами

$w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0 \le x_2 < 0.5(b_1 + b_2)$,

$-0.5 \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - x_2)^{-1} < 0$.

Точка $(b_1, b_2, w_{i-1/2})$ принадлежит области 24 при выполнении условия

$B_{24} = true,$ (26)

где $B_{24} = ((b_1 < b_2 < b_1 k_0) \,\&\, (W_{\partial(2,3),2} \le w_{i-1/2} \le W_1^* < 0))\,|$

$((0 < b_2 < b_1) \,\&\, (W_{\partial(2,3),2} \le w_{i-1/2} < 0)).$

Область 4. Область 4 $(-(R^* + 0.5) \le y < -R^*)$ определяется условием

$B_4 = true,$ (27)

где $B_4 = (((b_2 < b_1 k_1 < 0) \,\&\, (0 < W_{\partial(3,4),1} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),1}))\,|$

$((b_1 k_1 < b_2 < b_1 k_0 < b_1 < 0) \,\&\, (0 < W_{\partial(3,4),1} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),2}))\,|$

$((b_1 k_0 < b_2 < 0) \,\&\, (0 < W_{\partial(3,4),2} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),2})))\,|$

$(((0 < b_1 < b_1 k_0 < b_1 k_1 < b_2) \,\&\, (W_{\partial(4,5),1} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),1} < 0))\,|$

$((0 < b_1 < b_1 k_0 < b_1 k_1) \,\&\, (W_{\partial(4,5),2} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),1} < 0))\,|$

$((0 < b_2 < b_1 k_0) \,\&\, (W_{\partial(4,5),2} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),2} < 0))).$

В области 4 существуют подобласти 46/8, 47, 49, в которых решения находятся с помощью разных выражений.

Соотношение

$x = (b_2 - 0.5\gamma_i w_{i-1/2})(1 - 0.25\gamma_i(1 - 2R^*))^{-1}$ (28)

определяет решение в области 46/8. Область 46/8 определяется решением неравенств:

1) $0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$,

$$b_1 + b_2 \le (b_2 - 0.5\gamma_i w_{i-1/2})(1 - 0.25\gamma_i (1 - 2R^*))^{-1} < 0.5(b_1 + b_2),$$

$$-(R^* + 0.5) \le w_{i-1/2}(1 - 0.25\gamma_i (1 - 2R^*))(b_2 - 0.5\gamma_i w_{i-1/2})^{-1} < -R^*;$$

2) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$,

$$0.5(b_1 + b_2) \le (b_2 - 0.5\gamma_i w_{i-1/2})(1 - 0.25\gamma_i (1 - 2R^*))^{-1} \le b_1 + b_2,$$

$$-(R^* + 0.5) \le w_{i-1/2}(1 - 0.25\gamma_i (1 - 2R^*))(b_2 - 0.5\gamma_i w_{i-1/2})^{-1} < -R^*.$$

Точка $(b_1, b_2, w_{i-1/2})$ принадлежит области 46/8 при выполнении условия

$$B_{46/8} = true, \tag{29}$$

где $B_{46/8} = (((b_2 < b_1 k_1 < 0)\ \&\ (0 < W_{\partial(3,4),1} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),1}))\,|$

$$((b_1 k_1 < b_2 < b_1 k_0 < 0)\ \&\ (0 < W_{\partial(3,4),1} < w_{i-1/2} < W_2^*)))\,|$$
$$(((0 < b_1 k_1 < b_2)\ \&\ (W_{\partial(4,5),1} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),1}))\,|$$
$$((0 < b_1 k_0 < b_2 < b_1 k_1)\ \&\ (W_2^* < w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),1}))),$$

где $W_2^* = (b_2 - b_1)/\gamma_i - 0.25(2R^* - 1)(b_1 + b_2)$.

При выполнении неравенств:

1) $0 < w_{i-1/2}$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, $0.5(b_1 + b_2) \le x \le 0$,

$$-(R^* + 0.5) \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - x)^{-1} < -R^*;$$

2) $w_{i-1/2} < 0$, $0 < b_1$, $0 < b_2$, $0 \le x < 0.5(b_1 + b_2)$,

$$-(R^* + 0.5) \le w_{i-1/2}(b_1 + b_2 - x)^{-1} < -R^*$$

неизвестная величина x удовлетворяет уравнению

$$(1 - 0.25(1 - 2R^*)\gamma_i)x^2 - (b_1 + 2b_2 + 0.5\gamma_i w_{i-1/2} - 0.25(b_1 + b_2)(1 - 2R^*)\gamma_i)x + b_2(b_1 + b_2) = 0$$

с корнями

$$x_1 = \frac{b_1 + 2b_2 + 0.5\gamma_i w_{i-1/2} - 0.25(b_1 + b_2)(1 - 2R^*)\gamma_i + \sqrt{D}}{2(1 - 0.25(1 - 2R^*)\gamma_i)}, \tag{30.1}$$

$$x_2 = \frac{b_1 + 2b_2 + 0.5\gamma_i w_{i-1/2} - 0.25(b_1 + b_2)(1 - 2R^*)\gamma_i - \sqrt{D}}{2(1 - 0.25(1 - 2R^*)\gamma_i)}, \tag{30.2}$$

$$D=(b_1+2b_2+0.5\gamma_i w_{i-1/2}-0.25(b_1+b_2)(1-2R^*)\gamma_i)^2+ \\ (b_1+b_2)(2-0.5(1-2R^*)\gamma_i)w_{i-1/2}\gamma_i. \quad (30.3)$$

Корень x_1 дает решение задачи в области 47

$$B_{47}=true, \quad (31)$$

где $B_{47}=((b_1k_1<b_2<b_1k_0<0)\ \&\ (0<W_2^*<w_{i-1/2}\le W_{\partial(4,5),2}))\,|$

$$((b_1k_0<b_2<0)\ \&\ (W_{\partial(3,4),2}<w_{i-1/2}<W_{\partial(4,5),2})).$$

Корень x_2 дает решение задачи в области 49

$$B_{49}=true, \quad (32)$$

где $B_{49}=((0<b_1k_0<b_2<b_1k_1)\ \&\ (W_{\partial(4,5),2}<w_{i-1/2}<W_2^*<0))\,|$

$$((0<b_2<b_1k_0)\ \&\ (W_{\partial(4,5),2}\le w_{i-1/2}<W_{\partial(3,4),2})).$$

На рис. 2 схематически представлены области применимости формул (14), (18), (22), (24.1), (24.2), (30.1), (30.2) в R^3 в частном случае $\gamma_{i-1}=0$, $\gamma_i<0$.

3. Аналогично определяется решение для частного случая $\gamma_{i-1}>0$, $\gamma_i=0$.

4.3. Редукция исходной системы уравнений

Пусть $\gamma_{i-1}>0$, $\gamma_i<0$. В зависимости от x значение y принадлежит одной из пяти областей: 1) $y\ge 0$; 2) $-0.5\le y<0$; 3) $-R^*\le y<-0.5$; 4) $-(R^*+0.5)\le y<-R^*$; 5) $y<-(R^*+0.5)$. В каждой из областей исходная система уравнений принимает специфический вид. Так, в областях 1, 3, 5 система (5) является линейной (не зависит от y), а в областях 2 и 4 сводится к квадратному уравнению относительно x.

Область 1. В этом случае ($y\ge 0$):

$$y_i=b_2,\ y_{i-1}=b_1.$$

Область 2. В этой области система принимает вид:

$$(1-0.5\gamma_{i-1}y)y_{i-1}-0.5\gamma_i y y_i=b_1,$$

$0.5\gamma_{i-1}yy_{i-1} + (1 + 0.5\gamma_i y)y_i = b_2$,

и дает следующее нелинейное уравнение для x

$$\alpha + \frac{\beta}{x-\delta} = \begin{cases} \dfrac{w_{i-1/2}}{x}, & A_3 = true, \\ \dfrac{-w_{i-1/2}}{x-(b_1+b_2)}, & A_4 = true, \end{cases} \tag{33}$$

где $\alpha = \dfrac{2}{\gamma_{i-1}-\gamma_i}$, $\beta = \dfrac{2(b_2\gamma_i + b_1\gamma_{i-1})}{(\gamma_{i-1}-\gamma_i)^2}$, $\delta = \dfrac{\gamma_{i-1}(b_1+b_2)}{\gamma_{i-1}-\gamma_i}$.

При выполнении условия $A_3 = true$ (33) сводится к квадратному уравнению $x^2 - xb + c = 0$ с коэффициентами

$$b = b_2 + 0.5w_{i-1/2}(\gamma_{i-1}-\gamma_i),\; c = 0.5w_{i-1/2}(b_1+b_2)\gamma_{i-1}. \tag{34}$$

Дискриминант уравнения $D = b^2 - 2w_{i-1/2}(b_1+b_2)\gamma_{i-1}$ положителен в рассматриваемой области, так как $\gamma_{i-1} > 0$ и $w_{i-1/2}(b_1+b_2) < 0$.

Корни уравнения имеют следующий вид

$$x_1 = 0.5(b + \sqrt{D}), \tag{35.1}$$

$$x_2 = 0.5(b - \sqrt{D}). \tag{35.2}$$

При $A_4 = true$ коэффициенты квадратного уравнения имеют вид:

$$b = b_1 + 2b_2 - 0.5w_{i-1/2}(\gamma_{i-1}-\gamma_i),\; c = (b_1+b_2)(b_2 - 0.5w_{i-1/2}\gamma_{i-1}). \tag{36}$$

Его дискриминант $D = (b_1 + 0.5w_{i-1/2}(\gamma_{i-1}-\gamma_i))^2 + 2(b_1+b_2)w_{i-1/2}\gamma_i$ положителен в рассматриваемой области, так как $\gamma_i < 0$ и $w_{i-1/2}(b_1+b_2) < 0$. Корни вычисляются по формуле (35) с использованием (36).

Область 3. При $-R^* < y < -0.5$ система (5) имеет вид:

$(1 + 0.25\gamma_{i-1})y_{i-1} - 0.25\gamma_i y_i = b_1$,

$-0.25\gamma_{i-1}y_{i-1} + (1 - 0.25\gamma_i)y_i = b_2$

и дает единственное решение:

$$\text{Ф5: } x = \frac{b_2 + 0.25\gamma_{i-1}(b_1+b_2)}{1 + 0.25(\gamma_{i-1}-\gamma_i)}. \tag{37}$$

Область 4. В этой области исходные уравнения имеют вид:

$$(1+0.25\gamma_{i-1}(1-2R^*))y_{i-1}-0.5\gamma_{i-1}yy_{i-1}+0.25\gamma_i(1-2R^*)y_i-0.5\gamma_i yy_i=b_1,$$

$$-0.25\gamma_{i-1}(1-2R^*)y_{i-1}+0.5\gamma_{i-1}yy_{i-1}+(1-0.25\gamma_i(1-2R^*))y_i+0.5\gamma_i yy_i=b_2.$$

Разрешая эту систему относительно y, получаем аналог уравнения (33) со следующими коэффициентами

$$\alpha=\frac{2}{\gamma_{i-1}-\gamma_i}+0.5(1-2R^*),\ \beta=\frac{2(b_2\gamma_i+b_1\gamma_{i-1})}{(\gamma_{i-1}-\gamma_i)^2},\ \delta=\frac{\gamma_{i-1}(b_1+b_2)}{\gamma_{i-1}-\gamma_i}.$$

При условии $A_3=true$ это уравнение сводится к виду

$ax^2+bx+c=0$ с коэффициентами: (38)

$$a=1+0.25(1-2R^*)(\gamma_{i-1}-\gamma_i),$$

$$b=-(b_2+0.25(b_1+b_2)(1-2R^*)\gamma_{i-1}+0.5w_{i-1/2}(\gamma_{i-1}-\gamma_i)),$$

$$c=0.5w_{i-1/2}(b_1+b_2)\gamma_{i-1}. \qquad (39)$$

Дискриминант уравнения (38)

$D=b^2-2(1+0.25(1-2R^*)(\gamma_{i-1}-\gamma_i))w_{i-1/2}(b_1+b_2)\gamma_{i-1}$ положителен в рассматриваемой области при выполнении условия

$$\max(-\gamma_i,\gamma_{i-1})<\frac{2}{2R^*-1}, \qquad (40)$$

и уравнение (39) имеет действительные корни

$$x_1=0.5(-b+\sqrt{D})/a, \qquad (41.1)$$

$$x_2=0.5(-b-\sqrt{D})/a. \qquad (41.2)$$

При условии $A_4=true$ коэффициенты квадратного уравнения (38) вычисляются по формулам:

$$a=1+0.25(1-2R^*)(\gamma_{i-1}-\gamma_i),$$

$$b=-(b_1+2b_2-0.5w_{i-1/2}(\gamma_{i-1}-\gamma_i)+0.25(b_1+b_2)(1-2R^*)(2\gamma_{i-1}-\gamma_i)),$$

$$c=(b_1+b_2)(b_2+0.25(1-2R^*)(b_1+b_2)\gamma_{i-1}-0.5w_{i-1/2}\gamma_{i-1}). \qquad (42)$$

Дискриминант $D=(b_1+0.5w_{i-1/2}(\gamma_{i-1}-\gamma_i)-0.25(1-2R^*)(b_1+b_2)\gamma_i)^2+$

$(b_1+b_2)(2+0.5(1-2R^*)(\gamma_{i-1}-\gamma_i))w_{i-1/2}\gamma_i$ положителен в рассматриваемой области при выполнении условия (40). Корни уравнения имеют вид (41) с коэффициентами (42).

Область 5. В этой области исходные уравнения принимают вид:

$(1+0.5\gamma_{i-1})y_{i-1}+0.5\gamma_i y_i = b_1$,

$-0.5\gamma_{i-1}y_{i-1}+(1+0.5\gamma_i)y_i = b_2$,

и дают единственное решение

$$\Phi10:\ x=\frac{b_2+0.5\gamma_{i-1}(b_1+b_2)}{1+0.5(\gamma_{i-1}-\gamma_i)}. \qquad (43)$$

Редукция исходной системы завершена. Предстоит отобрать подходящие корни квадратных уравнений в областях 2 и 4.

4.4. Отбор корней нелинейных уравнений

Отбор корней в областях 2 и 4 выполним, исходя из требования непрерывности решений системы (5) на границах областей 2, 3, 4, 5.

Область 2. На границе $\partial(2,3)$ областей 2 и 3 значение неизвестной x равно $-2w_{i-1/2}$ ($2w_{i-1/2}+b_1+b_2$) при выполнении условия $A_3 = true$ ($A_4 = true$). Поэтому из требования непрерывности решение (34), (35) ((35), (36)) должно принимать значение $-2w_{i-1/2}$ ($2w_{i-1/2}+b_1+b_2$) при условии $-2w_{i-1/2}(1+0.25(\gamma_{i-1}-\gamma_i)) = b_2+0.25\gamma_{i-1}(b_1+b_2)$

($(2w_{i-1/2}+b_1+b_2)\,(1+0.25(\gamma_{i-1}-\gamma_i) = b_2+0.25\gamma_{i-1}(b_1+b_2)$).

Анализ показывает, что при выполнении $A_3 = true(A_4 = true)$ этому условию удовлетворяет корень x_1 при $b_1+b_2>0$ и $w_{i-1/2}<0$ ($b_1+b_2<0$ и $w_{i-1/2}>0$) или корень x_2 при $b_1+b_2<0$ и $w_{i-1/2}>0$ ($b_1+b_2<0$ и $w_{i-1/2}<0$). Таким образом, решение x в области 2 имеет вид:

$$x=\begin{cases}\Phi 1: x_1 \text{ из } (37),(38.1), \text{при } 0<0.5(b_1+b_2)\le x_1 \le b_1+b_2,\, w_{i-1/2}<0,\\ \Phi 3: x_3 \text{ из } (37),(38.2), \text{при } b_1+b_2 \le x_3 < 0.5(b_1+b_2)<0,\, 0<w_{i-1/2},\\ \Phi 2: x_2 \text{ из } (38.1),(39), \text{при } 0.5(b_1+b_2)\le x_2 \le 0,\, 0<w_{i-1/2},\\ \Phi 4: x_4 \text{ из } (38.2),(39), \text{при } 0\le x_4 < 0.5(b_1+b_2),\, w_{i-1/2}<0.\end{cases} \quad (44)$$

Область 4. На границе $\partial(3,4)$ областей 3 и 4 значение неизвестной x равно $-w_{i-1/2}/R^*$ ($w_{i-1/2}/R^*+b_1+b_2$) при $A_3=true$ ($A_4=true$). Поэтому решение (39), (41) ((41), (42)) должно принимать то же значение при условии

$$-w_{i-1/2}/R^*(1+0.25(\gamma_{i-1}-\gamma_i))=b_2+0.25\gamma_{i-1}(b_1+b_2)$$

($(w_{i-1/2}/R^*+b_1+b_2)\,(1+0.25(\gamma_{i-1}-\gamma_i)=b_2+0.25\gamma_{i-1}(b_1+b_2)$). Анализ показывает, что при $A_3=true$ ($A_4=true$) в области 4 следует выбрать корень x_1 при $b_1+b_2>0$ и $w_{i-1/2}<0$ ($b_1+b_2<0$ и $w_{i-1/2}>0$) или корень x_2 при $b_1+b_2<0$ и $w_{i-1/2}>0$ ($b_1+b_2<0$ и $w_{i-1/2}<0$).

На границе $\partial(4,5)$ областей 4 и 5 значение x равно $-w_{i-1/2}/(R^*+0.5)$ ($w_{i-1/2}/(R^*+0.5)+b_1+b_2$) при $A_3=true$ ($A_4=true$). Описанный выше выбор корней в области 4 обеспечивает непрерывность решения на этой границе. Поэтому решение x в области 4 имеет вид:

$$x=\begin{cases}\Phi 6: x_6 \text{ из } (42),(44.1), \text{при } 0<0.5(b_1+b_2)\le x_6 \le b_1+b_2,\, w_{i-1/2}<0,\\ \Phi 8: x_8 \text{ из } (42),(44.2), \text{при } b_1+b_2 \le x_8 < 0.5(b_1+b_2),\, w_{i-1/2}>0,\\ \Phi 7: x_7 \text{ из } (44.1),(45), \text{при } 0.5(b_1+b_2)\le x_7 \le 0,\, w_{i-1/2}>0,\\ \Phi 9: x_9 \text{ из } (44.2),(45), \text{при } 0\le x_9 < 0.5(b_1+b_2),\, w_{i-1/2}<0.\end{cases} \quad (45)$$

4.5. Точные выражения для решения и области их применимости

До сих пор границы областей 1 – 5 определялись в терминах величины y. Для определения зависимости решения системы (5) от параметров $w_{i-1/2}$, b_1, b_2, γ_i, γ_{i-1} следует выразить границы областей 1 – 5 в терминах x, а затем, воспользовавшись решением, найти границы в терминах параметров задачи.

1. Из (7), (8) следует, что величина y неотрицательна при выполнении условия $w_{i-1/2}(b_1+b_2)\ge 0$ для любого действительного x. Она положительна при $w_{i-1/2}(b_1+b_2)<0$ для любого x, не принадлежащего отрезку $[\min(b_1+b_2,0),\max(b_1+b_2,0)]$. Поэтому система (5) имеет единственное решение вида (12)

$$x=b_2$$

при выполнении следующих условий:

либо $(w_{i-1/2}=0)\,|\,(b_1+b_2)=0)$, (46.1)

либо $(0<w_{i-1/2})$ & $((0<b_1)\ |\ (0<b_2))$, (46.2)

либо $(w_{i-1/2}<0)$ & $((b_1<0)\ |\ (b_2<0))$. (46.3)

Условия (46) определяют область 1 в R^3, $(b_1,b_2,w_{i-1/2})\in R^3$ (см. рис. 3).

2. Решение системы (5) принадлежит области 2 и определяется по формулам Ф1, Ф2, Ф3, Ф4, если, соответственно, выполнены неравенства:

$$\max(0.5(b_1+b_2),-2w_{i-1/2})\le x_1<b_1+b_2,\ 0<b_1,\ 0<b_2, \quad (47.1)$$

$$\max(0.5(b_1+b_2),2w_{i-1/2}+b_1+b_2)\le x_2<0,\ b_1<0,\ b_2<0, \quad (47.2)$$

$$b_1+b_2<x_3\le\min(-2w_{i-1/2},0.5(b_1+b_2)),\ b_1<0,\ b_2<0, \quad (47.3)$$

$$0<x_4\le\min(0.5(b_1+b_2),2w_{i-1/2}+b_1+b_2),\ 0<b_1,\ 0<b_2. \quad (47.4)$$

Граница $\partial(2,3)$ между областями 2 и 3 определяется одним из следующих уравнений при соответствующих условиях:

$$x_1=-2w_{i-1/2},\ \text{при}\ 0<0.5(b_1+b_2)\le x_1\le b_1+b_2,\ 0<b_1,\ 0<b_2, \quad (48)$$

$$x_2=2w_{i-1/2}+b_1+b_2,\ \text{при}\ 0.5(b_1+b_2)\le x_2\le 0,\ b_1<0,\ b_2<0, \quad (49)$$

$$x_3=-2w_{i-1/2},\ \text{при}\ b_1+b_2\le x_3\le 0.5(b_1+b_2)<0,\ b_1<0,\ b_2<0, \quad (50)$$

$$x_4=2w_{i-1/2}+b_1+b_2,\ \text{при}\ 0\le x_4\le 0.5(b_1+b_2),\ 0<b_1,\ 0<b_2. \quad (51)$$

Решения уравнений (48) – (51) относительно $w_{i-1/2}$ дают следующее значение $W_{\partial(2,3)}$, определяющее границу $\partial(2,3)$:

$$W_{\partial(2,3)} = \begin{cases} W_{\partial(2,3),1} = -0.5\dfrac{b_2 + 0.25\gamma_{i-1}(b_1+b_2)}{1+0.25(\gamma_{i-1}-\gamma_i)}, A_{31} = true, \\ W_{\partial(2,3),2} = -0.5\dfrac{b_1 - 0.25\gamma_i(b_1+b_2)}{1+0.25(\gamma_{i-1}-\gamma_i)}, \quad A_{32} = true, \end{cases} \tag{52}$$

где $A_{31} = (((b_2 - b_1) + 0.25(\gamma_{i-1} + \gamma_i)(b_1 + b_2) \le 0) \,\&\, (b_1 < 0) \,\&\, (b_2 < 0))\,|$

$$((0 \le (b_2 - b_1) + 0.25(\gamma_{i-1} + \gamma_i)(b_1 + b_2)) \,\&\, (0 < b_1) \,\&\, (0 < b_2)),$$

$A_{32} = ((0 \le (b_2 - b_1) + 0.25(\gamma_{i-1} + \gamma_i)(b_1 + b_2)) \,\&\, (b_1 < 0) \,\&\, (b_2 < 0))\,|$

$$(((b_2 - b_1) + 0.25(\gamma_{i-1} + \gamma_i)(b_1 + b_2) \le 0) \,\&\, (0 < b_1) \,\&\, (0 < b_2)).$$

Значение $W_{\partial(2,3)}/(b_1 + b_2)$ принадлежит интервалу $(-0.5, -0.25)$.

3. Решение системы (5) принадлежит области 3 и определяется по формуле Ф5:

$$x_5 = \frac{b_2 + 0.25\gamma_{i-1}(b_1 + b_2)}{1 + 0.25(b_1 + b_2)},$$

если выполнены неравенства

$$\max((b_1 + b_2), -2w_{i-1/2}) \le x_5 \le \min(-w_{i-1/2}/R^*, 0.5(b_1 + b_2)),\ b_1 < 0,\ b_2 < 0 \tag{53.1}$$

или

$$\max(0.5(b_1 + b_2), w_{i-1/2}/R^* + b_1 + b_2) \le x_5 \le \min(2w_{i-1/2} + b_1 + b_2, 0),$$

$$b_1 < 0,\ b_2 < 0, \tag{53.2}$$

или

$$\max(0.5(b_1 + b_2), -w_{i-1/2}/R^*) \le x_5 \le \min(-2w_{i-1/2}, b_1 + b_2),\ b_1 > 0,\ b_2 > 0, \tag{53.3}$$

или

$$\max(0, 2w_{i-1/2} + b_1 + b_2) \le x_5 \le \min(0.5(b_1 + b_2), w_{i-1/2}/R^* + b_1 + b_2),$$

$$b_1 > 0,\ b_2 > 0. \tag{53.4}$$

Граница $\partial(3,4)$ между областями 3 и 4 определяется следующими равенствами:

$$x_5 = -w_{i-1/2}/R^*, \tag{54}$$

при $b_1 + b_2 \le x_5 \le 0.5(b_1 + b_2)$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$,

либо при $0.5(b_1 + b_2) \le x_5 \le b_1 + b_2$, $0 < b_1$, $0 < b_2$,

$$x_5 = w_{i-1/2} / R^* + b_1 + b_2, \tag{55}$$

при $0.5(b_1 + b_2) \le x_5 \le 0$, $b_1 < 0$, $b_2 < 0$,

либо при $0 \le x_5 \le 0.5(b_1 + b_2)$, $0 < b_1$, $0 < b_2$.

Решения уравнений (54), (55) относительно $w_{i-1/2}$ дают значение $W_{\partial(3,4)}$, определяющее границу $\partial(3,4)$:

$$W_{\partial(3,4)} = \begin{cases} W_{\partial(3,4),1} = -R^* \dfrac{b_2 + 0.25\gamma_{i-1}(b_1 + b_2)}{1 + 0.25(\gamma_{i-1} - \gamma_i)}, A_{31} = true \\ W_{\partial(3,4),2} = -R^* \dfrac{b_1 - 0.25\gamma_i(b_1 + b_2)}{1 + 0.25(\gamma_{i-1} - \gamma_i)}, \quad A_{32} = true \end{cases} \tag{56}$$

Значение $W_{\partial(3,4)} / (b_1 + b_2)$ принадлежит интервалу $(-R^*, -0.5R^*)$.

4. Решение системы (5) принадлежит области 4 и определяется по формулам Ф6, Ф7, Ф8, Ф9, если, соответственно, выполнены неравенства:

$$0 < \max(0.5(b_1 + b_2), -w_{i-1/2} / (R^* + 0.5)) \le x_6 < \min(-w_{i-1/2} / R^*, b_1 + b_2), \tag{57.1}$$

$$\max(0.5(b_1 + b_2), w_{i-1/2} / (R^* + 0.5) + b_1 + b_2) \le x_7 < \min(w_{i-1/2} / R^* + b_1 + b_2, 0), \tag{57.2}$$

$$\max(b_1 + b_2, -w_{i-1/2} / R^*) < x_8 \le \min(0.5(b_1 + b_2), -w_{i-1/2} / (R^* + 0.5)) < 0, \tag{57.3}$$

$$\max(0, w_{i-1/2} / R^* + b_1 + b_2) < x_9 \le \min(0.5(b_1 + b_2), w_{i-1/2} / (R^* + 0.5) + b_1 + b_2). \tag{57.4}$$

Граница $\partial(4,5)$ между областями 4 и 5 определяется одним из следующих уравнений:

$$x_6 = -w_{i-1/2} / (R^* + 0.5) \text{ при } 0.5(b_1 + b_2) < x_6 < b_1 + b_2,\ 0 < b_1,\ 0 < b_2, \tag{58}$$

$$x_7 = w_{i-1/2} / (R^* + 0.5) + b_1 + b_2 \text{ при } 0.5(b_1 + b_2) < x_7 < 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0, \tag{59}$$

$$x_8 = -w_{i-1/2}/(R^* + 0.5) \text{ при } b_1 + b_2 < x_8 < 0.5(b_1 + b_2),\ b_1 < 0,\ b_2 < 0, \quad (60)$$

$$x_9 = w_{i-1/2}/(R^* + 0.5) + b_1 + b_2 \text{ при } 0 < x_9 < 0.5(b_1 + b_2),\ 0 < b_1,\ 0 < b_2. \quad (61)$$

Решение уравнений (58) – (61) относительно $w_{i-1/2}$ дает значение $W_{\partial(4,5)}$, определяющее границу $\partial(4,5)$:

$$W_{\partial(4,5)} = \begin{cases} W_{\partial(4,5),1} = -(R^* + 0.5)\dfrac{b_2 + 0.5\gamma_{i-1}(b_1 + b_2)}{1 + 0.5(\gamma_{i-1} - \gamma_i)}, A_{51} = true, \\ W_{\partial(4,5),2} = -(R^* + 0.5)\dfrac{b_1 - 0.5\gamma_{i-1}(b_1 + b_2)}{1 + 0.5(\gamma_{i-1} - \gamma_i)}, A_{52} = true, \end{cases} \quad (62)$$

где $A_{51} = (((b_2 - b_1) + 0.5(b_1 + b_2)(\gamma_{i-1} + \gamma_i) < 0)\ \&\ (b_1 < 0)\ \&\ (b_2 < 0))\ |$

$((0 < (b_2 - b_1) + 0.5(b_1 + b_2)(\gamma_{i-1} + \gamma_i))\ \&\ (0 < b_1)\ \&\ (0 < b_2)),$

$A_{52} = ((0 < (b_2 - b_1) + 0.5(b_1 + b_2)(\gamma_{i-1} + \gamma_i))\ \&\ (b_1 < 0)\ \&\ (b_2 < 0))\ |$

$(((b_2 - b_1) + 0.5(b_1 + b_2)(\gamma_{i-1} + \gamma_i) < 0)\ \&\ (0 < b_1)\ \&\ (0 < b_2)).$

Значение $W_{\partial(4,5)}/(b_1 + b_2)$ принадлежит интервалу

$(-(R^* + 0.5), -0.5(R^* + 0.5))$.

5. Решение системы (5) принадлежит области 5 и вычисляется по формуле Ф10:

$$x_{10} = \frac{b_2 + 0.5\gamma_{i-1}(b_1 + b_2)}{1 + 0.5(b_1 + b_2)},$$

если $W_{\partial(4,5)} < w_{i-1/2}$ ($w_{i-1/2} < W_{\partial(4,5)}$) при $b_1 < 0$, $b_2 < 0$ ($b_1 > 0$, $b_2 > 0$).

6. Области 21, 22, 23, 24 применимости формул Ф1 – Ф4 определяются решением неравенств (47). Решение этих неравенств дает следующие результаты.

6.1. Решение системы (5) находится по формуле Ф1, если $B_{21} = true.$ Здесь

$B_{21} = (0 < b_1)\ \&\ (0 < b_2)\ \&\ (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i)\ \&\ B_{211})\ |\ ((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0)\ \&\ B_{212})),$

$B_{211} = ((k_0 b_1 < b_2 < b_1)\ \&\ (W_{\partial(2,3),1} < w_{i-1/2} < W_1^*))\ |$

$((b_1 \le b_2)\ \&\ (W_{\partial(2,3),1} < w_{i-1/2} < 0)),$

$$B_{212} = ((0 < b_1 k_0 < b_2)\ \&\ (W_{\partial(2,3),1} < w_{i-1/2} < 0)) \mid$$
$$((0 < b_1 < b_2 < k_0 b_1)\ \&\ (W_1^* < w_{i-1/2} < 0)),$$

где $W_1^* = (b_2 - b_1)/(\gamma_{i-1} + \gamma_i)$, $k_0 = (1 - 0.25(\gamma_{i-1} + \gamma_i))(1 + 0.25(\gamma_{i-1} + \gamma_i))^{-1}$.

6.2. Решение системы (5) вычисляется по формуле Ф2, если $B_{22} = true$. Здесь

$$B_{22} = (b_1 < 0)\ \&\ (b_2 < 0)\ \&\ (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i)\ \&\ B_{221}) \mid ((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0)\ \&\ B_{222})),$$
$$B_{221} = ((0 < b_1 < b_2 < b_1 k_0)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} < W_1^*)) \mid$$
$$((k_0 b_1 < b_2 < 0)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),2})),$$
$$B_{222} = ((b_1 < b_2 < 0)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),2})) \mid$$
$$((b_1 k_0 < b_2 < b_1 < 0)\ \&\ (W_1^* < w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),2})).$$

6.3. Решение системы (5) определяется по формуле Ф3, если $B_{23} = true$. Здесь

$$B_{23} = (b_1 < 0)\ \&\ (b_2 < 0)\ \&\ (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i)\ \&\ B_{231}) \mid ((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0)\ \&\ B_{232})),$$
$$B_{231} = ((b_2 < b_1 < 0)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),1})) \mid$$
$$((b_1 < b_2 < k_0 b_1 < 0)\ \&\ (W_1^* < w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),2})),$$
$$B_{232} = ((b_1 k_0 < b_2 < b_1 < 0)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} < W_1^*)) \mid$$
$$((b_2 < b_1 k_0 < 0)\ \&\ (0 < w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),1})).$$

6.4. Решение системы (5) находится по формуле Ф4, если $B_{24} = true$. Здесь

$$B_{24} = (0 < b_1)\ \&\ (0 < b_2)\ \&\ (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i)\ \&\ B_{241}) \mid (((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0)\ \&\ B_{242})),$$
$$B_{241} = ((0 < b_2 < k_0 b_1)\ \&\ (W_{\partial(2,3),2} < w_{i-1/2} < 0)) \mid$$
$$((k_0 b_1 < b_2 < b_1)\ \&\ (W_1^* < w_{i-1/2} < 0)),$$
$$B_{242} = ((b_1 < b_2 < k_0 b_1)\ \&\ (W_{\partial(2,3),2} \le w_{i-1/2} < W_1^*)) \mid$$
$$((0 < b_2 < b_1)\ \&\ (W_{\partial(2,3),2} < w_{i-1/2} < 0)).$$

7. Область применимости формул Ф5 определяется неравенствами (53). Решение этих неравенств дает следующий результат. Формула Ф5 используется, если либо $b_2 < k_0 b_1 < 0$ и $0 < W_{\partial(2,3),1} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(3,4),1}$,

либо $0 < k_0 b_1 < b_2$ и $W_{\partial(3,4),1} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),1} < 0$,

либо $k_0 b_1 < b_2 < 0$ и $0 < W_{\partial(2,3),2} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(3,4),2}$,

либо $0 < b_2 < k_0 b_1$ и $W_{\partial(3,4),2} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(2,3),2} < 0$.

8. Область применимости формул Ф6 – Ф9 определяется решениями неравенств (57). Решение этих неравенств дает следующие результаты.

8.1. Решение системы (5) находится по формуле Ф6, если $B_{46} = true$. Здесь

$$B_{46} = (0 < b_1)\ \&\ (0 < b_2)\ \&\ (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i)\ \&\ B_{461})\,|\,((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0)\ \&\ B_{462})),$$

$$B_{461} = ((0 < b_1 k_1 < b_1 k_0 < b_2)\ \&\ (W_{\partial(4,5),1} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),1}))\,|$$
$$((0 < b_1 k_1 < b_2 < b_1 k_0)\ \&\ (W_{\partial(4,5),1} \le w_{i-1/2} < W_2^*)),$$

$$B_{462} = ((0 < k_1 b_1 < b_2)\ \&\ (W_{\partial(4,5),1} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),1}))\,|$$
$$((0 < k_0 b_1 < b_2 < b_1 k_1)\ \&\ (W_2^* \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),1})).$$

8.2. Решение системы (5) вычисляется по формуле Ф7, если $B_{47} = true$. Здесь

$$B_{47} = (b_1 < 0)\ \&\ (b_2 < 0)\ \&\ (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i)\ \&\ B_{471})\,|\,((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0)\ \&\ B_{472})),$$

$$B_{471} = ((k_1 b_1 < b_2 < 0)\ \&\ (W_{\partial(3,4),2} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),2}))\,|$$
$$((b_1 k_0 < b_2 < b_1 k_1 < 0)\ \&\ (W_{\partial(3,4),2} < w_{i-1/2} \le W_2^*)),$$

$$B_{472} = ((k_0 b_1 < b_2 < 0)\ \&\ (W_{\partial(3,4),2} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),2}))\,|$$
$$((k_1 b_1 < b_2 < k_0 b_1 < 0)\ \&\ (W_2^* < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),2}))$$

8.3. Решение системы (5) определяется по формуле Ф8, если $B_{48} = true$. Здесь

$$B_{48} = (b_1 < 0)\ \&\ (b_2 < 0)\ \&\ (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i)\ \&\ B_{481})\,|\,((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0)\ \&\ B_{482})),$$

$$B_{481} = ((b_2 < k_0 b_1 < 0)\ \&\ (W_{\partial(3,4),1} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),1}))\,|$$
$$((k_0 b_1 < b_2 < k_1 b_1 < 0)\ \&\ (W_2^* < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),1})),$$

$B_{482} = ((b_2 < k_1 b_1 < 0) \,\&\, (W_{\partial(3,4),1} < w_{i-1/2} \le W_{\partial(4,5),1}))\,|$

$((k_1 b_1 < b_2 < k_0 b_1 < 0) \,\&\, (W_{\partial(3,4),1} < w_{i-1/2} \le W_2^*))$.

8.4. Решение системы (5) находится по формуле Ф9, если $B_{49} = true$. Здесь

$B_{49} = (0 < b_1) \,\&\, (0 < b_2) \,\&\, (((0 < \gamma_{i-1} + \gamma_i) \,\&\, B_{491})\,|\,((\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0) \,\&\, B_{492}))$,

$B_{491} = ((0 < b_2 < k_1 b_1) \,\&\, (W_{\partial(4,5),2} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),2}))\,|$

$((0 < b_1 k_1 < b_2 < b_1 k_0) \,\&\, (W_2^* \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),2}))$,

$B_{492} = ((0 < b_2 < k_0 b_1) \,\&\, (W_{\partial(4,5),2} \le w_{i-1/2} < W_{\partial(3,4),2}))\,|$

$((0 < b_1 k_0 < b_2 < b_1 k_1) \,\&\, (W_{\partial(4,5),2} \le w_{i-1/2} < W_2^*))$,

где $W_2^* = (b_2 - b_1)/(\gamma_{i-1} + \gamma_i) - 0.25(2R-1)(b_1 + b_2)$,

$k_1 = (1 - 0.5(\gamma_{i-1} + \gamma_i))(1 + 0.5(\gamma_{i-1} + \gamma_i))^{-1}$.

8.5. Решение системы (5) находится по формуле Ф10, если

либо $b_2 < k_1 b_1 < 0$ и $W_{\partial(4,5),1} < w_{i-1/2}$,

либо $0 < k_1 b_1 < b_2$ и $w_{i-1/2} < W_{\partial(4,5),1}$,

либо $k_1 b_1 < b_2 < 0$ и $W_{\partial(4,5),2} < w_{i-1/2}$,

либо $0 < b_2 < k_1 b_1$ и $w_{i-1/2} < W_{\partial(4,5),2}$.

На рис. 4 схематически изображены области формул Ф1 – Ф10 в R^3 для случаев $\gamma_{i-1} > 0$, $\gamma_i < 0$.

Отметим, что при $\gamma_{i-1} = 0$ формулы (22), (24.1), (24.2), (14), (28), (30.1), (30.2), (18) являются частными случаями формул Ф1, Ф2, Ф4, Ф5, Ф6, Ф7, Ф9, Ф10 соответственно.

Анализ построенных точных решений и условий их применимости показывает, что для любых значений $\gamma_{i-1} \ge 0$, $\gamma_i \le 0$ и любой точки $(b_1, b_2, w_{i-1/2})$ в R^3 построено единственное решение системы уравнений (5). Это решение определяется с помощью соответствующих формул.

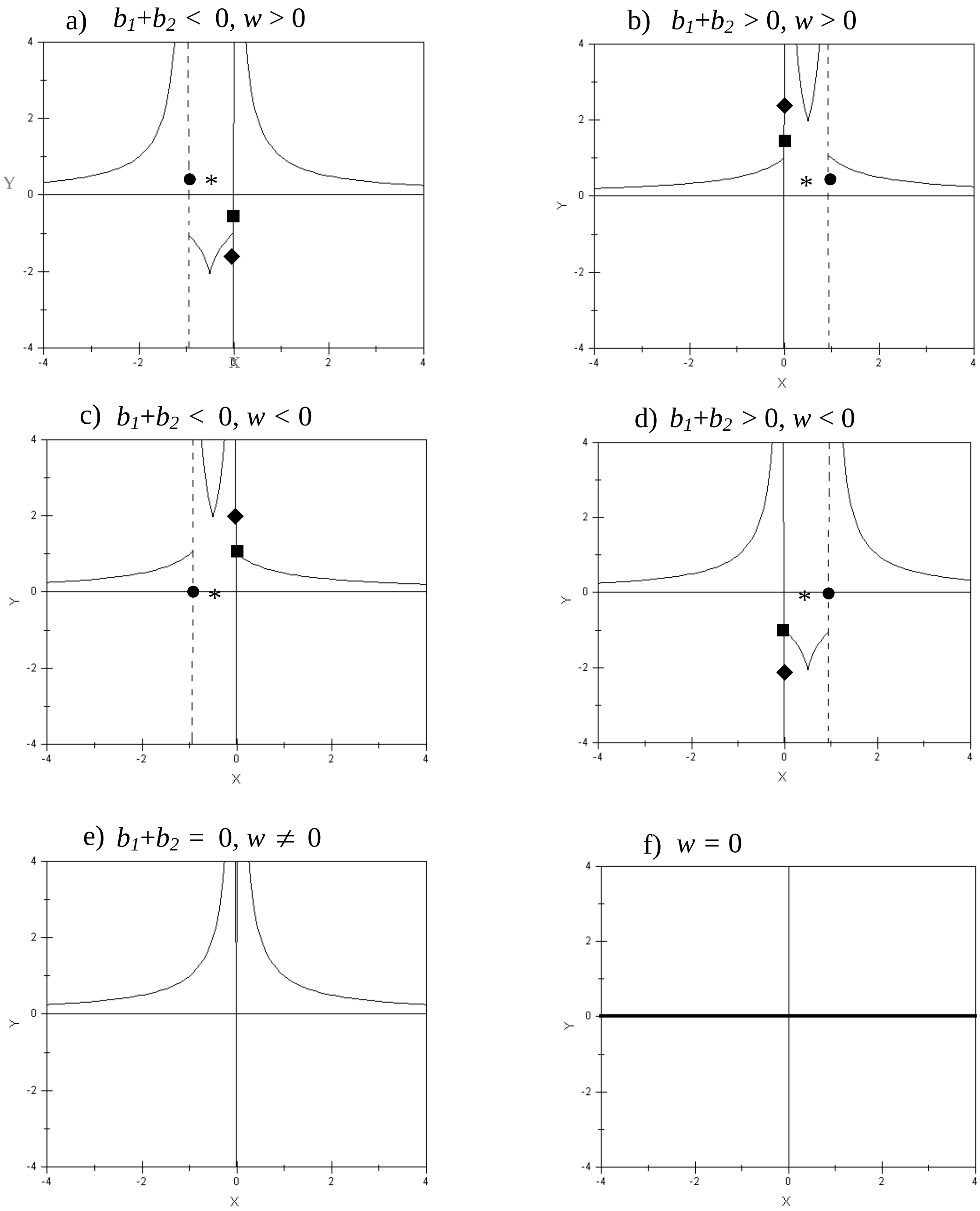
Заключение

В работе показано, что нелинейная монотонизованная разностная схема Бабенко имеет единственное решение. Найдены формулы, определяющие это решение и области их применимости.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность М. П. Галанину за многочисленные полезные советы и обсуждения.

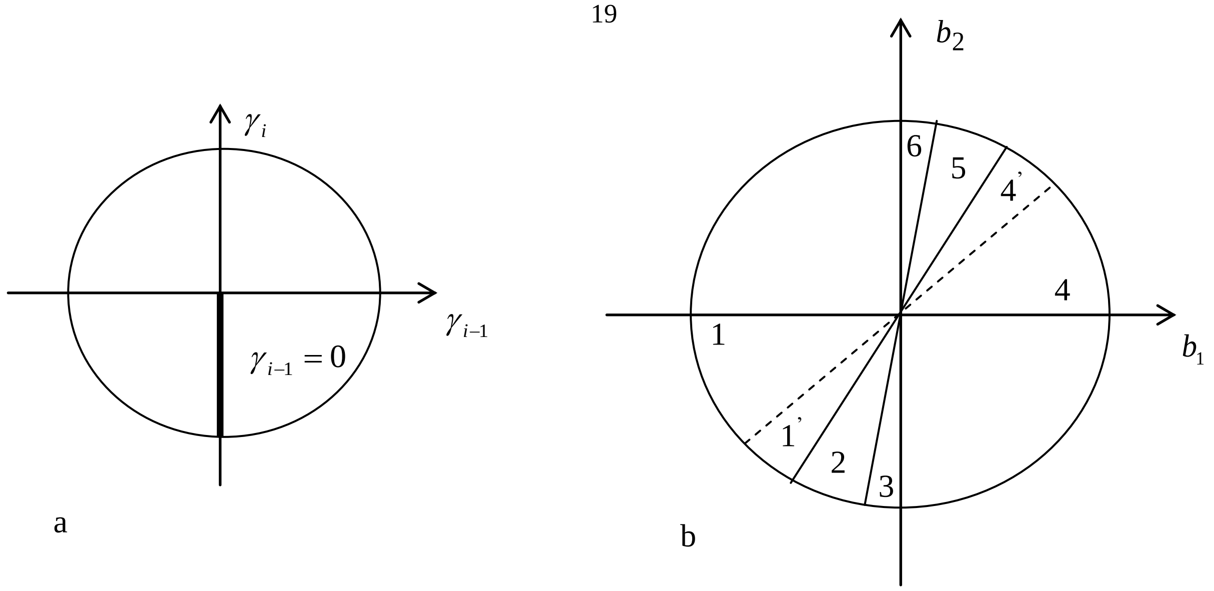
Литература

1. *М. П. Галанин, Т. Г. Еленина.* Нелинейная монотонизация схемы К. И. Бабенко («квадрат») для уравнения переноса. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 4, 2002, 26 с.
2. *К. И. Бабенко, Г. П. Воскресенский.* Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа.// ЖВМиМФ, 1961, т. 1, № 6, с. 1051 - 1060.



* - $x = 0.5(b_1+b_2)$ ■ - $y = w_{i-1/2}/(b_1+b_2)$ ● - $x = b_1+b_2$ ◆ - $y = 2w_{i-1/2}/(b_1+b_2)$

Рис. 1. Зависимость $y = y(x)$ для различных значений параметров $w_{i-1/2}$ и $(b_1 + b_2)$.



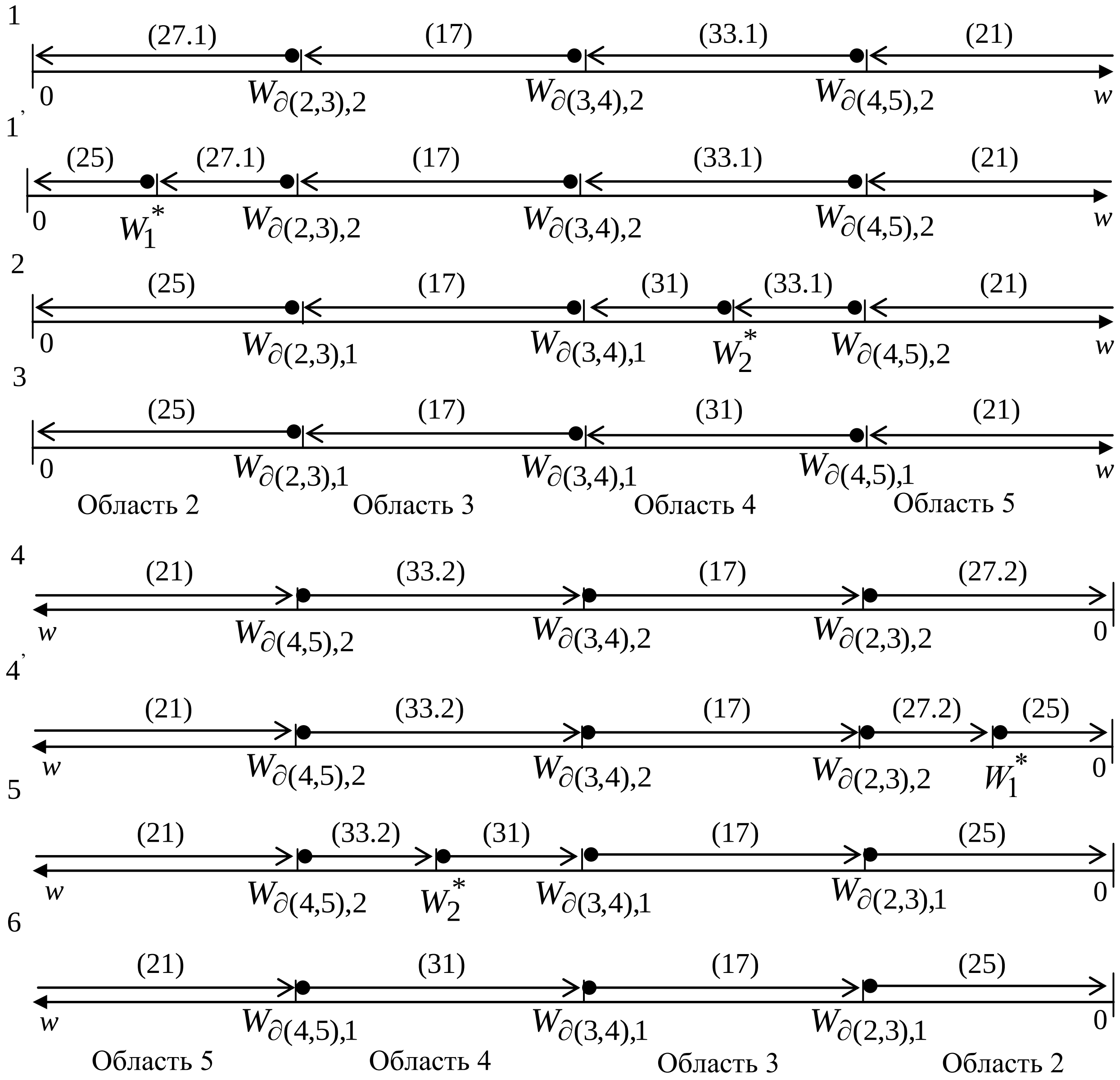
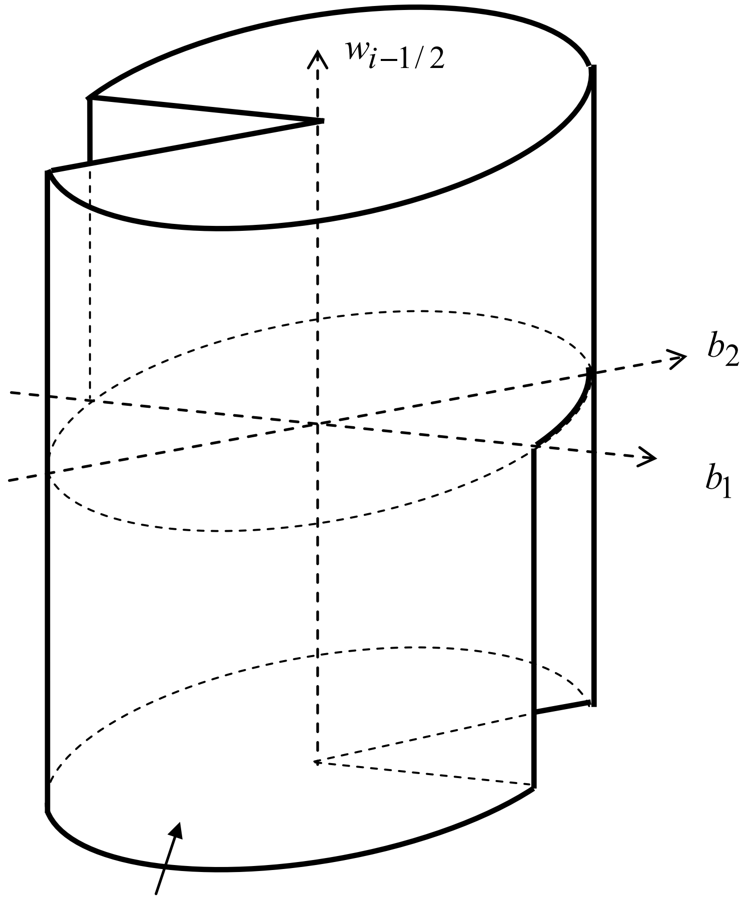
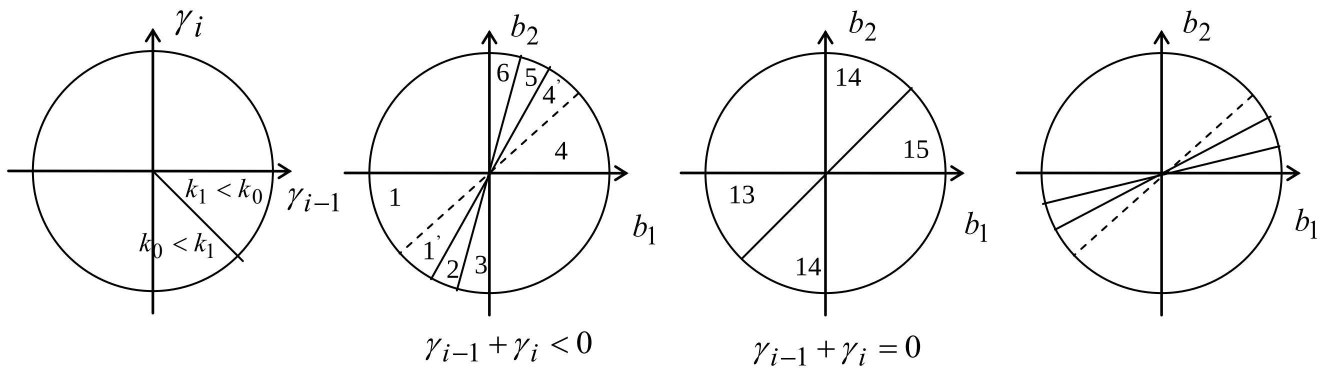


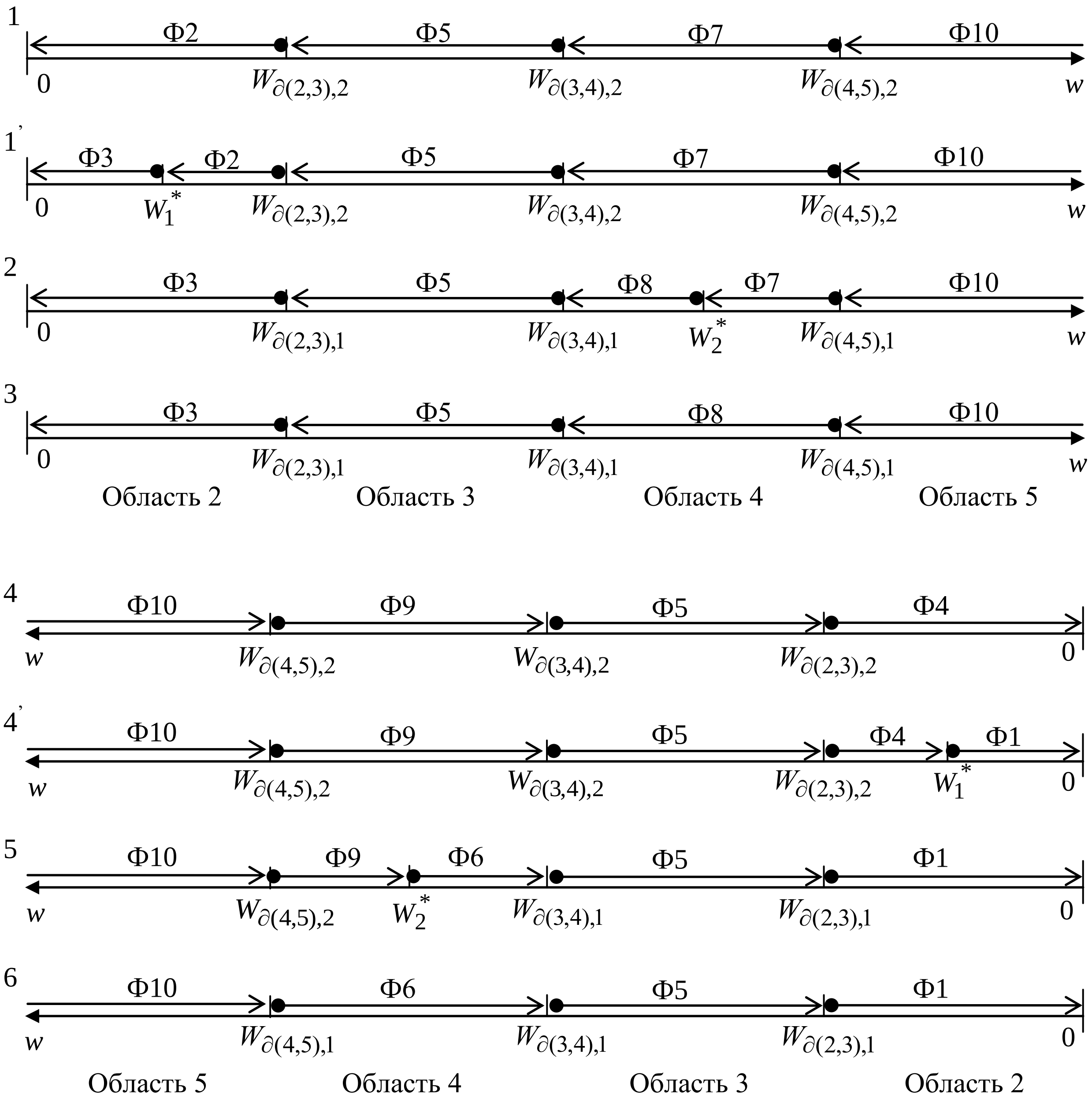
Рис. 2. Номера формул решения (указаны в скобках) в подобластях областей 2 – 5 в R^3 при $\gamma_{i-1} = 0$.



Область 1: $((w_{i-1/2}=0)|(b_1+b_2=0))|$
$((w_{i-1/2}<0)\&((b_1<0)|(b_2<0))|$
$((0<w_{i-1/2})\&((0<b_1)|(0<b_2)))$

Рис. 3. Область 1 в R^3. Вырезанные полуцилиндрические секторы содержат области 2, 3, 4, 5.


γ_i
γ_{i-1}
$k_1 < k_0$
$k_0 < k_1$
b_2
b_1
6
5
4'
4
1
1'
2
3
14
15
13
14
$\gamma_{i-1} + \gamma_i < 0$
$\gamma_{i-1} + \gamma_i = 0$


1
Ф2 Ф5 Ф7 Ф10
0 $W_{\partial(2,3),2}$ $W_{\partial(3,4),2}$ $W_{\partial(4,5),2}$ w
1'
Ф3 Ф2 Ф5 Ф7 Ф10
0 W_1^* $W_{\partial(2,3),2}$ $W_{\partial(3,4),2}$ $W_{\partial(4,5),2}$ w
2
Ф3 Ф5 Ф8 Ф7 Ф10
0 $W_{\partial(2,3),1}$ $W_{\partial(3,4),1}$ W_2^* $W_{\partial(4,5),1}$ w
3
Ф3 Ф5 Ф8 Ф10
0 $W_{\partial(2,3),1}$ $W_{\partial(3,4),1}$ $W_{\partial(4,5),1}$ w
Область 2 Область 3 Область 4 Область 5
4
Ф10 Ф9 Ф5 Ф4
w $W_{\partial(4,5),2}$ $W_{\partial(3,4),2}$ $W_{\partial(2,3),2}$ 0
4'
Ф10 Ф9 Ф5 Ф4 Ф1
w $W_{\partial(4,5),2}$ $W_{\partial(3,4),2}$ $W_{\partial(2,3),2}$ W_1^* 0
5
Ф10 Ф9 Ф6 Ф5 Ф1
w $W_{\partial(4,5),2}$ W_2^* $W_{\partial(3,4),1}$ $W_{\partial(2,3),1}$ 0
6
Ф10 Ф6 Ф5 Ф1
w $W_{\partial(4,5),1}$ $W_{\partial(3,4),1}$ $W_{\partial(2,3),1}$ 0
Область 5 Область 4 Область 3 Область 2

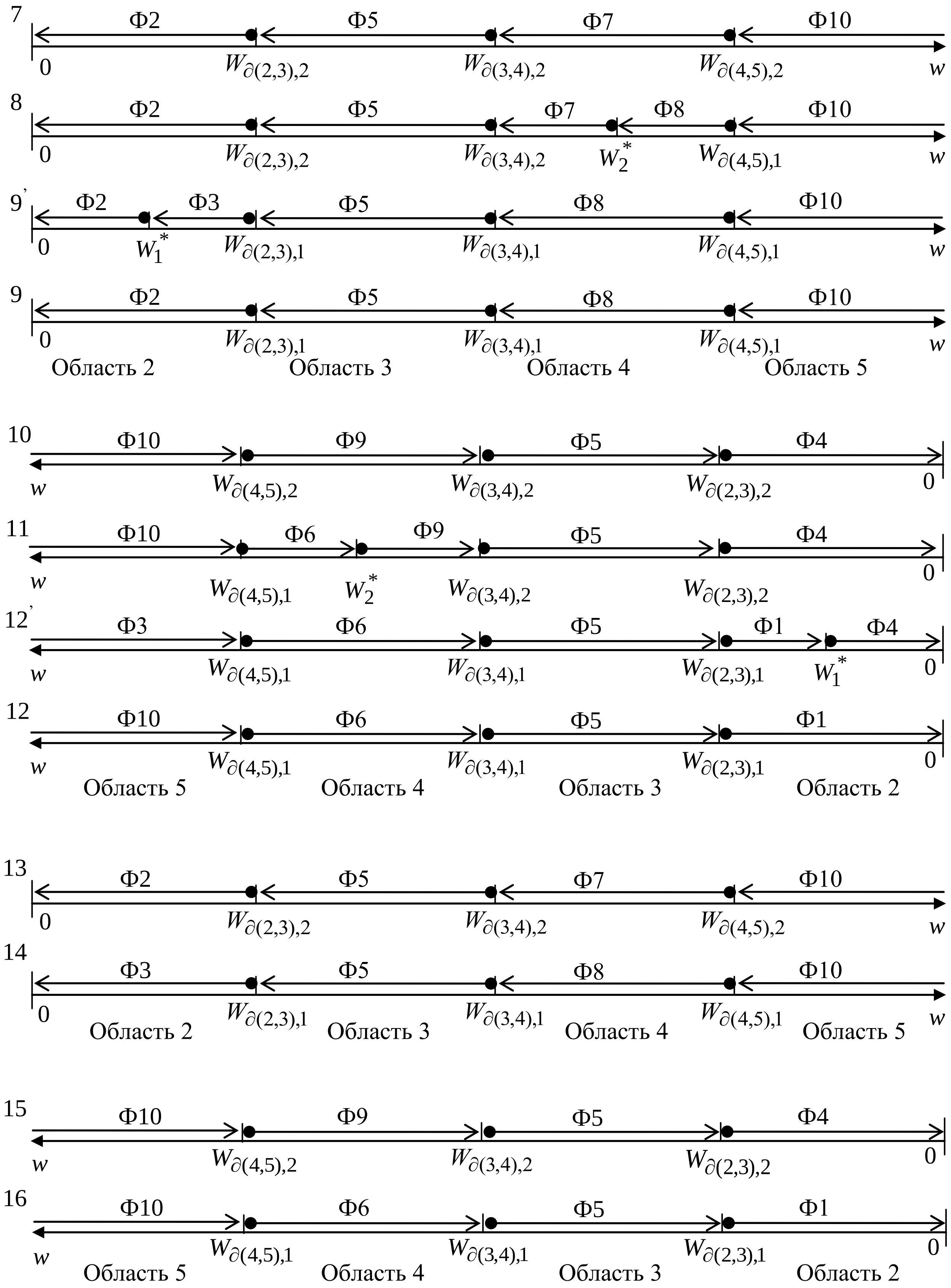


Рис. 4. Номера формул решения (указаны в скобках) в подобластях областей 2 – 5 в R^3 при $\gamma_{i-1} > 0$, $\gamma_i < 0$.