

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША

А.Е.Коробочкин, В.И.Павлов, А.Х.Пергамент

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ
РЕЗОНАТОРОВ С ЗЕРКАЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В
НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ**

Москва
2002

А.Е.Коробочкин, В.И.Павлов, А.Х.Пергамент. *ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕЗОНАТОРОВ С ЗЕРКАЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ.*

В настоящей работе представлен метод расчетов распространения лазерного излучения в неустойчивых резонаторах с отражающими зеркалами, вообще говоря, произвольной формы. Предлагаемый метод основан на переходе к неортогональной системе криволинейных координат, позволяющей адекватно сводить полную волновую краевую задачу к системе эволюционных задач типа нестационарных уравнений Шредингера.

Отличительная особенность предлагаемого метода – отказ от преобразования Сигмена-Сиклаша. Вследствие этого отпадает необходимость в интерполяции поля на малом зеркале на более подробную сетку, что принципиально необходимо для решения уравнения, описывающего распространение излучения после отражения поля от малого зеркала.

В предлагаемой работе для численного решения краевых задач использованы спектральные методы и итерационные процессы.

Основные особенности расчетов неустойчивых резонаторов продемонстрированы на примере телескопического резонатора с цилиндрическими зеркалами, заполненного насыщающейся активной средой.

А.Е.Коробочкин, В.И.Павлов, А.Х.Пергамент. *THE MATHEMATICAL MODELING OF THE LASER BEAM PROPAGATION IN THE UNSTABLE RESONATOR WITH THE MIRRORS OF THE ARBITRARY FORM IN NONORTHOGONAL COORDINAT SYSTEMS.*

The mathematical modeling of the laser beam propagation in the unstable resonator with the mirrors of the arbitrary form is represented in the article. The method considered is based on using the non-orthogonal coordinate systems, which allows the adequate reduction of full wave boundary problem to the system of the evolution Shredinger's equations.

The features of the method described are neglecting from the Siegman-Siclash transformations. As a result it doesn't need to interpolate the field near the back mirror on the detailed grid, that is necessary generally for the solution of the equation describing the radiation propagation after the field reflection from the back mirror.

The spectral methods and iterations have been used for the numerical solution of the boundary problems. The telescope resonator with the cylindrical mirrors has demonstrated the features of the unstable resonators calculations when the active medium has been saturated.

Проблеме распространения лазерного излучения в открытых неустойчивых резонаторах, начиная со статьи Сигмена [1], посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ, основные результаты которых подытожены в известных монографиях [2,3]. Математические модели и основные численные методы изложены в работах [4,5].

В настоящей работе представлен метод расчетов распространения лазерного излучения в неустойчивых резонаторах с отражающими зеркалами, вообще говоря, произвольной формы. Предлагаемый метод основан на переходе к неортогональной системе криволинейных координат, позволяющей адекватно сводить полную волновую краевую задачу к системе эволюционных задач типа нестационарных уравнений Шредингера.

В данной работе проведено четкое разделение особенностей двумерных и трехмерных задач, получаемых из соответствующих уравнений Гельмгольца [6,7]. Важной особенностью полученных эволюционных уравнений является наличие в них членов, характерных для уравнений переноса. Так, в частном, но важном случае телескопического резонатора в уравнении, описывающем распространение излучения от малого зеркала к большому, появляется член переносного типа.

Одна из особенностей предлагаемого метода – отказ от преобразования Сигмена-Сиклаша. Вследствие этого отпадает необходимость в интерполяции поля на малом зеркале на более подробную сетку, что принципиально необходимо для решения уравнения, описывающего распространение излучения после отражения поля от малого зеркала. Поскольку время, затрачиваемое только на интерполяцию, вносит существенный вклад в общее время решения всей задачи, отказ от использования преобразования Сигмена-Сиклаша позволяет существенно увеличить эффективность численного решения.

В предлагаемой работе для численного решения краевых задач использованы спектральные методы [8,9] и итерационные процессы. При численном решении наличие достаточно резких изменений поля в резонаторе приводит к необходимости использования достаточно подробных сеток и проведения значительного числа итераций. Это, в свою очередь, приводит к необходимости точного учета кривизны зеркал.

Основные особенности расчетов неустойчивых резонаторов продемонстрированы на примере телескопического резонатора с цилиндрическими зеркалами, заполненного насыщающейся активной (усиливающей) средой.

Особый интерес представляет численное исследование поля в резонаторе в трехмерном случае. Решение такой задачи требует больших вычислительных ресурсов, которыми обладают многопроцессорные ЭВМ.

1. Рассмотрим открытый оптический резонатор с зеркалами произвольной формы. Поверхности зеркал в декартовой системе координат (x', y', z') описываются соответственно гладкими функциями $z' = f_1(x', y')$ и $z' = f_2(x', y')$, имеющими ограниченные вторые частные производные.

Во внутренней области резонатора электрическое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} + \mathbf{f} \left(|\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

где k - волновой вектор в среде с показателем преломления n_0 , \mathbf{f} - известная функция. Будем рассматривать задачу в специально выбранных неортогональных криволинейных системах координат (x_1, x_2, x_3) , позволяющих адекватно описывать распространение лазерного излучения в резонаторе.

В произвольной системе координат уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^k} \right) + k^2 \mathbf{E} + \mathbf{f} \left(|\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Здесь g_{ik} - метрический тензор, $g = \det(g_{ik})$, $g^{il} g_{lk} = \delta_k^i$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Перейдем от уравнения Гельмгольца к системе эволюционных уравнений типа уравнения Шредингера для медленно меняющихся комплексных амплитуд. Представим поле в виде $\mathbf{E}(x', y', z') = \mathbf{u}(x', y', z') \mathbf{E}(x', y', z')$. Здесь быстроменяющаяся функция $\mathbf{E}(x', y', z')$ - либо фундаментальное решение оператора Гельмгольца, либо решение, адекватно отражающее физический процесс распространения излучения. Тогда из уравнения (2) следует:

$$\mathbf{E} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \right) + 2g^{ik} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^k} + \mathbf{f} \left(|\mathbf{uE}|^2 \right) \mathbf{uE} = 0.$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \right) + \frac{2g^{ik}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^k} + \mathbf{f} \left(|\mathbf{uE}|^2 \right) \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

Для удобства перепишем (3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& g^{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{(\partial x^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{(\partial x^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{(\partial x^3)^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^1 \partial x^2} + \\
& + 2g^{13} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^1 \partial x^3} + 2g^{23} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2 \partial x^3} + (A_{x^1} + B_{x^1}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^1} + (A_{x^2} + B_{x^2}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^2} + \\
& + (A_{x^3} + B_{x^3}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^3} + \mathbf{f} \left(|\mathbf{uE}|^2 \right) \mathbf{u} = 0. \tag{4}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_{x^1} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (g^{11} \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (g^{12} \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^3} (g^{13} \sqrt{g}) + \right] \equiv \\
& \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{1i} \sqrt{g}), \\
A_{x^2} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (g^{21} \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (g^{22} \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^3} (g^{23} \sqrt{g}) + \right] \equiv \\
& \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{2i} \sqrt{g}), \\
A_{x^3} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (g^{31} \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (g^{32} \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^3} (g^{33} \sqrt{g}) + \right] \equiv \\
& \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{3i} \sqrt{g}), \\
B_{x^1} &= 2 \left(\frac{g^{11}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^1} + \frac{g^{12}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{g^{13}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^3} \right) \equiv \frac{2g^{1i}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i}, \\
B_{x^2} &= 2 \left(\frac{g^{21}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^1} + \frac{g^{22}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{g^{23}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^3} \right) \equiv \frac{2g^{2i}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i}, \\
B_{x^3} &= 2 \left(\frac{g^{31}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^1} + \frac{g^{32}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{g^{33}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^3} \right) \equiv \frac{2g^{3i}}{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i}. \tag{5}
\end{aligned}$$

2. Выпишем условия отражения излучения на зеркалах резонатора, т.е. найдем связь между фазой и амплитудой падающей волны и волны отраженной. Полагаем, что поверхность \mathbf{S} является гладкой и идеально проводящей. Тогда суммарное электрическое поле \mathbf{E} удовлетворяет на поверхности условию для тангенциальных составляющих: $\mathbf{E}_\tau|_S = -\pi$. Опуская постоянный скачок фазы, получаем соотношение, связывающее падающую \mathbf{E}_1 и отраженную \mathbf{E}_2 волны:

$$\mathbf{E}_{1\tau}|_S + \mathbf{E}_{2\tau}|_S = 0. \quad (6)$$

Пусть электрическое поле \mathbf{E}_1 излучения, падающего на отражающую поверхность \mathbf{S} , описывается в координатах (x_1, x_2, x_3) . Тогда:

$$\mathbf{E}_1(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}_1(x_1, x_2, x_3) \mathbf{E}_1(x_1, x_2, x_3).$$

Здесь \mathbf{E}_1 - либо фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, описывающее падающую на поверхность \mathbf{S} волну, либо решение, адекватно отражающее физический процесс распространения излучения.

Электрическое поле \mathbf{E}_2 излучения, отраженного от поверхности зеркала, описывается в других координатах, а именно (y_1, y_2, y_3) имеет вид:

$$\mathbf{E}_2(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{u}_2(y_1, y_2, y_3) \mathbf{E}_2(y_1, y_2, y_3).$$

Здесь \mathbf{E}_2 - либо фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, описывающее отраженную от поверхности \mathbf{S} волну, либо решение, адекватно отражающее физический процесс.

Тогда из соотношения (6) следует:

$$u_{1\tau}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{E}_1(x_1, x_2, x_3)|_S + u_{2\tau}(y_1, y_2, y_3) \mathbf{E}_2(y_1, y_2, y_3)|_S = 0.$$

Окончательно:

$$u_{2\tau}(y_1, y_2, y_3)|_S = -u_{1\tau}(x_1, x_2, x_3)|_S \frac{\mathbf{E}_1(x_1, x_2, x_3)}{\mathbf{E}_2(y_1, y_2, y_3)}. \quad (7)$$

3. Продемонстрируем предлагаемый подход на примере пустого (т.е. $\mathbf{f} = 0$) открытого конфокального (телескопического) неустойчивого

резонатора со сферическими зеркалами квадратной формы, работающего в режиме лазерного генератора. Радиус малого зеркала равен r_1 , радиус большого зеркала равен r_2 . Фокусное расстояние малого зеркала равно d_1 , фокусное расстояние большого зеркала равно d_2 . Расстояние между зеркалами равно $L = d_2 - d_1$. Сторона квадрата малого зеркала равна $2a$. Считаем сторону квадрата большого зеркала достаточно большой, чтобы не учитывать ее размеры.

Выберем начало координат в точке фокуса зеркал конфокального неустойчивого резонатора. Примем за ось z' оптическую ось резонатора. Положительное направление оси z' - направление от малого зеркала к большому зеркалу.

В процессе численного исследования распространения лазерных пучков в открытом неустойчивом резонаторе мы рассматриваем задачу, естественно, в ограниченной области, как по оси $X' : [-L_x \leq x' \leq L_x]$, так и по оси $Y' : [-L_y \leq y' \leq L_y]$. Достаточно большие размеры большого зеркала резонатора позволяют, существенно не усложняя математическую постановку задачи, поставить граничные условия именно там, где это необходимо для адекватного описания физического процесса распространения излучения в резонаторе.

В системе декартовых координат (x', y', z') , функция $f_1(x', y')$, определенная в области $[-a \leq x' \leq a] \times [-a \leq y' \leq a]$ и описывающая сферическую поверхность малого зеркала имеет вид:

$$f_1(x', y') = -(r_1 - d_1) + \sqrt{r_1^2 - (x')^2 - (y')^2}.$$

Используя это определение, продолжим функцию $f_1(x', y')$ на область $[-L_x \leq x' \leq L_x] \times [-L_y \leq y' \leq L_y]$. Поскольку резонатор телескопический, функция $f_2(x', y')$, описывающая поверхность большого зеркала имеет вид:

$$f_2(x', y') = -(r_2 - d_2) + \sqrt{r_2^2 - (x')^2 - (y')^2}.$$

Выберем такую систему криволинейных координат (x, y, z) , в которой функция $f_1(x', y')$ переходит в плоскость $z = d_1$, а функция $f_2(x', y')$ в плоскость $z = d_2$. Искомой системой криволинейных координат является:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = zQ(x, y) + F(x, y), \end{cases}$$

где $Q(x, y) = \frac{[f_2(x, y) - f_1(x, y)]}{L}$, $F(x, y) = f_1(x, y) - d_1 Q(x, y)$.

Поле \mathbf{E} в резонаторе представим в виде:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_1(x, y, z) + \mathbf{E}_2(x, y, z),$$

где поле \mathbf{E}_1 - распространяется от малого зеркала к большому зеркалу (нечетный проход излучения в резонаторе), а \mathbf{E}_2 - от большого зеркала к малому (четный проход излучения в резонаторе). Построим решения уравнения Гельмгольца для четного и нечетного проходов излучения независимо.

3.1 Нечетные проходы.

Пусть источник отраженной от малого зеркала сферической волны находится в начале координат. Представим поле $\mathbf{E}_1(x', y', z')$ в виде: $\mathbf{E}_1(x', y', z') = \mathbf{u}_1(x', y', z') \mathbf{E}_1(x', y', z')$, где $\mathbf{E}_1(x', y', z')$ - фундаментальное решение оператора Гельмгольца [6,7]:

$$\mathbf{E}_1(x', y', z') = -\frac{\exp(ikR)}{4\pi R}.$$

Здесь $R = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$.

Компоненты тензора g^{ik} в координатах (x, y, z) равны:

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad g^{13} = -\frac{1}{Q(x, y)} \left(z \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right),$$

$$g^{22} = 1, \quad g^{23} = -\frac{1}{Q(x, y)} \left(z \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right),$$

$$g^{33} = \frac{1}{Q(x, y)^2} \left[1 + \left(z \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(z \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Определитель g матрицы метрического тензора g_{ik} :

$g = Q(x, y)^2$. Следовательно, согласно (5) имеем: $A_x = 0$, $A_y = 0$,

$$A_z = -\frac{1}{Q(x, y)} \left[z \left(\frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right) \right] +$$

$$+\frac{2}{Q(x, y)^2} \left[z \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right] +$$

$$+\frac{2}{Q(x, y)^2} \left[z \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right],$$

$$B_x = \frac{2ikx}{R} - \frac{2x}{R^2}, \quad B_y = \frac{2iky}{R} - \frac{2y}{R^2},$$

$$B_z = \frac{2(ikR - 1)(zQ(x, y) + F(x, y))}{R^2} -$$

$$-\frac{2(ikR - 1)}{R^2} \left(zx \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} + x \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right) -$$

$$-\frac{2(ikR - 1)}{R^2} \left(zy \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} + y \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right).$$

Таким образом, в выбранной системе криволинейных координат (x, y, z) уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial y^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial z^2} + 2g^{13} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x \partial z} + 2g^{23} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial y \partial z} +$$

$$+ B_x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + B_y \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} + (A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Выбор краевых условий зависит от специфики задачи. Среди возможных краевых условий следует отметить условия излучения, условие

равенства нулю поля \mathbf{E} на достаточно больших расстояниях от оптической оси резонатора:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = 0, \text{ при } |x| > \eta_x, |y| > \eta_y.$$

Иногда выбор конкретного краевого условия является разумным компромиссом между условиями, навязываемыми, с одной стороны физической постановкой задачи, с другой стороны – методом ее численного решения. К таким граничным условиям можно отнести периодические граничные условия, довольно часто возникающие при использовании спектральных методов для построения алгоритмов численного решения задачи.

Начальное условие получаем из граничных соотношений (7):

$$\mathbf{u}_1(x, y, z = d_1) = \xi_1(x, y)\mathbf{u}_2(x, y, z = d_1)4\pi R(x, y, d_1) \cdot \exp\left[-ik\left(f_1 + \sqrt{f_1^2 + x^2 + y^2}\right)\right].$$

Здесь $\xi_1(x, y)$ - коэффициент отражения от малого зеркала.

В довольно широком классе задач расчета распространения излучения в неустойчивых резонаторах выполняются условия квазиоптического приближения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x', y', z')}{\partial z'} \ll k\mathbf{u}(x', y', z'), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x', y', z')}{\partial z'^2} \ll k \frac{\partial \mathbf{u}(x', y', z')}{\partial z'},$$

или в криволинейной системе координат (x, y, z) :

$$\frac{1}{Q(x, y)} \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, z)}{\partial z} \ll k\mathbf{u}(x, y, z), \quad \frac{1}{Q(x, y, z)^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, z)}{\partial z}. \quad (9)$$

Следовательно, учитывая условие (9), переходим от уравнения (8) к уравнению:

$$-(A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial y^2} + B_x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + B_y \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y}. \quad (10)$$

3.2 Четные проходы.

Поскольку резонатор телескопический, т.е. волна, отраженная от большого зеркала близка к плоской волне, естественно использовать решение оператора Гельмгольца в виде [6]:

$$\mathbf{E}_2(x', y', z') = \exp(-ikz') .$$

Тогда, согласно (5) имеем: $A_x = 0$, $A_y = 0$,

$$\begin{aligned} A_z = & -\frac{1}{Q(x, y)} \left[z \left(\frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right) \right] + \\ & + \frac{2}{Q(x, y)^2} \left[z \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{2}{Q(x, y)^2} \left[z \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right], \\ B_x = & 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = -\frac{2ik}{Q(x, y)} . \end{aligned}$$

Таким образом, в выбранной системе криволинейных координат уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial y^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial z^2} + 2g^{13} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x \partial z} + 2g^{23} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial y \partial z} + (A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} = 0 . \quad (11)$$

Если выполняются условия (9), переходим в уравнении (11) к квазиоптическому приближению:

$$-(A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial y^2} . \quad (12)$$

Обсуждение краевых условий приведено выше. Начальное условие:

$$\mathbf{u}_2(x, y, z = d_2) = \frac{\xi_2(x, y)}{4\pi R(x, y, d_2)} \cdot \mathbf{u}_1(x, y, z = d_2) \exp\left[ik\left(f_2 + \sqrt{f_2^2 + x^2 + y^2}\right)\right].$$

Здесь $\xi_2(x, y)$ - коэффициент отражения от большого зеркала.

4. Перейдем к рассмотрению двумерной задачи. Постановка двумерной задачи имеет ряд отличительных особенностей. Переход от трехмерного к двумерному случаю предполагает, что в трехмерном случае зеркала резонатора есть бесконечные цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси Y' : $(-\infty < y < +\infty)$. Поэтому зеркала резонатора в двумерном случае есть сечения бесконечных цилиндрических поверхностей произвольной плоскостью $y' = const$. На секущей плоскости $y' = const$ выберем систему координат. Поскольку резонатор телескопический удобно выбрать начало координат в точке фокуса зеркал резонатора. Примем за ось z' оптическую ось резонатора. Положительное направление оси z' - направление от малого зеркала к большому зеркалу.

При численном исследовании распространения лазерных пучков в открытом неустойчивом резонаторе мы рассматриваем задачу, естественно, в ограниченной области по оси X' : $[-L_x \leq x' \leq L_x]$. Достаточно большие размеры большого зеркала резонатора позволяют поставить граничные условия именно там, где это необходимо для адекватного описания физического процесса распространения излучения в резонаторе.

В системе декартовых координат (x', z') , функция $f_1(x')$, определенная в области $[-a \leq x' \leq a]$ и описывающая поверхность малого зеркала имеет вид:

$$f_1(x') = -(r_1 - d_1) + \sqrt{r_1^2 - (x')^2}.$$

Используя это выражение, продолжим функцию $f_1(x')$ на область $[-L_x \leq x \leq L_x]$. Поскольку резонатор телескопический, функция $f_2(x')$, описывающая поверхность большого зеркала имеет вид:

$$f_2(x') = -(r_2 - d_2) + \sqrt{r_2^2 - (x')^2}.$$

Выберем такую систему криволинейных координат (x, z) , в которой функция $f_1(x')$ переходит в плоскость $z = d_1$, а функция $f_2(x')$ в плоскость $z = d_2$. Искомой системой криволинейных координат является:

$$\begin{cases} x' = x \\ z' = zQ(x) + F(x), \end{cases}$$

$$\text{где } Q(x) = \frac{[f_2(x) - f_1(x)]}{L}, \quad F(x) = f_1(x) - d_1Q(x).$$

Аналогично методу, изложенному для трехмерного случая, поле в резонаторе представим в виде:

$$\mathbf{E}(x', z') = \mathbf{E}_1(x', z') + \mathbf{E}_2(x', z').$$

Здесь поле \mathbf{E}_1 распространяется от малого зеркала к большому зеркалу (нечетный проход), а \mathbf{E}_2 - от большого зеркала к малому (четный проход).

4.1 Нечетные проходы.

Источник цилиндрической волны, отраженной от малого зеркала представляет собой однородный линейный источник, простирающийся от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль оси y .

Представим $\mathbf{E}_1(x', z')$ в виде $\mathbf{E}_1(x', z') = \mathbf{u}_1(x', z')\mathbf{E}_1(x', z')$, где $\mathbf{E}_1(x', z')$ - фундаментальное решение двумерного оператора Гельмгольца [6]:

$$\mathbf{E}_1(x', z') = -\frac{i}{4} H_0^1(kR).$$

Здесь H_0^1 - функция Ханкеля первого рода, $R = \sqrt{(x')^2 + (z')^2}$.

Компоненты тензора g^{ik} в координатах (x, z) равны:

$$g^{11} = 1,$$

$$g^{12} = -\frac{1}{Q(x)} \left(z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right),$$

$$g^{21} = -\frac{1}{Q(x)} \left(z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right),$$

$$g^{22} = \frac{1}{Q(x)^2} \left[1 + \left(z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Определитель g матрицы метрического тензора g_{ik} : $g = Q(x)^2$.
Следовательно, согласно (5) имеем: $A_x = 0$,

$$A_z = -\frac{1}{Q(x)} \left[z \frac{\partial^2 Q(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \right] +$$

$$+ \frac{2}{Q(x)^2} \left[z \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right],$$

$$B_x = \frac{1}{H_0^1(kR)} \frac{\partial H_0^1(kR)}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{Q(x) H_0^1(kR)} \left(z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial H_0^1(kR)}{\partial z}, \quad (13)$$

$$B_z = -\frac{1}{Q(x) H_0^1(kR)} \left(z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial H_0^1(kR)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{Q(x) H_0^1(kR)} \left(1 + \left(z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial H_0^1(kR)}{\partial z}. \quad (14)$$

Таким образом, в выбранной системе криволинейных координат уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial z^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x \partial z} + B_x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + (A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

Так как переменные z' и z связаны соотношением $z' = zQ(x) + F(x)$, необходимо выразить функции B_x и B_z только в переменных (x, z) .

Переходя к квазиоптическому приближению в уравнении (15) получаем:

$$-(A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x^2} + B_x \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}. \quad (16)$$

Выбор краевых условий обсужден выше. Начальное условие получаем из соотношений типа (7):

$$\mathbf{u}_1(x, z = d_1) = -\xi_1(x) \mathbf{u}_2(x, z = d_1) \frac{4i}{H_0^1(kR)} \exp(-ikf_1).$$

Здесь $\xi_1(x)$ - коэффициент отражения от малого зеркала.

4.2 Четные проходы.

Поскольку резонатор телескопический, т.е. волна, отраженная от большого зеркала близка к плоской волне, простирающейся вдоль оси u от $-\infty$ до $+\infty$, естественно использовать решение оператора Гельмгольца в виде:

$$E_2(x', z') = \exp(-ikz').$$

Следовательно, согласно (5) имеем: $A_x = 0$,

$$A_z = -\frac{1}{Q(x)} \left[z \frac{\partial^2 Q(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \right] + \frac{2}{Q(x)^2} \left[z \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right],$$

$$B_x = 0, B_z = -\frac{2ik}{Q(x)}.$$

Таким образом, в выбранной системе координат уравнение (4) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial z^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x \partial z} + (A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} = 0 . \quad (17)$$

Переход в уравнении (17) к квазиоптическому приближению приводит к уравнению:

$$-(A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x^2} . \quad (18)$$

Выбор краевых условий обсужден выше. Начальное условие:

$$\mathbf{u}_2(x, z = d_2) = \xi_2(x) \frac{i\mathbf{u}_1(x, z = d_2)}{4} H_0^1(kR) \exp(ikf_2) .$$

Здесь ξ_2 - коэффициент отражения от большого зеркала.

5. Рассмотрим математическую модель распространения лазерного излучения в генераторе на базе неустойчивого телескопического резонатора, заполненного активной нелинейной средой. Используем широко известную модель Ригрода [10] для описания усиливающей (активной) среды. Эффективный коэффициент усиления k_{amp} в этой модели представляется в виде:

$$k_{amp} = \frac{\beta}{1 + I_1 + I_2} - \alpha ,$$

где β - коэффициент усиления слабого поля, α - коэффициент линейных потерь, I_1 - приведенная интенсивность поля нечетного прохода, I_2 - приведенная интенсивность поля четного прохода.

Тогда процесс распространения лазерного излучения описывается системой нелинейных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд \mathbf{u} и \mathbf{v} : \mathbf{u} - нечетный проход излучения, \mathbf{v} - четный проход излучения.

5.1 В трехмерном случае с учетом эффективного коэффициента усиления активной среды имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
-\left(A_z + B_z^{odd}\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + B_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\alpha \mathbf{u}}{4} - \\
&\quad - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{u}}{1 + \frac{abs(u\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(v\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right), \\
-\left(A_z + B_z^{even}\right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\alpha \mathbf{v}}{4} - \\
&\quad - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{v}}{1 + \frac{abs(u\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(v\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right).
\end{aligned}$$

Условие отражения от малого зеркала:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, y, z = d_1) &= \xi_1(x, y) \mathbf{v}(x, y, z = d_1) 4\pi R(x, y, d_1) \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left[-ik\left(f_1 + \sqrt{f_1^2 + x^2 + y^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Условие отражения от большого зеркала:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(x, y, z = d_2) &= \xi_2(x, y) \frac{\mathbf{u}(x, y, z = d_2)}{4\pi R(x, y, d_2)} \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left[ik\left(f_2 + \sqrt{f_2^2 + x^2 + y^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Здесь α - коэффициент поглощения, β - коэффициент усиления слабого поля, J_H - интенсивность насыщения.

5.2 В двумерном случае имеем систему уравнений:

$$-\left(A_z + B_z^{odd}\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + B_x^{odd} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\alpha \mathbf{u}}{4} -$$

$$-\frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{u}}{1 + \frac{abs(u\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(v\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right), \quad (19)$$

$$-(A_z + B_z^{even}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\alpha \mathbf{v}}{4} - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{v}}{1 + \frac{abs(u\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(v\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right). \quad (20)$$

Условие отражения от малого зеркала:

$$\mathbf{u}(x, z = d_1) = -\xi_1(x) \mathbf{v}(x, z = d_1) \frac{4i}{H_0^1(kR)} \exp(-ikf_1).$$

Условие отражения от большого зеркала:

$$\mathbf{v}(x, z = d_2) = \xi_2(x) \mathbf{u}(x, z = d_2) \frac{iH_0^1(kR)}{4} \exp(ikf_2).$$

6. Рассмотрим подробнее двумерный случай. Коэффициенты B_x^{odd} и B_z^{odd} в уравнении (15) зависят согласно (13), (14) как от функции Ханкеля, так и от ее производных, что создает определенные неудобства при численном исследовании задачи распространения лазерного излучения в резонаторе. Воспользуемся приближенной формулой [11]:

$$H_0^1(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \exp \left[i \left(\rho - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(0, m)}{(-2i\pi\rho)} + O(\rho^{-p}) \right], \quad (21)$$

где :

$$(n, m) = \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9) \dots [4n^2 - (2m - 1)^2]}{2^{2m} m!}.$$

Ограничимся тремя членами в разложении (21):

$$H_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} \exp\left[i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)\right] \left(1 - \frac{i}{8kR} - \frac{9}{128k^2 R^2}\right). \quad (22)$$

Подставляя (22) в выражения для коэффициентов B_x^{odd} и B_z^{odd} , получаем:

$$B_x^{odd} = \left(\frac{\partial R(x, z')}{\partial x} Q(x) - z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \frac{\partial R(x, z')}{\partial z} - \frac{\partial F(x)}{\partial x} \frac{\partial R(x, z')}{\partial z} \right) \cdot \frac{256ik^3 R(x, z')^3 - 96k^2 R(x, z')^2 + 30ikR(x, z') + 45}{Q(x)R(x, z')\left(128k^2 R(x, z')^2 - 16ikR(x, z') - 9\right)},$$

$$B_z^{odd} = \left(-zQ(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \frac{\partial R(x, z')}{\partial x} - zQ(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x} \frac{\partial R(x, z')}{\partial x} + \right. \\ \left. + z^2 \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial R(x, z')}{\partial x} + 2z \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x)}{\partial x} \frac{\partial R(x, z')}{\partial z} + \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial R(x, z')}{\partial z} + \frac{\partial R(x, z')}{\partial z} \right) \cdot \frac{-96k^2 R(x, z')^2 + 30ikR(x, z') + 45 + 256ik^3 R(x, z')^3}{Q(x)^2 R(x, z')\left(128k^2 R(x, z')^2 - 16ikR(x, z') - 9\right)}.$$

Представим уравнения (19) и (20) в виде, удобном для численного решения. Поскольку справедливы соотношения:

$$\frac{B_z^{odd}}{2ik} = \frac{z}{R} + O\left(\frac{x^2}{Rr_1}\right), \quad \frac{B_z^{even}}{2ik} = -1 + O\left(\frac{x^2}{r_1^2}\right),$$

после тождественных преобразований уравнения (19), (20) перепишем следующим образом:

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{2ik} \left(B_x^{odd} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-1 + \frac{B_z^{odd}}{2ik} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{A_z}{2ik} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\alpha \mathbf{u}}{4} - \\
& - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{u}}{1 + \frac{abs(\mathbf{u}\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(\mathbf{v}\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right), \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \left[\frac{A_z}{2ik} + \left(1 + \frac{B_z^{even}}{2ik} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\alpha \mathbf{v}}{4} - \\
& - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{v}}{1 + \frac{abs(\mathbf{u}\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(\mathbf{v}\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right).
\end{aligned}$$

Введем безразмерные переменные: $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\tilde{z} = \frac{z - d_1}{L}$.

В переменных (\tilde{x}, \tilde{z}) уравнение для нечетного прохода:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{i}{4\pi N_F} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{L}{2ik} \left(B_x^{odd} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{x}} \right) + \\
& + \left(-1 + \frac{B_z^{odd}}{2ik} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{z}} + \frac{A_z}{2ik} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\alpha \mathbf{u}}{4} - \\
& - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{u}}{1 + \frac{abs(\mathbf{u}\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(\mathbf{v}\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right).
\end{aligned}$$

Уравнение для четного прохода:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{i}{4\pi N_F} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \left[\frac{A_z}{2ik} + \left(1 + \frac{B_z^{even}}{2ik} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\alpha \mathbf{v}}{4} - \frac{\beta}{4} \left(\frac{\mathbf{v}}{1 + \frac{abs(\mathbf{u}\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(\mathbf{v}\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right).$$

По переменной \tilde{x} применяем преобразование Фурье. Для нечетного прохода получаем:

$$-\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \tilde{z}} = \frac{i\lambda_k^2 \mathbf{u}_k}{4\pi N_F} + \frac{\lambda_k L}{2k} (B_x^{odd} \mathbf{u})_k - \frac{L}{2ik} \left(\mathbf{u} \frac{\partial B_x^{odd}}{\partial \tilde{x}} \right)_k + \left[\left(-1 + \frac{B_z^{odd}}{2ik} + \frac{A_z}{2ik} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{z}} \right]_k + \frac{\alpha L \mathbf{u}_k}{4} - \frac{\beta L}{4} \left(\frac{\mathbf{v}}{1 + \frac{abs(\mathbf{u}\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(\mathbf{u}\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right)_k.$$

Для четного прохода имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \tilde{z}} = \frac{i\lambda_k^2 \mathbf{v}_k}{4\pi N_F} + \left[\left(\frac{A_z}{2ik} + \left(1 + \frac{B_z^{even}}{2ik} \right) \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{z}} \right]_k + \frac{\alpha L \mathbf{v}_k}{4} - \frac{\beta L}{4} \left(\frac{\mathbf{v}}{1 + \frac{abs(\mathbf{u}\mathbf{E}_1)^2}{J_H} + \frac{abs(\mathbf{v}\mathbf{E}_2)^2}{J_H}} \right)_k.$$

Здесь нижним индексом k обозначены соответствующие Фурье компоненты функций, например, \mathbf{u}_k , \mathbf{v}_k , $(\dots)_k$ и т.д.

По переменной \tilde{z} применяем схему Кранка-Николсона [12] с итерациями. Для нечетного прохода:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{\Delta z} - \frac{i\lambda_k^2}{8\pi N_F} - \frac{\alpha L}{4} \right) u_k^{s+1} &= \left(-\frac{1}{\Delta z} + \frac{i\lambda_k^2}{8\pi N_F} + \frac{\alpha L}{4} \right) u_k^n + \\
&+ \frac{i\lambda_k L}{2ik} \left(B_x^{odd} \frac{u^{s+1} + u^n}{2} \right)_k - \frac{L}{2ik} \left(\frac{\partial B_x^{odd}}{\partial x} \frac{u^{s+1} + u^n}{2} \right)_k + \\
&+ \left[\left(-1 + \frac{B_z^{odd}}{2ik} + \frac{A_z}{2ik} \right) \frac{u^{s+1} - u^n}{\Delta z} \right]_k - \\
&- \frac{\beta L}{4} \left(\frac{u^{s+1} + u^n}{\frac{abs\left(\frac{u^{s+1} + u^n}{2}\right)^2 abs(H_0^1)^2}{1 + \frac{abs\left(\frac{u^{s+1} + u^n}{2}\right)^2}{16J_H} + \frac{abs(v)^2}{J_H}}} \right)_k. \quad (23)
\end{aligned}$$

Для четного прохода:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\Delta \tilde{z}} - \frac{i\lambda_k^2}{8\pi N_F} + \frac{\alpha L}{4} \right) v_k^{s+1} &= \left(\frac{1}{\Delta \tilde{z}} + \frac{i\lambda_k^2}{8\pi N_F} - \frac{\alpha L}{4} \right) v_k^n + \\
&+ \left[\left(-1 + \frac{B_z^{even}}{2ik} + \frac{A_z}{2ik} \right) \frac{v^{s+1} - v^n}{\Delta \tilde{z}} \right]_k - \\
&- \frac{\beta L}{4} \left(\frac{v^{s+1} + v^n}{\frac{abs\left(\frac{v^{s+1} + v^n}{2}\right)^2 abs(u)^2 abs(H_0^1)^2}{1 + \frac{abs\left(\frac{v^{s+1} + v^n}{2}\right)^2}{J_H} + \frac{abs(u)^2 abs(H_0^1)^2}{16J_H}}} \right)_k. \quad (24)
\end{aligned}$$

Уравнения (23)-(24), условия отражения на зеркалах резонатора:

$$u(x, z = d_1) = -\xi_1(x)v(x, z = d_1) \frac{4i}{H_0^1(kR)} \exp(-ikf_1),$$

$$v(x, z = d_2) = \xi_2(x)u(x, z = d_2) \frac{iH_0^1(kR)}{4} \exp(ikf_2).$$

и краевые условия: $u = 0$, $v = 0$ при $|x| > \eta_x$ позволяют определить, как минимум, несколько наиболее добротных мод и соответствующих им собственных значений генератора, опираясь, например, на методики, предложенные в [5, 15].

7. Несомненно, практический интерес представляет распределение поля на выходе генератора не в криволинейных координатах (x, z) , а в декартовых координатах на плоскости $z' = L_{out}$ (так называемая ближняя зона). Переход к специально выбранной неортогональной системе координат (x, z) позволяет решить и эту задачу. Действительно, пусть мы имеем в криволинейных координатах (x, z) установившееся распределение поля \mathbf{E} на плоскости $z = d_1$. В декартовой системе координат плоскость $z = d_1$ есть поверхность малого зеркала $f_1(x') = -(r_1 - d_1) + \sqrt{r_1^2 - (x')^2}$. Излучение распространяется от поверхности f_1 до плоскости L_{out} , расположенной вне активной среды. Выбираем такую систему криволинейных координат (x, z) , в которой поверхность, описываемая функцией f_1 , переходит в плоскость $z = d_1$, а плоскость $z' = L_{out}$ переходит в себя $z = z' = L_{out}$:

$$\begin{cases} x' = x \\ z' = zQ(x) + F(x), \end{cases}$$

где $Q(x) = \frac{[f_1(x) - L_{out}]}{d_1 - L_{out}}$, $F(x) = L_{out} (1 - Q(x))$.

Компоненты тензора g^{ik} в координатах (x, z) равны:

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = -\frac{1}{Q(x)} \frac{\partial Q(x)}{\partial x} (z - L_{out}),$$

$$g^{21} = -\frac{1}{Q(x)} \frac{\partial Q(x)}{\partial x} (z - L_{out}),$$

$$g^{22} = \frac{1}{Q(x)^2} \left[1 + (z - L_{out})^2 \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Определитель g матрицы метрического тензора g_{ik} : $g = Q(x)^2$.

Следовательно, имеем: $A_x = 0$,

$$A_z = \frac{z - L_{out}}{Q(x)} \left[-\frac{\partial^2 Q(x)}{\partial x^2} + \frac{2}{Q(x)} \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$B_x = 0, \quad B_z = -\frac{2ik}{Q(x)}.$$

Таким образом, в выбранной системе координат уравнение (4) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x \partial z} + (A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

Переходим в уравнении (25) к квазиоптическому приближению:

$$-(A_z + B_z) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2}. \quad (26)$$

Выбор краевых условий обсужден выше. Начальное условие с учетом апертуры малого зеркала:

$$\mathbf{v}(x, z = d_1) = \begin{cases} \mathbf{E}, & |x| > a \\ 0, & -a \leq x \leq a. \end{cases}$$

Поскольку поле \mathbf{E} распространяется от поверхности $z' = f_1(x)$ до плоскости $z' = L_{out}$ вне активной среды, согласно (23) имеем:

$$\left(-\frac{1}{\Delta\tilde{z}} - \frac{i\lambda_k^2}{8\pi N_F} \right) v_k^{s+1} = \left(-\frac{1}{\Delta\tilde{z}} + \frac{i\lambda_k^2}{8\pi N_F} \right) v_k^n + \left[\left(-1 + \frac{B_z^{even}}{2ik} + \frac{A_z}{2ik} \right) \frac{v^{s+1} - v^n}{\Delta\tilde{z}} \right]_k. \quad (27)$$

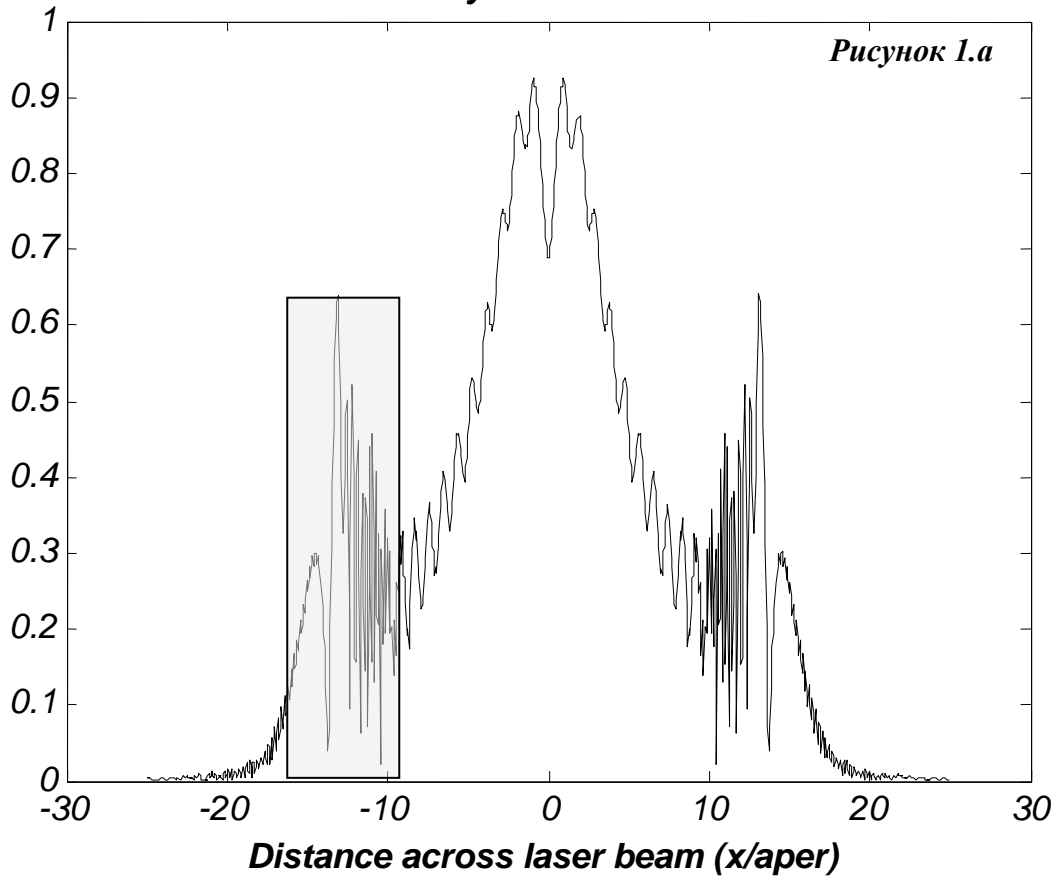
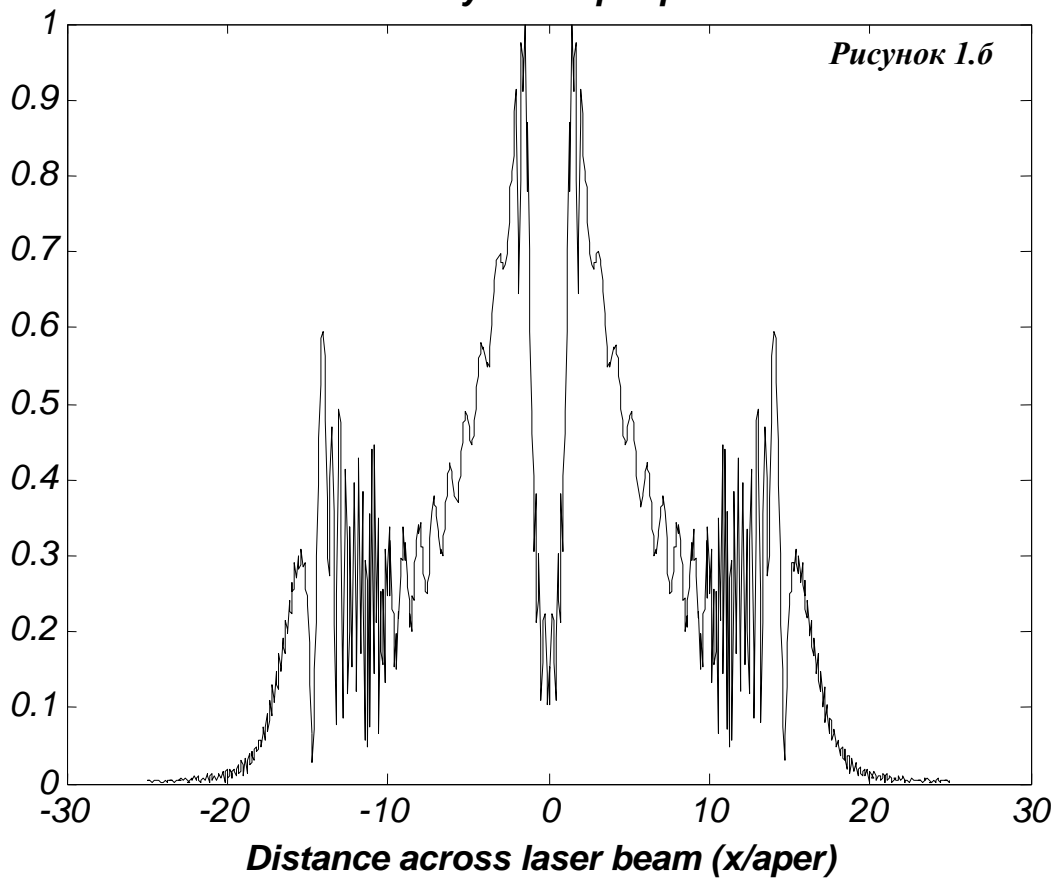
Решая уравнение (26) получаем установившееся значение поля на произвольной плоскости $z' = L_{out}$ в декартовой системе координат.

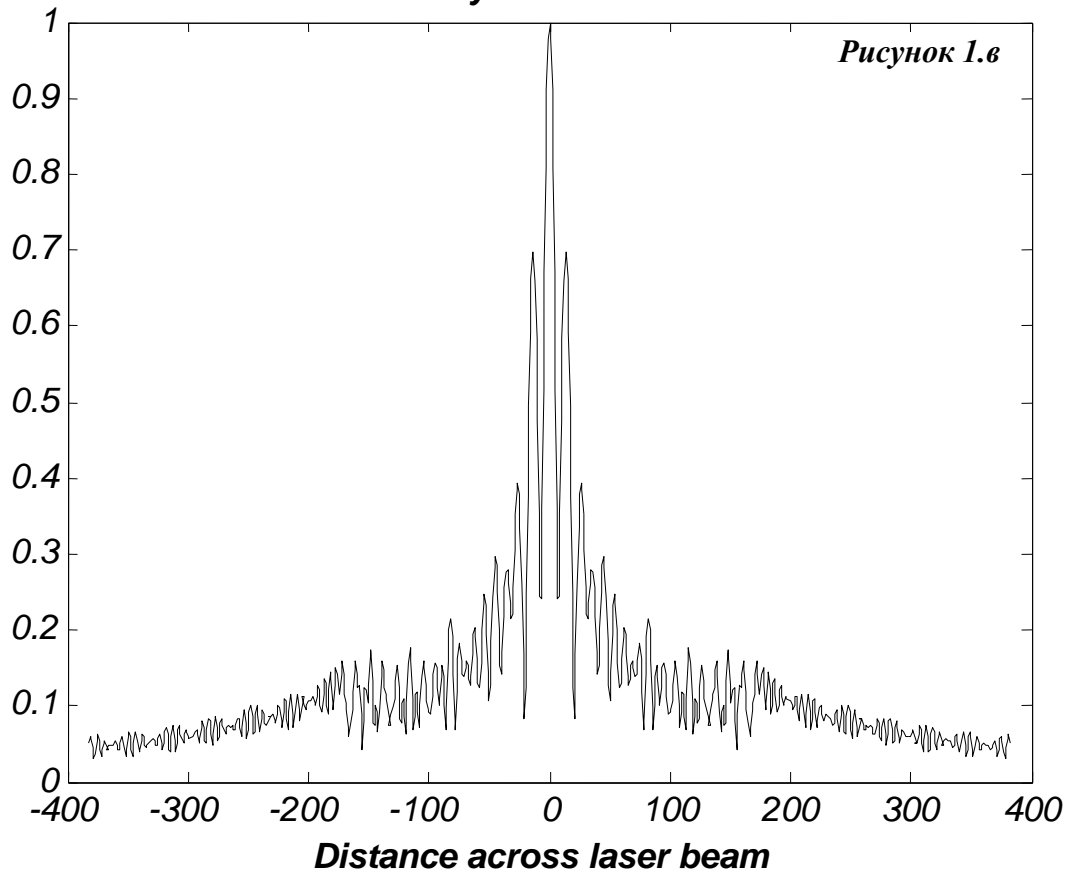
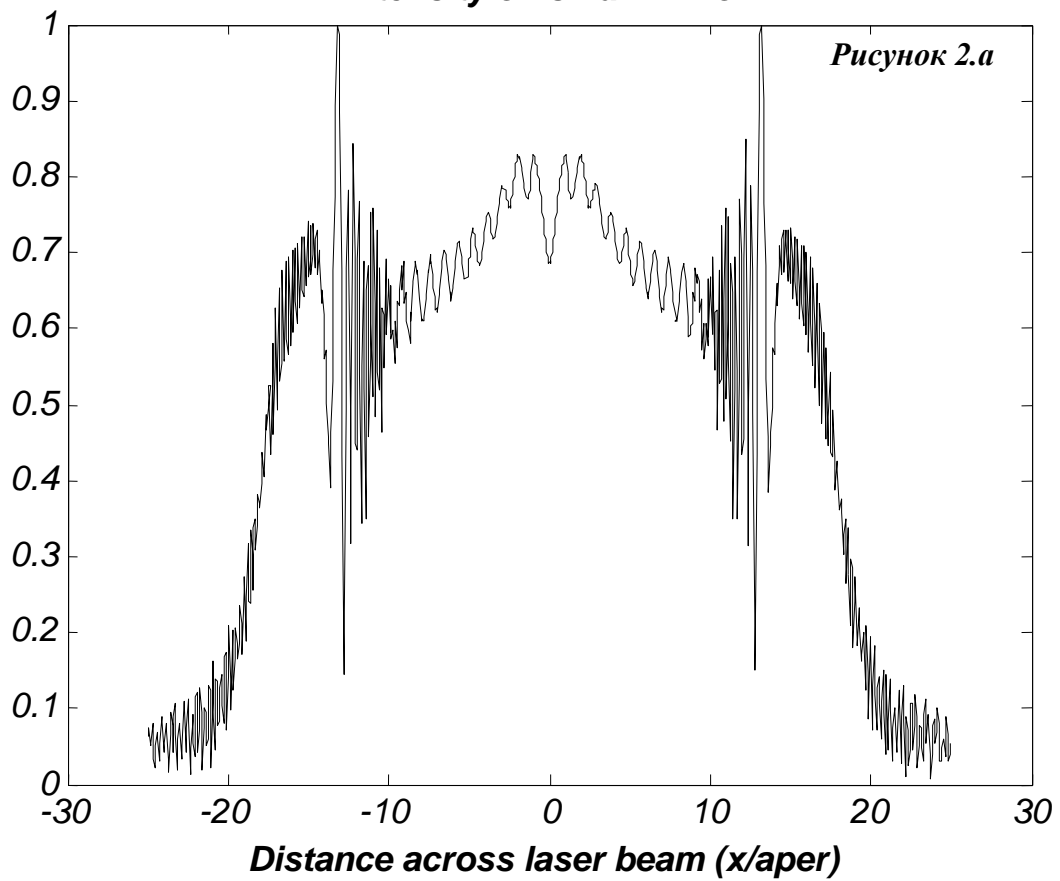
Предложенный подход к расчету распространения излучения в лазерных генераторах применен к известной модельной задаче [3,5] определения наиболее добротных мод и соответствующих им собственных чисел резонатора.

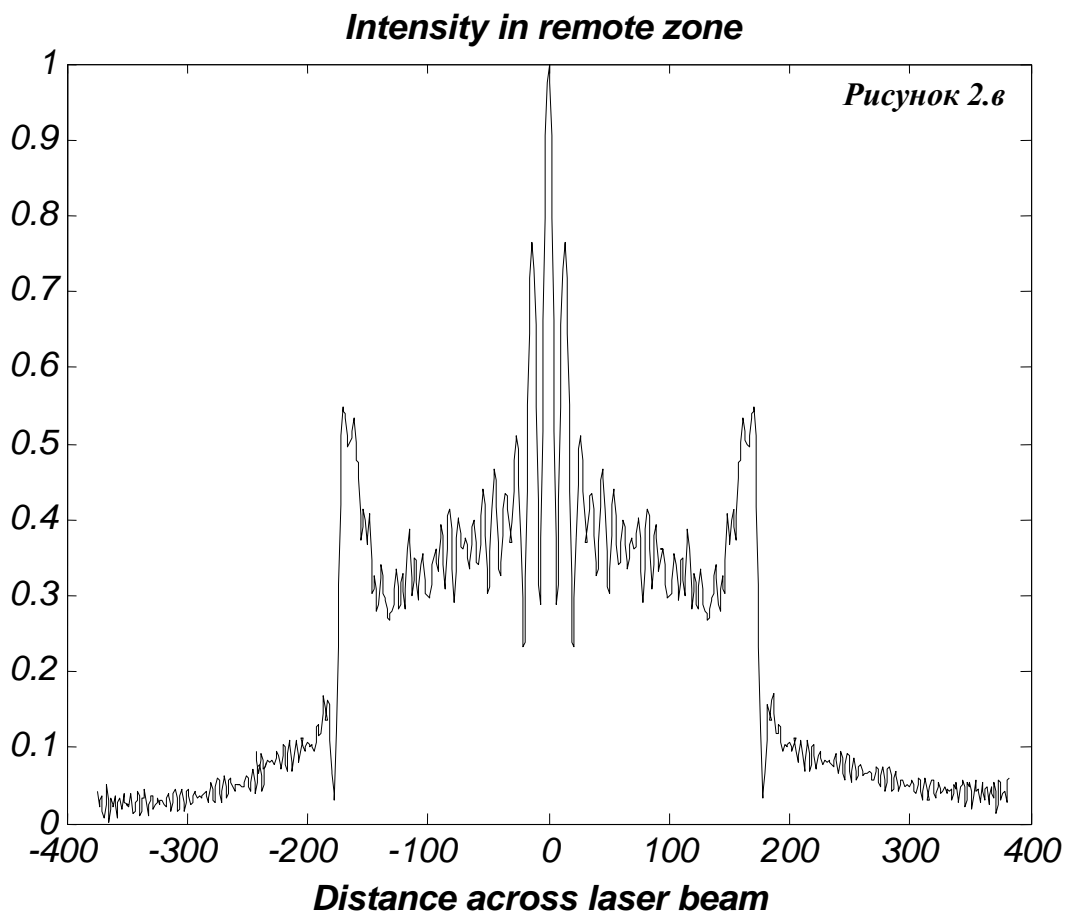
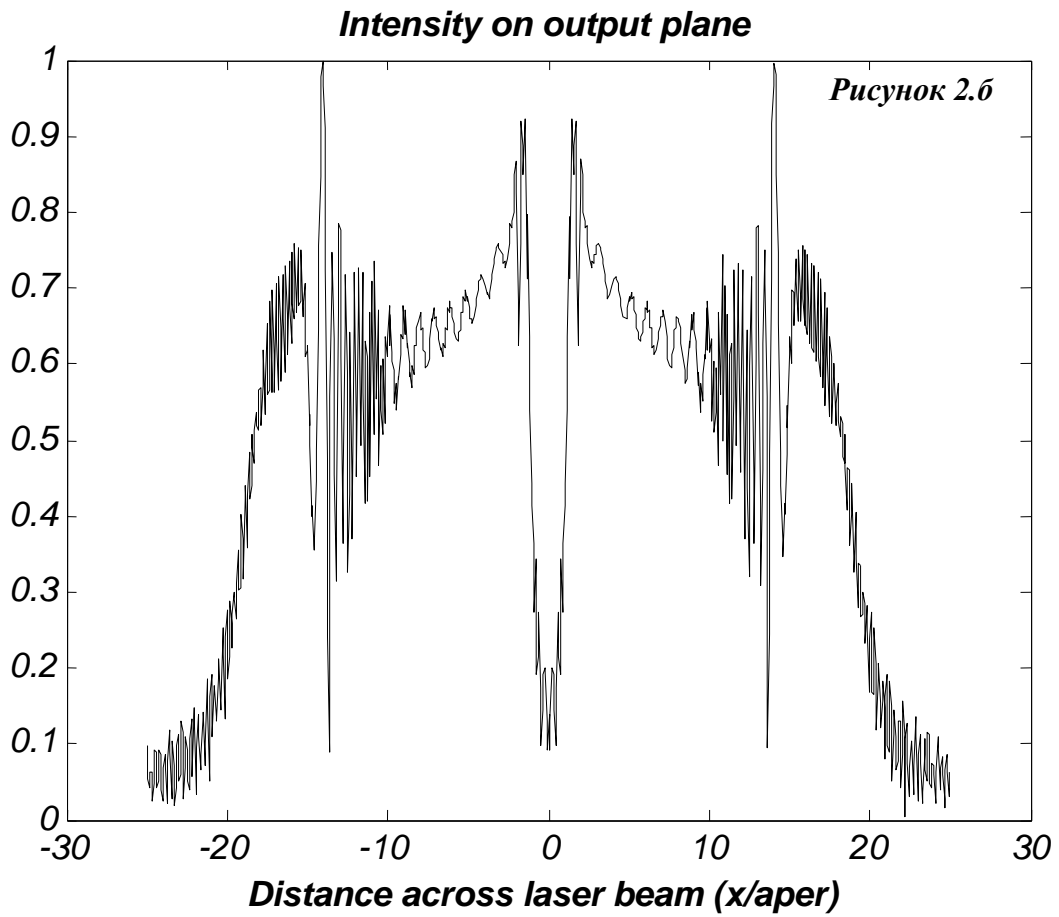
Приведены результаты расчета поля в неустойчивом телескопическом резонаторе, имеющем следующие геометрические характеристики: радиус r_1 малого зеркала равен 1120мм. Радиус r_2 большого зеркала равен 3360мм. Длина волны затравочного излучения в генераторе – 10.7мкм. Расчет наиболее добротных мод и соответствующих им собственных значений проведен для диапазона изменения чисел Френеля N_F от 0.5 до 5.0.

На Рис.1а изображено поле основной моды в относительных единицах для $N_F = 1.0$ и коэффициента усиления $\beta = 0.03\text{см.}^{-1}$ в криволинейных координатах (x, z) на плоскости $z = d_2$, совпадающей с плоскостью малого зеркала (см. стр.23). Отметим, что особенности поведения поля в затемненной прямоугольной зоне могут определяться как наличием эффекта Гиббса, так наличием периодических условий на границе расчетной области. На Рис.1.б изображено поле основной моды в ближней зоне в декартовой системе координат (x', z') .

На Рис.2а изображено поле основной моды в относительных единицах для $N_F = 1.0$ и коэффициента усиления $\beta = 0.06\text{см.}^{-1}$ в криволинейных координатах (x, z) на плоскости, совпадающей с плоскостью малого зеркала. На Рис.2.б изображено поле основной моды в ближней зоне в декартовой системе координат (x', z') .

Intensity on small mirror**Intensity on output plane**

Intensity in remote zone**Intensity on small mirror**



ЛИТЕРАТУРА

1. Siegman A.E. Proc. IEEE, 1965, v. 53, p. 277.
2. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и проблемы расходимости лазерного излучения. – М.: Наука, 1979.
3. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. – М.: Наука, 1990.
4. Карамзин Ю.Н., Конев Ю.Б. Численные методы исследования работы неустойчивых телескопических резонаторов с учетом дифракции и эффекта насыщения в активной среде. – Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1974, № 57.
5. Елкин Н.Н., Напартович А.П. Прикладная оптика лазеров. – М.:ЦНИИАтоминформ, 1989.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1971.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения Математической физики. – М.: Наука, 1972.
8. Карамзин Ю.Н., Цветкова И.Л. Спектральный метод решения нелинейных квазиоптических задач. – Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1979, № 115.
9. Карамзин Ю.Н., Цветкова И.Л. О сходимости спектрального метода решения одной задачи нелинейной оптики. – ЖВМ и МФ, 1982, т.22, с. 235-240.
10. Rigrod W. Gain saturation and output power of optical masers. – J. Appl. Phys., 1963, v. 34, p. 2602.
11. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, часть первая. – М.: Из-во Иностранной литературы, 1949.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
13. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.-Л.: ГИФМЛ, 1963.
14. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, ГИФМЛ., 1970.
15. Siegman A.E., Miller H.Y. Unstable Optical Loss Calculations Using the Prony Method. – Applied Optics, 1970, v. 9, № 12, p. 2729.

