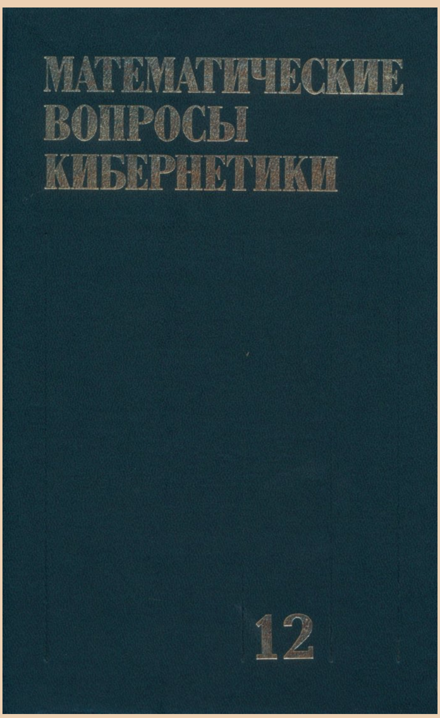

Н. П. Редькин

Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов

ЕДИНИЧНЫЕ ПРОВЕРЯЮЩИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ СХЕМ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

Н. П. РЕДЬКИН

(МОСКВА)

Введение

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов над произвольным полным конечным базисом [3]. Допускается воздействие на схемы источника неисправностей [9]. В результате этого воздействия функциональные элементы могут переходить в неисправные состояния. Одним из возможных типов неисправностей функциональных элементов являются так называемые инверсные неисправности, при которых всякий функциональный элемент E, реализующий в исправном состоянии приписанную ему булеву функцию φ_E, в неисправном состоянии реализует $\overline{\varphi}_E$. Именно такая математическая модель неисправностей рассматривается в данной работе.

При использовании логических способов контроля исправности схем [7] естественным образом вводится и затем используется понятие проверяющего теста как множества входных наборов (значений переменных), которые можно последовательно подать на входы схемы, чтобы затем по наблюдаемым значениям на выходе схемы сделать правильное заключение об исправности схемы. Важнейшей характеристикой теста является число наборов в нем, которое принято называть длиной теста. Длина самого короткого теста для какой-либо схемы определяется характером и количеством возникающих в схеме неисправностей, а также и устройством самой схемы, ибо одну и ту же булеву функцию можно реализовать различными схемами, допускающими тесты разной длины (см., например, [5]). В связи с этим возникает необходимость разработки методов синтеза легкотестируемых схем, которые при известном характере неисправностей элементов допускают тесты по возможности меньшей длины.

Весьма важным частным случаем тестов являются так называемые единичные тесты, которые возникают в тех случаях, когда в схемах допускается переход в неисправное состояние не более одного элемента. При исследовании единичных тестов для схем обычно рассматриваются так называемые неизбыточные схемы [5]; в таких схемах переход в неисправное состояние любого одного элемента приводит к обязательному появлению ошибочных значений на выходах схем на некоторых входных наборах.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00985), программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ–1807.2003.01) и программы «Университеты России» (проект УР.04.03.007).

Задачи синтеза легкотестируемых схем над некоторыми конкретными базисами для случая инверсных неисправностей элементов рассматривались в работах [1, 2, 6]. В [1, 2] установлено, в частности, что любую булеву функцию можно реализовать такой схемой из функциональных элементов над базисом $\{\&, \oplus, 0, 1\}$, для которой существует единичный проверяющий тест из одного набора. В [6] установлено, что любую булеву функцию можно реализовать схемой над базисом $\{\&, \oplus, -\}$, допускающей единичный проверяющий тест из двух наборов.

В данной работе устанавливается, что в случае произвольного полного конечного базиса любую булеву функцию можно реализовать неизбыточной схемой, допускающей единичный проверяющий тест не более чем из трех наборов.

§ 1. Основные определения и формулировка результата

Пусть задан произвольный полный конечный базис Б. Будем рассматривать схемы из функциональных элементов над Б и будем допускать одиночные инверсные неисправности элементов в схемах. Это означает что если некоторый элемент в исправном состоянии реализует булеву функцию φ от подаваемых на его входы переменных, то в неисправном состоянии этот элемент реализует $\overline{\varphi}$. Неисправным в схеме может быть только один (любой) элемент.

Пусть схема S в исправном состоянии реализует булеву функцию $f(\widetilde{x})$, $\widetilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)$. При переходе какого-либо элемента схемы S в неисправное состояние на выходе схемы будет реализована некоторая функция $g(\widetilde{x})$, которую принято называть *функцией неисправности*. *Неизбыточность* схемы S означает, что при переходе в неисправное состояние любого одного элемента схемы возникает функция неисправности, отличная от $f(\widetilde{x})$. Множество T входных наборов (значений переменных) схемы S считается *единичным проверяющим тестом* этой схемы, если для любой функции неисправности $g(\widetilde{x})$ этой схемы S, отличной от $f(\widetilde{x})$, в T найдется хотя бы один набор $\widetilde{\sigma}=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ такой, что $f(\widetilde{\sigma})\neq g(\widetilde{\sigma})$.

Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Любая булева функция может быть реализована неизбыточной схемой, допускающей единичный проверяющий тест не более чем из трех наборов.*

Конструктивное доказательство теоремы для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ проводится в последующих параграфах. Относительно $f(\widetilde{x})$ будем предполагать, что эта функция существенно зависит от всех своих переменных и $n \geqslant 2$; при наличии у заданной функции фиктивных переменных их можно изъять [8], а при $n=1$ утверждение теоремы очевидно, поскольку в этом случае можно взять тривиальный тест, включающий оба набора значений единственной переменной (наборы (0) и (1)).

§ 2. Схемы над базисом $\{\overline{x}, x \,\&\, y\}$

Заданную булеву функцию $f(\widetilde{x})$ представим полиномом Жегалкина:

$$f(\widetilde{x}) = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l \oplus \alpha, \tag{1}$$

где $K_i = x_{j(i,1)} x_{j(i,2)} \ldots x_{j(i,r(i))}$, а α — булева константа ($i = 1, \ldots, l$; $1 \leqslant r(i) \leqslant n$; $\alpha \in \{0, 1\}$). Всякой конъюнкции $K = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ сопоставим цепь $Z^1(K)$, представленную на рис. 1, которая содержит $r-1$ конъюнкторов и реализует конъюнкцию K.

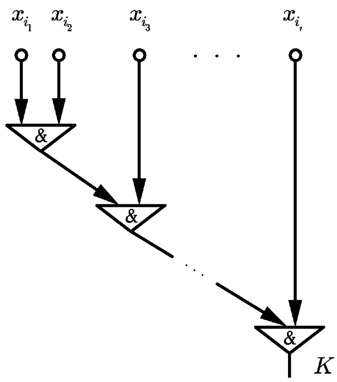

Рис. 1

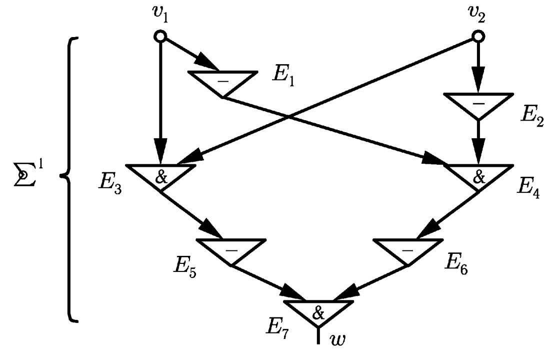

Рис. 2

Для вычисления суммы по модулю 2 будем строить схемы из одинаковых блоков, реализующих $x \oplus y$; один такой блок Σ^1 изображен на рис. 2. Легко заметить, что для блока Σ^1 выполняется следующее утверждение.

Лемма 1. *Если на оба входа v_1 и v_2 блока Σ^1 подается* 0, *то на выходе w этого блока реализуется* 0 *при отсутствии неисправностей в Σ^1 и* 1 *— при переходе в неисправное состояние любого одного элемента из числа E_1, E_2, E_4, E_6, E_7. Если же на левый вход v_1 блока Σ^1 подается значение σ, а на правый вход v_2 подается* 1, *то на выходе этого блока реализуется $\overline{\sigma}$ при отсутствии неисправностей в Σ^1 и σ — при переходе в неисправное состояние одного из элементов E_3, E_5, E_7.*

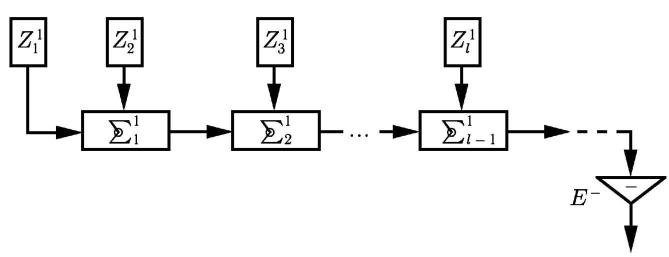

Рис. 3

Функцию $f(\widetilde{x})$ в соответствии с ее представлением (1) реализуем схемой S^1, изображенной на рис. 3. В этой схеме $Z_1^1, Z_2^1, \ldots, Z_l^1$ — цепи, реализующие конъюнкции $K_1, K_2, \ldots, K_l$ из (1). Подсхемы $\Sigma_1^1, \Sigma_2^1, \ldots, \Sigma_{l-1}^1$ — одинаковые блоки типа Σ^1, реализующие сумму по модулю 2 конъюнкций из (1). На входы блока Σ_1^1 подаются конъюнкции K_1, K_2; при $i=3,\ldots,l$ конъюнкция K_i подается на правый вход блока Σ_{i-1}^1. Левый вход блока Σ_i^1, $i=2,\ldots,l-1$, соединяется с выходом блока Σ_{i-1}^1. Если в представлении (1) $\alpha=0$, то $f(\widetilde{x})$ реализуется на выходе последнего блока Σ_{l-1}^1; если же $\alpha=1$, то в схему добавляется инвертор E^- (его вход соединяется с выходом блока Σ_{l-1}^1), и $f(\widetilde{x})$ реализуется на выходе инвертора E^-.

Убедимся, что схема S^1 неизбыточна и $T=\{\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1\}$ является единичным проверяющим тестом, где $\widetilde{\sigma}_0=(0,0,\ldots,0)$ — набор из нулей, а $\widetilde{\sigma}_1=(1,1,\ldots,1)$ — набор из единиц.

Предположим, что на входы схемы S^1 подается набор $\widetilde{\sigma}_1$. Согласно (1) в исправной схеме S^1 на выходе получим $l+\alpha(\operatorname{mod} 2)$. При переходе в неисправное состояние инвертора E^- (когда он имеется в схеме S^1) значение на выходе схемы изменится и окажется равным $l+\alpha+1(\operatorname{mod} 2)$; неисправность будет обнаружена. При переходе в неисправное состояние конъюнктора в какой-нибудь цепи Z_i^1 $(i \in \{1, \ldots, l\})$ значение на выходе этой цепи изменится (с единицы на нуль), а значит, изменится и значение на выходе всей схемы (с $l+\alpha(\operatorname{mod} 2)$ на $l+\alpha+1(\operatorname{mod} 2)$), и неисправность будет обнаружена. При переходе в неисправное состояние какого-нибудь элемента из числа E_3, E_5, E_7 в одном из блоков $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_{l-1}^1$ значение на выходе этого блока согласно лемме 1 изменится, а значит, изменится значение и на выходе всей схемы, и неисправность будет обнаружена.

Предположим теперь, что на входы схемы S^1 подается набор $\widetilde{\sigma}_0$. В этом случае в исправной схеме S^1 на выходах всех цепей $Z_1^1, \ldots, Z_l^1$ и всех блоков $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_{l-1}^1$ будет 0, а на выходе всей схемы будет α. При переходе в неисправное состояние любого одного элемента из числа E_1, E_2, E_4, E_6, E_7 в одном из блоков $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_{l-1}^1$ значение на выходе этого блока (а значит, и всех следующих за ним блоков) согласно лемме 1 окажется равным 1, а значение на выходе всей схемы — равным $1 \oplus \alpha$, т. е. изменится, и неисправность будет обнаружена.

В итоге получаем, что при переходе в неисправное состояние любого одного элемента в схеме S^1 значение на выходе этой схемы хотя бы на одном из наборов $\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1$ окажется отличным от значения функции f на этом наборе, а это означает, что схема S^1 неизбыточна, и T является единичным проверяющим тестом для S^1. Утверждение теоремы для базиса $\{\overline{x}, x \,\&\, y\}$ доказано.

§ 3. Схемы над базисом $\{\overline{x}, x \vee y\}$

Введем для булевой функции $f(\widetilde{x})$ другое представление, которое отличается от (1) тем, что в нем вместо конъюнкции используется дизъюнкция.

Лемма 2. *Булева функция $f(\widetilde{x})$ может быть представлена в виде*

$$f(\widetilde{x}) = D_1 \oplus D_2 \oplus \ldots \oplus D_l \oplus \alpha, \tag{2}$$

где $D_i = x_{j(i,1)} \vee x_{j(i,2)} \vee \ldots \vee x_{j(i,r(i))}$, а α — булева константа $(i = 1, \ldots, l$; $1 \leqslant r(i) \leqslant n$; $\alpha \in \{0, 1\})$.

Доказательство. Из тождеств $x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$ и $(x_1 \vee \ldots \vee x_{m-1}) \vee x_m = (x_1 \vee \ldots \vee x_{m-1}) x_m \oplus (x_1 \vee \ldots \vee x_{m-1}) \oplus x_m$ индукцией по m получаем соотношение

$$x_1 \vee \ldots \vee x_m = \sum_{i=1}^{m} x_i \oplus \ldots \oplus \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus \ldots \oplus x_1 x_2 \ldots x_m,$$

из которого следует

$$x_1 x_2 \ldots x_m = (x_1 \vee \ldots \vee x_m) \oplus \sum_{i=1}^{m} x_i \oplus \ldots \oplus \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} \leqslant m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{m-1}}. \tag{3}$$

Представим теперь булеву функцию $f(\widetilde{x})$ полиномом Жегалкина (1), а затем, используя соотношение (3), тождественными преобразованиями из (3) получим (2). При этом число переменных, составляющих некоторую конъюнкцию (или дизъюнкцию), будем считать рангом этой конъюнкции (дизъюнкции). Вместо каждой конъюнкции максимального ранга из правой части (1) подставим эквивалентную ей формулу из правой части (3); после приведения подобных членов в полученном выражении на следующем шаге все конъюнкции максимального ранга снова выразим согласно соотношению (3) через правые части из этого соотношения и т. д. Поскольку на каждом из шагов максимальный ранг конъюнкций понижается, по крайней мере, на единицу, то через конечное число шагов, очевидно, придем к выражению из правой части (2). Лемма доказана.

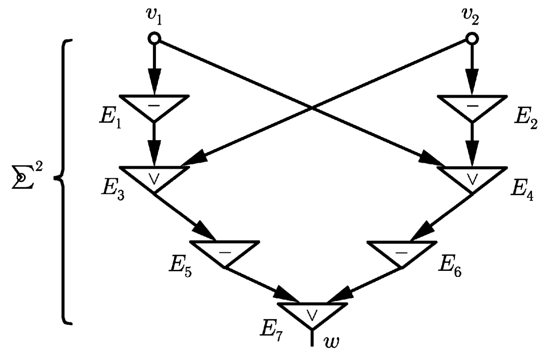

Рис. 4

Всякой дизъюнкции $D = x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_r}$ сопоставим цепь $Z^2(D)$, которая получается из цепи $Z^1(K)$, изображенной на рис. 1, заменой конъюнкторов на дизъюнкторы. Для вычисления суммы по модулю 2 будем использовать блоки, реализующие $x \oplus y$; один такой блок Σ^2 изображен на рис. 4.

Для блока Σ^2 справедлива

Лемма 3. *Если на входы блока подается* 0, *то на его выходе реализуется* 0 *при отсутствии неисправностей и* 1 — *при переходе в неисправное состояние любого одного элемента из блока.*

Функцию $f(\widetilde{x})$ в соответствии с представлением (2) реализуем схемой S^2, устроенной аналогично схеме S^1 (см. рис. 3). Точнее говоря, схема S^2 получается из схемы S^1 (изображенной на рис. 3) заменой цепей $Z_1^1, \ldots, Z_l^1$ на цепи $Z_1^2, \ldots, Z_l^2$, реализующие дизъюнкции $D_1, \ldots, D_l$ из (2); подсхемы $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_{l-1}^1$ (т. е. блоки типа Σ^1) заменяются подсхемами $\Sigma_1^2, \ldots, \Sigma_{l-1}^2$ (блоками типа Σ^2). Схема S^2 неизбыточна, и единственный набор $\widetilde{\sigma}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ является единичным проверяющим тестом для S^2.

Действительно, предположим, что на входы схемы S^2 подается набор $\widetilde{\sigma}_0$. Согласно (2) в исправной схеме S^2 на выходах всех цепей $Z_1^2, \ldots, Z_l^2$ и всех блоков $\Sigma_1^2, \ldots, \Sigma_{l-1}^2$ будет 0, а на выходе всей схемы будет α. При переходе в неисправное состояние инвертора E^- (при наличии его в схеме S^2) значение на выходе всей схемы изменится и окажется равным $1 \oplus \alpha$; неисправность будет обнаружена. При переходе в неисправное состояние дизъюнктора в какой-нибудь цепи Z_i^2 ($i \in \{1, \ldots, l\}$) значение на выходе этой цепи изменится (с нуля на единицу), а значит, изменится и значение на выходе всей схемы с α на $\alpha \oplus 1$, и неисправность будет обнаружена. При переходе в неисправное состояние какого-нибудь одного элемента в одном из блоков $\Sigma_1^2, \ldots, \Sigma_{l-1}^2$ значение на выходе этого блока, согласно лемме 3, изменится, а значит, изменится и значение на выходе всей схемы, и неисправность будет обнаружена.

Таким образом, при переходе в неисправное состояние любого одного элемента в схеме S^2 значение на выходе этой схемы на наборе $\widetilde{\sigma}_0$ окажется отличным от значения $f(\widetilde{\sigma}_0)$, а это означает, что схема S^2 неизбыточна, и набор $\widetilde{\sigma}_0$ является единичным проверяющим тестом для S^2. Теорема для базиса $\{\overline{x}, x \vee y\}$ доказана.

§ 4. Схемы над базисом $\{\overline{x}\,\&\,\overline{y}\}$ (или над $\{\overline{x} \vee \overline{y}\}$)

Пусть E — функциональный элемент с m входами, реализующий булеву функцию $\varphi_E(x_1, \ldots, x_m)$, а S^E — неизбыточная схема из функциональных элементов над произвольным базисом, также имеющая m входов и реализующая $\varphi_E(x_1, \ldots, x_m)$. Схему S^E будем считать *эквивалентной* элементу E, если эта схема в исправном состоянии реализует функцию $\varphi_E(x_1, \ldots, x_m)$, а при переходе в неисправное состояние любого одного элемента реализует $\overline{\varphi}_E(x_1, \ldots, x_m)$; при этом входу элемента E, на который подается переменная x_i, ставим во взаимно однозначное соответствие тот вход схемы S^E, на который подается та же самая переменная x_i $(i = 1, \ldots, m)$. Аналогично лемме 9 из [4] (где рассматриваются константные неисправности на выходах функциональных элементов) в данном случае выполняется

Лемма 4. *Пусть* Б$_1$ *и* Б$_2$ *— произвольные конечные базисы,* S_1 *— неизбыточная схема над* Б$_1$, *реализующая функцию* $f(\widetilde{x})$, T *— единичный проверяющий тест для* S_1, *и для каждого элемента из* S_1 *существует эквивалентная ему схема над* Б$_2$. *Тогда существует неизбыточная схема* S_2 *над базисом* Б$_2$, *которая реализует* $f(\widetilde{x})$ *и для которой* T *является единичным проверяющим тестом.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 9 из [4].

Возьмем теперь неизбыточную схему S^2 над $\{\overline{x}, x \vee y\}$, которая реализует $f(\widetilde{x})$ и для которой набор $\widetilde{\sigma}_0$ является единичным проверяющим тестом; способ построения такой схемы указан в предыдущем параграфе. Пусть E^- и $E^\vee$ — элементы, реализующие соответственно $\overline{x}$ и $x \vee y$. Элементу E^- эквивалентна схема S^- из одного элемента над базисом $\{\overline{x}\,\&\,\overline{y}\}$; оба входа единственного элемента схемы S^- соединены с единственным входом схемы S^-. Элементу $E^\vee$ эквивалентна схема (цепь) $S^\vee$ над базисом $\{\overline{x}\,\&\,\overline{y}\}$ из двух элементов, в которой входы первого элемента являются входами схемы $S^\vee$, выход второго элемента является выходом схемы и с выходом первого элемента соединены оба входа второго. Применяя далее лемму 4, получаем утверждение теоремы.

Аналогично доказывается утверждение теоремы и для схем над $\{\overline{x} \vee \overline{y}\}$. В этом случае в качестве исходной схемы S^1 берется схема над $\{\overline{x}, x\,\&\,y\}$ (способ построения S^1 указан в § 2), а для элементов E^- и $E^\&$, реализующих $\overline{x}$ и $x\,\&\,y$, эквивалентными будут схемы S^- и $S^\&$, построенные точно так же, как и в предыдущем случае, но из элементов, реализующих $\overline{x}$ и $\overline{x} \vee \overline{y}$.

§ 5. Схемы над базисом $\{\overline{x}, x\,\&\,\overline{y}\}$ (или над $\{\overline{x}, x \vee \overline{y}\}$)

Всякой конъюнкции $K = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ сопоставим цепь $Z^3(K)$, представленную на рис. 5, которая содержит $r-1$ инверторов, $r-1$ элементов, реализующих $x\&\overline{y}$, и реализует конъюнкцию K.

Для вычисления суммы по модулю 2 используем однотипные двухвходовые блоки; один такой блок Σ^3 изображен на рис. 6. Для блока Σ^3, очевидно, выполняется лемма 3.

Функцию $f(\widetilde{x})$ в соответствии с представлением (1) реализуем схемой S^3, устроенной аналогично схеме S^1 (рис. 3). В схеме S^3 для реализации конъюнкций $K_1, \ldots, K_l$ из (1) вместо цепей $Z_1^1, \ldots, Z_l^1$ (в S^1) возьмем цепи $Z_1^3, \ldots, Z_l^3$ (общий вид цепи Z_i^3 показан на рис. 5). Для реализации суммы по модулю 2 вместо блоков $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_{l-1}^1$ возьмем блоки $\Sigma_1^3, \ldots, \Sigma_{l-1}^3$ (типа Σ^3). Проводя дальнейшие рассуждения аналогично тому, как это делалось в § 2 для базиса $\{\overline{x}, x \,\&\, y\}$, и используя лемму 3 (применительно к блокам типа Σ^3), убеждаемся, что построенная схема для $f(\widetilde{x})$ неизбыточна, и множество $T = \{\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1\}$ является единичным проверяющим тестом для этой схемы.

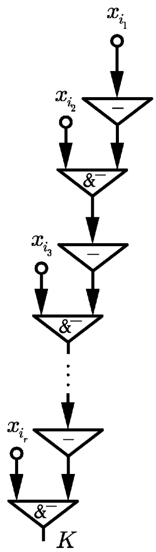

Рис. 5

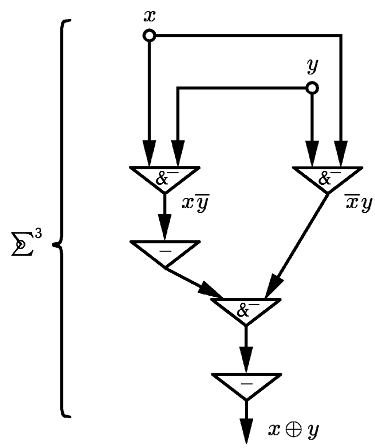

Рис. 6

Для базиса $\{\overline{x}, x \vee \overline{y}\}$ берется соответствующая модификация схемы S^2 из § 3. Всякой дизъюнкции $D = x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_r}$ сопоставим цепь $Z^4(D)$, изображенную на рис. 7, которая содержит $r-1$ инверторов, $r-1$ элементов, реализующих $x \vee \overline{y}$, и реализует дизъюнкцию D.

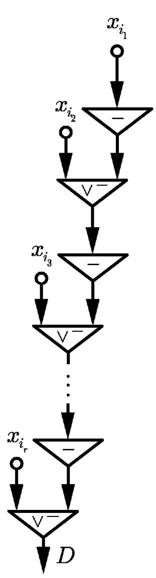

Рис. 7

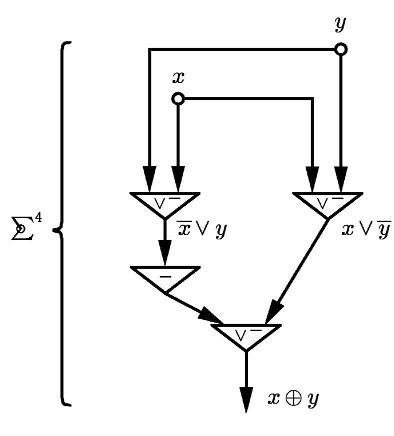

Рис. 8

Для вычисления суммы по модулю 2 используем двухвходовые блоки, один из которых (блок Σ^4) изображен на рис. 8. Для блока Σ^4, как нетрудно заметить, выполняется лемма 3.

Функцию $f(\widetilde{x})$ в соответствии с представлением (2) реализуем схемой S^4, которая получается из схемы S^1 (изображенной на рис. 3) заменой цепей $Z_1^1, \ldots, Z_l^1$ на цепи $Z_1^4, \ldots, Z_l^4$, реализующие дизъюнкции $D_1, \ldots, D_l$ из (2), а подсхем $\Sigma_1^1, \ldots, \Sigma_{l-1}^1$ на подсхемы $\Sigma_1^4, \ldots, \Sigma_{l-1}^4$ (т. е. на блоки типа Σ^4). Дальнейшие рассуждения с использованием леммы 3 проводим аналогично тому, как это делалось в § 3 для базиса $\{\overline{x}, x \vee y\}$, и убеждаемся, что построенная схема S^4 неизбыточна и набор $\widetilde{\sigma}_0$ является единичным проверяющим тестом для S^4.

§ 6. Схемы над базисом, содержащим функцию $x \,\&\, y$ (или функцию $x \vee y$)

Дальнейшие построения будем (как и в [4]) связывать с возможными расширениями заданного базиса Б. *Расширением* базиса Б будем считать всякий базис Б$'$, Б$' \supseteq$ Б, любая функция которого либо совпадает с какой-нибудь функцией из Б, либо может быть получена путем отождествления переменных какой-нибудь функции из Б. Очевидно, каждому элементу из расширения Б$'$, отсутствующему в Б, можно поставить в соответствие эквивалентную ему схему над Б (получающуюся из соответствующего элемента базиса Б «склеиванием» некоторых его входов). Отсюда и из леммы 4 следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать ее для произвольного расширения базиса Б.

Пусть Б$'$ — максимальное (по числу содержащихся в Б$'$ попарно различных функций) расширение исходного базиса Б; ясно, что всякое другое расширение содержится в Б$'$. Разберем случай, когда Б$'$ содержит $x \,\&\, y$. Если Б$'$ содержит еще и $\overline{x}$, то строим схему над базисом $\{\overline{x}, x\&y\}$ (см. § 2).

Будем считать, что инверсия $\overline{x}$ отсутствует в Б$'$. Относительно заданной функции $f(\widetilde{x})$ вначале предположим, что эта функция есть конъюнкция $x_1 \ldots x_n$. В этом случае в качестве схемы, реализующей $f(\widetilde{x})$, возьмем цепочку из $n-1$ конъюнкторов. Очевидно, такая схема будет неизбыточной, и набор $\widetilde{\sigma}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$ будет единичным проверяющим тестом для этой схемы. Далее будем предполагать, что функция $f(\widetilde{x})$ отлична от $x_1 \ldots x_n$.

Базис Б в силу своей полноты содержит функцию φ_0, не сохраняющую константу 0, и функцию φ_1, не сохраняющую константу 1. При отождествлении переменных функции φ_0 получим либо инверсию, либо константу 1; аналогично, при отождествлении переменных функции φ_1 получим либо инверсию, либо константу 0. Инверсия в Б$'$ отсутствует; значит, Б$'$ содержит константы 0 и 1. Обозначим через E^i элемент базиса Б$'$, реализующий константу i, $i = 0, 1$.

Возьмем вначале схему S^1 над базисом $\{\overline{x}, x \,\&\, y\}$, введенную в § 2 (см. рис. 3), которая реализует $f(\widetilde{x})$ и для которой $T = \{\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1\}$ является единичным проверяющим тестом. Если функция f принимает на обоих наборах $\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1$ из T одно и то же значение, то добавим в T еще один какой-нибудь набор, на котором f принимает другое значение.

В схему S^1 добавим два элемента E^1 и $E^{\&}$, реализующие соответственно константу 1 и конъюнкцию $x \,\&\, y$. Один вход конъюнктора $E^{\&}$ соединим с выходом элемента E^1, а второй вход данного конъюнктора соединим с выходом схемы S^1; выход конъюнктора $E^{\&}$ объявим выходом полученной таким образом всей схемы, которую обозначим через $S^{1,1}$. Исправная схема $S^{1,1}$, очевидно, реализует $f(\widetilde{x})$. Переход в неисправное состояние конъюнктора $E^{\&}$ обнаруживается на любом наборе из T. Переход в неисправное состояние элемента E^1 (выдающего константу 1), очевидно, обнаруживается на любом наборе из T, на котором f обращается в 1 (хотя бы один такой набор имеется в T). Таким образом, T является единичным проверяющим тестом для $S^{1,1}$.

Пусть E^* — элемент из Б′, реализующий немонотонную булеву функцию (такой элемент в Б, а значит, и в Б′ найдется [8]). Среди входов элемента E^* выделим *главный* вход, а все остальные входы разобьем на нулевые и единичные таким образом, чтобы при подаче на главный вход переменной x, на нулевые входы — константы 0 и на единичные входы — константы 1 на выходе E^* была реализована инверсия $\overline{x}$ (такая возможность гарантируется леммой о немонотонной функции [8]; подмножество нулевых входов или подмножество единичных входов, вообще говоря, может оказаться и пустым). Уточним, что нулевые входы элемента E^* будем считать таковыми только в том случае, когда при подаче на эти входы константы 1 (предполагается, что на главный вход по-прежнему подается x, а на единичные входы — константа 1) на выходе элемента E^* окажется реализованной функция, уже отличная от инверсии $\overline{x}$ (т. е. одна из функций $x, 0, 1$); в противном случае все входы элемента E^*, кроме главного, относим к единичным.

В схеме $S^{1,1}$ все инверторы E^- заменим на элементы E^*. Если в схеме $S^{1,1}$ вход инвертора E^- соединен с вершиной v, а выход — с вершиной w, то при замене E^- элементом E^* главный вход элемента E^* соединяется с вершиной v, а выход этого элемента — с вершиной w. Если множество нулевых входов элемента E^* непусто, то в схему добавим элемент E^0, реализующий константу 0, и нулевые входы всех элементов E^* соединим с выходом элемента E^0. При наличии единичных входов у элемента E^* все эти входы соединим с выходом элемента E^1. В итоге получим некоторую схему $S^{1,2}$, теперь уже над Б′, которая по построению в исправном состоянии реализует $f(\widetilde{x})$.

Переход в неисправное состояние любого элемента из $S^{1,2}$, отличного от E^0, обнаруживается по-прежнему (как и в схеме $S^{1,1}$) на наборах из T, поскольку в этом случае в T найдется набор $\widetilde{\sigma}$ такой, что на выходе схемы будет значение $\overline{f}(\widetilde{\sigma})$.

Далее рассмотрим переход в неисправное состояние элемента E^0 (предполагаем, что этот элемент присутствует в схеме $S^{1,2}$). При таком переходе все элементы E^* в схеме $S^{1,2}$ реализуют либо какую-нибудь (одну и ту же для всех элементов E^*) булеву константу, либо тождественную функцию. В первом случае на выходах 5-го и 6-го элементов подсхемы Σ^1_{l-1}, а значит и на выходе всей схемы будет реализована булева константа. Чтобы это обнаружить, очевидно, достаточно иметь в T пару наборов, на которых функция f принимает разные значения. Если ранее к двум наборам $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_1$ из T добавлялся третий набор $\widetilde{\sigma}$, то это означает, что $f(\widetilde{\sigma}_0)=f(\widetilde{\sigma}_1)=0$, а $f(\widetilde{\sigma})=1$, и в T имеется требуемая пара наборов. Если третий набор к наборам $\widetilde{\sigma}_0$ и $\widetilde{\sigma}_1$ из T не добавлялся и $f(\widetilde{\sigma}_0)=f(\widetilde{\sigma}_1)=1$, то добавим в T недостающий набор $\widetilde{\sigma}$, на котором $f(\widetilde{\sigma})=0$. В итоге получим единичный проверяющий тест для всей схемы $S^{1,2}$, содержащий три набора.

Рассмотрим другой случай, когда при неисправном элементе E^0 все элементы E^* в $S^{1,2}$ реализуют тождественную функцию. В этом случае на выходе схемы, как нетрудно заметить, будет реализована функция $g(\widetilde{x}) = K_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} K_l$, где $K_1, \ldots, K_l$ — конъюнкции из (1). Функция $f(\widetilde{x})$ существенно зависит от всех своих переменных $x_1, \ldots, x_n$, а потому эти переменные встречаются в $K_1, \ldots, K_l$ и $g(\widetilde{x}) = x_1 \ldots x_n$. Если выполняется хотя бы одно из равенств $f(\widetilde{\sigma}_0)=1$ или $f(\widetilde{\sigma}_1)=0$, то на наборе, удовлетворяющем такому равенству, неисправность будет обнаружена. Предположим, что оба равенства не выполняются, т. е. $f(\widetilde{\sigma}_0)=0$ и $f(\widetilde{\sigma}_1)=1$. В таком случае третий набор в T еще не добавлялся, и сейчас можно включить в T третий набор $\widetilde{\sigma}$, на котором функции f и g принимают разные значения. В итоге получим множество из трех наборов, являющееся единичным проверяющим тестом для $S^{1,2}$.

Для случая, когда максимальное расширение Б$'$ содержит $x \vee y$, в приведенные выше рассуждения достаточно внести почти очевидные изменения, связанные с заменой конъюнкторов на дизъюнкторы. Так, если Б$'$ содержит еще и $\overline{x}$, то строим схему над базисом $\{\overline{x}, x \vee y\}$ (см. § 3). Если $f(\widetilde{x})$ есть дизъюнкция $x_1 \vee \ldots \vee x_n$, то в качестве схемы берется цепочка из $n-1$ дизъюнкторов; эта схема будет неизбыточной, и тестом для нее будет набор $\widetilde{\sigma}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Далее предполагается, что Б$'$ не содержит $\overline{x}$ и $f(\widetilde{x})$ отлична от $x_1 \vee \ldots \vee x_n$; Б$'$ в этом случае содержит константы 0 и 1, и элемент E^i базиса реализует константу i, $i = 0, 1$.

Вначале берем схему S^2 над $\{\overline{x}, x \vee y\}$, введенную в § 3, которая реализует $f(\widetilde{x})$ и для которой $\widetilde{\sigma}_0$ является единичным проверяющим тестом. В T добавим (помимо набора $\widetilde{\sigma}_0$) еще какой-нибудь набор $\widetilde{\sigma}$, удовлетворяющий условию $f(\widetilde{\sigma}) \neq f(\widetilde{\sigma}_0)$. Аналогично тому, как ранее в схему S^1 добавлялись элементы E^1 и $E^{\&}$ и осуществлялся переход от S^1 к $S^{1,1}$, сейчас в схему S^2 добавим элементы S^0 и $S^{\vee}$ (реализующие константу 0 и дизъюнкцию) и перейдем к схеме $S^{2,1}$; схема $S^{2,1}$ окажется неизбыточной схемой и T будет единичным проверяющим тестом для нее.

Далее берется некоторый элемент E^* из Б$'$, реализующий немонотонную булеву функцию, и с использованием E^* проводятся почти такие же построения и рассуждения, как и выше при построении и рассмотрении схемы $S^{1,2}$. Только в данном случае в схему $S^{2,1}$, возможно, добавляется еще один элемент E^1, реализующий константу 1, а все инверторы заменяются на элементы E^* (функционирующие как инверторы при надлежащей подаче констант на нулевые и единичные входы) и схема $S^{2,1}$ преобразуется в схему $S^{2,2}$. Схема $S^{2,2}$ оказывается неизбыточной, и во всех случаях, кроме одного, множество $T = \{\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}\}$ будет единичным проверяющим тестом для $S^{2,2}$. Единственный исключительный случай — это когда в $S^{2,2}$ приходится добавить элемент E^1, и при неисправности этого элемента схема $S^{2,2}$ реализует функцию неисправности $g(\widetilde{x}) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, а $f(\widetilde{\sigma}_0) = 0$, $f(\widetilde{\sigma}) = 1$; но и в этом случае, как нетрудно заметить, единичный проверяющий тест для $S^{2,2}$ получается добавлением в T еще одного (третьего) набора $\widetilde{\sigma}'$, для которого $f(\widetilde{\sigma}') = 0$, а $g(\widetilde{\sigma}') = 1$.

§ 7. Схемы над базисом, содержащим функцию $x \,\&\, \overline{y}$ (или функцию $x \vee \overline{y}$)

При наличии в максимальном расширении Б$'$ базиса Б инверсии $\overline{x}$ получим один из случаев, уже рассмотренных в §§ 5, 6. Предположим, что инверсия в Б$'$ отсутствует; в этом случае в Б$'$ входят обе булевы константы. В элементе, реализующем $x \,\&\, \overline{y}$ (или $x \vee \overline{y}$), вход, отвечающий переменной x, будем считать положительным, а отвечающий переменной y — отрицательным.

Заданную функцию $f(\widetilde{x})$ реализуем схемой S^3 над $\{\overline{x}, x \,\&\, \overline{y}\}$, указанной в § 5. В эту схему добавим элемент E^0, реализующий константу 0, и элемент E^*, реализующий $x \,\&\, \overline{y}$. Отрицательный вход элемента E^* соединим с выходом элемента E^0, а положительный вход — с выходом схемы S^3; выход элемента E^* объявим выходом полученной таким образом всей схемы $S^{3,1}$. Если $f(\widetilde{\sigma}_0) = f(\widetilde{\sigma}_1) = 1$, то в множество $T = \{\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1\}$ добавим еще один какой-нибудь набор $\widetilde{\sigma}$, на котором $f(\widetilde{\sigma})=0$. Легко заметить, что полученная схема $S^{3,1}$ неизбыточна и T является единичным проверяющим тестом для $S^{3,1}$.

Далее в схеме $S^{3,1}$ все инверторы заменим на элементы, реализующие $x\,\&\,\overline{y}$; при этом если инвертор E^- заменяется элементом E^*, то на положительный вход элемента E^* подается константа 1 (с выхода элемента E^1), а отрицательный вход и выход элемента E^* соединяются с теми вершинами схемы $S^{3,1}$, с которыми были соединены соответственно вход и выход инвертора E^-. В итоге получим схему $S^{3,2}$. Очевидно, что при переходе в неисправное состояние некоторого инвертора E^- в схеме $S^{3,1}$ и при переходе в неисправное состояние заменяющего этот инвертор элемента E^* в схеме $S^{3,2}$ получается одна и та же функция неисправности как на выходе схемы $S^{3,1}$, так и на выходе схемы $S^{3,2}$. Следовательно, схема $S^{3,2}$ неизбыточна и множество T, содержащее не более трех наборов, является единичным проверяющим тестом для $S^{3,2}$.

Для двойственного случая — при наличии в базисе элемента $x\vee\overline{y}$ — построения и рассуждения незначительно изменяются почти очевидным образом: в схему S^4 над $\{\overline{x}, x\vee\overline{y}\}$ добавляется элемент E^1, реализующий константу 1 и элемент E^*, реализующий $x\vee\overline{y}$, в результате чего получается схема $S^{4,1}$. Если $f(\widetilde{\sigma}_0)=f(\widetilde{\sigma}_1)=0$, то в множество $T=\{\widetilde{\sigma}_0,\widetilde{\sigma}_1\}$ добавляется еще какой-нибудь набор $\widetilde{\sigma}$, на котором $f(\widetilde{\sigma})=1$; множество T будет единичным проверяющим тестом для $S^{4,1}$. Затем в $S^{4,1}$ все инверторы заменяются надлежащим образом элементами E^*, в результате чего схема $S^{4,1}$ переходит в неизбыточную схему $S^{4,2}$ с единичным проверяющим тестом T.

§ 8. Схемы над базисом, содержащим функцию $xy\oplus xz\oplus yz\oplus\alpha_1x\oplus\alpha_2y\oplus\alpha_3z\oplus\alpha_4$

Рассмотрим максимальное расширение Б$'$ заданного базиса Б. В [4] показано, что если в Б$'$ отсутствуют константы, то Б$'$ содержит по крайней мере одну из функций $x^\sigma y^\sigma$, $x^\sigma\vee y^\sigma$ ($\sigma\in\{0,1\}$); базисы, содержащие такие функции, уже рассматривались в § 4 и в § 6. Поэтому ниже в данном параграфе будем считать, что Б$'$ содержит по крайней мере одну булеву константу. Булев набор $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)$ определяет содержащуюся в базисе функцию. Из всех возможных наборов $\widetilde{\alpha}$ достаточно рассмотреть наборы $(1,1,1,\alpha_4)$, $(0,1,1,\alpha_4)$, $(0,0,1,\alpha_4)$ и $(0,0,0,\alpha_4)$, где $\alpha_4\in\{0,1\}$; остальные сводятся к указанным переименованием переменных функции $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x,y,z)=xy\oplus xz\oplus yz\oplus\alpha_1x\oplus\alpha_2y\oplus\alpha_3z\oplus\alpha_4$.

Пусть $\widetilde{\alpha}=(1,1,1,\alpha_4)$ и Б$'$ содержит функцию $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x,y,z)=xy\oplus xz\oplus yz\oplus\oplus x\oplus y\oplus z\oplus\alpha_4$ и константу β. Базис Б$''=$Б$'\cup\{xy\oplus\beta x\oplus\beta y\oplus x\oplus y\oplus\alpha_4\oplus\beta\}$ содержит нелинейную булеву функцию, существенно зависящую от двух переменных; схемы над такими базисами рассмотрены в предыдущих параграфах. Заметим, что все приводившиеся в предыдущих параграфах тесты из трех наборов содержали наборы, на которых реализуемая функция $f(\widetilde{x})$ принимает разные значения. В тесты, содержащие менее трех наборов, очевидно, при необходимости можно добавить по одному набору так, чтобы в любом таком тесте были наборы, на которых функция $f(\widetilde{x})$ принимает разные значения. Таким образом, далее можно считать, что для всякой схемы, построенной одним из описанных выше способов, имеется единичный проверяющий тест, содержащий не более трех наборов, и на каких-нибудь двух наборах из теста функция $f(\widetilde{x})$ принимает разные значения.

Булеву функцию $f^*(\widetilde{x})=f(\widetilde{x})\oplus\alpha_4\oplus\beta$ реализуем одним из описанных выше способов неизбыточной схемой S^5 над Б$''$ и возьмем для этой схемы единичный проверяющий тест T не более чем из трех наборов, среди которых присутствует пара наборов $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}'$, удовлетворяющих условию $f(\widetilde{\sigma}) \neq f(\widetilde{\sigma}')$.

В схему S^5 добавим элемент E^β, реализующий константу β, и элемент E^*, реализующий $\varphi_{\widetilde{\alpha}}$. Один вход элемента E^* соединим с выходом схемы S^5, другие два входа соединим с выходом элемента E^β, а выход элемента E^* объявим выходом всей полученной таким образом схемы $S^{5,1}$. Нетрудно заметить, что на выходе исправной схемы $S^{5,1}$ будет реализована функция $f(\widetilde{x})$. Неисправность элемента E^*, очевидно, обнаруживается на любом наборе из T. При переходе в неисправное состояние элемента E^β на выходе схемы $S^{5,1}$ будет реализована функция $f(\widetilde{x}) \oplus 1$, и неисправность будет обнаружена на любом наборе из T. Таким образом, схема $S^{5,1}$ неизбыточна и T остается (как и для S^5) единичным проверяющим тестом для $S^{5,1}$ (ведь для любого элемента E из S^5 в T найдется набор, на котором значение на выходе схемы S^5 изменится при переходе E в неисправное состояние, а в этом случае, очевидно, изменится значение и на выходе схемы $S^{5,1}$, и неисправность E будет обнаружена).

В схеме $S^{5,1}$ все двухвходовые элементы E^ψ, реализующие булеву функцию $\psi(x, y) = xy \oplus \beta x \oplus \beta y \oplus x \oplus y \oplus \alpha_4 \oplus \beta$, заменим на трехвходовые элементы E^φ, реализующие булеву функцию $\varphi_\alpha(x, y, z)$. При этом входам и выходу всякого заменяемого элемента E^ψ ставим в соответствие первые два входа и выход заменяющего элемента E^φ; третий вход каждого элемента E^φ соединяем с выходом элемента E^β (т. е. на третий вход каждого элемента E^φ подаем константу β). В итоге указанной замены получим схему $S^{5,2}$ над Б$'$, реализующую по-прежнему $f(\widetilde{x})$. Очевидно, что при исправном элементе E^β изменения на выходе схемы $S^{5,1}$ при переходе в неисправное состояние любого элемента E^ψ будут точно такие же, как и изменения на выходе схемы $S^{5,2}$ при переходе в неисправное состояние элемента E^φ, заменяющего E^ψ. Следовательно, $S^{5,2}$ останется (как и $S^{5,1}$) неизбыточной схемой, а T — единичным проверяющим тестом для нее.

Пусть $\widetilde{\alpha} = (0, 1, 1, \alpha_4)$ и Б$'$ содержит функцию $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz \oplus \oplus y \oplus z \oplus \alpha_4$ и константу β. В этом случае будем считать $f^*(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x}) \oplus \alpha_4$. Функцию $f^*(\widetilde{x})$ реализуем одним из описанных в предыдущих параграфах способов неизбыточной схемой S^6 над Б$'' =$ Б$' \cup \{\psi(x, y)\}$, где $\psi(x, y) = xy \oplus \oplus \beta x \oplus \beta y \oplus y \oplus \alpha_4 \oplus \beta$, и возьмем для этой схемы единичный проверяющий тест T не более чем из трех наборов, среди которых есть два набора $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}'$, удовлетворяющих условию $f(\widetilde{\sigma}) \neq f(\widetilde{\sigma}')$.

В схему S^6 добавим два элемента E_1^β, E_2^β, реализующих константу β, и элемент E^*, реализующий $\varphi_{\widetilde{\alpha}}$. Первый вход элемента E^*, отвечающий переменной x, соединим с выходом элемента E_1^β, второй вход, отвечающий переменной y, соединим с выходом элемента E_2^β, третий вход, отвечающий переменной z, соединим с выходом схемы S^6, а выход элемента E^* объявим выходом всей полученной таким образом схемы $S^{6,1}$. Легко заметить, что на выходе исправной схемы $S^{6,1}$ будет реализована функция $f(\widetilde{x})$.

Неисправность элемента E^* обнаруживается на любом наборе из T. При переходе в неисправное состояние одного из элементов E_1^β, E_2^β на выходе схемы $S^{6,1}$ окажется реализованной, как нетрудно заметить, некоторая булева константа δ, и такая неисправность будет обнаружена хотя бы на одном наборе из T, на котором $f(\widetilde{x})$ обращается в $\overline{\delta}$. Таким образом, схема $S^{6,1}$ неизбыточна и T — единичный проверяющий тест для этой схемы.

Заменим теперь все двухвходовые элементы E^ψ, реализующие булеву функцию $\psi(x, y)$, на трехвходовые элементы E^φ, реализующие булеву функцию $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x, y, z)$. При этом входам и выходу всякого заменяемого элемента E^{ψ} ставим в соответствие первые два входа и выход заменяющего элемента E^{φ}, а третий вход каждого элемента E^{φ} соединяем с выходом элемента E_1^{β}. В итоге получим (как и в предыдущем случае при $\widetilde{\alpha}=(1, 1, 1, \alpha_4)$) неизбыточную схему $S^{6,2}$ над Б′, реализующую $f(\widetilde{x})$, для которой T останется единичным проверяющим тестом.

Пусть $\widetilde{\alpha}=(0, 0, 1, \alpha_4)$ и Б′ содержит функцию $\varphi_{\alpha}(x, y, z)=xy\oplus xz\oplus \oplus yz\oplus z\oplus\alpha_4$ и константу β. Положим $f^*(\widetilde{x})=f(\widetilde{x})\oplus\alpha_4\oplus\beta$. Функцию $f^*(\widetilde{x})$ реализуем одним из описанных выше способов неизбыточной схемой S^7 над Б″ $=$ Б′ $\cup\{\psi(x, y)\}$, где $\psi(x, y)=xy\oplus\beta x\oplus\beta y\oplus\alpha_4\oplus\beta$, и возьмем для этой схемы единичный проверяющий тест T не более чем из трех наборов, среди которых есть наборы $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}'$ такие, что $f(\widetilde{\sigma})\neq f(\widetilde{\sigma}')$.

В схему S^7 добавим элемент E^{β}, реализующий константу β, и элемент E^*, реализующий $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x, y, z)$. Первые два входа элемента E^*, отвечающие переменным x и y, соединим с выходом элемента E^{β}, третий вход элемента E^*, отвечающий переменной z, соединим с выходом схемы S^7; выход элемента E^* объявим выходом всей полученной таким образом схемы $S^{7,1}$. Легко заметить, что на выходе исправной схемы $S^{7,1}$ будет реализована функция $f(\widetilde{x})$, а при переходе в неисправное состояние любого одного из добавленных элементов E^{β}, E^* на выходе схемы $S^{7,1}$ будет реализована функция $\overline{f}(\widetilde{x})$. Значит, схема $S^{7,1}$ неизбыточна и T — единичный проверяющий тест для $S^{7,1}$.

Заменим теперь в схеме $S^{7,1}$ все двухвходовые элементы E^{ψ}, реализующие булеву функцию $\psi(x, y)$, на трехвходовые элементы E^{φ}, реализующие булеву функцию $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x, y, z)$. При этом входам и выходу заменяемого элемента E^{ψ} ставим в соответствие первые два входа и выход заменяющего элемента E^{φ}, а третий вход каждого элемента E^{φ} соединим с выходом элемента E^{β}. В итоге получим неизбыточную схему $S^{7,2}$ над Б′, реализующую $f(\widetilde{x})$, для которой T останется единичным проверяющим тестом.

Пусть $\widetilde{\alpha}=(0, 0, 0, \alpha_4)$, Б′ содержит функцию $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x, y, z)=xy\oplus xz\oplus yz\oplus \oplus\alpha_4$ и константу β. Предположим, что Б′ содержит также и константу $\overline{\beta}$. Положим $f^*(\widetilde{x})=f(\widetilde{x})\oplus\alpha_4$. Функцию $f^*(\widetilde{x})$ реализуем одним из описанных выше способов неизбыточной схемой S^8 над Б″ $=$ Б′ $\cup\{\psi(x, y)\}$, где $\psi(x, y)=xy\oplus\beta x\oplus\beta y\oplus\alpha_4$, и возьмем для этой схемы единичный проверяющий тест T не более чем из трех наборов, среди которых есть такие наборы $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}'$, что $f(\widetilde{\sigma})\neq f(\widetilde{\sigma}')$.

В схему S^8 добавим элементы E^0, E^1, реализующие константы 0, 1, и элемент E^*, реализующий $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x, y, z)$. Первый и второй входы элемента E^* соединим соответственно с выходами элементов E^0 и E^1, а третий вход элемента E^* соединим с выходом схемы S^8; выход элемента E^* объявим выходом всей полученной таким образом схемы $S^{8,1}$. Легко заметить, что на выходе исправной схемы $S^{8,1}$ будет реализована функция $f(\widetilde{x})$.

Неисправность элемента E^* в $S^{8,1}$ обнаруживается на любом наборе из T. При переходе в неисправное состояние одного из элементов E^0, E^1 на выходе схемы $S^{8,1}$, как нетрудно заметить, будет реализована некоторая константа δ и эта неисправность будет обнаружена на наборе $\widetilde{\sigma}$ из T, на котором $f(\widetilde{\sigma})=\overline{\delta}$. Значит, схема $S^{8,1}$ неизбыточна и T останется единичным проверяющим тестом для $S^{8,1}$.

В схеме $S^{8,1}$ все двухвходовые элементы E^{ψ}, реализующие функцию $\psi(x, y)$, заменим на трехвходовые элементы E^{φ}, реализующие функцию $\varphi_{\widetilde{\alpha}}(x, y, z)$. Входу и выходу всякого заменяемого элемента E^{ψ} ставим в соответствие первые два входа и выход заменяющего элемента E^{φ}, а третий вход каждого элемента E^{φ} соединим с выходом элемента E^{β}. В итоге получим неизбыточную схему $S^{8,2}$ над Б′, реализующую $f(\widetilde{x})$, для которой T будет единичным проверяющим тестом.

Предположим теперь, что в Б′ имеется только одна константа β. В силу полноты расширения Б′ в нем найдется функция ψ', не сохраняющая константу β. При отождествлении переменных у функции ψ' получим функцию от одной переменной, не сохраняющую константу β и отличную от константы $\overline{\beta}$ (которая по предположению отсутствует в Б′). Значит, Б′ содержит инверсию $\overline{x}$. Возьмем цепочку Z из двух элементов: элемента E^{β}, реализующего константу β, и инвертора E^{-}. Вход цепочки Z совпадает со входом элемента E^{β}, а выход этого элемента соединяется со входом инвертора E^{-}; выход инвертора является и выходом цепочки Z. Цепочка Z, очевидно, эквивалентна элементу $E^{\overline{\beta}}$, реализующему константу $\overline{\beta}$ и присутствующему в схеме $S^{8,2}$. Заменим элемент $E^{\overline{\beta}}$ в $S^{8,2}$ цепочкой Z и, согласно лемме 4, получим схему, реализующую $f(\widetilde{x})$, для которой T остается единичным проверяющим тестом.

Для базисов, рассматриваемых в данном параграфе, теорема доказана.

§ 9. Схемы над произвольным базисом

Пусть Б — произвольный полный конечный базис. В [4, § 10] показано, что максимальное расширение Б′ базиса Б содержит либо нелинейную булеву функцию от двух переменных, т. е. функцию вида $x^{\alpha}y^{\beta}$ или $x^{\alpha} \vee y^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, либо функцию $xy \oplus xz \oplus yz \oplus \alpha_1 x \oplus \alpha_2 y \oplus \alpha_3 z \oplus \alpha_4$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \{0, 1\}$. Следовательно, неизбыточную схему над Б′ (а значит, и над Б) для заданной функции $f(\widetilde{x})$ и единичный проверяющий тест для нее, содержащий не более трех наборов, можно построить одним из указанных в предыдущих параграфах способов. Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваценко С. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // XII Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 98.
2. Коваценко С. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000. — № 2. — С. 45–47.
3. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.
5. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
6. Редькин Н. П. О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 196.
7. Чегис И. Я., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.
9. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

Поступило в редакцию 04 II 2003