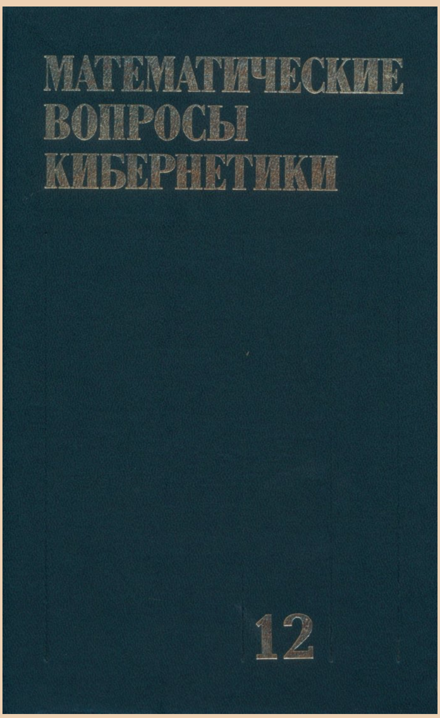

А. А. Сапоженко

Доказательство гипотезы Камерона-Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КАМЕРОНА — ЭРДЕША О ЧИСЛЕ МНОЖЕСТВ, СВОБОДНЫХ ОТ СУММ *)

А. А. САПОЖЕНКО

(МОСКВА)

Подмножество A целых чисел называется *свободным от сумм*, (сокращенно, *МСС*) если для любых $a, b \in A$ число $a+b$ не принадлежит множеству A. Для любых действительных чисел q и p обозначим через $[q, p]$ множество натуральных чисел x таких, что $q \leqslant x \leqslant p$. Семейство всех подмножеств $A \subseteq [t, n]$, свободных от сумм, обозначим через $S(t, n)$. Пусть $s(t, n) = |S(t, n)|$, а $s(n) = |S(1, n)|$. В 1988 г. П. Камерон и П. Эрдеш [9] предположили, что $s(n) = O(2^{n/2})$. Они доказали, что $s(n/3, n) = O(2^{n/2})$ и, кроме того, что существуют константы c_0 и c_1, такие, что $s(n/3, n) \sim c_0 2^{\lceil n/2 \rceil}$ для четных n и $s(n/3, n) \sim c_1 2^{\lceil n/2 \rceil}$ для нечетных n. Статья [9] инициировала ряд работ по перечислению МСС во множестве целых чисел и в группах. Н. Алон [7], Н. Калкин [8], доказали, что **) $\log s(n) \leqslant (n/2)(1+o(1))$. В. Лев, Т. Лучак и Т. Шон [10] и А. А. Сапоженко [3] получили асимптотику для числа МСС в абелевых группах четного порядка. К. Г. Омельянов и А. А. Сапоженко [1] доказали, что $s(n/4, n) = O(2^{n/2})$. Результат получен без использования фактов из [9]. Ими же было доказано [2], что $s(q, n) = O(2^{n/2})$ при $q \geqslant n^{3/4}\sqrt{\log n}$. Пусть $S^1(n)$ — семейство всех подмножеств нечетных чисел из отрезка $[1, n]$ и $s^1(n) = |S^1(n)| = 2^{\lceil n/2 \rceil}$. Целью данной статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.

$$s(n) \sim s(n/3, n) + s^1(n). \tag{1}$$

Содержательно это означает, что семействами $S^1(n)$ и $S(n/3, n)$ в основном исчерпывается семейство МСС в отрезке $[1, n]$ натурального ряда. Отсюда вытекает справедливость гипотезы Камерона — Эрдеша. Автору стало известно, что аналогичный результат получен недавно Б. Грином [11]. Из (1) и [9] следует, что $s(n) \sim (c_0+1)2^{\lceil n/2 \rceil}$ для четных n и $s(n) \sim (c_1+1)2^{\lceil n/2 \rceil}$ для нечетных n, где c_0, c_1 — упомянутые выше константы из статьи [9].

Доказательство основного утверждения проводится в два этапа. Пусть $\widetilde{S}(n) = S(n) \setminus (S(n/3, n) \cup S^1(n))$. На первом этапе (теорема 4) будет доказано, что для семейства $\widetilde{S}(n)$ существует так называемая почти правильная

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00266).

**) Везде $\log m = \log_2 m$.

система контейнеров. На втором доказывается, что $|\widetilde{S}(n)| = o(2^{n/2})$. Отсюда вытекает теорема 1.

§ 1. Системы контейнеров

Положим $N = [1, n]$, и пусть N^0 и N^1 — соответственно подмножества четных и нечетных чисел из N. Рассмотрим два семейства $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ подмножеств множества N. Будем говорить, что семейство $\mathscr{B}$ *покрывает* семейство $\mathscr{A}$, если для всякого $A \in \mathscr{A}$ существует $B \in \mathscr{B}$ такое, что $A \subseteq B$. Множества $B \in \mathscr{B}$ будем называть *контейнерами*, а семейство $\mathscr{B}$ — *системой контейнеров для* $\mathscr{A}$. В дальнейшем везде $R_{i,p} = [i, i+p-1]$, а $L_{i,p} = [i-p+1, i]$. Если X — интервал в N, то множество $B \cap X$ будем называть X*-фрагментом* множества B. Будем использовать обозначение $B_{i,p}$ для множества $B \cap X$, если $X = R_{i,p}$. Везде далее $\widehat{q} = n^{3/4} \log n$ и $\widetilde{q} = \widehat{q} \log n$.

Систему $\mathscr{B}$ контейнеров для $\mathscr{A}$ будем называть *правильной*, если выполнены следующие условия:

1) для достаточно больших n и любого $B \in \mathscr{B}$

$$|B| \leqslant n/2 + O(\widehat{q}); \tag{2}$$

2) для достаточно больших n

$$|\mathscr{B}| \leqslant 2^{o(\widehat{q})}; \tag{3}$$

3) для любых $i \in [\widetilde{q}, n - \widetilde{q}]$, $p \in [\widetilde{q}, n - i]$

$$\bigl||B_{i,p}| - p/2\bigr| \leqslant \widehat{q}; \tag{4}$$

4) для любых $\sigma \in \{0, 1\}$, $i \in [\widetilde{q}, n - \widetilde{q}]$ и $p \in [\widetilde{q}, n - i]$

$$\bigl||B_{i,p} \cap N^\sigma| - p/4\bigr| \leqslant \widehat{q}. \tag{5}$$

Систему $\mathscr{B}$ контейнеров для $\mathscr{A}$ будем называть *почти правильной*, если она является правильной для некоторого подсемейства $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ такого, что $|\mathscr{A} \setminus \mathscr{A}'| = o(2^{n/2})$. Мы сводим задачу об оценке $s(n)$ к оценке числа независимых множеств в графе Кэли. Если $F \subseteq [1, n]$ и $V \subseteq [1, n]$, то граф $\mathscr{C}_F(V)$ с множеством вершин V, в котором пара $\{i, j\} \subseteq V$, $i \neq j$, является ребром тогда и только тогда, когда $|i - j| \in F$ или $i + j \in F$, назовем *графом Кэли* на множестве V относительно F. Подмножество A вершин графа G называется *независимым*, если подграф, порожденный множеством A, не содержит ребер. Ясно, что для всякого МСС $A \subseteq V$ и любого $F \subseteq A$ множество A независимо в графе $\mathscr{C}_F(V)$. Пусть $\mathscr{I}(G)$ — семейство независимых множеств графа G, а $I(G) = |\mathscr{I}(G)|$. Семейство $\mathscr{B}$ подмножеств вершин графа G назовем *покрывающим*, если для всякого $A \in \mathscr{I}(G)$ существует $B \in \mathscr{B}$ такое, что $A \subseteq B$. Пусть ∂v — множество вершин, смежных с v, а $\partial A = \bigl(\bigcup\limits_{v \in A} \partial v\bigr) \setminus A$. Пусть $l \leqslant k - \theta \leqslant k + \theta \leqslant p$. Граф с p вершинами, в котором минимальная степень вершины не меньше l, максимальная степень вершины не больше m, доля вершин, степень которых больше $k + \theta$, не превышает ε, доля вершин, степень которых меньше $k - \theta$, не превышает δ, назовем $(p, l, k, m, \delta, \varepsilon, \theta)$*-графом*.

Теорема 2. *Пусть $G = (V, E)$ является $(p, l, k, m, \delta, \varepsilon, \theta)$-графом, $k > 3$.*

Тогда существует покрывающее семейство $\mathscr{B}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) *для всякого* $D \in \mathcal{B}$

$$|D| \leqslant p\frac{k+\delta(k-l)+\varepsilon(m-k)+\theta}{2k-\sqrt{k\log k}}; \tag{6}$$

2) *для достаточно больших* p

$$|\mathcal{B}| \leqslant 2^{p\sqrt{(\log k)/k}}; \tag{7}$$

3) *для достаточно больших* p

$$I(G) \leqslant 2^{p/2\left(1+\delta\left(1-l/k\right)+\varepsilon\left(m/k-1\right)+O\left(\theta/k+\sqrt{(\log k)/k}\right)\right)}. \tag{8}$$

Доказательство. Идея доказательства основана на соображениях из [4]. Для произвольного независимого множества A графа G построим множество T с помощью следующей пошаговой процедуры. Зафиксируем некоторое $0<\lambda<l$.

Шаг 1. Пусть u_1 — произвольная вершина из A. Положим $T_1=\{u_1\}$. Пусть сделано m шагов и построено множество $T_m=\{u_1,\ldots,u_m\}$.

Шаг $m+1$. Если существует $u_{m+1}\in A$ такая, что $|\partial u_{m+1}\setminus\partial T_m|\geqslant\lambda$, то полагаем $T_{m+1}=T_m\cup\{u_{m+1}\}$. В противном случае процесс заканчивается и полагаем $T=T_m$. Определим для каждого $T\subseteq V$ множество $D=D(T)=\{v\in V\setminus\partial T\colon |\partial v\setminus\partial T|<\lambda\}$. Из определений следует, что для построенного выше T:

1) $A\subseteq D(T)$; 2) $|T|\leqslant|\partial A|/\lambda\leqslant p/\lambda$.

Ясно, что семейство $\mathcal{B}_\lambda=\{D(T)\colon T\subseteq V, |T|\leqslant p/\lambda\}$ является покрывающим для G. Оценим сверху $|D(T)|$. Обозначим через D_1 ту часть вершин $v\in D(T)$, для которых $|\partial v\cap\partial T|\geqslant k-\theta-\lambda$, а через D_2 — множество вершин $v\in\partial T$, для которых $|\partial v|>k+\theta$. Рассмотрим двудольный подграф графа G с долями вершин $D=D(T)$ и ∂T. Степень каждой вершины из D_1 в этом двудольном подграфе не меньше $k-\lambda-\theta$, а степень каждой вершины из $\partial T\setminus D_2$ не больше $k+\theta$. Поэтому

$$|D_1|(k-\theta-\lambda)+|D\setminus D_1|(l-\lambda)\leqslant\Big(|\partial T|-|D_2|\Big)(k+\theta)+|D_2|m.$$

С учетом того, что $|D|-\delta p\leqslant|D_1|$, $|\partial T|\leqslant p-|D|$ и $|D_2|\leqslant\varepsilon p$, имеем

$$|D|\leqslant p\frac{k+\theta+\delta(k-\theta-l)+\varepsilon(m-k+\theta)}{2k-\lambda}.$$

Отсюда, положив $\lambda=\lfloor\sqrt{k\log k}\rfloor$, получаем (6). Неравенство (7) следует из того, что число множеств T при $k>3$ и достаточно больших p не превосходит

$$\sum_{i\leqslant p/\lfloor\sqrt{k\log k}\rfloor}\binom{p}{i}\leqslant 2^{p\sqrt{\frac{\log k}{k}}}.$$

Из (6) и (7) следует (8).

Везде в дальнейшем $\varphi=\lceil\sqrt{n}\,\rceil$, $\psi=\lfloor\varphi\sqrt{\log n}\rfloor$, $\gamma_n=n^{-1/4}\sqrt{\log n}$. Во всех рассматриваемых случаях мы имеем дело с графами Кэли вида $G=\mathcal{C}_F(V)$, где $V\subseteq[1,n]$, $F\subseteq L_{q,\psi}$, $|F|=\varphi$, $\psi\leqslant q\leqslant n$.

Пример 1. Пусть $G=\mathcal{C}_F(V)$, где $V=[i,i+p-1]$, $|F|=\varphi$, $F\subseteq L_{q,\psi}$, $q<i\leqslant n-p+1$, $p>2q$. Тогда в графе G первые и последние $q-\psi$ вершин имеют степень φ, степень вершин в интервале $[i+q,i+p-q-1]$ равна 2φ, а остальные 2ψ вершин имеют степени, лежащие между φ и 2φ. Этот граф является $(p, l, k, k, \delta, 0, 0)$-графом с $l=\varphi$, $k=2\varphi$, $\delta=2q/p$. (Заметим, что он является также $(p, l, l, k, 0, \varepsilon, 0)$-графом с $\varepsilon=(p-2q)/p$). Неравенство (8) принимает вид

$$I(G) \leqslant 2^{\frac{p}{2}\left(1+\frac{q}{p}+O\left(\sqrt{\frac{\log\varphi}{\varphi}}\right)\right)} = 2^{\frac{p+q}{2}+O(p\gamma_n)}. \tag{9}$$

Пример 2. Пусть $q \geqslant \widehat{q}$, q — четно, $G=\mathscr{C}_F(V)$, где $F \subseteq L_{q,\psi} \cap N^0$, $|F|=k=\varphi$, $V=[1,q]\cap N^1$. Степени вершин в интервале $[1,\psi]\cap N^1$ лежат между k и $2k$, а степени всех остальных вершин равны k. Граф G является $(p, k, k, 2k, 0, \varepsilon, 0)$-графом с $p=\lceil q/2\rceil$ и $\varepsilon=\psi/p$. Неравенство (8) имеет вид

$$I(G) \leqslant 2^{q/4+\psi/2+O(q\gamma_n)}. \tag{10}$$

Пусть $A \subseteq N$, $\varphi=\lceil\sqrt{n}\,\rceil$, $\psi=\lfloor\varphi\sqrt{\log n}\,\rfloor$ и $q\in[\psi,n]$. Отрезок $L_{q,\psi}$ назовем *плотным относительно* A, если $|A\cap L_{q,\psi}| \geqslant \varphi$. Плотный относительно A отрезок $L_{q,\psi}$ назовем *левым*, если при любом $\psi \leqslant k < q$ отрезок $L_{k,\psi}$ не является плотным относительно A. Обозначим через $l(A)$ правый конец левого плотного относительно A отрезка. Положим $\widehat{S}(q,n)=\{A\in S(n)\colon\ l(A)=q\}$ и $\widehat{s}(q,n)=|\widehat{S}(q,n)|$. Пусть, далее, $\widehat{S}_<(n)=\bigcup\limits_{q<\widehat{q}}\widehat{S}(q,n)$ и $\widehat{s}_<(n)=|\widehat{S}_<(n)|$. Доказательство леммы 1 опирается на следующий факт из [2].

Теорема 3. *Пусть* $\varepsilon_n=\log\log n/\sqrt{\log n}$. *Тогда*

$$\widehat{s}(q,n) \leqslant \begin{cases} 2^{n/2-q/4+O(q\varepsilon_n)} & \text{при } q\leqslant 4n/9,\\ 2^{q+O(n^{3/4}\sqrt{\log n})} & \text{при } 4n/9<q<n/2-\widehat{q},\\ 2^{n-q+O(n\varepsilon_n)} & \text{при } n/2+\widehat{q}<q\leqslant n. \end{cases} \tag{11}$$

Кроме того, существуют абсолютные константы c_2, c_3, $0<c_2\leqslant c_3$, *такие, что*

$$c_2 2^{n/2} \leqslant \sum_{n/2-\widehat{q}\leqslant q\leqslant n/2+\widehat{q}} \widehat{s}(q,n) \leqslant c_3 2^{n/2}. \tag{12}$$

Пусть $\widehat{s}_{n+1}(n)$ — число множеств $A\subseteq N$, не имеющих плотных отрезков. Положим

$$\widehat{s}_1(n)=\sum_{\widehat{q}\leqslant q\leqslant n+1}\widehat{s}(q,n),\quad \widehat{s}_2(n)=\sum_{|q-n/2|\leqslant\widehat{q}}\widehat{s}(q,n),$$

$$\widehat{s}_3(n)=\sum_{n/3\leqslant q\leqslant n+1}\widehat{s}(q,n).$$

Лемма 1.

$$s(n)\sim\widehat{s}_2(n)+\widehat{s}_<(n). \tag{13}$$

Доказательство. В силу (11) и (12) имеем $s(n)=\widehat{s}_<(n)+\widehat{s}_1(n)\sim$ $\sim\widehat{s}_<(n)+\widehat{s}_2(n)$.

Лемма 2. *Пусть G — n-вершинный граф, в котором степень каждой вершины равна* 1 *или* 2. *Тогда*

$$I(G)\leqslant 3^{n/2}. \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что всякий граф G, удовлетворяющий условиям леммы, представляет собой объединение непересекающихся цепей. Нетрудно видеть (см., например, [3]), что для цепи P с $k>1$ вершинами $I(P)\leqslant 3^{k/2}$. Поскольку $I(G)=\prod_P I(P)$, то отсюда следует (14).

Отрезок $L_{k,\psi}$ назовем *четным плотным* относительно A, если $|L_{k,\psi}\cap \cap N^0\cap A|\geqslant\varphi$. Через $l^0(A)$ обозначим правый конец левого четного плотного относительно A отрезка. Положим $\widetilde{S}(n)=\{A\in S(n)\colon\ l^0(A)<\widehat{q}\}$.

Лемма 3.

$$s(n)\sim\widehat{s}_2(n)+s^1(n)+|\widetilde{S}(n)|. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{S}'(n)=\{A\in\widehat{S}_<(n)\colon\ 1\leqslant|A\cap N^0|\leqslant\delta n/2\}$, где δ таково, что $\delta\log(e/\delta)+(1/2)\log 3<0.9$. Всякое множество $A\in\widehat{S}'(n)$ представимо в виде $A=A'\cup A''$, где $A'\subseteq N^0$, а множество A'' независимо в графе $G=\mathscr{C}_{\{v\}}(N^1)$, где v — произвольное (например, наименьшее) число из A'. Поскольку G есть объединение непересекающихся цепей, то с учетом (14) имеем для достаточно больших n

$$|\widehat{S}'(n)|\leqslant\sum_{i\leqslant\delta n/2}\binom{n/2}{i}3^{(n+1)/4}\leqslant 2^{((n+1)/2)\left(\delta\log(e/\delta)+(1/2)\log 3\right)}\leqslant 2^{(0.45n)}. \tag{16}$$

Пусть $\widehat{S}''(n)=\widehat{S}_<(n)\setminus(S^1(n)\cup\widehat{S}'(n)\cup\widetilde{S}(n))$. Ясно, что левый четный плотный отрезок существует для всякого $A\in\widehat{S}''(n)$. Положим

$$\widehat{S}''(q^0,n)=\{A\in\widehat{S}''(n)\colon\ l^0(A)=q^0\}.$$

Всякое множество $A\in\widehat{S}''(n)$ может быть построено следующим образом. Выберем некоторые целые q, q^0, $q\leqslant\widehat{q}$, $q^0\in N^0$, $q^0>\widehat{q}$. Число пар (q,q^0) не больше n^2. Далее выберем подмножество $A_1\subseteq[2,q^0]\cap N^0$ так, чтобы $L_{q^0,\psi}$ оказался левым четным плотным отрезком относительно A_1. Тем самым определится множество $F^0=A_1\cap L_{q^0,\psi}$ такое, что $|A_1\cap L_{q^0,\psi}|=\varphi$. Поскольку доля чисел из A, содержащихся в $[1,q^0]$, не больше $\varphi/\psi\sim 1/\sqrt{\log n}$, то число множеств A_1 не больше $2^{O(q^0\varepsilon_n)}$, где $\varepsilon_n=\log\log n/\sqrt{\log n}$.

Далее выберем множество A_2, независимое в графе $G_1=\mathscr{C}_{F^0}([1,q^0]\cap \cap N^1)$, так, чтобы $L_{q,\psi}$ оказался левым плотным отрезком относительно $A_1\cup \cup A_2$. Тем самым определится множество $F=(A_2\cup A_1)\cap L_{q,\psi}$ такое, что $|F|=\varphi$. В силу (10) число множеств A_2 не больше $2^{q^0/4+\psi/2+O(q^0\gamma_n)}$.

Наконец, выберем множество A_3, независимое в графе $G_2=\mathscr{C}_F([q^0+ +1,n])$. В силу (9) число таких множеств не больше $2^{(n-q^0+q)/2+O(n\gamma_n)}$. Положим $A=A_1\cup A_2\cup A_3$. Ясно, что $\widehat{S}''(n)$ исчерпывается такими A. Имеем

$$\begin{aligned}|\widehat{S}''(n)|&\leqslant\sum_{q,q^0}\sum_{A_1}\sum_{A_2\in\mathscr{I}(G_1)}I(G_2)\leqslant\\ &\leqslant n^2 2^{O(q^0\varepsilon_n)+q^0/4+\psi/2+O(q^0\gamma_n)+(n-q^0+q)/2+O(n\gamma_n)}\leqslant\\ &\leqslant 2^{(n/2)-q^0/4+q/2+O(q^0\varepsilon_n)}.\end{aligned}$$

Если $q\leqslant\widehat{q}/3$, то с учетом неравенства $q^0\geqslant\widehat{q}$ отсюда следует, что

$$|\widehat{S}''(n)|\leqslant 2^{(n/2)-q^0/12+O(q^0\varepsilon_n)}=o(2^{n/2}). \tag{17}$$

Если $q>\widehat{q}/3$, то воспользуемся первым неравенством (11). Имеем

$$|\widehat{S}''(n)|\leqslant\sum_{\widehat{q}/3\leqslant q<\widehat{q}}\widehat{s}(q,n)\leqslant\sum_{\widehat{q}/3\leqslant q<\widehat{q}}2^{n/2-q/4+O(\widehat{q}\varepsilon_n)}\leqslant 2^{n/2-\widehat{q}/12+O(\widehat{q}\varepsilon_n)}=o(2^{n/2}). \tag{18}$$

Из (13), (16), (17) и (18) получаем (15).

С л е д с т в и е 1.

$$s(n)\sim s(n/3,n)+s^1(n)+|\widetilde{S}(n)|. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что $s(n/3,n)\sim\widehat{s}_2(n)$. Тогда утверждение будет следовать из (15). В силу теоремы 3 имеем

$$s(n/3,n)\leqslant\widehat{s}_3(n)\leqslant\widehat{s}_2(n)+o(2^{n/2}). \tag{20}$$

Пусть $\widehat{S}_2'(n)=\bigcup\limits_{|q-n/2|\leqslant\widehat{q}}\widehat{S}(q,n)\setminus S(n/3,n)$. Для каждого $A\in\widehat{S}_2'(n)$ существует $v\in A$ такое, что $v<n/3$. Кроме того,

$$|A\cap[1,n/2-\widehat{q}]|\leqslant(n\varphi/\psi)(1+o(1))$$

и $A\cap[n/2-\widehat{q},n]$ является независимым множеством в графе $G=\mathscr{C}_{\{v\}}([n/2-\widehat{q},n])$. По лемме 2 имеем $I(G)\leqslant 3^{(n/2+\widehat{q})/2}$. Отсюда при достаточно больших n имеем

$$|\widehat{S}_2'(n)|\leqslant\sum_{i\leqslant(n\varphi/\psi)}\binom{n/2-\widehat{q}}{i}3^{(n/2+\widehat{q})/2}\leqslant 2^{n\varepsilon_n+(n/2+\widehat{q})(\log 3)/2}=o(2^{n/2}). \tag{21}$$

Из (20) и (21) получаем $s(n/3,n)\sim\widehat{s}_2(n)$, а значит, и (19).

Пусть $q<\widehat{q}$, q четно и $\mathscr{A}_q$ — семейство тех подмножеств $A'\subseteq[1,q]\cap N^0$, для которых $l^0(A')=q$. Положим

$$k=\max\{i\colon\ [i,q]\cap A'=\varphi\},\quad F=F(A')=A'\cap[k,q],\quad\text{и}\quad |F|=\varphi.$$

Пусть $\mathscr{B}$ — покрывающее семейство графа G и $B\in\mathscr{B}$. Обозначим через $\mathscr{I}(B)$ подсемейство $A\in\mathscr{I}(G)$, таких, что $A\subseteq B$. Пусть $I(B)=|\mathscr{I}(B)|$. Положим

$$\mathscr{I}(\mathscr{B})=\bigcup_{B\in\mathscr{B}}\mathscr{I}(B)\quad\text{и}\quad I(\mathscr{B})=|\mathscr{I}(\mathscr{B})|.$$

Покрывающее семейство $\mathscr{B}$ графа G назовем *стандартным*, если оно удовлетворяет условиям (6) и (7).

Л е м м а 4. *Пусть $\psi\leqslant q\leqslant\widehat{q}$, $A'\in\mathscr{A}_q$, $F=F(A')$ и $G=\mathscr{C}_F([q+1,n])$. Пусть покрывающее семейство $\mathscr{B}$ графа G является стандартным, а подсемейство $\mathscr{B}'\subseteq\mathscr{B}$ состоит из всех $B\in\mathscr{B}$, удовлетворяющих хотя бы одному из условий:*

1) *существуют $i\in[\widetilde{q},n-\widetilde{q}]$, $p\in[\widetilde{q},n-i]$ такие, что*

$$\big||B_{i,p}|-p/2\big|>\widehat{q}; \tag{22}$$

2) *существуют $\sigma\in\{0,1\}$, $i\in[\widetilde{q},n-\widetilde{q}]$, $p\in[\widetilde{q},n-i-4\widehat{q}]$ или $p=n-i$ такие, что*

$$\big||B_{i,p}\cap N^\sigma|-p/4\big|>\widehat{q}. \tag{23}$$

Тогда

$$I(\mathscr{B}') \leqslant 2^{n/2 - \widehat{q}/2 + o(\widehat{q})}. \tag{24}$$

Доказательство. Числа i, p из условия леммы будем называть допустимыми. Пусть покрывающее семейство $\mathscr{B}$ графа G является стандартным, $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ и $B \in \mathscr{B}'$. Можно считать, что B однозначно определяет пару (i, p) допустимых чисел, для которой удовлетворяются условия (22) или (23). Положим

$$V_1 = [q+1, i-1], \quad V_2 = [i, i+p-1] \ \text{ и } \ V_3 = [i+p, n],$$
$$B_1 = B \cap [q+1, i-1], \quad B_2 = B_{i,p} \ \text{ и } \ B_3 = B \cap [i+p, n].$$

Пусть $H_j = \mathscr{C}_F(V_j)$, $j = 1, 2, 3$. Из (8) и (9) следует, что

$$\log I(H_j) = (|V_j| + q)/2 + o(q).$$

Обозначим через $\mathscr{B}_1$ семейство таких $B \in \mathscr{B}$, что $|B_{i,p}| > p/2 + \widehat{q}$ для некоторых допустимых i и p. Поскольку $\mathscr{B}$ удовлетворяет условию (6) при $p = n - q$, $l = \varphi$, $k = m = 2l$, $\theta = 0$ и $\delta = 2q/p$, то $|B| \leqslant n/2 + o(q)$. С учетом неравенства $|B_2| > p/2 + \widehat{q}$ имеем

$$|B_1| + |B_3| = |B| - |B_2| < n/2 + o(\widehat{q}) - p/2 - \widehat{q}.$$

Из сказанного выше получаем, что

$$I(\mathscr{B}_1) \leqslant \sum_{B \in \mathscr{B}_1} 2^{|B_1| + |B_3|} I(H_2) \leqslant 2^{n/2 - \widehat{q}/2 + o(\widehat{q})}. \tag{25}$$

Обозначим через $\mathscr{B}_2$ семейство таких $B \in \mathscr{B}$, что $|B_{i,p}| < p/2 - \widehat{q}$ для некоторых допустимых i и p. Имеем (при $p = n - i$, полагаем $I(H_3) = 1$)

$$I(\mathscr{B}_2) \leqslant \sum_{B \in \mathscr{B}_2} I(H_1) 2^{|B_2|} I(H_3) \leqslant 2^{n/2 - \widehat{q}/2 + o(\widehat{q})}. \tag{26}$$

Для $\sigma \in \{0, 1\}$ пусть $\mathscr{B}_3^\sigma$ $(\mathscr{B}_4^\sigma)$ есть семейство таких $B \in \mathscr{B}$, что $|B_{i,p} \cap N^\sigma| > p/4 + \widehat{q}$ $\big($соответственно $|B_{i,p} \cap N^\sigma| < p/4 - \widehat{q}\big)$ при некоторых допустимых i, p. Оценим $I(\mathscr{B}_3^\sigma)$. Пусть $H_j^\sigma = \mathscr{C}_F(V_j \cap N^\sigma)$, $j = 1, 2, 3$. Из (8) следует, что

$$\log I(H_j^\sigma) = (|V_j \cap N^\sigma| + q)/4 + o(q).$$

Аналогично (25) получаем

$$I(\mathscr{B}_3^\sigma) \leqslant \sum_{B \in \mathscr{B}_3^\sigma} 2^{|B| - |B_{i,p} \cap N^\sigma|} I(H_2^\sigma) \leqslant 2^{n/2 - 3\widehat{q}/4 + o(\widehat{q})}. \tag{27}$$

Оценим $I(\mathscr{B}_4^\sigma)$. Положим $V^\sigma = [q+1, n] \cap N^\sigma$. Аналогично (26) имеем

$$I(\mathscr{B}_4^\sigma) \leqslant \sum_{B \in \mathscr{B}_4^\sigma} I\big(\mathscr{C}_F(V^{1-\sigma})\big) I(H_1^\sigma) 2^{|B_{i,p} \cap N^\sigma|} I(H_3^\sigma) \leqslant 2^{n/2 - 3\widehat{q}/4 + o(\widehat{q})}. \tag{28}$$

Из (25) – (28) следует (24).

Теорема 4. *Существует почти правильная система контейнеров для* $\widetilde{S}(n)$.

Доказательство. Пусть $A' \in \mathscr{A}_q$ и $\mathscr{D}$ — стандартное покрывающее семейство для графа $\mathscr{C}_{F(A')}([1, q] \cap N^1)$. Положим $\mathscr{B}'' = \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}'$, где $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$ — семейства, определенные в лемме 4. Положим

$$\mathscr{E}(A') = \{A' \cup D \cup B\colon \ D \in \mathscr{D}, B \in \mathscr{B}''\} \ \text{ и } \ \mathscr{G} = \bigcup_{\psi \leqslant q < \widehat{q}} \ \bigcup_{A' \in \mathscr{A}_q} \mathscr{E}(A').$$

Из леммы 4 и теоремы 2 следует, что $\mathscr{G}$ является почти правильной системой контейнеров для $\widetilde{S}(n)$.

§ 2. Взаимодействие фрагментов

По теореме 4 в $\widetilde{S}(n)$ существует подсемейство $\widetilde{S}'(n)$, удовлетворяющее условию $|\widetilde{S}(n)\setminus\widetilde{S}'(n)|=o(2^{n/2})$ и обладающее правильной системой контейнеров. Покажем, что $|\widetilde{S}'(n)|=o(2^{n/2})$, а тем самым, что $|\widetilde{S}(n)|=o(2^{n/2})$. При оценке $|\widetilde{S}'(n)|$ будем учитывать взаимное влияние фрагментов контейнеров.

Положим $\nu=\lfloor n/4\rfloor+1$, $X=[\nu,\lfloor n/2\rfloor]$, $Y=[\lfloor n/2\rfloor+1,\ n]$, $Z=[1,\nu-1]$. С этого момента вплоть до (34) мы будем считать, что зафиксирована некоторая правильная для $\widetilde{S}'(n)$ система $\mathscr{B}$ и контейнер $B\in\mathscr{B}$. Положим $\widetilde{S}_B(n)=\{A\in\widetilde{S}'(n)\colon\ A\subseteq B\}$, $D=B\cap X$, $H=B\cap Y$. Если $K\subseteq N$, то $K+K=\{i+j\in N\colon\ \{i,j\}\subseteq K\}$. Пусть $Q=D+D$ и $\widetilde{Q}=Q\cap H$. Пусть $\Gamma=(D,E)$ — граф с множеством вершин D и множеством E ребер вида $\{\{i,j\}\colon\ i+j\in\widetilde{Q}\}$ (петли, т. е. пары вида $\{i,i\}$ допустимы). Число $i+j$ будем рассматривать как *цвет* ребра $\{i,j\}$. Тогда ребра графа Γ правильно раскрашены в $|\widetilde{Q}|$ цветов. Для $P\subseteq E$ пусть $\mathrm{C}h(P)$ — множество цветов ребер из P и $\chi(P)=|\mathrm{C}h(P)|$. Подмножество ребер называется паросочетанием, если в нем никакие два ребра не смежны. Петли могут являться элементами паросочетания. Положим $\chi(\Gamma)=\max\chi(P)$, где максимум берется по множеству всех паросочетаний графа Γ.

Лемма 5. *Пусть $\chi(\Gamma)=\mu$. Тогда существует подмножество $D'\subseteq D$ такое, что*

$$|D'|\leqslant|D|-2\mu \tag{29}$$

и

$$|D'+D'|\leqslant|Y|/2+\widehat{q}+\mu. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть P — паросочетание такое, что $\chi(P)=|P|=\mu$. Пусть W — множество вершин паросочетания P. Положим $D'=D\setminus W$. Тогда (29) выполнено. Пусть $\overline{H}=Y\setminus H$. Ясно, что $D'+D'\subseteq\mathrm{C}h(P)\cup\overline{H}$. Иное ведет к противоречию с максимальностью $\chi(P)$. В силу (4) имеем $|\overline{H}|\leqslant|Y|/2+\widehat{q}$. Отсюда вытекает (30).

Теорема 5 (Г. А. Фрейман [5]). *Если множество K целых чисел таково, что $|K+K|\leqslant 2|K|-1+b$, где $0\leqslant b\leqslant|K|-3$, то K содержится в арифметической прогрессии длины $|K|+b$.*

Следствие 2. *Пусть $\widetilde{Q}=Q\cap H$ и $\Gamma=(D,E)$ — определенный выше граф. Тогда*

$$\chi(\Gamma)\geqslant|D|/8. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть D' — множество, определенное в лемме 5, и $\chi(\Gamma)=\mu$. Предположим, что $\chi(\Gamma)<|D|/8$. Тогда

$$|D'|\geqslant|D|-2\mu>3|D|/4\geqslant(3/4)(|X|/2-\widehat{q})>|X|/3.$$

Пусть R — арифметическая прогрессия минимальной длины, содержащая D'. Тогда $R\subseteq X$. Ясно, что R не может иметь разность, большую чем 2, так как в этом случае $|R|\leqslant|X|/3$.

Пусть R имеет разность 2. Положим

$$\|R\|=\max\{r\in R\}-\min\{r\in R\}+1.$$

Из (5) следует, что

$$\|R\| \geqslant 4|D'| - 4\widehat{q} > 3|D| - 4\widehat{q}.$$

Поскольку $\|R\| \leqslant |X|$, $|X| \leqslant 2|D| + 2\widehat{q}$ ввиду (4), а $|D| \gg \widehat{q}$, приходим к противоречию.

Пусть R имеет разность 1. Из (4) вытекает, что $|R| \geqslant 2|D'| - 2\widehat{q}$. По теореме 5

$$|D' + D'| \geqslant 3|D'| - 2\widehat{q} - 1 = 9|D|/4 - 2\widehat{q} - 1 \geqslant 9|Y|/16 - 5\widehat{q}.$$

При $\mu < |D|/8$ это противоречит (30).

§ 3. Доказательство теоремы 1

Сначала оценим сверху $|\widetilde{S}_B(n)|$. Контейнер B однозначно определяет граф Г. Можно считать, что граф Г однозначно определяет паросочетание P такое, что $|P| = \chi(P) = \chi(\Gamma)$, а значит, и $T = Ch(P)$. Заметим, что по определению $T \subseteq H$. Пусть $t = |T|$. Положим

$$S_1 = \{A \in \widetilde{S}_B(n)\colon\ |A \cap T| \geqslant |t|(1-\varepsilon)/2)\} \quad \text{и} \quad S_2 = \widetilde{S}_B(n) \setminus S_1.$$

Оценим $|S_1|$. Для $M \subseteq T$ пусть $W(M)$ — множество концов ребер паросочетания P, окрашенных в цвета из M.

Пусть $M = A \cap T$, w_1 — число вершин из $W(M)$, инцидентных петлям, и $w_2 = |W(M)| - w_1$. Тогда число подмножеств $C \subseteq W(M)$, таких, что $C \cup M$ свободно от сумм, не превышает $3^{w_2/2}$, а число подмножеств множества $B \setminus (T \cup W(M))$ в силу (2) равно $2^{|B| - |T| - |W(M)|} = 2^{n/2 - |T| - |W(M)| + O(\widehat{q})}$. Заметим, что

$$3^{w_2/2} 2^{-|W(M)|} \leqslant 3^{w_2/2} 2^{-w_2 - w_1} \leqslant (4/3)^{|M|}.$$

Поскольку $|M| \geqslant t(1-\varepsilon)/2$ для $A \in S_1$, то

$$|S_1| \leqslant \sum_{M \subseteq T} 3^{w_2/2} 2^{n/2 - |T| - |W(M)| + O(\widehat{q})} \leqslant 2^{n/2 - (t/2)(1-\varepsilon)\log(4/3) + O(\widehat{q})}. \tag{32}$$

С другой стороны, в силу неравенства больших уклонений (см., например, [6]), число подмножеств $M \subseteq T$ таких, что $|M| < t(1-\varepsilon)/2$, не превосходит $2^t \exp\{-2\varepsilon^2 t\}$. Так как $T \subseteq B$, то число подмножеств множества $B \setminus T$ в силу (2) равно $2^{n/2 - |T| + O(\widehat{q})}$. Отсюда

$$|S_2| \leqslant 2^{n/2 - t(2\varepsilon^2 \log e) + O(\widehat{q})}. \tag{33}$$

Из (32) и (33), положив $\varepsilon = 0.2346$ и учтя, что $t \geqslant |D|/8 = n/64 + O(\widehat{q})$ в силу (31), имеем

$$|\widetilde{S}_B(n)| = |S_1| + |S_2| \leqslant 2^{n/2 - 0.0158(|D|/8) + O(\widehat{q})} \leqslant 2^{n/2 - 0.0024n + O(\widehat{q})}.$$

Верхнюю оценку для $|\widetilde{S}'(n)|$ получим суммированием $|\widetilde{S}_B(n)|$ по B. Принимая во внимание (3), имеем

$$|\widetilde{S}'(n)| \leqslant \sum_B |\widetilde{S}_B(n)| \leqslant 2^{o(q)} \cdot 2^{n/2 - 0.0024n + O(\widehat{q})} = 2^{n/2 - 0.0024n + o(\widehat{q})}. \tag{34}$$

Поскольку $|\widetilde{S}(n)| = |\widetilde{S}'(n)| + o(2^{n/2})$, то из (19) и (34) вытекает (1).

Автор признателен К. Г. Омельянову, сделавшему ряд весьма полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Омельянов К. Г., Сапоженко А. А. О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14, вып. 3. — С. 3–7.
2. Омельянов К. Г., Сапоженко А. А. О числе и структуре множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, вып. 4. — С. 11–15.
3. Сапоженко А. А. О числе множеств, свободных от сумм в абелевых группах // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2002. — № 4. — С. 14–18.
4. Сапоженко А. А. О числе независимых множеств в расширителях // Дискретная математика. — 2001. — Т. 13, вып. 1. — С. 56–62.
5. Фрейман Г. А. Сложение конечных множеств // Известия вузов. Сер. Матем. — 1959. — № 6(13). — С. 202–213.
6. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1989. — С. 79–81.
7. Alon N. Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups // Israel Journal of Math., V. 73, № 2. — 1991. — P. 247–256.
8. Calkin N. On the number of sum-free set // Bull. London Math. Soc., V. 22. — 1990. — P. 141–144.
9. Cameron P., Erdos P. On the number of integers with various properties // Number Theory: Proc. First Conf. Can. Number Th. Ass., Banff, 1988 / Ed. R. A. Mollin. — de Gruyter. — 1990. — P. 61–79.
10. Lev V. F., Luczak T., Schoen T. Sum-free sets in abelian groups // Israel Journ.Math. V. 125. — 2001. — P. 347–367.
11. Green B. The Cameron-Erdos conjecture // Bull. Lond.Math.Soc., in print.

Поступило в редакцию 10 VII 2003