



**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**Г.Б. Ефимов, Е.Ю. Зуева,
И.Б. Щенков**

**ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ И
ПРИМЕНЕНИЯ
КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ
В ИНСТИТУТЕ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША**

Препринт №

Москва - 2003

Г.Б.Ефимов, Е.Ю.Зуева, И.Б.Щенков. Из истории развития и применения компьютерной алгебры в Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН. 2003, библиография более 170 работ.

Аннотация.

Г.Б.Ефимов, Е.Ю.Зуева, И.Б.Щенков.

Из истории развития и применения компьютерной алгебры в Институте прикладной математики имени М.В.Келдыша.

Дается исторический обзор и основная библиография по развитию и использованию компьютерной алгебры (КоАл) или символьных преобразований в Институте прикладной математики имени М.В.Келдыша Российской академии наук. Компьютерная алгебра использовалась сотрудниками Института в различных областях: прикладной небесной механике, математике, робототехнике, гидромеханике, численных методах. Разрабатывались программные системы разного типа для символьных преобразований; велась работа по описанию и классификации их свойств. Был организован ряд конференций и семинаров по применению КоАл в механике. В Институте был разработан язык рекурсивных функций Рефал, который затем активно развивался и разнообразно использовался, в том числе для КоАл. История работ, выполненных в Институте по КоАл и в смежных областях, содержит много идей и результатов, интересных и в наши дни. ИПМ – один из ведущих и самых первых компьютерных центров, и история исследований в нем естественно связана со многими исследованиями по КоАл в нашей стране.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, механика, программирование, история.

ON THE HISTORY OF COMPUTER ALGEBRA IN KELDYSH INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS.

Efimov G.B., Zueva E.Yu., Tshenkov I.B.

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

Brief retrospective review and main references concerned Computer Algebra (CA) researches and applications in Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russia Academia of Science) are presented. In the Institute CA was used in various areas: Applied Celestial Mechanics, Mathematics, Robotics, Hydromechanics, Applied Calculation Methods. Some original program systems were elaborated. During several years the work devoted to classification of existing systems and their possibilities were done. Conferences and seminars concerned CA applications in mechanics were organized. A language of recursive functions REFAL was created in the Institute. Later it was modified and intensively used in various fields, in particular CA. Many ideas and results which we can find in researches on CA and close fields in Keldysh Institute are still interesting today.

Key words: computer algebra, mechanics, mathematics, programming, history.

Светлой памяти
Игоря Борисовича Задыхайло.

2003-й год – юбилейный для Института прикладной математики Российской Академии Наук. Институт был создан М.В. Келдышем в 1953 году для решения важнейших комплексных научных задач, первоначально для расчетов в связи с созданием ядерного оружия. Затем это были – задачи освоения космоса, кибернетика, ядерная физика и термоядерный синтез, программирование. Институт объединил специалистов различных областей – физиков, математиков, механиков, программистов и создателей вычислительных машин. Среди них – такие крупные ученые как А.Н. Тихонов, К.И.Бабенко, И.М.Гельфанд, И.Б.Зельдович, С.П. Курдюмов, А.А.Ляпунов, А.Н.Мямлин, Д.Е.Охоцимский, А.А.Самарский, К.А.Семендяев, М.Р. Шура-Бура, Т.М.Энеев, В.С. Яблонский и многие другие. Соединение сложных задач и разнообразных математических методов с активным, пионерским использованием вычислительной техники, энтузиазмом развития ее – дали немало ярких идей. Мысли о символьных вычислениях возникли вскоре после создания ЭВМ, как желание научить их работать с формулами и облегчить громоздкий труд физика или механика. Обзоры отечественных исследований по Компьютерной Алгебре (КоАл) или Символьным Преобразованиям, как их называли раньше, в различных областях физики, механики и математики можно найти в [1-22]. Старые работы по КоАл заслуживают внимания – они не все получили должную известность; немало идей, в них заключенных, сохранили ценность и в наши дни. Кроме истории КоАл в ИПМ, затрагиваются исследования в смежных областях символьных, не численных вычислений, а также работы ряда сотрудничавших с ИПМ коллективов.

1. Интересно проследить истоки работ по КоАл в нашей стране. А.П.Ершов и М.Р.Шура-Бура в своем историческом обзоре [23] в области КоАл упоминают только работы ленинградцев. Перечислим некоторые пионерские работы по КоАл первой половины 1960-х годов.

Постановка задачи КоАл прозвучала в пленарном докладе А.А. Дородницына на Первой Всесоюзной конференции по программированию 1956 года [24]: построить на компьютере решение в виде двух аналитических асимптотик, соединенных в единое решение численно. Физический смысл задачи – исследование ядерного взрыва в атмосфере, которым тогда усиленно занимались, в том числе в ИПМ (в то время - засекреченном Отделении прикладной математики Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР), где А.А. Дородницын заведовал отделом до организации ВЦ АН СССР в 1954 году. Две асимптотики – вблизи центра взрыва и на удалении от него. Построение Д.Е. Охоцимского [25] в точности соответствует этой постановке, только относится к динамике космического полета – также состоит из двух асимптотик, объединяемых участком численного счета. На постановку А.А. Дородницына ссыла-

ется А.А.Стогний, ученик В.М.Глушкова, предложивший алгоритм дифференцирования функции (реализованный на одной из самых первых машин МЭСМ) и построения аналитического решения на компьютере [26] – вероятно, первая работа известной киевской школы Компьютерной Алгебры (в которой был разработан язык КоАл АНАЛИТИК [26], реализованный аппаратно и, позже, программно, и разнообразные его приложения).

Одновременно в Ленинградском отделении МИАН им. В.А.Стеклова Л.В. Канторович с сотрудниками работали над задачами КоАл. В докладах [27] он предлагает идеи о представлении данных в КоАл. Т.Н.Смирнова создает полиномиальную систему КоАл (или систему аналитических вычислений – САВ) Полиномиальный Прораб [28], впоследствии использованную в задачах теории упругости. В.А. Брумберг и другие в Институте теоретической астрономии АН СССР начинают работы по КоАл [29], широко развитые позже [11,17].

Н.Н.Яненко в сборнике «Проблемы кибернетики» [30] исследовал и реализовал на Стреле метод Картана анализа совместимости систем дифференциальных уравнений в частных производных. Н.Н.Яненко был первым ученым секретарем ИПМ, после работы в закрытом научном центре на Урале (где, вероятно, выполнена эта работа), он работал в ИТПМ СО АН СССР в Новосибирске, где активно развивал КоАл. В Новосибирске собрались многие из пионеров КоАл. А.П.Ершов с сотрудниками много работали по КоАл в ВЦ СО АН СССР в Новосибирске, обзор их ранних работ дан в [10]. (До 1961 года он работал в ВЦ АН СССР, но в обзоре [23] о КоАл не упоминает).

Работы по КоАл выполнялись и в Ташкенте, В.К.Кабуловым и его учениками – с приложением к различным задачам теории упругости [31].

2. Первой областью применения КоАл в ОПМ-ИПМ была прикладная небесная механика. В ней имелся классический задел применения полиномиальных построений разного вида и целый ряд задач. Первые попытки автоматизировать эту работу относятся к началу 60-х годов. Выкладки с тригонометрическими и степенными рядами были проделаны З.П. Власовой и И.Б.Задыхайло еще на одном из первых советских компьютеров Стрела (не опубликовано). Д.Е.Охоцимский (также на Стреле) построил универсальное решение для разгона космического аппарата с малой тягой. Две асимптотики монотонно изменяющегося решения строились в виде степенных формальных рядов вблизи сингулярных точек и соединялись в регулярной области численно [25]. Г.Б. Ефимов развивал этот подход для простейших рядов Пуассона (тригонометрически-степенных) при построении с помощью КоАл оптимальной траекторий разгона с малой тягой [32-33]. Программировала обе задачи Т.И. Фролова.

С 1970 года А.П.Маркеев использовал КоАл для нормализации гамильтоновых систем и анализа устойчивости периодических решений [34-35]. Дальнейшие шаги в этом направлении были сделаны его учеником А.Г. Сокольским [36-37] (см. также монографию [35]). Созданная ими научная школа успешно развивалась затем в Московском авиационном институте и Институте теорети-

ческой астрономии РАН [38-41], где была также известная школа по КоАл В.А.Брумберга [11,17,29]. В трудные 1990-е годы в ИТА регулярно собирались конференции, где была представлена и тематика КоАл. В МАИ работы по КоАл развивались и в направлении компьютерного обучения [42-43]. В ИПМ В.А.Сарычев и С.А.Гутник применили КоАл в задаче об устойчивости равновесия спутника [44]. Работы А.П.Маркеева продолжала его ученица Г.А. Щербина [45]. О работах по небесной механике школы А.Д. Брюно скажем ниже.

Большие, трудные задачи, решавшиеся в ИПМ, а также дефицит машинных ресурсов с трудом позволяли использовать КоАл и те примитивные САВ, которые тогда существовали. Вместо этого создавались алгоритмы, близкие КоАл идейно, позволявшие решать нужные задачи, но иным путем.

М.Л.Лидовым и его учениками, начиная с 60-х годов, проводились эксперименты по КоАл. З.П.Довженко в 1963 г. использовала полиномиальную САВ (на Алголе) для построения решения задачи Хилла [46]. Л.М.Бакума создавала систему для рядов Пуассона. Дефицит ресурсов при общности подхода в разработке и применении САВ не позволил уйти дальше экспериментов. В связи с этим М.Л.Лидовым был предложен численно-аналитический метод, позволяющий избежать громоздких выкладок (по существу – сферы применения КоАл) [47-48]. Для расчета эволюции спутниковых орбит при возмущениях различного рода аналитически строилась функция Гамильтона (часто с использованием осреднения). Ее дифференцирование, нужное для построения уравнений движения, преобразования координат (от точных к осредненным) и вычисления правых частей уравнений движения (на каждом шаге интегрирования), проводились численно, через разности. Этим методом был решен ряд задач динамики спутников (М.А. Вашковьяк, диссертации А.А.Соловьева, Ю.Ф. Гордеевой [49-52]).

Пример работ М.Л.Лидова демонстрирует причины неуспеха КоАл в ИПМ, разочарования в ее возможностях. Первые системы КоАл общего типа имели низкую эффективность, слабые возможности и способы соединения с численными программами. САВ удавалось использовать – либо для очень специальных, либо для методических задач. Серьезность решаемых в Институте задач, при постоянной нехватке машинных ресурсов – создавало трудности с применением КоАл, толкало на поиск нужного решения иными способами, как это сделал М.Л.Лидов. Становилось ясно, что алгоритмы и программы КоАл являются самостоятельной областью и требуют специальной разработки. Среди механиков ИПМ попытку создать универсальную САВ для БЭСМ-6 предприняли Ю.А.Садов и Е.Ю.Зуева [53].

3. Интересной страницей в отечественной кибернетике является Рефал В.Ф.Турчина [54-57], основанный на новом принципе программирования – ассоциативной обработке текстов на основе теории рекурсивных функций, без адресного управления программой. КоАл оказалась среди потенциальных областей приложения нового языка [58]. Его история содержит много замечательного. Первая реализация языка носила скорее «научный», чем прикладной характер, язык оказался изолированным от «обычного» матобеспечения – чис-

ленных пакетов, поддержки библиотек, распределения памяти и т.д. Потребовались дополнительные усилия многих людей, чтобы сделать дальнейшие модификации Рефала практически используемыми, в частности, для приложений КоАл. С.Н.Флоренцев, С.А.Романенко, Анд.В. Климов и другие были авторами первых эффективных Рефал-компиляторов.

Первым применением Рефала в компьютерной алгебре было решение В.Ф.Турчиным и др. задач ядерной физики [59]. И.Б.Щенков разработал САВ общего назначения SANTRA и позже модифицировал ее [60-62]. На ее основе им вместе с М.Ю.Шашковым была создана специальная прикладная система DISLAN для построения нестандартных разностных схем [63-64]. М.Л.Лидов и Л.М.Бакума, как уже отмечалось, были среди первых пользователей Рефала в прикладной области. Аналогичные попытки в теории групп были предприняты Н.Х. Ибрагимовым и И.Б.Щенковым.

Группа энтузиастов Рефала и КоАл объединялась вокруг ИПМ и работала в тесном контакте с Институтом. В.Л.Топунов со своими коллегами из МГПИ им.Ленина использовали САВ на Рефале в дифференциальной геометрии [65]. Вместе с В.П. Шапеевым и другими учениками Н.Н.Яненко в ИТПМ СО АН СССР в Новосибирске они реализовали метод внешних форм Картана и исследовали характеристики дифференциальных схем в развитие ранних работ [66, 67]. Л.В.Проворов в ЦАГИ им. Н.Е.Жуковского широко использовал САВ АЛЬКОР в инженерных приложениях [68,69]. О.М. Городецкий и А.В. Корлюков (Гродно) создали САВ для моделирования динамики гироскопических систем (для Д.М.Климова, см. также [18]), реализовали алгоритмы специальных арифметик [70-71]. Л.В.Белоус в Харькове с помощью Рефала объединял несколько различных САВ в единую систему [72].

В ИПМ им.Келдыша под руководством А.Н.Мямлина, И.Б.Задыхайло и В.К.Смирнова изучались возможности повышения эффективности ЭВМ с помощью Рефал-процессора [73-76]. Имелось в виду, что могут быть созданы специализированные блоки (или компьютеры в едином комплексе), эффективно выполняющие вычисления различного типа – в том числе символьные, не численные, включая КоАл (для которых перспективным являлся Рефал). Л.К. Эйсымонт проводил анализ эффективности Рефала и его аппаратной реализации, в том числе с точки зрения создания САВ [77,78]. Под руководством В.К. Смирнова на ЕС-2635 с микропрограммированием был создан Рефал-процессор ЕС-2702, работающий с машинами ряда ЕС [76,79-81]. На нем решались как задачи трансляции, так и задачи КоАл [82].

Первоначально РЕФАЛ планировался как мета-язык. И действительно, он использовался в работе с языками программирования, для создания трансляторов, в широком круге текстовых задач, смежных с КоАл в разной степени. В.А.Фисун, А.И.Хорошилов и др. на базе Рефала реализовали языки моделирования Симула-1, ДИНАМО [83]; были созданы: комплекс для космических тренажеров ТРИКС, конвертор Алгол-Фортран для физических пакетов. Создавались эмуляторы специальных компьютеров, например, Ю.Ф.Голубевым для бортового компьютера спутника. Под руководством И.Б.Задыхайло и Л.К.

Эйсымонта автоматизировалось масштабирование вычислений бортовой вычислительной машины для компенсации потери точности из-за вычислений на ней с фиксированной запятой. А.Н.Андрианов и К.Н.Ефимкин в системе Норма автоматизировали программирование разностных схем [84-85].

В свое время Н.Н.Яненко и другие считали, что наше отставание в компьютерной области из-за слабости элементной базы может компенсироваться за счет оригинальной архитектуры компьютера, совершенства математических алгоритмов и реализующих их пакетов программ. На этом направлении под руководством К.И.Бабенко, А.В.Забродина, А.Н.Мямлина и И.Б.Задыхайло исследовалась возможность создания высоко производительного параллельного компьютера для прикладных задач, в том числе задач механики и газодинамики [86]. В недавнее время этот теоретический задел был использован при создании отечественных суперкомпьютеров [87]. Технология создания математического обеспечения, использующая Рефал, была успешно использована при создании программной среды для них [88].

4. Неудачи и трудности применения КоАл (на раннем этапе) в задачах, характерных для ИМП, вызвали ощущение разочарования у ряда ведущих ученых в институте. САВ оказались слишком сложными и трудоемкими при их создании и неудобными при использовании уже существующих. Высокий уровень программирования пользователей в ИМП позволял решать, казалось бы, все нужные вопросы и помимо САВ и КоАл. Но ведь так же с пренебрежением относились в свое время и к другим необходимым возможностям – например, буквенному вводу-выводу, удобству общения с компьютером.

В начале 1980-х годов КоАл и САВ достигли определенных успехов. Встала задача пропагандировать возможности и распространять опыт применения КоАл и САВ, особенно в задачах механики – например, демонстрируя их полезность на различных шагах схемы вычислительного эксперимента [7,16,89,90]. Удалось использовать КоАл для автоматизации построения разностных схем в областях нерегулярности [62,63,91]. Эта работа привлекла внимание А.А. Самарского, одного из лидеров Института и отечественной вычислительной математики. С его помощью Институт стал одним из основных организаторов Всесоюзной конференции по применениям КоАл в механике (Горький, 1984 [4]), которая явилась демонстрацией достижений и подведением итогов работ по КоАл в стране за двадцать лет.

Опыт работы математиков, прикладников и программистов давал основу для обобщений, объединения и четкого разделения различных точек зрения на САВ. Г.Б.Ефимовым, М.В.Грошевой, Е.Ю.Зуевой была предпринята работа по описанию САВ, классификации их и их свойств по образцу пакетов прикладных программ [14,21,92-96]. Сводные таблицы характеристик ряда наиболее известных отечественных САВ оказались интересными как для пользователей, так и для разработчиков. Заказанный в 1990 году ВИНТИ обзор по приложениям КоАл в механике из-за трудностей издательства вышел лишь как Отчет ИМП и Института Механики МГУ [21].

Еще одной областью применения КоАл является динамика сложных механических систем – гироскопов, роботов и манипуляторов, космических систем [14,18,21,95-100]. Здесь объектом применения КоАл является формирование уравнений движения системы, их преобразования и анализ – поиск стационарных решений, определения устойчивости и т.д. В этой области КоАл развивалась пользователями механиками, причем существующие САВ часто не могли быть использованы из-за проблем с машинными ресурсами или различия в специфике самих механических систем и алгоритмов их исследования. Каждый делал свою специализированную САВ с ограниченными возможностями, приспособленную к узкому классу задач и алгоритмов (таких САВ было создано более десятка [21,95-100]). В некоторых случаях трудности использования САВ приводили к решению этих задач иными методами [101]. Встал вопрос о соотношении между целым рядом таких, казалось бы, подобных САВ, а также ими и САВ универсального типа (например, Редьюс или АНАЛИТИК). Возникла задача классификации САВ, их свойств и возможностей, особенностей решаемых задач, для решения которых они предназначены – для уяснения ситуации и информации потенциальных пользователей. Такая классификация была предпринята, вместе с обзорами по САВ механического профиля [16,21,92-93,100] и по применению КоАл в механике [21-22,95-96,100].

Проводился анализ возможностей группы отечественных САВ этого направления – областей применения, стыковки КоАл с численными и графическими возможностями, а также описание и сравнение их свойств [14,21,93,100]. Активно функционировала рабочая группа по САВ для сложных систем механики, организовывались конференции, семинары, публикации работ по КоАл (например, [4-5,7]). Системы этого типа использовались в компьютерном и механическом образовании, например, учеником В.В.Белецкого Д.Ю. Погореловым [99].

5. За долгие годы в ИПМ было выполнено немало исследований с использованием КоАл. Работы по разностным схемам развивались в Институте И.Б.Щенковым, М.Ю. Шашковым и другими, в том числе в контакте с учениками Н.Н.Яненко в Новосибирске, давно применявшими КоАл в этой области [102]. По гидро и газодинамике были сделаны и другие работы: Я.М. Кажданом и И.Б. Щенковым [103], Л.Н. Платоновой и М.Ю. Шашковым [104].

Не в ИПМ, но вблизи него, проводились исследования на известной САВ АНАЛИТИК (на языке КоАл того же названия), аппаратно реализованной на оригинальном компьютере "МИР-2" (реализации на СМ-4 и в серии ЕС не получили распространения). На нем В.А. Хлебников, сотрудник отдела Я.Б. Зельдовича еще студентом в МГУ решал громоздкие задачи общей теории относительности [105]. Э.Э.Шноль поощрял развитие КоАл в НИВЦ в Пущино, для задач применения математики в биологии: например, Г.П.Крейцер на АНАЛИТИКе создал программы анализа поведения решения системы дифференциальных уравнений [106]. Вопросы КоАл обсуждались на ежегодных конференциях НИВЦ в Пущино.

В 1980-е годы ведущим центром по КоАл стал ОИЯИ в Дубне, где разви-

вали и использовали в основном Лисп-ориентированную САВ Редьюс. Его использовали для математических и физических приложений, развития алгоритмов, консультировали по Редьюсу и распространяли его по стране. Конференции в Дубне под руководством Н.Н.Говоруна и Д.В.Ширкова и Семинар на физ-факе МГУ были ведущими по КоАл [2-3,6,8-9]. Однако в ИПМ Редьюс не получил распространения из-за высоких требований к машинным ресурсам (при постоянном их дефиците), слабого интерфейса с численными вычислениями, отсутствия сопровождения и консультаций.

Что касается разработки систем КоАл, САВ в ИПМ, то в первое время создавались, как правило, узко специализированные системы для конкретных задач (см. [25,32-37,46]). Затем наступила пора САВ более общего типа. Г.Б.Ефимовым была разработана система аналитических вычислений ПАС для работы с большим числом переменных, использованная в задачах двуногого шагания и управления [92,97-98]. На Рефале развивались и универсальные и специализированные системы [60-65,68-70]. В последующий период использовались известные современные САВ с реализацией необходимых алгоритмов на их базе. В системе Редьюс, например, работали М.Ю. Шашков, С.А.Гутник, И.Р.Белоусов и другие [44,100,103]. В последние годы КоАл в составе больших пакетов программ [19,20] используется многими как необходимый и привычный инструмент (например, при выводе и преобразовании систем уравнений в задачах оптимизации [107]), часто без специального упоминания.

Среди применений КоАл в ИПМ в последние годы отметим работы по небесной механике и многогранникам Ньютона, проводимые А.Д.Брюно и его школой [108-113]. В.Ф.Еднерал реализовал алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. А.Солеев и А.Б.Арансон исследовали многогранники Ньютона [110]. С.Ю.Садов и В.П.Варин исследовали устойчивость движения в задачах небесной механики и периодические решения уравнений колебаний спутников [111-113].

В последнее время появился ряд работ по истории развития и применения КоАл и программных систем (САВ) для нее [21-22,114-117].

Работа поддержана РФФИ, гранты N 01-15-96036 и 01-01-00015. Авторы благодарны Ю.С.Фишману, В.С.Штаркману, Анд.В. Климову и З.Ф.Бочковой за обсуждения и советы. Приводимая библиография отражает основные направления и результаты, но не является исчерпывающей.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.Вычислительная математика и вычислительная техника / Всесоюзный семинар, 1972, - Харьков, ФТИНТ АН УССР, 1972, №3, 151 с.
- 2.Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике: Материалы совещ. Дубна: ОИЯИ, 1980, 187 с.
- 3.Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике: Материалы совещ. Дубна: ОИЯИ, 1983, 260 с.
- 4.Системы для аналитических преобразований в механике / Тезисы докл. Всес. конфер. Горький, Горьк. гос. универс., 1984, 147 с.
- 5.Теория и практика автоматизированных систем аналитических преобразований.

- Тезисы совещания. Вильнюс: ИПК СХХ Литовской ССР, 1984, 93 с.
6. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике: Материалы совещ. Дубна: ОИЯИ, 1985, 420 с.
 7. Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. - М., Наука, 1988, 156 с.
 8. Computer Algebra in Physical Research. - International Conference. Computer Algebra in Physical Research, Dubna, USSR, 1990. Memorial Volume for N.N. Govorun. - World Scientific, 1991, 453. Thesis, Dubna -1990. – Papers. Dubna, JINR, 1990.
 9. Computer Algebra and it's Application to Physics. - CAAP-2001. - Dubna, JINR. 2001. 359 p.
 10. *Бежанова М.М., Катков В.А., Поттосин И.В.* Работа по аналитическим преобразованиям в ВЦ СО АН СССР. - Вычислит. математика и вычислит. техника. Всесоюзн, семинар. Харьков, 1972. / Харьков.: ФТИНТ АН УССР, 1972, №3, с.18-20, РЖ Мат 1973, 6В646.
 11. *Брумберг В.А.* Небесно-механические методы проведения буквенных операций на ЭВМ. - Томск: Изд. Томского гос. ун-та, 1974, 114 с.
 12. *Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В.* Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике // Успехи физ. наук, 1980, т.30, №1, с.113-147.
 13. *Miola A.M., Pottosin I.V.* A bibliography of Soviet works in algebraic manipulations // SIGSAM Bulletin, 1981, v.15, №1, p.5-7.
 14. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Брумберг В.А., Бабаев И.О., Васильев Н.Н., Иванова Т.В., Скрипниченко В.И., Тарасевич С.В., Аксельрод И.Р., Белоус Л.Ф., Долгов Г.А., Кузьмин А.В., Кульветене Р.В., Кульветис Г.П., Почтаренко М.В., Чубаров М.А.* Системы аналитических вычислений на ЭВМ. / Информатор. ИПМ АН СССР, 1983, №1, 65 с., РЖ Мат, 1984, 11Г398.
 15. *Ван Хюльзен Я.А., Кальме Ж.* Применение компьютерной алгебры / В кн.: Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. - М., Мир, 1986, с.308-325, РЖ Мат.1983 11В1174.
 16. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б.* О системах аналитических вычислений на ЭВМ / Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. - М., Наука, 1988, с.5-30. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б.* Вопросы развития и использования САВ на ЭВМ / Препринт № 20 ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, №5, 1988.
 17. *Brumberg V.A., Tarasevich S.V., Vasiliev N.N.* Specialised celestial mechanics systems for symbolic manipulations. // Celestial Mechanics. 1989, v.45, N 3-4, p.149-162.
 18. *Климов Д.М., Руденко В.М.* Методы компьютерной алгебры в задачах механики. - М., Наука, 1989, 215 с.
 19. *Абрамов С.А., Зима Е.Б., Ростовцев В.А.* Компьютерная алгебра. // Программирование, 1992, №5, с.4-25.
 20. *Васильев Н.Н., Еднерал В.Ф.* Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях. // Программирование, 1994, №1, с.70-82.
 21. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Самсонов В.А.* Использование символьных преобразований на ЭВМ в механике / Отчет ИПМ им. М.В.Келдыша РАН и НИИ Механики МГУ, №5-4-92, - М., 1992, 140 с. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Самсонов В.А.* Эволюция использования компьютеризированных аналитических вычислений в задачах механики / Препринт Института механики МГУ, №16-95, 1995, 44 с.
 22. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Самсонов В.А.* Символьные преобразования на ЭВМ в задачах управления // Известия Академии наук. Теория и системы управления, 1998, №3, с.80-91.
 23. *Ершов А.П., Шура-Бура М.Р.* Становление программирования в СССР. Ч.1. Начальное развитие. Ч.2. Переход ко второму поколению языков и машин./ Препринты N 12, 13 ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976. То же: Кибернетика, 1976, №6, с.141-160.

24. *Дородницын А.А.* Решение математических и логических задач на быстродействующих ЭВМ. - Всесоюзн. конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения». Москва 12-17 марта 1956 года. Пленарные доклады. ВИНТИ, М., 1956.
25. *Охоцимский Д.Е.* Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения // Космич. исслед., 1964, 2, №6, с. 817-842, РЖ Мех, 1965, 11А29.
26. *Стогний А.А.* Решение на ЦВМ одной задачи, связанной с дифференцированием функций. - В сб.: Проблемы кибернетики. М., Наука, 1962, №7, с.189-200. *Глушков В.М., Летичевский А.А., Стогний А.А.* Входной язык вычислительной машины для инженерных расчетов. // Кибернетика, №1, 1965. *Боднарчук В.Г., Глушков В.М., Гринченко Т.А., Дородницына А.А., Клименко В.П., Летичевский А.А., Погребинский С.Б., Стогний А.А., Фишман Ю.С.* АНАЛИТИК (язык для описания вычислительных процессов с применением аналитических преобразований). // Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем: Труды семинара. - Вып. 1.- Киев, 1968. - С.3-105.
27. *Канторович Л.В.* Об одной математической символике, удобной при вычислениях на машинах. – Доклады АН СССР, 1957, т. 113, N 4, 738-739. *Канторович Л.В., Петрова Л.Т.* О математической символике, удобной при вычислениях на машинах. – Труды 3 Всес. математич. съезда. т. 2, М., 1956, 151. РЖ Мат, 1957, 3592.
28. *Смирнова Т.Н.* Полиномиальный прораб и проведение аналитических выкладок на ЭВМ. Труды МИАН им. В.А.Стеклова. Работы по автоматическ. программированию, численным методам и функциональн. анализу. Изд.АН СССР, М.,-Л., 1962. *Первозванская Т.Н.* Проведение аналитических выкладок на ЭВМ при решении некоторых типов дифференциальных уравнений. - Там же. *Смирнова Т.Н.* Проведение на ЭВМ типа М-20 полиномиальных выкладок с помощью ПРОРАБА. - Наука, Л., 1967; также в кн.: Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. - Наука, Л., 1967, с.379-428.
29. *Брумберг В.А.* Ряды полиномов в задаче трех тел. - Бюлл. ИТА АН СССР. 1963, 9 N4,234-256. *Брумберг В.А.* Представление координат планет тригонометрическими рядами. – Труды ИТА АН СССР.1966,N11,3-88. *Полозова Н.Г., Шор В.А.* Применение ЭВМ к построению аналитических теорий движения планет и спутников. - Проблемы движения искусств. спутников небесных тел. Изд. АН СССР, М., 1963
30. *Шурыгин В.А., Яненко Н.Н.* О реализации на ЭВМ алгебраических дифференциальных алгоритмов. - В сб.: Проблемы кибернетики. Наука, 1961, №6, 33-43, РЖ Мат, 1962, 7В332.
31. *Кабулов В.К.* К выводу дифференциальных уравнений упругости и строительной механики на ЭВМ. - ДАН УзССР,1963,N9,5-8. РЖ Мех,1964 4В406. *Толок В.А.* К автоматизации вычисления арифметических формул на ЭВМ. - Вопросы вычисл. математ. и техники.1964,Ташкент,N3. *Толок В.А.* К выводу дифференц. уравнений колебаний цилиндрических оболочек на ЭВМ./ ДАН УзССР,1964,N8,9-10. РЖ Мех, 1965, 7В127. *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. - «Фан» АН УзССР,Ташкент,1966.РЖ Мех, 1967, 7В234.
32. *Ефимов Г.Б.* Оптимальный разгон в центральном поле до гиперболических скоростей // Космич. исслед., 1970, т.8, №1, с.26-47, РЖ Мех, 1970, 7А28.
33. *Ефимов Г.Б.* Предельное решение в задаче об оптимальном разгоне аппарата с малой тягой в центральном поле / ИПМ АН СССР, М.,1970,110 с.То же. Диссерт.
34. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости движения в некоторых задачах механики / Изд. ИПМ АН СССР, М., 1970, 163 с.
35. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. - М., Наука, 1978. 480 с.
36. *Маркеев А.П., Сокольский А.Г.* Исследование периодических движений, близких

- Лагранжевым решениям ограниченной задачи трех тел / Препринт № 10 ИПМ АН СССР, 1975. *Маркеев А.П., Сокольский А.Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем / Препринт № 31 ИПМ АН СССР, 1976, РЖ Мат, 1976, Б1097.
37. *Маркеев А.П., Сокольский А.Г.* Методы исследования периодических движений Лагранжа в гамильтоновых системах и его реализация на ЭВМ / Труды ИТА АН СССР, - Л., 1978, № 17, с.62-68.
 38. *Сокольский А.Г., Шевченко И.И.* Нелинейная нормализация автономных гамильтоновых систем на ЭВМ в аналитическом виде / Препринт № 8 ИТА АН, Л., 1990.
 39. *Сокольский А.Г.* Современные проблемы компьютерной небесной механики. 7 Всес. съезд по теор. и прикладн. механике, Москва, 1991. Аннот. докл. - М., 1991, с. 323, РЖ Мех, 1991, 12А125.
 40. *Sokolsky A.G.* On the Problems of Computerization of Celestial Mechanics. - Computer Algebra Applications. Intrn. Worcshop ISSAC Kiev, Ucrain, July 1993. - Abstract. S.-Peterburg, 1993, p.41-45.
 41. *Sokolsky A.G., Vakhidov A.A., Vasiliev N.N.* Development of a Motion Theory for Satellites with large Eccentricities by Means of Computer Algebra. Российско-Румынский симпозиум. - Buharest, 7-12 sent. 1995. Сб.тез. ИТА РАН, S.- Petersburg, 1995, p.39.
 42. *Маркеев А.П., Медведев С.В., Сокольский А.Г.* Методы и алгоритмы нормализации дифференциальных уравнений. Учебное пособие. Моск. авиац. ин-т, 1985.
 43. *Веретенников В.Г., Карпов И.И., Маркеев А.П., Медведев С.В., Пеньков В.И., Сунницын В.А., Чеховская Т.Н.* Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ. Учебное пособие. - М.: Высшая школа, 1990.
 44. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* К вопросу о положениях равновесия спутника-гиростата // Космич. исслед. 1984, 22, N3, 323-326. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* Исследование положения равновесия спутника-гиростата / Препринт №84 ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1990. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* О равновесии спутника под влиянием гравитационных и статических воздействий. // Космич. исслед. 1995, 32, N4-5, 386-391. *Gutnik S.A.* Symbolic numeric investigations for stability analysis of Lagrange systems. // Mathem. and Comput. in Simulation, 2001, v.57, 211-215.
 45. *Г.А.Щербина.* Численный метод построения асимптотических движений Ляпунова-Пуанкаре./ Препринт № 117 ИПМ АН СССР, 1988.
 46. *Довженко З.П.* Получение на ЭВМ аналитического выражения общего решения системы аналитических уравнений в виде рядов. / Дипломная работа (рук. *Лидов М.Л.*), мех-мат МГУ, - М., 1963.
 47. *Лидов М.Л.* Полуаналитические методы расчета движения спутников / Труды ИТА АН СССР, - Л., 1978, № 17, с.54-61.
 48. *Лидов М.Л., Ляхова В.А., Соловьев А.А.* Полуаналитический метод расчета движения искусственного спутника Луны / Препринты № 69-70 ИПМ АН СССР, 1974. // Космич. исслед., 1975, 13, № 3, с. 303.
 49. *Вашковьяк М.А.* О методе приближенного расчета стационарного ИСЗ // Космич. исслед., 1972, 10, №2, с.147-158. - О численно-аналитическом методе расчета 12-часовых ИСЗ по почти круговым орбитам // Космич. исслед., 1983, 21, №6, 819-823.
 50. *Вашковьяк М.А.* Численно аналитический метод исследования эволюции астероидных орбит // Космич. исслед., 1985, 23, № 3, с.335-346. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел // Письма в Астрон. журн., 1994, 20, № 10, с.781-795.
 51. *Гордеева Ю.Ф.* Учет влияния концентрированных масс в полуаналитическом методе расчета движения искусственного спутника Луны / Препринты № 26-27 ИПМ АН СССР, 1973. *Лидов М.Л., Гордеева Ю.Ф.* // Космич. исслед., 1974, 12, №4, с.491.
 52. *Соловьев А.А.* Полуаналитический метод расчета движения искусственных спутников с большим эксцентриситетом / Препринты № 86-87 ИПМ АН СССР, 1974.

- Лидов М.Л., Соловьев А.А. // Космич. исслед., 1978, 16, № 6, с. 806.*
53. *Склярченко (Зуева) Е.Ю. Система символьных вычислений для задач механики / Дипломная работа. (рук. Садов Ю.А.). Моск. физико-технический ин-т. - М., 1972.*
 54. *Турчин В.Ф. Метаалгоритмический язык // Кибернетика, 1968, № 4, с.45-54, РЖ Мат, 1971, 2В86.*
 55. *Турчин В.Ф. Алгоритмический язык рекурсивных функций (Рефал). - М., Изд-е ИПМ АН СССР, 1968.*
 56. *Турчин В.Ф., Сердобольский В.И. Язык Рефал и его использование для преобразования алгебраических выражений // Кибернетика, 1969, №3, с.58-62.*
 57. *Турчин В.Ф. Программирование на языке Рефал / 1. Препринт N 41 ИПМ АН СССР, 1971; 2.Препринт N 43 ИПМ,1971; 3.Препринт N 44 ИПМ, 1971; 4.Препринт N 48 ИПМ,1971; 5.Препринт N 49 ИПМ,1971, РЖ Мат, 1972, 1В993-996.*
 58. *Турчин В.Ф. Описание аналитических преобразований с помощью рекуррентных соотношений в рамках языка Рефал // Вычислит. математика и вычислит. техника. Всесоюзн. семинар. Харьков, 1972. - Харьков, ФТИНТ АН УССР,1972,№3.с.28.*
 59. *Будник А.П., Гай Е.В., Работнов Н.С., Климов Анд.В., Турчин В.Ф., Щенков И.Б. Базисные волновые функции и матрицы операторов в коллективной модели ядра // Ядерная физика, 1971, т.14, вып.2, с.304-314. Виноградов В.Н., Гай Е.В., Попов С.В., Работнов Н.С., Щенков И.Б. Построение физических базисов групп O(5) и SU(3) с автоматическим выполнением символьных преобразований. // Ядерная физика, т.16, вып.6, с.1178-1187, 1972.*
 60. *Щенков И.Б. Система аналитических преобразований SANTRA-BASIC, Тезисы Всес.конфер.Аналитич.преобраз.в механике». Горький,Горьк.гос.ун, 1984, 47-49.*
 61. *Щенков И.Б. Система символьно-аналитических преобразований SANTRA-2. Описание формальной части входного языка /Препринт N 1 ИПМ им.М.В.Келдыша, 1989. Щенков И.Б. Система SANTRA-2. Описание динамических функций / Препринт N 7 ИПМ им.М.В.Келдыша.1989. Щенков И.Б. Система SANTRA-2. Описание функций, обеспечивающих неалгебраические операции / Препринт N 21 ИПМ им.М.В.Келдыша, 1989.*
 62. *Щенков И.Б. Система SANTRA-2. Операции над выражениями основных классов / Препринт N14 ИПМ им.М.В.Келдыша,1991.Щенков И.Б. Система SANTRA-2. Операции над матрицами / Препринт №15 ИПМ им. М.В. Келдыша, 1991.*
 63. *Шашков М.Ю., Щенков И.Б. Использование символьных преобразований для построения разностных операторов / Препринт N48 ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1983. РЖ Мат.1983, 10Б1106.*
 64. *Шашков М.Ю., Щенков И.Б. Система DISLAN для построения разностных операторов / Препринт № 23 ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР,1985.РЖ Мат.1985 9Г910.*
 65. *Толунов В.Л. Определение совместимости и вычисления произвола решения систем внешних уравнений с помощью ЭВМ / В кн.: Вычислит. математика и мат. физика. - М., 1975, вып.2, с.158-172. Установление полной интегрируемости системы внешних уравнений с помощью ЭВМ. Там же, с.149-157.*
 66. *Арайс Е.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ // Доклады АН СССР, 1974, 214, №4, с.737-738, РЖ Мат, 1974, 6В1149.*
 67. *Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация на ЭВМ алгоритма исследования на совместность систем уравнений в частных производных.// Доклады АН СССР,1981,261,№5, с.1044-1046, РЖ Мат, 1982, 4Б1206.*
 68. *Проворов Л.В., Штаркман В.С. АЛЪКОР: система аналитических вычислений / Препринт №61 ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1982; РЖ Мат, 1982, 12В1089. Препринт №166 ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1982. РЖ Мат, 1983, 5В989*
 69. *Проворов Л.В., Медведев В.А., Семенов В.Н. Входной язык и возможности САВ АЛЪКОР / Методические указания, М., МВТУ им. Баумана, 1985.*
 70. *Климов Д.М., Городецкий О.М., Корлюков А.В. Реализация аналитических проце-*

- дур теоретической механики на ЭВМ в системе MMANG / Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, №233, 1985, 55с.
71. Корлюков А.В. Арифметика произвольной точности с учетом ошибки округления в системе АВ // Программирование, 1985, №5, с.32-37.
 72. Белоус Л.Ф. Связь системы АЛГЕБРА-0 с системой СИРИУС. - Тез. Всес. конфер. Аналит. преобраз. в механике. Горький, Изд. Горьк. гос. ун.-та, 1984, с.21-22.
 73. Задыхайло И.Б., Камынин С.С., Любимский Э.З. Вопросы конструирования вычислительных машин из блоков повышенной квалификации / Препринт ИПМ АН СССР, 1971.
 74. Задыхайло И.Б., Мямлин А.Н., Смирнов В.К., Эйсымонт Л.К. Об эффективной аппаратной реализации языка для описания объектов на уровне понятий и символьных преобразований / В кн.: Искусственный интеллект. Итоги и перспективы. - М.: МДНТИ, 1974, с.157-165.
 75. Задыхайло И.Б., Котов Е.И., Красовский А.Г., Мямлин А.Н., Смирнов В.К.. О повышении эффективности символьных преобразований / Препринт №15 ИПМ АН СССР, 1975.
 76. Задыхайло И.Б., Котов Е.И., Мямлин А.Н., Поздняков Л.А., Смирнов В.К.. Вычислительная система с внутренним языком повышенного уровня / Препринт №41 ИПМ АН СССР, 1975.
 77. Эйсымонт Л.К. О возможности параллельных схем реализации одного языка для описания задач переработки текстовой информации. - УС и М. 1977, №2, с.56-64.
 78. Эйсымонт Л.К., Платонова Л.Н. Выбор и оценка базового языка символьного процессора. - Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике: Материалы совещ. Дубна: ОИЯИ, 1980, с.19-33.
 79. Мямлин А.Н., Задыхайло И.Б., Смирнов В.К. Процессор для обработки текстовой информации. Вс.есоюзн. конфер. Параллельное программирование и высокопроизводительные системы. Часть 1. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980, с.54-63.
 80. Задыхайло И.Б., Эйсымонт Л.К. Об алгоритмах и программных средствах реализации САВ. Тез. Всес. конфер. Аналит. преобраз. в механике. Горький, Горьк. гос. ун-т, 1984, с.23-24.
 81. Myamlin A.N., Smirnov V.K., Golovkov S.L. A Specialized Symbol Processor. - Fifth Generation Architecture. Ed. by J.V.Woods. New-Holland. 1980. Мямлин А.Н., Смирнов В.К., Головкин С.Л. Специализированный процессор ЕС-2702 / В сб.: Разработка ЭВМ нового поколения. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1986, с.39-47.
 82. Смирнов В.К., Топунов В.Л., Шишков Д.Л. Аналитические вычисления на процессоре ЕС-2702 / Препринт № 62 ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1991. Шишков Д.Л. Изучение разрывных решений в гидродинамике при наличии электромагнитных полей методами компьютерной алгебры. / В сб.: Пакеты прикладных программ. Математическое моделирование. М., Наука. 1989. С.84-89.
 83. Бычков С.П., Хорошилов А.И. и др. Язык СИМУЛА в мониторной системе ДУБНА для БЭСМ-6 / Препринт №118 ИПМ АН СССР, 1975. Бычков С.П., Зеленецкий С.Д., Фисун В.А., Хорошилов А.И. Язык СИМУЛА в мониторной системе ДУБНА для БЭСМ-6 / Препринт №118 ИПМ АН СССР, 1976.
 84. Андрианов А.Н., Ефимкин К.Н., Задыхайло И.Б. Непроцедурный язык Норма и методы его реализации. – В сб.: Языки и параллельные ЭВМ. Серия: Алгоритмы и алгоритмич. языки. - М.:Наука,1990. 3-37. Андрианов А.Н., Ефимкин К.Н., Задыхайло И.Б. Непроцедурный язык для решения задач математической физики. // Программирование, 1991, №2, с.80-94.
 85. Andrianov A.N., Bazarov S.B., Bugerya A.B., Efimkin K.N. Solution of three-dimensional problems of gas dynamics on multiprocessor computers. // Computational mathematics and modeling. V.10, N 2, 1999, p.140-150. Андрианов А.Н., Гусева Г.Н., Задыхайло И.Б. Применение языка Норма для расчета дозвукового течения вязкого газа. //

- Математич. моделирование, т.11, N 9,1999. с.45-53.
86. *Бабенко К.И., Забродин А.В., Задыхайло И.Б.* Некоторые вопросы анализа математических алгоритмов решения задач и архитектуры ЭВМ. - Матер. семинара «Проблемы вычисл.математики» под рук. Г.И.Марчука. АН СССР, ОВМ, ВИНТИ, препринт №7,1981. *Андрианов А.Н., Бабенко К.И., Забродин А.В., Задыхайло И.Б., Котов Е.И., Мямлин А.Н., Поддерюгин Н.В., Поздняков Л.А.* О структуре вычислителя для решения задач обтекания. Комплексный подход к программированию. - Вычислит. процессы и системы. Под ред. Г.И.Марчука, вып. 2. М., Наука, 1985.
 87. *Забродин А.В.* Супер ЭВМ МВС-100, МВС-1000 и опыт их использования при реализации задач механики и физики. // Математич. моделир.-е. 2000,12,N 5, p.61-66. *Фортон В.Е., Савин Г.И., Левин В.К., Забродин А.В., Шибанов А.К.* Создание и применение системы высокопроизводительных вычислений на базе высокоскоростных сетевых технологий // Информац. технологии и вычислит.системы.2002, N1.
 88. Суперкомпьютер. Руководство пользователя. <http://www.jssc.ru/informat/1000MUserGuide.zip>; Руководство программиста.<http://www.jssc.ru/informat/1000MPfgGuide.zip>.
 89. *Самарский А.А., Шашков М.Ю.* Перспективы использования символьных преобразований в вычислительной математике. - Тез. Всес. конфер. Аналит. преобраз. в механике. Горький, Изд. Горьк. гос. ун.-та, с.3-8; также - В сб.: Оптимизация и моделирование в САПР. Горький, 1985, с.33-41.
 90. *Ефимов Г.Б.* Аналитические выкладки в цикле вычислительного эксперимента. – Символьн.преобраз.на ЭВМ и их использ. в теор.физике.ОИЯИ,Дубна,1983.58-63.
 91. *Ефимов Г.Б., Тишкин В.Ф., Шашков М.Ю., Щенков И.Б.* Автоматизация программирования операторных разностных схем / Препринт № 20 ИПМ АН СССР, 1982.. *Ефимов Г.Б., Тишкин В.Ф., Шашков М.Ю., Щенков И.Б.* Использование символьных преобразований для построения разностных схем. - Символьные преобразования на ЭВМ и их использ. в теоретич. физике. ОИЯИ, Дубна, 1983. с.74-84.
 92. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б.* Некоторые свойства систем аналитических вычислений как пакетов прикладных программ. / Пакеты прикладных программ. Технология разработки. Новосибирск, Наука, 1983, с.174-182. *Ефимов Г.Б.* Исследование программных систем аналитических вычислений на ЭВМ / Отчет №О-221-87, ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1987, 120 с.
 93. *Ефимов Г.Б.* Системы аналитических вычислений и их классификация. - Методы компьютерн. конструирования моделей механики систем твердых тел. Материалы Всесоюзн. рабоч. совещания. - Л., 1989, Препринт №16 Ленинградского филиала ИМАШ АН СССР,с.5-6.*Ефимов Г.Б.*Системы аналитических вычислений и их классификация. - Системы аналитических вычислений в механике твердого тела / Киев. гос. унив. Киев, 1990, (168с.) Деп. УкрНИИТИ 17.04.90, №732, - Укр90, с.27-40.
 94. *Ефимов Г.Б., Зуева Е.Ю.* Кибернетическая аналогия и аналитические преобразования. - Тез. Всес. совещания «Компьютерные методы небесной механики», ИТА РАН, С.-Петербург, 1991, с.63-64.
 95. *Efimov G.B., Grosheva M.V.* - On Using Computer Algebra in Mechanics. / Computer Algebra in Scientific Computing. Intern. Conference, St.- Petersburg, April 20-24,1998. Extended abstracts. St.- Petersburg. 1998, 37-40.
 96. *Grosheva M.V., Efimov G.B.* On using symbolic manipulations in Mechanics.- Computer Algebra Applications. Intrn. Worcshop ISSAC Kiev, Ucrain, July 1993. Abstract. S.-Peterburg, 1993, p.11-14. *Grosheva M.V., Efimov G.B., Samsonov V.A.* On using symbolic manipulations in Mechanics. - Computer Algebra Applications. Intrn. Worcshop ISSAC Gamburg, Germany, Oct. 1995. Abstract. S.-Petersburg. 1995, p.11-14.
 97. *Ефимов Г.Б., Коникова Н.С.* Автоматические буквенные преобразования в задаче двуногой ходьбы. - Тез. 2-й Всес. конф. по оптимизации в механике. Казань, Ка-

- занский авиац. инст., 1977, с.18. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Коникова Н.С., Самсонов В.А.* Автоматический символьный вывод уравнений двуногой ходьбы. - Тез. докл. Всес. совещ. по робототехнич. системам, Владимир, 1978. - М., 1978, с.196.
98. *Климов Д.М., Ефимов Г.Б., Руденко В.М., Самсонов В.А.* Методы исследования сложных механических систем и вычислительная техника. - В сб.: Оптимизация и моделир.-е в САПР. Горький, 1985, 3-33. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Абдрахманов А.Т.* Об использовании полиномиальной САВ в задаче оптимального управления. - Тез. Всес. конфер. Аналит. преобраз. в механике. Горький, Гор. гос. ун. 1984, 73-74.
99. *Pogorelov D.* On Coding of Symbolic Expressions by Generation of Motion Equations of Multie-bodies Systems. - EUROMECH 343, Computer Symbolic Manipulation in Mechanics. Internat. Colloquium. Technical University Hamburg-Harburg, Hamburg, Germany, October 9-13 / 1995, Abstracts, p.21. *Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю.* Решение некоторых модельных задач механики с использованием программного комплекса "Универсальный механизм" / Препринт №72 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1993.
100. *Белоусов И.Р.* Формирование уравнений динамики роботов-манипуляторов. / Препринт №45 ИПМ им. Келдыша РАН, 2002.
101. *Балобан И.Ю., Боровин Г.К., Сазонов В.В.* Язык программирования правых частей уравнений движения сложных механических систем. / Препринт №62 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1998. *Белоусов И.Р.* Методы моделирования и дистанционного управления движением роботов. - Докторская дисс. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2002.
102. *Валлиулин А.Н., Ганжа В.Г., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Применение символьных преобразований на ЭВМ для построения и анализа разностных схем / Препринт №7 ИПТМ СО АН СССР, Новосибирск. 1981. - *Валлиулин А.Н., Ганжа В.Г., Ильин В.П., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* // Доклады АН СССР, 1984, 275, №3, с.528-532, РЖ Мат, 1984, 7Г341.
103. *Платонова Л.Н., Шашков М.Ю.* Применение системы REDUCE для построения аналитических решений уравнений "мелкой воды" / Препринт №134 ИПМ им. Келдыша АН СССР, 1983. РЖ Мат. 1984 9Б884.
104. *Каждан Я.М., Щенков И.Б.* Схлопывание сферической полости в среде, совершенно прозрачной для объемного излучения // Журнал прикладной механики и технической физики (ПМТФ), 1989, №1 (173), Наука, Новосибирск, с.41-49.
105. *Хлебников В.И.* Гравитационное поле квазистационарных сосредоточенных систем с вращением в формализме Ньюмена-Пенроуза. // Известия вузов СССР. Физика. №3, 1976. I, с.113-117. II, с.118-123. *Хлебников В.И.* О точных решениях уравнений Эйнштейна-Максвелла в формализме Ньюмена-Пенроуза. // Известия вузов СССР. Физика. №7, 1976. I, с.140-142. II, с.148-150 (совм. с А.Э. Шелковенко).
106. *Березовская Ф.С., Крейцер Г.П.* Сложные особые точки системы двух дифференциальных уравнений. / Избранные алгоритмы и программы для ЭВМ МИР-2. (Мат. по матем. обеспеч. ЭВМ). АН СССР, НИВЦ. Пущино, 1975. *Крейцер Г.П.* Простые особые точки системы двух дифференциальных уравнений. / Там же, 1976.
107. *Konstantinov M.S., Petukhov V.G.* Orbital evolution of solar sail in problems of geocentric trajectories and lunar missions. - Paper IAF 01 A6-07. Toulouse, France. October 2001. *Eneev T.M., Konstantinov M.S., Akhmetshin R.Z., Efimov G.B., Egorov V.A., Fedotov G.G., Petukhov V.G.* Some methodical problems of the low-thrust trajectories optimization. / Preprint of KIAM, 1996. N 110, 24 p. *Константинов М.С., Федотов Г.Г., Ефимов Г.Б.* Проектно-баллистический анализ КА с ЭРД для полетов к Меркурию. / Препринт №84 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2001.
108. *Bruno A.D., Edneral V.F., Stanly Steinberg.* Foreword // Mathematics and Computers in Simulation. 1998, v.45, p.409-411.
109. *Bruno A.D.* Normal Forms // Mathem. and Comput. in Simulation, 1998, v.45, 413-427.

110. *Солеев А., Арансон А.Б.* Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней / Препринт №36 ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 1994. *Арансон А.Б.* Вычисление многогранника Ньютона / Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, т.1, с.32-34. МГУ, Москва, 1996.
111. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Первая предельная задача для уравнений колебаний спутника / Препринт №124 ИПМ им.М.В.Келдыша, 1995. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Вторая предельная задача для уравнений колебаний спутника / Препринт №128 ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 1995.
112. *Alexander D. Bruno, Victor P. Varin.* The limit problems for equation of oscillations of a satellite // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1997, v.67, p.1-40.
113. *Садов С.Ю.* Плотное размещение квазиоднородных многочленов и векторные разбиения / Препринт №37 ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 1998.
114. *The History of Computer Algebra Applications. Session. Theses of Report. 4-th Intern. IMACS conference on Applications of Computer Algebra - IMACS ACA'98, Prage, Aug.9-11, 1998, - Moscow, 1998.*
115. *Смирнов В.К.* Аппаратная реализация Рефала в Институте прикладной математики им.М.В.Келдыша. / Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2003, (в печати).
116. *Ефимов Г.Б., Зуева Е.Ю., Щенков И.Б.* Компьютерная алгебра в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша.// *Математическое моделирование*. 2001, v.13, N 6, p.11-18.
117. *Efimov G.B., Zueva E.Yu., Tshenkov I.B.* Computer Algebra in Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS./ *Computer Algebra and it's Application to Physics. - CAAP-2001. Dubna, JINR. 2001, p.58-68.*

Приложение 1. Как возникла эта работа. Мы с М.В.Грошевой многие годы готовили обзоры по применениям КоАл, прежде всего в механике, а также описания программных систем, классификацию их, их свойств и возможностей. Уже в конце 80-х часть из них стала приобретать исторический характер [22,95]. В 1990 г. по заказу ВИНТИ был подготовлен обзор по КоАл и САВ в механике [21], однако удалось его издать лишь как Отчет ИПМ и Института механики МГУ. С переходом на персональные компьютеры его содержание во многом стало отражать историю.

Вскоре представился случай рассказать о путях развития КоАл и САВ в нашей стране именно под углом зрения истории. На 4-й Конференции по приложениям КоАл IMACS "ACA-98" в 1998 г. в Праге мы с М.В.Грошевой организовали секцию (сессию в их обозначениях) по истории применения КоАл. Участниками ее стали лишь наши коллеги из России, Украины и Болгарии [114], однако заседания вызвали живой интерес присутствовавших (в том числе коллег из Японии, Швеции, Чехии и др.), несмотря на отсутствие ряда докладчиков. Кроме интернет-материалов, мы подготовили небольшое число печатных экземпляров (кажется, единственная секция). Туда вошли достаточно полные обзоры работ из Перми, Иркутска, Болгарии, Новосибирска и ряд кратких аннотаций. Желая дать более полное представление о развитии КоАл в нашей стране, мало известное за рубежом, мы, наряду со своими материалами, подготовили краткие обзоры по ряду тем: по САВ АНАЛИТИК, Рефалу, приложениям в механике сложных систем, список отечественных конференций по КоАл, список известных отечественных САВ [1*]. Среди них краткий обзор применения КоАл и САВ в ИПМ им.М.В.Келдыша, старейшем компьютерном центре страны.

Опубликовать этот материал должным образом тогда не удалось, тем более, что тексты были краткими и не содержали библиографии. В 1999 году, в связи с конференцией по механике и программированию в Переяславле Залесском, приуроченной к 225-летию Академии Наук, этот недостаток удалось восполнить [116]. В 2001 г. был подготовлен английский вариант работы с улучшенным текстом – для Семина-

ра по КоАл и ее приложениям в Дубне [117], хотя текст остался кратким. Были сделаны доклады в Великих Луках (конференция, связанная с памятью В.Г.Демина) [2*] и Новосибирске [3*], на конференции памяти А.А.Ляпунова, пионера развития кибернетики и компьютерной области в нашей стране [4*]. Наконец, благодаря любезному приглашению Ю.С.Фишмана и В.П.Клименко текст был дополнен для журнала "Математические машины и системы" [5*], была расширена библиография. Этот расширенный текст представлен в основном объеме препринта.

Еще в 1999 году мы с Е.Ю.Зуевой и И.Б.Щенковым хотели посвятить эту работу памяти Игоря Борисовича Задыхайло, энтузиаста, одного из зачинателей КоАл и САВ в ИПМ, неизменно поддерживавшего наши усилия. Как раз накануне поездки в Прагу с ним была беседа о работах по САВ на Рефале, и он с заражающим энтузиазмом вспоминал прошлые, мало известные работы. Вскоре его не стало. К сожалению, посвящение осуществить в [116-117] не получилось. Но всякая работа по истории – дань памяти людям и их трудам. И на

ша работа, во всех ее вариантах – служит сохранению памяти о всех потрудившихся в области Компьютерной Алгебры и ее применений. А этот препринт – выходит к 50-летию юбилею Института прикладной математики имени Мстислава Всеволодовича Келдыша.

Г.Б.Е.

Дополнительная ЛИТЕРАТУРА.

1*. Оглавление материалов секции по истории КоАл в Праге: The Fourth Intern. IMACS Conference on Applications of Computer Algebra - IMACS -ACA '98'. Aug.9-11, 1998, Prague, Czech Republic. Session. The History of Computer Algebra Applications.

Introduction. *Georgy B.Efimov, Marina V.Grosheva*

1. The History of Computer Algebra Application in Mechanics in Russia (Soviet Union).

Georgy B.Efimov, Marina V.Grosheva

2. On Some Computer Algebra Applications in Bulgaria. *Margarita Spiridonova, A. Gerov, M. Nisheva-Pavlova*

3. Application and Features of the Family ANALYTIC Languages. *V.P.Klimenko, Ju.S.Fishman.*

4. Computer Algebra at Keldysh Institute. *G.B.Efimov, I.B.Tshenkov, E.Yu.Zueva*

5. Experience of development and usage of packages of symbolic computations intended for investigation of mechanical systems. *Banshchikov Andrej V., Bourlakova Larissa A., Ivanova Galina N., Irtegov Valentine D., Novichov Mikhail A., Titorenko Tatyana N.*

6. Experience of Computer Algebra Using in Perm State University. *Vladimir V. Malanin, Igor E.Poloskov.*

7. The Kantorovich Schemes as base structures of realization of Algebraic Transformations in early of Computer Algebra Systems. *Nina A.Kalinina*

8. Analytical calculations in an Automatical mode of a System of Computer Algebra ANALYTIC. *A.L.Lyakhov, A.V.Goryk*

9. Application of Computer Algebra in course of Molecular Physics. *Leonid K.Popov.*

10. Appendix I. Computer Algebra Systems. *Marina V.Grosheva*

11. Appendix II. Computer Algebra Conferences in Soviet Union. *G.Efimov, M.Grosheva*

12. Appendix III. On the History of ANALYTIC Application's. *G.Efimov, M.Grosheva, E.Zueva*

13. Appendix IV. Computer Algebra Systems in REFAL. *G.B.Efimov, Elena Yu.Zueva*

14. Appendix V. Symbolic Manipulations in Mechanics of Multi-Bodies Systems. *Georgy B.Efimov, Marina V.Grosheva*

15. Appendix VI. Language FLAC and It's Applications. *Vladimir L.Kistlerov*

2*. *Ефимов Г.Б., Зуева Е.Ю.* Компьютерная алгебра и ее механические приложения в ИПМ им. М.В. Келдыша.// IV международный симпозиум по классической и

небесной механике. Великие Луки. 2001. Аннот. докл. ВЦ РАН, М., 2001. С.65-66.

3*. *Ефимов Г.Б., Зуева Е.Ю., Щенков И.Б.* Компьютерная алгебра в ИПМ им. М.В. Келдыша.// Конференция, посвященная 90-летию со дня рождения А.А.Ляпунова. 9-11 октября 2001. Программа и аннотации докладов. ВЦ СО РАН, Новосибирск, 2001, с.36. Сборник докладов. ВЦ СО РАН. Новосибирск, 2001, с.703-706.

4*. Алексей Андреевич Ляпунов. Наука Сибири в лицах. Новосибирск. 2001.

5*. *Г.Б.Ефимов.* Из истории развития и применения компьютерной алгебры в Институте прикладной математики имени М.В.Келдыша.// Математические машины и системы. 2003. Киев, (в печати).

Приложение 2. Встречи со Святославом Сергеевичем Лавровым, к его 80-летию. Святослав Сергеевич Лавров, как известно, был соратником С.П.Королева в самые первые годы "космической эры". В тот героический период космонавтики он тесно общался с моими учителями и старшими коллегами из Института прикладной математики Академии наук (их группу тогда называли в этом кругу "мальчиками Келдыша"). Когда, позже, мне приходилось называть среди них имя Святослава Сергеевича, я слышал: "А, Свет Сергеевич", и лица их просветлялись радостной улыбкой. (*) Сам я к этой героической эпопее отношения не имел, делал свои программы по символьным вычислениям на М-20, считал траектории полета с "малой тягой" (электроракетными двигателями).

Потом у нас наступил "кризис жанра", стали искать новые задачи. Д.Е. Охочимский занялся роботами, задачами искусственного интеллекта и шагания, сюда подключили и меня. Но разрешили заниматься и КоАл. Накануне 1980 года вдруг снова стала интересной "малая тяга" – в связи с приближением знаменитой кометы Галлея (раз в 76 лет). Возник интерес к достижению комет и астероидов, до которых долететь и сесть на них с обычной ракетной техникой затруднительно. Началась снова работа с малой тягой вместе с профессором В.А. Егоровым, ветераном космонавтики, человеком очень активным и интересным, с его студентами и аспирантами из МГУ.

Однако, продолжилась и работа по САВ: была создана полиномиальная система "ПАС" на фортране, например, для вывода уравнений движения в задачах шагания робота, установились контакты с коллегами, прежде всего, по теме вывода уравнений движения, по небесной механике. В Институте механики МГУ по инициативе В.А. Самсонова и М.В. Грошевой мы собирали семинары по САВ. К этому времени Святослав Сергеевич полностью перешел в программирование, под его руководством был создан отечественный компилятор Лиспа (языка для искусственного интеллекта и КоАл), у него были ученики и в области КоАл. Вскоре он переехал в Ленинград, возглавил Институт теоретической астрономии АН, где была сильная группа вокруг В.А.Брумберга по КоАл для задач небесной механики.

Поэтому, когда в 1980 году на большой школе по пакетам прикладных программ на Байкале я встретил Святослава Сергеевича, мне было и приятно и тревожно. Моя лекция о КоАл была в самом конце, а знания о пакетах, способах их описания и т.п. – почти нулевые. Пришлось усердно ходить на все лекции, впитывать премудрость о ППП, чтобы «попасть в тон». В частности, на одном из докладов я услышал о схеме цикла вычислительного эксперимента А.А.Самарского. По нему и построил доклад, приводя примеры применения КоАл на этапах этого цикла. КоАл не всем была интересна, часть народу уже разъехалась, тем приятнее было увидеть Святослава Сергеевича в первом ряду. Он внимательно слушал, задал вопросы. Позже я тешил себя надеждой, что замечание о важности численно-символьного интерфейса в САВ (выпадавшего тогда у многих разработчиков из поля зрения) могли как-то способствовать работам в ИТА, в частности, ярким результатам Н.Н.Васильева.

Затем была конференция "Методы трансляции" в Новосибирске в 1981 году. А.П. Ершов, работавший в области КоАл, дал нам место на одной из секций. К тому времени, на новом поколении машин (БЭСМ-6 и первых ЕС) КоАл начала набирать силу, многие прикладники и программисты создавали свои системы. Мы решили собраться в гостинице вечером и обсудить планы координации и признания КоАл за особое направление. Святослав Сергеевич энергично перевел наше собрание из холла в свой "люкс", там было гораздо удобнее. Его внимательная поддержка, авторитетные советы в организационных вопросах были очень полезны.

Еще важнее они были при организации первой Всесоюзной конференции по КоАл в Горьком, Нижнем Новгороде в 1984 году (в ее название было добавлено "в механике", поскольку руководили ею академики-механики – А.А.Самарский и А.Ю. Ишлинский с Д.М.Климовым). Не все высокие члены оргкомитета одинаково серьезно относились к КоАл и понимали ее специфику. Компетентность и "добротность" Святослава Сергеевича были для нас, "рабочих лошадок" очень важны, прибавляли уверенности. Конференция удалась, она показала, что сделано за 20 лет, и наметила пути работы. Показательно, что, например, все доклады по применениям КоАл в теории упругости попали в Реферативный журнал по механике.

Наконец, встреча в 2000 году на международной конференции по применениям КоАл (IMACS ACA-2000) в Санкт-Петербурге, в здании Шуваловского дворца на Фонтанке. Среди большого числа иностранцев и поредевшей кагорты коллег-соотечественников так приятно было увидеть Святослава Сергеевича. От него исходило особое "излучение" – уверенности, основательности, внутренней силы. Интеллигентная и скромная, внутренне мощная личность – первооткрывателя, одного из легендарных "зубров" нашей науки.

Г.Б.Е.

* Извещая их о юбилее, я вызвал целый поток воспоминаний.

А.К.Платонов : На одном из запусков Сергей Павлович Королёв вдруг спросил: «А где Лавров, почему его нет! Найдите и доставьте». По существу, он был нужен Сергею Павловичу не по делу, а как «талисман», для удачи, в ответственном деле. Святослава Сергеевича нашли в другой командировке и срочно, с пересадками, доставили на космодром. Другой раз С.П. поручил ему уточнить форму кривой – поверхности обелиска в честь освоения космоса около метро ВДНХ, – и выдать ее строителям: «Ты математик, вот и давай!» С.С. выбрал кривую, кажется, кубическую гиперболу, координаты ее в нужном масштабе были сосчитаны и переданы архитекторам. Первой истории А.К. был свидетелем, вторую слышал от самого Святослава Сергеевича.

Э.Л.Аким : На Святослава Сергеевича Сергей Павлович ни разу не повысил голос (большая редкость). Да, много можно было бы вспомнить интересных случаев их взаимодействия!

Т.М.Энеев : Святослав Сергеевич – один из пионеров ракетно-космической техники и баллистики. Сразу после войны он вошел в ведущий коллектив по ракетной технике на ЖРД – он заведовал знаменитым баллистическим отделом номер 17 в ОКБ-1 у Сергея Павловича Королева. С.П.Королев нашел его еще в армии в Германии. Интересно, что еще при знакомстве он сказал: «будем заниматься «косметикой» (то есть комонавтикой)», – так как всегда мечтал об исследовании космоса. С самого начала своей работы в ОКБ Святослав Сергеевич ввел высочайшую культуру математических вычислений в баллистике. Он один из первых в стране и в своей области постарался использовать ЭВМ, начинал работать еще на первых БЭСМ у С.А.Лебедева в ИТМ и ВТ. Святослав Сергеевич поднял на высокий уровень культуру программирования в ОКБ у С.П. Королева.