

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й А к а д е м и и Н а у к

В.В. Русанов, В.П. Силаков, А.В. Чеботарев

**Двумерное моделирование динамики термоэмиссионных
электронов в неэлектроотрицательном газе.**

Москва 2003 г.

Русанов В.В., Силаков В.П., Чеботарев А.В. Двумерное моделирование динамики термоэмиссионных электронов в неэлектроотрицательном газе.

Аннотация.

В двумерной геометрии проведены исследования динамики пространственно-временных диффузионно-дрейфовых распределений объемного отрицательного заряда и напряженности электрического поля, созданных вследствие эмиссии электронов с поверхности твердого тела. Определены характерные размеры и инерциальные свойства отрицательно заряженных слоев у поверхности пластины конечных размеров в неэлектроотрицательном газе.

Rusanov V.V, Silakov V.P. and Chebotarev A.V. Two-dimensional modeling of dynamics of thermo-emission' electrons in no electronegative gas.

Abstract.

In two-dimensional geometry the researches of dynamics of space-time drift-diffusion distributions of a bulk negative charge and electric field strength, created due to emission of electrons from a surface of solid bodies are carried out. The characteristic sizes and inertial properties of the negatively charged layers at a surface of a plate (of the final sizes) in no electronegative gas are determined.

Двумерное моделирование динамики термоэмиссионных электронов в неэлектроотрицательном газе.

Русанов В.В., Силаков В.П., Чеботарев А.В.

Введение

В работе рассмотрены вопросы, связанные с проблемой получения и поддержания неравновесных приповерхностных электрических разрядов в быстрых потоках газа, а также с проблемой экологически чистого получения электрической энергии в электро-газодинамических ^[1] (ЭГД) преобразователях.

Рассматриваемые в данной работе физические явления, лежащие в основе ЭГД преобразования, тесно связаны с процессом термоэмиссии электронов проводимости твердых тел ^[2] в окружающий их газ. Успехи в области разработок современных материалов с работой выхода электронов ≤ 1 эВ, способных даже при нормальных условиях создавать в газе у поверхности твердого тела концентрации заряженных частиц $\sim 10^{10}$ част/см³, дают предпосылки для создания новых технологий, основанных на методе механического разделения объемного приповерхностного заряда потоками газов ^[3].

В работе ^[3] в случае плоской одномерной геометрии были получены данные о характерных размерах и инерционных свойствах отрицательно заряженных слоев у поверхности пластины, эмитирующей электроны в воздушную среду. В ^[3] показаны большие потенциальные возможности ЭГД – механизмов преобразования кинетической энергии газовых потоков в энергию электрических полей большой напряженности (вплоть до пробойных).

Данная работа является продолжением изучения диффузионно-дрейфовых распределений электронов в газах в случае, когда эмиссия электронов осуществляется металлической пластиной конечной длины и толщины в покоящийся неэлектроотрицательный газ.

1 Распределение зарядов в случае неэлектроотрицательных газов

Рассмотрим распределение электрического поля и концентрации заряженных частиц в газе, вблизи металлической пластины, способной эмитировать электроны проводимости в окружающую среду. Оценим характерные размеры и инерциальные свойства отрицательно заряженных слоев у поверхности пластины.

Задача решается в двумерной постановке в плоскости XU . Вдоль оси Z эмитирующая металлическая пластина не ограничена, а газовая среда считается однородной. В плоскости XU пластина ограничена контуром ω , изображенным на рис. 1, где L – длина пластины; $2r_0$ – её толщина; r_0 – радиус округления краев пластины.

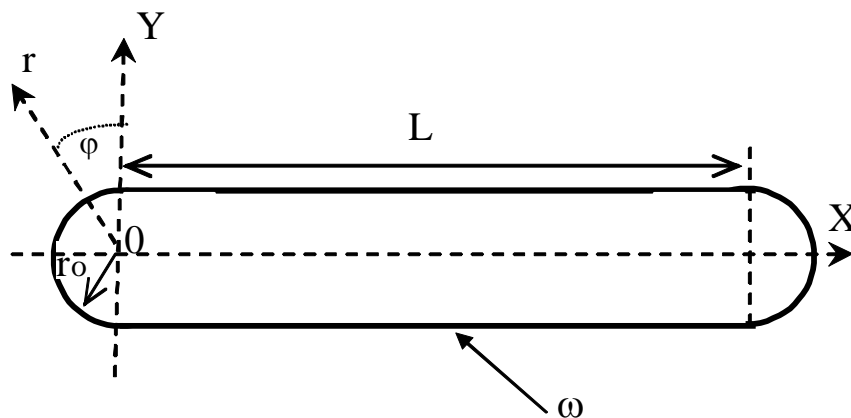


Рис. 1

Рассмотрим задачу, в которой пространство вне пластины заполнено газом из молекул азота, а источником эмиссии свободных электронов является поверхность пластины ω . Выбранный нами газ характеризуется тем, что в нем свободные электроны e^- не образуют устойчивых отрицательно заряженных соединений с молекулами N_2 , иначе говоря, в таком газе электроны могут пребывать только в свободном состоянии. Считаем, что температура пластины T_{pl} равна температуре газа T_g , а в начальный момент времени в пространстве $\{r-r_0, u-r_0\} > \delta$ электроны практически отсутствуют. Здесь δ – некоторый характерный размер

начального распределения электронов $n_e(t=0)$. При условии $T_{pl} = T_g$ электроны эмиссии в плотном газе ($p \sim 1$ атм.) практически всегда находятся в термолизованном состоянии, т.е. выполняется соотношение: $T_e \Rightarrow T_g = T_{pl}$ (где T_e - температура электронов).

Будем считать, что объемный заряд в газе, представленный свободными электронами, образуется исключительно за счет термоэлектронной эмиссии. Так, что суммарный объемный заряд электронов в газе и поверхностный заряд пластины, равен нулю.

По мере протекания эмиссии электроны, покинувшие проводник создают объемное распределение заряда в газе, приводящее к возникновению электрических полей в пространстве (иные электрические поля в рассматриваемой задаче отсутствуют).

В газе отрицательно заряженные частицы приобретают направленную скорость движения. Это связано с диффузией заряженных частиц в пространстве, их столкновениями с направленно движущимися молекулами газового потока, и их дрейфом в самосогласованном электрическом поле. Так происходит до тех пор пока система не достигнет стационарного состояния, в котором перечисленные выше компоненты потока электронов компенсируют друг друга в каждой точке пространства. При этом значение величины объемного эмиссионного заряда выходит на насыщение.

В силу пространственной симметрии будем решать задачу в левой верхней четверти плоскости XY. Система уравнений, описывающая пространственно-временную эволюцию концентрации электронов и потенциала электрического поля Φ в газе, имеет вид^[2]:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 4\pi \cdot e \cdot n_e(x, y, t) & (1.1') \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} = -\frac{\partial W_x}{\partial x} - \frac{\partial W_y}{\partial y} & (1.1'') \end{cases}$$

в области плоскости XY : $\{0 \leq x \leq \frac{L}{2}, y \geq r_0\}$. Здесь e – заряд электрона;

$$W_x = -D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} - \mu_e n_e E_x \quad , \quad E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$W_y = -D_e \frac{\partial n_e}{\partial y} - \mu_e n_e E_y \quad , \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ,$$

где D_e - коэффициент диффузии электронов в газе, $\mu_e = \frac{|e|}{m_e \nu_m}$ - подвижность электронов в газе ^[2], m_e - масса электрона, ν_m - частота столкновений электронов с частицами газа.

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi \cdot e \cdot n_e(\varphi, r, t) & (1.2') \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r W_r) & (1.2'') \end{cases}$$

в области плоскости XY : $\left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0, r \geq r_0 \right\}$. Здесь :

$$W_r = -D_e \frac{\partial n_e}{\partial r} - \mu_e n_e E_r \quad , \quad E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$W_\varphi = -D_e \frac{1}{r} \frac{\partial n_e}{\partial \varphi} - \mu_e n_e E_\varphi \quad , \quad E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad ,$$

Задача решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$(1.1'.1) \quad \begin{cases} \Phi(x, r_0, t) = 0 \quad , \quad E_y(x, y \rightarrow \infty, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ E_x\left(\frac{L}{2}, y, t\right) = 0 \quad \text{при} \quad y \geq r_0 \end{cases}$$

$$(1.1''.1) \quad \begin{cases} n_e(x, r_0, t) = n_e^{eq}(T_{pl}) \quad , \quad n_e(x, y \rightarrow \infty, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ W_x\left(\frac{L}{2}, y, t\right) = 0 \quad \text{при} \quad y \geq r_0 \end{cases}$$

$$(1.2'.1) \quad \begin{cases} \Phi(\varphi, r_0, t) = 0 \quad , \quad E_r(\varphi, r \rightarrow \infty, t) = 0 \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \\ E_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}, r, t\right) = 0 \quad \text{при} \quad r \geq r_0 \end{cases}$$

$$(1.2''.1) \quad \begin{cases} n_e(\varphi, r_0, t) = n_e^{eq}(T_{pl}) \quad , \quad n_e(\varphi, r \rightarrow \infty, t) = 0 \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \\ W_\varphi\left(-\frac{\pi}{2}, r, t\right) = 0 \quad \text{при} \quad r \geq r_0 \end{cases}$$

Вдоль прямой $\{x = 0 (\varphi = 0), r \equiv y \geq r_0\}$ выполняются равенства, определяющие связь плоской и полярной областей:

$$\left. \begin{aligned} E_x(0, y, t) = E_\varphi(0, r, t) \\ W_x(0, y, t) = W_\varphi(0, r, t) \end{aligned} \right\} \text{ при } (r \equiv y) \geq r_0$$

В силу того, что характерное время установления равновесных значений концентраций заряженных частиц на поверхности пластины (порядка нескольких десятков наносекунд ^[3]) существенно меньше характерных времен диффузии и дрейфа зарядов в газе, начальное распределение $n_e^0(t=0)$ можно представить функциями вида:

$$n_e^0(x, y, t=0) \Rightarrow \begin{cases} n_e^{eq}(T_{pl}) \left(1 - \frac{y-r_0}{\delta}\right), & 0 \leq y-r_0 \leq \delta \\ 0, & y-r_0 > \delta \end{cases},$$

$$n_e^0(\varphi, r, t=0) \Rightarrow \begin{cases} n_e^{eq}(T_{pl}) \left(1 - \frac{r-r_0}{\delta}\right), & 0 \leq r-r_0 \leq \delta \\ 0, & r-r_0 > \delta \end{cases},$$

согласно ^[3] выберем $\delta \sim 0.1 \cdot \Delta$; где $\Delta = \sqrt{\frac{k_B T_g}{2\pi e^2 n_e^{eq}}}$ - характерное дебаевское расстояние. Величина n_e^{eq} находится из граничного условия, отражающего факт равенства прямого и обратного потоков отрицательного заряда через поверхность пластины:

$$W^{эм} = W^{хаом}, \text{ при } \{x, y \text{ и } \varphi, r\} \in \omega.$$

Здесь $W^{эм}$ - плотность потока электронов эмиссии вдоль направления по нормали от поверхности пластины; $W^{хаом}$ - плотность обратного потока электронов (поток обусловлен хаотическими столкновениями зарядов с пластиной). Согласно ^[2] (гл. 6, п.2) и статистической теории равновесных газов (см. ^[4], с.142) имеем:

$$W^{эм} = B_0 T_{pl}^2 \exp\left(-\frac{A}{k_B T_{pl}}\right), \quad W^{хаом} \equiv \frac{1}{4} \alpha_e \langle v_e \rangle n_e^{eq}$$

где $B_0 = \frac{m_e k_B^2}{2\pi^2 \hbar^3} \approx 7,50 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$; A - работа выхода электрона из материала пластины (в проводимых расчетах $A \Rightarrow 0,7$ эВ); k_B - константа Больцмана; α_e - вероятность «поглощения» электрона стенкой пластины за одно столкновение (да-

лее мы полагаем, что $\alpha_e \Rightarrow 1$); $\langle v_e \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T_g}{\pi m_e}}$.- средняя хаотическая скорость электрона.

В результате получается:
$$n_e^{eq} = \frac{4W^{эм}}{\alpha_e \langle v_e \rangle} .$$

3 Численная модель

При численной реализации сформулированной задачи следует учитывать характерные пространственные масштабы изменения концентрации электронов и напряженности электрического поля. Как показывают оценки ^[3], основной отрицательный электрический заряд сконцентрирован вблизи поверхности металлической пластины, испускающей электроны эмиссии. Четырехкратный спад концентрации электронов в направлении по нормали от поверхности пластины (при $r - r_0 \ll r_0$) происходит на расстояниях $\Delta \sim 2.5 \cdot 10^{-2}$ см (для неэлектроотрицательных газов) и $\Delta' \sim 10^{-3}$ см (для электроотрицательных газов, в частности, воздушной смеси) при $T_g = T_{pl} = 300$ К. При увеличении температуры пластины на 100 К величины Δ и Δ' уменьшаются более чем на порядок ^[3]. Таким образом, численное решение рассматриваемой задачи в диапазоне температур пластины $T_g = 300 - 500$ К требует введения достаточно мелкого шага по пространству в r и y направлениях: $h_{r,y} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ см. В тоже время, для корректной реализации граничных условий на внешней границе расчетной области необходимо учитывать, по крайней мере, $\sim 10^3$ дебаевских слоев, т.е. $y_{\max} = r_{\max} \sim 1$ м.

Для численного решения уравнений (1.1)-(1.2) сделаем преобразование координат, приводящее к решению данной задачи на равномерной сетке. Введем новые переменные:

$$\tilde{y} = \frac{\sqrt{y-r_0}}{\sqrt{y-r_0+1}}, \quad \tilde{r} = \frac{\sqrt{r-r_0}}{\sqrt{r-r_0+1}}, \quad \tilde{x} = \sqrt{\frac{x}{p_0} + a^2} - a, \quad \tilde{\varphi} = \varphi$$

и введем обозначения: $\frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{1}{2p_0} \frac{1}{\tilde{x}+a} \equiv p(\tilde{x})$, $\frac{d\tilde{y}}{dy} = \frac{(1-\tilde{y})^3}{2\tilde{y}} \equiv q_y(\tilde{y})$, $\frac{d\tilde{r}}{dr} = \frac{(1-\tilde{r})^3}{2\tilde{r}} \equiv q_r(\tilde{r})$.

Значения величин p_0 и a в выражении для \tilde{x} вычисляются из условия плавного сопряжения сеток в полярной и плоской областях вдоль поверхности пластины.

В новой системе координат уравнения (1.1)-(1.2) принимают вид:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{p(\tilde{x})}{q_y(\tilde{y})} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{q_y(\tilde{y})}{p(\tilde{x})} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}} \right) = 4\pi e n_e(\tilde{x}, \tilde{y}, t) \frac{1}{p(\tilde{x})q_y(\tilde{y})} & (2.1') \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} = -p(\tilde{x}) \frac{\partial W_x}{\partial \tilde{x}} - q_y(\tilde{y}) \frac{\partial W_y}{\partial \tilde{y}} & (2.1'') \end{cases}$$

в области: $\{0 \leq \tilde{x} \leq 1, 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{y}_{\max} < 1\}$.

$$(2.2) \quad \begin{cases} W_x = -D_e p(\tilde{x}) \frac{\partial n_e}{\partial \tilde{x}} - \mu_e n_e E_x, \quad E_x = -p(\tilde{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} \\ W_y = -D_e q_y(\tilde{y}) \frac{\partial n_e}{\partial \tilde{y}} - \mu_e n_e E_y, \quad E_y = -q_y(\tilde{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r(\tilde{r}) \cdot q_r(\tilde{r})} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(r(\tilde{r}) q_r(\tilde{r}) \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{r}} \right) = 4\pi e n_e(\varphi, \tilde{r}, t) \frac{r(\tilde{r})}{q_r(\tilde{r})} & (2.2') \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} = -\frac{1}{r(\tilde{r})} \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{q_r(\tilde{r})}{r(\tilde{r})} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (r(\tilde{r}) W_r) & (2.2'') \end{cases}$$

в области: $\{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0, 0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{\max}\}$.

$$(2.1'.1) \quad \begin{cases} \Phi(\tilde{x}, 0, t) = 0, \quad E_y(\tilde{x}, \tilde{y} \rightarrow \tilde{y}_{\max}, t) = 0 & \text{при } 0 \leq \tilde{x} \leq 1 \\ E_x(1, \tilde{y}, t) = 0 & \text{при } 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{y}_{\max} \end{cases}$$

$$(2.1''.1) \quad \begin{cases} n_e(\tilde{x}, 0, t) = n_e^{eq}(T_{pl}), \quad n_e(\tilde{x}, \tilde{y} \rightarrow \tilde{y}_{\max}, t) = 0 & \text{при } 0 \leq \tilde{x} \leq 1 \\ W_x(1, \tilde{y}, t) = 0 & \text{при } 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{y}_{\max} \end{cases}$$

$$(2.2'.1) \quad \begin{cases} \Phi(\varphi, 0, t) = 0, \quad E_r(\varphi, \tilde{r} \rightarrow \tilde{r}_{\max}, t) = 0 & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \\ E_\varphi(-\frac{\pi}{2}, \tilde{r}, t) = 0 & \text{при } 0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{\max} \end{cases}$$

$$(2.2''.1) \quad \begin{cases} n_e(\varphi, 0, t) = n_e^{eq}(T_{pl}), \quad n_e(\varphi, \tilde{r} \rightarrow \tilde{r}_{\max}, t) = 0 & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \\ W_\varphi(-\frac{\pi}{2}, \tilde{r}, t) = 0 & \text{при } 0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{\max} \end{cases}$$

Вдоль прямой линии $\{\tilde{x} = 0 (\varphi = 0), 0 \leq \tilde{y} = \tilde{r} \leq \tilde{y}_{\max} = \tilde{r}_{\max}\}$ выполняются равенства:

$$\left. \begin{aligned} E_x(0, \tilde{y}, t) &= E_\varphi(0, \tilde{r}, t) \\ W_x(0, \tilde{y}, t) &= W_\varphi(0, \tilde{r}, t) \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 \leq (\tilde{r} \equiv \tilde{y}) \leq \tilde{r}_{\max} \equiv \tilde{y}_{\max}$$

$$n_e^0(\tilde{x}, \tilde{y}, t=0) \Rightarrow \begin{cases} n_e^{eq}(T_{pl}) \left(1 - \frac{\tilde{y}}{\tilde{\delta}}\right), & 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{\delta} \\ 0, & \tilde{y} > \tilde{\delta} \end{cases},$$

$$n_e^0(\varphi, \tilde{r}, t=0) \Rightarrow \begin{cases} n_e^{eq}(T_{pl}) \left(1 - \frac{\tilde{r}}{\tilde{\delta}}\right), & 0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{\delta} \\ 0, & \tilde{r} > \tilde{\delta} \end{cases},$$

где $\tilde{\delta} = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta} + 1}$.

Численное решение уравнений (2.1 – 2.2) будем искать на равномерной сетке. Построим сетки $\{\tilde{x}_i, \tilde{y}_j\}$ и $\{\varphi_i, \tilde{r}_j\}$:

$$\{\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1} + h_x, \tilde{x}_{n_x} = 1\}, 1 \leq i \leq n_x \text{ и } h_x = \frac{1}{n_x - 1},$$

$$\{\tilde{y}_1 = 0, \tilde{y}_j = \tilde{y}_{j-1} + h_y, \tilde{y}_{n_y} = \tilde{y}_{\max}\}, 1 \leq j \leq n_y \text{ и } h_y = \frac{\tilde{y}_{\max}}{n_y - 1}, \text{ полагаем } \tilde{r}_j \equiv \tilde{y}_j \text{ и } h_r \equiv h_y,$$

$$\{\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \varphi_i = \varphi_{i-1} + h_\varphi, \varphi_{n_\varphi} = 0\}, 1 \leq i \leq n_\varphi \text{ и } h_\varphi = \frac{\pi/2}{n_\varphi - 1}.$$

Здесь $\tilde{y}_{\max} = \frac{\sqrt{y_{\max} - r_0}}{\sqrt{y_{\max} - r_0} + 1}$.

В узлах сеток будем определять потенциал электрического поля и концентрацию электронов, а на сетках, образованных сдвигом узлов на пол шага в каждом направлении, напряженность электрического поля и диффузионно-дрейфовые потоки электронов.

Запишем разностные аналоги уравнений (2.1) и (2.2):

Уравнение Пуассона:

Уравнение Пуассона для плоской и полярной областей решается модифицированным полинейным методом, предложенным в работе [5].

Разностная форма эллиптических уравнений (2.1')-(2.2') получена с помощью метода контрольного объема [6] и обеспечивает выполнение интегрального закона сохранения. Балансовое соотношение для узла разностной сетки выводится путем интегрирования (2.1')-(2.2') по окружающему контрольному объе-

му, в результате чего получаем разностную пятиточечную аппроксимацию уравнения интегрального баланса:

$$(2.3) \quad a_{(i,j)}^N (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}) - a_{(i,j)}^S (\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}) + a_{(i,j)}^E (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) - a_{(i,j)}^W (\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}) = b_{(i,j)},$$

$$(i, j) \in \{ \tilde{x}_i, \tilde{y}_j \} \text{ и } \{ \varphi_i, \tilde{r}_j \},$$

где $\tilde{x}(+) = 0,5 \cdot (\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_i)$, $\tilde{x}(-) = 0,5 \cdot (\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i)$, $\tilde{y}(+) = 0,5 \cdot (\tilde{y}_{j+1} + \tilde{y}_j)$, $\tilde{y}(-) = 0,5 \cdot (\tilde{y}_{j-1} + \tilde{y}_j)$,

$$a_{(i,j)}^N = \frac{1}{h_y} \int_{\tilde{x}(-)}^{\tilde{x}(+)} \left(\frac{1}{h_y} \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} \frac{d\tilde{y}}{A(\tilde{x}, \tilde{y})} \right)^{-1} d\tilde{x}, \quad a_{(i,j)}^S = \frac{1}{h_y} \int_{\tilde{x}(-)}^{\tilde{x}(+)} \left(\frac{1}{h_y} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} \frac{d\tilde{y}}{A(\tilde{x}, \tilde{y})} \right)^{-1} d\tilde{x},$$

$$a_{(i,j)}^E = \frac{1}{h_x} \int_{\tilde{y}(-)}^{\tilde{y}(+)} \left(\frac{1}{h_x} \int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{x}_{i+1}} \frac{d\tilde{x}}{B(\tilde{x}, \tilde{y})} \right)^{-1} d\tilde{y}, \quad a_{(i,j)}^W = \frac{1}{h_x} \int_{\tilde{y}(-)}^{\tilde{y}(+)} \left(\frac{1}{h_x} \int_{\tilde{x}_{i-1}}^{\tilde{x}_i} \frac{d\tilde{x}}{B(\tilde{x}, \tilde{y})} \right)^{-1} d\tilde{y},$$

$$b_{(i,j)} = 4\pi \cdot e \int_{x(-) y(-)}^{x(+) y(+)} n_e C(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad A(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{q_y(\tilde{y})}{P(\tilde{x})}, \quad B(\tilde{x}, \tilde{y}) = A^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad C(\tilde{x}, \tilde{y}) = P^{-1}(\tilde{x}) \cdot q_y^{-1}(\tilde{y})$$

- для плоской области и: $A(\tilde{r}, \varphi) = r(\tilde{r}) q_r(\tilde{r})$, $B(\tilde{r}, \varphi) = A^{-1}(\tilde{r}, \varphi)$, $C(\tilde{r}, \varphi) = \frac{r(\tilde{r})}{q_r(\tilde{r})}$ - для

полярной области ($x \Rightarrow \varphi$, $h_x \Rightarrow h_\varphi$ и $y \Rightarrow r$).

Таким образом, разностные аналоги уравнений (2.1')-(2.2') записываются в дивергентной потоковой форме, в которой сопряжение плоской и полярной областей осуществляется естественным образом, путем определения потоков через грани контрольного объема, центральная точка которого лежит на прямой линии $\{ \tilde{x} = 0, \tilde{y} \geq 0 \}$.

Тестовые расчеты показали высокую эффективность модернизированного полинейного метода, отличительной особенностью которого является минимальное требование к матрицы коэффициентов \tilde{A} конечной системы линейных алгебраических уравнений ($\tilde{A} > 0$). Как в случае плоской двумерной геометрии, так и в полярных координатах, для получения точного решения разностных уравнений на сетке размером 250 x 500 при заданных сеточных функциях $n_e(\tilde{y})$ и $n_e(\tilde{r})$ (соответственно) и $\Phi^{k=0} = const$ требуется несколько десятков итераций. В случае если двойной интеграл от правых частей уравнений, взятый по кон-

трольному объему, вычисляется аналитически (при линейной интерполяции n_e по значениям в соседних узлах сетки), точное решение разностных уравнений получалось за 1 – 2 итерации. При решении задачи (2.1')-(2.2') с $\Phi^{k=0} = const$ метод ^[4] сходится (с относительной невязкой в узле $\sim 10^{-10}$) в среднем за $\max(n_y, n_\varphi + n_x)$ итераций.

Уравнение диффузии

Диффузионно-дрейфовые уравнения (2.1'')-(2.2'') численно решалась методом переменных направлений ^[7].

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{n_{e(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} - n_{e(i,j)}^n}{0.5 \cdot \tau} = \Lambda_1 n_{e(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 n_{e(i,j)}^n \\ \frac{n_{e(i,j)}^{n+1} - n_{e(i,j)}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5 \cdot \tau} = \Lambda_1 n_{e(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 n_{e(i,j)}^{n+1} \end{cases}$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$ - шаг по времени.

Оператор $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ записан в дивергентной потоковой форме, чем обеспечивается интегральный закон сохранения полного заряда в пространстве.

$$\operatorname{div}(\vec{W}) \Rightarrow \frac{\oint_{l(i,j)} \vec{W}(\xi) \cdot \vec{n}_\xi dl_\xi}{S_{i,j}},$$

где $S_{i,j}$ - площадь контрольного «объема» сеточного узла (i, j) ; $l_{(i,j)}$ - контур, ограничивающий $S_{i,j}$; \vec{n}_ξ - вектор внешней нормали к контуру $l_{(i,j)}$ в точке ξ ; $\xi \in l_{(i,j)}$.

Система уравнений (2.3)-(2.4) является нелинейной. Поэтому, не усложняя существенно алгоритм решения этой системы, введены промежуточные итерации на каждом временном шаге по схеме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(B \frac{\partial \Phi^k}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(A \frac{\partial \Phi^k}{\partial \bar{y}} \right) = 4\pi \cdot e \cdot n_e^n \cdot C \\ \frac{n_e^{n+\frac{1}{2}} - n_e^n(i,j)}{0,5 \cdot \tau} = \Lambda_1 \left(\frac{\Phi^k + \Phi^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right) n_e^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 (\Phi^k) n_e^n(i,j) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(B \frac{\partial \Phi^{k+\frac{1}{2}}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(A \frac{\partial \Phi^{k+\frac{1}{2}}}{\partial \bar{y}} \right) = 4\pi \cdot e \cdot n_e^{n+\frac{1}{2}} \cdot C \\ \frac{n_e^{n+1} - n_e^{n+\frac{1}{2}}(i,j)}{0,5 \cdot \tau} = \Lambda_1 (\Phi^{k+\frac{1}{2}}) n_e^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \left(\frac{\Phi^{k+1} + \Phi^{k+\frac{1}{2}}}{2} \right) n_e^{n+1}(i,j) \end{array} \right. ,$$

при этом на первой итерации выбирается $\Phi^{k+\frac{1}{2}} \Rightarrow \Phi^k$ и $\Phi^{k+1} \Rightarrow \Phi^{k+\frac{1}{2}}$.

Как показывают расчеты на каждом временном шаге достаточно выполнить в среднем 4 – 7 итерации (при $\tau \sim 1$ мкс) для достижения значения величин:

$$\frac{\Phi^{k+1} - \Phi^k}{\min(\Phi^{k+1}, \Phi^k)} \leq 10^{-7} \quad \text{и} \quad \frac{n_e^{k+1} - n_e^k}{\min(n_e^{k+1}, n_e^k)} \leq 10^{-6} \quad (i, j \in \{ \bar{x}_i, \bar{y}_j \} \text{ и } \{ \varphi_i, \bar{r}_j \}).$$

4 Результаты расчетов

Рассмотрим диффузию и дрейф электронов в неэлектроотрицательном газе, состоящем из молекул N_2 . Считаем, что температура газа и концентрация молекул азота постоянны по пространству и равны: $T_g = 300\text{K}$, $n_{N_2} = 2.5 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$ ($D_e \approx 370 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ и $\mu_e = 1,44 \cdot 10^4 \text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ [2]). Температура пластины полагалась равной температуре газа.

В качестве иллюстрации приведем результаты расчетов, выполненные для пластины длиной $L = 10$ см и толщиной $2r_0 = 1$ см. Задача решалась на расчетной сетке $\{ n_y = n_r = 500, n_\varphi + n_x = 250 \}$ с шагом интегрирования по времени $\Delta t \sim 1$ мкс.

Расчеты показывают, что, как и в плоском одномерном случае (рассмотренном в [3]) основная доля отрицательного заряда эмитируется пластиной в газ за 20 – 50 мкс на начальной стадии развития диффузионных процессов. За это время диффузионно-дрейфовая «волна» успевает пройти первые 10 дебаевских расстояний Δ .

На рис. 2 и 3 для трех моментов времени $t = \{100 \text{ мкс}, 1 \text{ мс} \text{ и } 15 \text{ мс}\}$ показаны диффузионно-дрейфовые распределения концентрации электронов и (r, y) – компоненты напряженности электрического поля как функции расстояния от пластины в трех выбранных направлениях, определяемых нормалью к поверхности пластины в точках: $\{\varphi = -\pi/2, r_0\}$ – сплошные линии; $\{\varphi = 0(x=0), r_0\}$ – пунктирные линии; $\{x = L/2, r_0\}$ – линии, образованные точками. Для наглядности на

графиках представлены зависимости $\frac{n_e(\gamma)}{n_e^{eq}}(1+\gamma)^2$ и $\frac{E_{(y,r)}(\gamma)}{E_0}(1+\gamma)$, где

$\gamma = \frac{y-r_0}{\Delta} \left(\equiv \frac{r-r_0}{\Delta} \right)$ – расстояние от пластины, выраженное в величинах Δ ;

$\Delta = 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, $n_e^{eq} = 4,36 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$ и $E_0 = 2,022 \text{ В/см}$ (значения величин Δ и E_0 получены в [3] для условий данной задачи).

Из приведенных графиков видно, что на начальной стадии распространения объемного заряда в газ основное влияние на распределение отрицательного заряда оказывает диффузия и дрейф электронов в направлении по нормали от поверхности тела. Действительно учитывая симметрию задачи, следует ожидать, что $|W_{\varphi,x}| \ll |W_{r,y}|$ т.к. $|\nabla_{\varphi,x} n_e| \ll |\nabla_{r,y} n_e|$ и $|E_{\varphi,x}| \ll |E_{r,y}|$. В этом случае (вблизи пластины) геометрический фактор играет существенную роль. Так в центре пластины $\{x = L/2, r \geq r_0\}$ пространственное распределение заряда близко к распределению в случае плоской бесконечной пластины, а в полярной области $\{\varphi = -\pi/2, r \geq r_0\}$ проявляется дополнительная зависимость величины n_e – обратно пропорциональная радиусу. Характерное время установления стационарного распределения зарядов в области $0 \leq \gamma \leq 500$ можно оценить по формуле $\tau_* \sim \frac{\Lambda^2}{D_e}$

[2] (при $\Lambda \sim 10 - 20 \text{ см} \Rightarrow \tau_* \sim 1 \text{ с}$).

Анализ расчетных данных показывает, что распределения концентрации электронов и (r, y) – компоненты напряженности электрического поля при $r_0 \leq r \leq r_0 + 500\Delta$ достаточно точно описываются параметром Δ , численное значение которого было получено в [3] для плоской одномерной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00057).

Л и т е р а т у р а

- [¹] Б.М.Смирнов. Введение в физику плазмы. – М., Наука. 1982. 224 с.
- [²] Ю.П.Райзер. Физика газового разряда. – М.: Наука. 1987. 592 с.
- [³] В.В.Русанов, В.П.Силаков, А.В.Чеботарев. Диффузионно-дрейфовые распределения зарядов в газах, обусловленные эмиссией электронов с поверхности твердых тел. – Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 64, 2001, 22 с.
- [⁴] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. – М., Наука. 1964. 568 с.
- [⁵] В.Г.Зверев. Модернизированный полинейный метод решения разностных эллиптических уравнений. – ЖВМ и МФ, том 38, № 9, 1998, с. 1553-1562.
- [⁶] А.А.Самарский, А.В. Гулин. Численные методы. – М. , Наука. 1989.
- [⁷] А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. – М. , Наука. 1971.

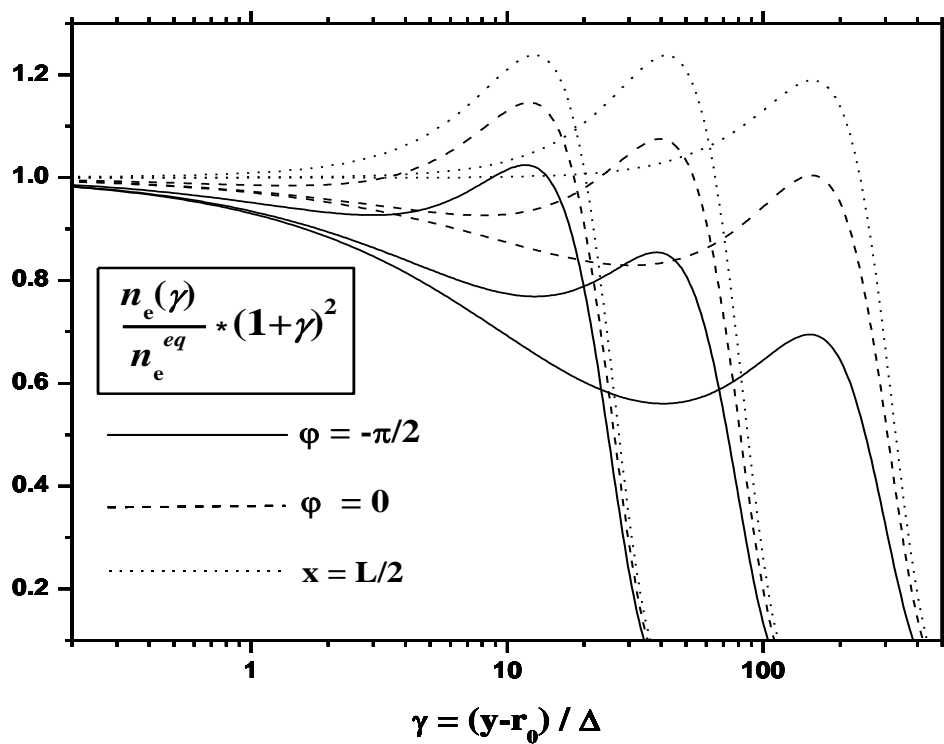


Рис. 2

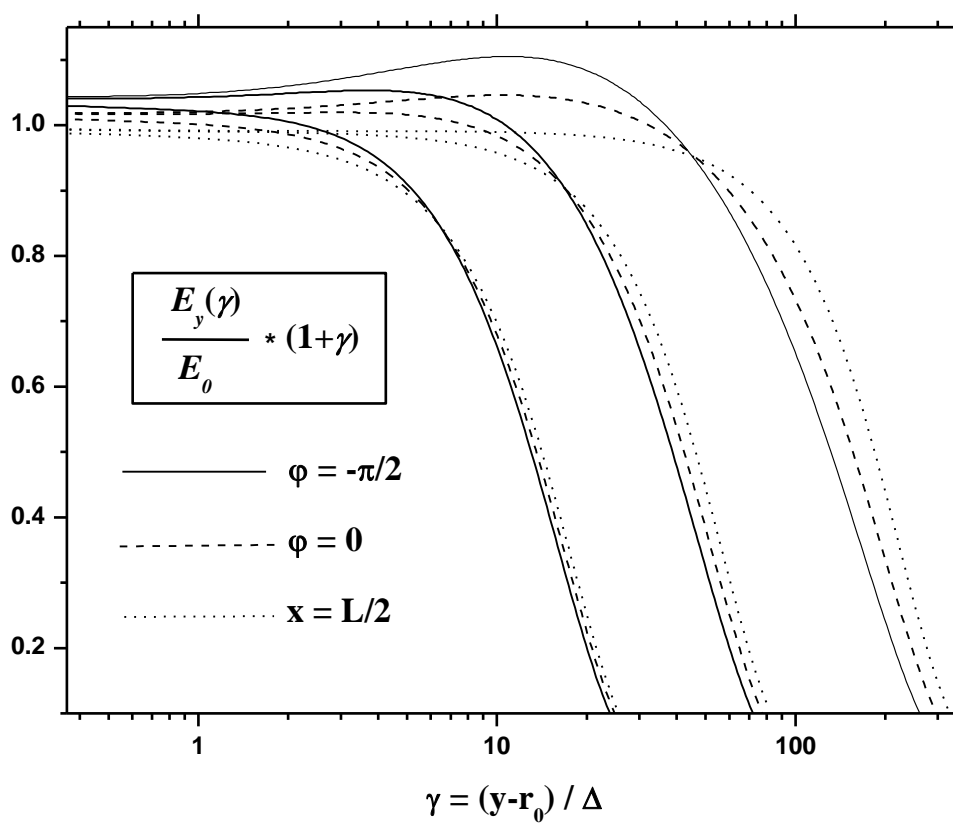


Рис. 3