**Ордена Ленина**

**Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша**

**Российской Академии Наук**

**А.В. Воронков, Е.В. Ефремов, Е.П. Сычугова**

# PARSE 3.0 - КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ТРЕХМЕРНОГО РАСЧЕТА ПЕРЕНОСА НЕЙТРАЛЬНЫХ И ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

**Москва, 2003**

А.В. Воронков, Е.В. Ефремов, Е.П. Сычугова
PARSE 3.0 – комплекс программ трехмерного расчета переноса нейтральных и заряженных частиц методом Монте-Карло.

В данной работе представлена новая версия комплекса программ PARSE, предназначенного для расчётов переноса нейтральных и заряженных частиц в трёхмерной геометрии методом Монте-Карло. Комплекс программ также позволяет моделировать образование нейтронного источника пучком ускоренных протонов гибридных систем, рассчитывать энергетические спектры частиц, энерговыделение и другие характеристики нуклон-ядерного каскада. Используется многогрупповое представление уравнения переноса в предположении непрерывного замедления заряженных частиц и модель катастрофических столкновений.

A.V. Voronkov, E.V. Efremov, E.P. Sychugova
PARSE 3.0 – program package for three-dimensional transport calculation of neutral and charged particles by the Monte-Carlo method.

New version of program package PARSE assigned for the transport calculations of neutral and charged particles in three-dimensional geometry by the Monte-Carlo method is described in this work. The program package allows to model formation of a neutron source by a beam of accelerated protons of hybrid systems, to calculate the energy spectrums of particles, energy release and other characteristics of the nucleon-nuclear cascade. The multi-group representation of the transport equation in the supposition of continuous slowing down of charged particles and the model of disastrous collisions are used.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 01-01-00214.

**А.В. Воронков, Е.В. Ефремов, Е.П. Сычугова**

# PARSE 3.0 - КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ТРЕХМЕРНОГО РАСЧЕТА ПЕРЕНОСА НЕЙТРАЛЬНЫХ И ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

## ДОПОЛНЕНИЕ 1. Вторая нелинейная поправка

Вывод формулы для второй поправки к плотности поля электронов можно провести следующим образом.

$$\varphi_2^1(\tau,\zeta,\pi) = (\hat{I}\hat{X}E_0\hat{D})^2\varphi_0(\chi,\pi) = \hat{V}_1^2\varphi_0 = (\hat{I}_2\hat{X}_2E_0\hat{D}\hat{I}_1\hat{X}_1E_0\hat{D})\big(\Phi/\upsilon\cdot\delta(\pi-\pi_0)\big) =$$

$$= \int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 E_0\left(\tau_2 - \frac{\zeta-\upsilon(\tau-\tau_2)}{\upsilon_0}\right)\hat{X}_2\hat{D}E_0\left(\tau_1 - \frac{\zeta-\upsilon(\tau_2-\tau_1)}{\upsilon_0}\right)\hat{X}_1\left(\frac{\Phi(\tau-\zeta/\upsilon)\delta}{\upsilon}\right)'_\pi =$$

$$= \int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 E_0\left(\tau_2 - \frac{\zeta-\upsilon(\tau-\tau_2)}{\upsilon_0}\right)\hat{X}_2\dot{E}_0\left(\tau_1 - \frac{\zeta-\upsilon(\tau_2-\tau_1)}{\upsilon_0}\right)\frac{\tau_2-\tau_1}{\upsilon_0}\upsilon'\hat{X}_1\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right)'_\pi +$$

$$+\int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 E_0\left(\tau_2 - \frac{\zeta-\upsilon(\tau-\tau_2)}{\upsilon_0}\right)E_0\left(\tau_1 - \frac{\zeta-\upsilon(\tau-\tau_2)-\upsilon(\tau_2-\tau_1)}{\upsilon_0}\right)\hat{X}_2\hat{D}\hat{X}_1\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right)'_\pi =$$

$$= \int_0^\tau d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 E_0(\chi_2)\left(\dot{E}_0(\chi_2+\chi_1)\frac{\Delta_1}{\upsilon_0}\upsilon'\hat{X}_2\hat{X}_1 + E_0(\chi_2+\chi_1)\hat{X}_2\hat{D}\hat{X}_1\right)\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right)'_\pi .$$

Уже использованные соглашения по сокращению записи очевидны. Введем также следующие обозначения: $\phi_n(\chi,\pi) = \big(\Phi^{(n)}/\upsilon\big)\big(\upsilon'/\upsilon\big)^n\delta(\pi-\pi_0)$. Таким образом $\hat{X}_2\hat{D}\phi_1 = \hat{D}\phi_1 - \Delta_2\phi_2$; $\hat{X}_2\hat{D}^2\phi_0 = \hat{D}^2\phi_0 - 2\Delta_2\hat{D}\phi_1 + \Delta_2^2\phi_2 + \left(\dot{\Phi}\upsilon''/\upsilon^2\right)\Delta_2\delta(\pi-\pi_0)$;

$$\hat{X}_1\hat{D}\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right) = \hat{D}\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right) - \Delta_1\phi_1;\quad \hat{X}_2\hat{X}_1\hat{D}\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right) = \hat{D}\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right) - (\Delta_2+\Delta_1)\phi_1 \equiv \hat{D}\left(\frac{\Phi\delta}{\upsilon}\right) - \Delta_{2,1}\phi_1.$$

С учетом полученных соотношений формула для $\varphi_2^1$ преобразуется так:

$$\varphi_2^1 = \hat{I}_2\hat{I}_1E_0(\chi_2)\left(\dot{E}(\chi_2+\chi_1)\frac{\Delta_1}{\upsilon_0}\upsilon'\big(\hat{D}\phi_0 - (\Delta_2+\Delta_1)\phi_1\big) + E_0(\chi_2+\chi_1)\hat{X}_2\big(\hat{D}\phi_0 - \Delta_1\phi_1\big)'_\pi\right) =$$

$$= \hat{I}_2\hat{I}_1E_0(\chi_2)\left(\dot{E}_0(\chi_{2,1})\frac{\Delta_1}{\upsilon_0}\upsilon'\big(\hat{D}\phi_0 - \Delta_{2,1}\phi_1\big) + E_0(\chi_{2,1})\big(\hat{X}_2\hat{D}^2\phi_0 - \Delta_1\hat{X}_2\hat{D}\phi_1\big)\right) = \hat{I}_2\hat{I}_1E_0(\chi_2)*$$

$$\left(\dot{E}_0(\chi_{2,1})\frac{\Delta_1}{\upsilon_0}\upsilon'\big(\phi_0' - \Delta_{2,1}\phi_1\big) + E_0(\chi_{2,1})\left(\hat{D}^2\phi_0 - 2\Delta_2\hat{D}\phi_1 + \Delta_2^2\phi_2 + \Delta_2\dot{\Phi}\frac{\upsilon''}{\upsilon^2}\delta - \Delta_1(\hat{D}\phi_1 - \Delta_2\phi_2)\right)\right)$$

$$=\hat{I}_2\hat{I}_1\left\{E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})\phi_0'' + \left[E_0(\chi_2)\dot{E}_0(\chi_{2,1})\Delta_1\frac{\upsilon'}{\upsilon_0}\phi_0' - E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})(2\Delta_2+\Delta_1)\phi_1'\right] + \right.$$

$$\left. + E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})\Delta_2\left[\Delta_{2,1}\phi_2 + \frac{\dot{\Phi}\upsilon''}{\upsilon^2}\delta\right] - E_0(\chi_2)\dot{E}_0(\chi_{2,1})\Delta_1\Delta_{2,1}\frac{\upsilon'}{\upsilon_0}\phi_1\right\}.$$

Выражение для второй поправки приведено к такой форме, из которой ясно, что при нахождении тока электронов (при взятии интеграла $\int_0^\infty \upsilon\varphi_2^1 d\pi$ ) произойдут значительные упрощения, поскольку выражения, стоящие перед $\phi_n$ коэффициентами, аналогичны друг другу, а сами $\phi_n$ содержат в себе $\delta$-функции и ее производные. Эти ожидания оправдываются; с учетом равенства $\chi_0$ аргументов у $E$ и $\Phi$ после применения $\delta$-функции имеем:

$$J_2^1(\tau,\chi_0) = \left(E_2^1\right)_\tau' = \int_0^\infty \upsilon\varphi_2^1 d\pi = \hat{I}_2\hat{I}_1\left\{E_0E_0\Delta_2\left(\kappa_0^2\Delta_{2,1}\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}\frac{\upsilon_0''}{\upsilon_0}\right) - \kappa_0^2 E_0\dot{E}_0\dot{\Phi}\Delta_1\Delta_{2,1} + \right.$$

$$\left.\int_0^\infty\left[\left(\upsilon E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})\right)''\phi_0 - \left(\frac{\upsilon\upsilon'}{\upsilon_0}E_0(\chi_2)\dot{E}_0(\chi_{2,1})\Delta_1\right)'\phi_0 + \left(\upsilon E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})(2\Delta_2+\Delta_1)\right)'\phi_1\right]d\pi\right\}$$

$$= \hat{I}_2\hat{I}_1\left\{\Delta_2\Delta_{2,1}E_0E_0\ddot{\Phi} + \frac{\upsilon_0''\Delta_2}{\upsilon_0\kappa_0^2}E_0E_0\dot{\Phi} - \Delta_1\Delta_{2,1}E_0\dot{E}_0\dot{\Phi} + \dot{\Phi}\left(\Delta_2+\Delta_{2,1}\right)\left[\frac{\left(E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})\right)'_{\pi=\pi_0}}{\kappa_0} + \right.\right.$$

$$\left. + E_0E_0\right] + \left[\frac{\upsilon_0''}{\upsilon_0}E_0E_0 + 2\frac{\upsilon_0'}{\upsilon_0}\left(E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})\right)'_{\pi=\pi_0} + \right.$$

$$\left.\left. + \left(E_0(\chi_2)E_0(\chi_{2,1})\right)''_{\pi=\pi_0} - \Delta_1\left(\frac{\left(\upsilon_0^2\right)''_{\pi=\pi_0}}{2\upsilon_0^2\kappa_0}E_0\dot{E}_0 + \left(E_0(\chi_2)\dot{E}_0(\chi_{2,1})\right)'_{\pi=\pi_0}\right)\right]\frac{\Phi}{\kappa_0}\right\}\kappa_0^2 =$$

$$= \hat{I}_2\hat{I}_1\left\{\frac{\upsilon_0''}{\upsilon_0}\left(\frac{E_0E_0\Phi}{\Delta_2} + 2E_0\dot{E}_0\Phi + E_0E_0\dot{\Phi}\right) + \kappa_0^2\left[\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}+2\right)E_0E_0\dot{\Phi} - \frac{\Delta_1}{\Delta_2}E_0\dot{E}_0\Phi + \right.\right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}+2\right)E_0\dot{E}_0\Phi\right] + \left[\frac{\Delta_2^2 + \left(\Delta_1+\Delta_2\right)^2}{\Delta_2}E_0\ddot{E}_0\Phi + 2\left(\Delta_1+\Delta_2\right)\dot{E}_0\dot{E}_0\Phi + \left(\Delta_1+\Delta_2\right)E_0E_0\ddot{\Phi} - \right.$$

$$-\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(\Delta_1+\Delta_2)E_0\,\dot{E}_0\,\dot{\Phi}+\frac{(\Delta_1+2\Delta_2)^2}{\Delta_2}E_0\,\dot{E}_0\,\dot{\Phi}-\Delta_1\,\dot{E}_0\,\dot{E}_0\,\Phi-\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(\Delta_1+\Delta_2)E_0\,\ddot{E}_0\,\Phi\Bigg]\left(\frac{\upsilon_0'}{\upsilon_0}\right)^2\Bigg\}\Delta_2=$$

$$=\hat{I}_2\hat{I}_1\Bigg\{\frac{\upsilon_0''}{\upsilon_0}(E_0E_0\Delta_2\Phi)'_\tau+\kappa_0^2\Big[(\Delta_1+2\Delta_2)E_0E_0\,\dot{\Phi}+(\Delta_1+4\Delta_2)E_0\,\dot{E}_0\,\Phi\Big]+\Big[(\Delta_1+\Delta_2)\Delta_2E_0E_0\,\ddot{\Phi}+$$

$$+(\Delta_1+2\Delta_2)\Delta_2E_0\,\ddot{E}_0\,\Phi+(\Delta_1+2\Delta_2)\Delta_2\,\dot{E}_0\,\dot{E}_0\,\Phi+(3\Delta_1+4\Delta_2)\Delta_2E_0\,\dot{E}_0\,\dot{\Phi}\Big]\left(\frac{\upsilon_0'}{\upsilon_0}\right)^2\Bigg\}=$$

$$=\hat{I}_2\hat{I}_1\Bigg\{\frac{\upsilon_0''}{\upsilon_0}(E_0E_0\Delta_2\Phi)'_\tau+\kappa_0^2\Big[(\Delta_1+2\Delta_2)\Delta_2E_0\,\dot{E}_0\,\Phi+(\Delta_1+\Delta_2)\Delta_2E_0E_0\,\dot{\Phi}\Big]'_\tau\Bigg\}.$$

Таким образом, снимая дифференцирование по $d\tau$, получаем формулу для

$$E_2^1=\int_0^\tau d\tau_2\int_0^{\tau_2}d\tau_1\left[\frac{\upsilon_0''}{\upsilon_0}(\tau-\tau_2)(E_0)^2\Phi+\left(\frac{\upsilon_0'}{\upsilon_0}\right)^2\left((\tau-\tau_2)(2\tau-\tau_2-\tau_1)E_0\,\dot{E}_0\,\Phi+(\tau-\tau_2)(\tau-\tau_1)(E_0)^2\,\dot{\Phi}\right)\right],$$

где все опущенные аргументы у функций $\upsilon$ – $\pi_0$, а у остальных – $\chi_0=\tau-\zeta/\upsilon_0$.

Она допускает важное обобщение. При выводе нигде не был использован явный вид функции $E_0$, порождающей оператор $\hat{V}_1$. Более того, именно для реализации этого обобщения, потребующегося в дальнейшем при проведении индукционного шага, в выкладках были сохранены $E_0(\chi_0)E_0(\chi_0)$ и $\dot{E}_0(\chi_0)$, а не использован формально совпадающий с нею $\Phi(\chi_0)$. Повышенная подробность преобразований связана с тем же. Таким образом все выкладки сохранят свою силу и в случае обработки произведения операторов $\hat{V}_k\hat{V}_m$ при всех натуральных индексах. Выражение примет следующий вид:

$$\int_0^\tau d\tau_2\int_0^{\tau_2}d\tau_1(\tau-\tau_2)\left[\frac{\upsilon_0''}{\upsilon_0}E_kE_m\Phi+\left(\frac{\upsilon_0'}{\upsilon_0}\right)^2\left((\tau-\tau_2)\dot{E}_k\,E_m\Phi+(\tau-\tau_1)E_k\,\dot{E}_m\,\Phi+(\tau-\tau_1)E_kE_m\,\dot{\Phi}\right)\right].$$

Второе и третье слагаемые под интегралом «отвечают за» некоммутативность произведения $\hat{V}_k\hat{V}_m\neq\hat{V}_m\hat{V}_k$. Аргументы у полей очевидно таковы: $E_k(\tau_2,\chi_0)E_m(\tau_1,\chi_0)$. Выполняя в исходном случае: $k=0=m$, а также для произведений $\hat{V}_1\hat{V}_2$ и $\hat{V}_2\hat{V}_1$ элементарное интегрирование, приходим к ранее приведенным формулам для второй и третьей поправок к $E_0(\chi_0)$.

## ДОПОЛНЕНИЕ 2. Степени и суммы степеней операторов Власова

Обобщение результата, представленного в Дополнении 1, на случай любого $n$ проводится по той же схеме, но требует некоторых уточнений. Во-первых, потребуется переопределить $\phi_j$ – дифференциальные аналоги невозмущенного распределения электронов, поскольку замена дифференциалов $d\pi$ на $d\upsilon$ приводит к существенным упрощениям выкладок.

Во-вторых, напомним, что оператор Власова порядка $n$ интерпретируется в дискретном случае как вносящий вклад в общее распределение электронов теми из них, которые испытали как раз $n$ взаимодействий с электромагнитным полем. Запишем общий вид степени первого из них, используя следующие сокращения в записи подынтегральных функций и их аргументов: при $k+1 < n$

$$E_0(s_k) \equiv E_0\left(\tau_k - \frac{\zeta - \upsilon(\tau_{k+1} - \tau_k)}{\upsilon_0}\right) \equiv E_0(\Delta_k)\ ; \quad \frac{d\upsilon}{d\pi} = g(\upsilon);\ \text{далее}\ \ \hat{D} \equiv \hat{D}_\upsilon = \frac{d}{d\upsilon} = \frac{1}{g(\upsilon)}\hat{D}_\pi\ ,$$
$$\Delta_k = (s_k - s_{k+1}) \equiv (\tau - \tau_k) - (\tau - \tau_{k+1}) = \tau_{k+1} - \tau_k \quad ; \quad \tau_{n+1} \equiv \tau \quad ; \quad g(\upsilon)E_0(s_k) = f_k \quad :$$

$$E_n^1(\tau,\zeta)/g_0 \ = \ \int_0^\infty \upsilon \hat{V}^n \varphi_0 d\pi / g_0 \ = \ \int_0^\infty (\hat{I}\hat{X}E_0\hat{D}_\pi)^n \varphi_0(\chi,\pi) d\pi / g_0 \ =$$

$$= \int_0^1 \frac{\upsilon d\upsilon}{g(\upsilon)} \hat{I}^n \left\{ gE_0(s_n)\hat{X}_n\hat{D}\left[gE_0(\Delta_{n-1})\hat{X}_{n-1}\hat{D}\left(\ldots\hat{D}(gE_0(\Delta_k)\hat{X}_k \ldots gE_0(\Delta_1)\hat{X}_1\hat{D}\varphi_0)\right)\right]\right\}$$

$$\int_0^1 \frac{\upsilon d\upsilon}{g(\upsilon)} \hat{I}^n \left\{ (f_n f_{n-1} \ldots f_1)\left[\hat{X}_n\hat{D}\hat{X}_{n-1}\hat{D}\left(\ldots\hat{D}(\hat{X}_k \ldots \hat{X}_1\hat{D}\varphi_0)\ldots\right)\right] + \ldots + \right.$$
$$+ \sum_{\vec{\alpha}:|\vec{\alpha}|=k} \left[ f_n \hat{X}_n \hat{D}^{1-\alpha_n} f(s_{n-1} - s_n)\left(\ldots\hat{D}^{1-\alpha_{k+1}} f(s_k - s_{k+1})\hat{X}_k(\ldots\hat{D}^{1-\alpha_2} f(s_1 - s_2)\ldots)\ldots\right)\right] D_{n,k}$$

$$\left. + \ldots + (f_n\hat{D}(f_{n-1}\ldots\hat{X}_2\hat{D}f(s_1 - s_2))\ldots)\hat{X}_n\hat{X}_{n-1}\ldots\hat{X}_1\hat{D}\varphi_0 \right\}. \qquad (Д2.1)$$

Здесь $D_{n,k} = \hat{X}_n\hat{D}^{\alpha_n}\hat{X}_{n-1}\hat{D}^{\alpha_{n-1}}\ldots\hat{X}_2\hat{D}^{\alpha_2}\hat{X}_1\hat{D}\varphi_0 = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\hat{D}^{k-j}\phi_j S_j(\alpha_n s_n,\ldots,\alpha_2 s_2, s_1)$,

где $\alpha_1 \equiv 1$, $\phi_j = \frac{\Phi^{(j)}}{\upsilon}\cdot\frac{\delta(\upsilon - \upsilon_0)}{\upsilon^j}$, в отличие от $\phi_n(\chi,\pi) = \left(\frac{\Phi_\pi^{(n)}}{\upsilon}\right)\left(\frac{\upsilon'}{\upsilon}\right)^n \delta(\pi - \pi_0)$,

– использовавшегося в Дополнении 1, а $S_j$ – стандартная симметрическая функция степени $j$ (см. [Д1], с. 115-119), что доказывается проведением возвратной индукции по $n$. Здесь видны преимущества новой формы записи для общего случая: если один из показателей $\alpha_k$ равен нулю, а не единице, то возможно сокращение $\hat{X}_k\hat{D}^0\hat{X}_{k-1} = \hat{X}(s_k - s_{k+1})\hat{X}(s_{k-1} - s_k) = \hat{X}(s_{k-1} - s_{k+1})$.

Агрегат $P_k^{\vec{\alpha}} = \left\{ f_n \hat{X}_n \hat{D}^{\beta_n} \left[ f_{n-1} \hat{X}_{n-1} \hat{D}^{\beta_{n-1}} \left( ... \hat{D}^{\beta_{k+1}} ( f_k \hat{X}_k ... \hat{D}^{\beta_2} f_1 ) \right) \right] \right\}$, где $\alpha_k + \beta_k = 1$ сводится к полиному относительно $E_0(s_n),...,E_0(s_1)$ и их производных, коэффициенты которого суть полиномы же от $s_n,...,s_1$, коэффициенты которых – производные (по $d\upsilon$) от $g(\upsilon)=\upsilon_\pi'(\upsilon)$. Последние в стандартных случаях равны $1$ (классика), либо $(1-\upsilon_0^2)^{3/2}$ (релятивизм) [Д2]. При взятии интегралов по $d\upsilon$ аргументы у всех функций $E_0^{(j)}$ становятся равными $(\tau - \zeta/\upsilon_0)$ и результат естественно записать по убыванию порядка производных от $\Phi$ в $\phi_j$.

Полученная формула (Д2.1) все еще недостаточно проста для использования. Еще раз применим использованную при ее доказательстве процедуру разделения действия операторов, объединив на этот раз функцию $g$ и оператор $\hat{D}$ и выделив как $\tilde{f}_k$ сами $E_0(s_k)$. Как и в работе [Д3] введем энумератор, индексирующий $g$ по порядку в произведении; операторы дифференцирования уже нумерованы своими показателями $\alpha_k$. Тогда вместо рассмотренного выше $D_k$ упрощений потребует следующая величина:

$$\hat{X}_n g\hat{D}^{\alpha_n} \hat{X}_{n-1} g\hat{D}^{\alpha_{n-1}} ... \hat{X}_2 g\hat{D}^{\alpha_2} \hat{X}_1 g\hat{D}\varphi_0 \equiv \hat{X}_n g_n \hat{D}^{\alpha_n} \hat{X}_{n-1} g_{n-1} \hat{D}^{\alpha_{n-1}} ... \hat{X}_2 g_2 \hat{D}^{\alpha_2} \hat{X}_1 g_1 \hat{D}\varphi_0 \; .$$

Произведя ее преобразование, как и при получении формулы (Д2.1), придем к

$$\begin{aligned} &\{ (g_n g_{n-1},...,g_2 g_1) [\hat{X}_n \hat{D} \hat{X}_{n-1} \hat{D} (... \hat{D} (\hat{X}_k ... \hat{X}_1 \hat{D}\varphi_0)...)] + ... + \\ &+ \sum_{\vec{\mu}:\, |\vec{\mu}|=k} \left[ g_n \hat{X}_n \hat{D}^{\mu_n} g_{n-1} \left( \hat{X}_{n-1} \hat{D}^{\mu_{n-1}} ... \hat{D}^{\mu_{k+1}} g_k \hat{X}_k (... \hat{D}^{\mu_2} g_2 ...)... \right) \right] \tilde{D}_{n,k} + \\ &+ ... + (g_n \hat{D} (g_{n-1} * ... * \hat{X}_2 \hat{D} g_1)...) \hat{X}_n \hat{X}_{n-1} ... \hat{X}_1 \hat{D}\varphi_0 \} \; . \end{aligned} \qquad \text{(Д2.2)}$$

Здесь, как и ранее $\alpha_k$ при определении величины $D_{n,k}$, $\lambda_k$ и $\mu_k$ равны либо $0$ либо $1$, причем для любых $k$ имеет место равенство $\lambda_k + \mu_k = \alpha_k$ $\tilde{D}_{n,k} = \hat{X}_n \hat{D}^{\lambda_n} \hat{X}_{n-1} \hat{D}^{\lambda_{n-1}} ... \hat{X}_2 \hat{D}^{\lambda_2} \hat{X}_1 \hat{D}\varphi_0 = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \hat{D}^{k-j} \phi_j S_j (\lambda_n s_n,...,\lambda_2 s_2, s_1)$, где так же $\lambda_1 \equiv 1$, а $\phi_j$, сохраняют прежние значения.

Что касается выражения $\tilde{P}_k^{\vec{\lambda}}$ – аналога $P_k^{\vec{\alpha}}$, то его запись упрощается: выражение для $\tilde{P}_k^{\vec{\lambda}} = \left\{ \tilde{f}_n \hat{X}_n \hat{D}^{\lambda_n} \left[ \tilde{f}_{n-1} \hat{X}_{n-1} \hat{D}^{\lambda_{n-1}} \left( ... \hat{D}^{\lambda_{k+1}} ( \tilde{f}_k \hat{X}_k ... \hat{D}^{\lambda_2} \tilde{f}_1 ) \right) \right] \right\}$ аналогично формуле (Д2.2), и содержит в себе после выполнения всех дифференцирований $2^{(k-1)}$ слагаемых, в каждом из которых суммарная кратность производных равна $(k\text{-}1)$, имеется степень $(\upsilon_0)^{(k-1)}$ в знаменателе, а коэффициентами служат степени разностей типа $(s_k - s_{k+l})$, возникающих при дифференцировании по

$d\upsilon$ функций $E_0(\tau_k - (\zeta - \upsilon(s_k - s_{k+1}))/\upsilon_0)$. Разности индексов совпадают с размерами лакун (подряд идущих нулевых $\lambda_i$) в мультииндексе $\lambda$ для соответствующего $k$, а показатели степеней самих разностей – с $(l+1)$.

До сих пор рассматривались только степени первого из операторов Власова $\widehat{V}_1^n$. Теперь следует заметить, что полученные выше формулы (Д2.1–2) обладают большей общностью. Проведем в них общую замену $E_0(\tau_k - (\zeta - \upsilon(\tau_{k+1} - \tau_k))/\upsilon_0) \to E_{j_k}(\tau_k - (\zeta - \upsilon(\tau_{k+1} - \tau_k))/\upsilon_0)$. В результате получаем преобразование формулы (Д2.1) самое в себя, разумеется с учетом того, что под $\tilde{f}_k$, можно подразумевать поправки к невозмущенному полю $E_0$ любых порядков $j_k$. Формула же (Д2.2) просто не изменяется. Аналогично обстоит дело и с агрегатами $\widetilde{P}_k^{\vec{\lambda}}$ и $P_k^{\vec{\alpha}}$. В итоге имеем (Д2.1) – как общую формулу для произведения операторов Власова, которая, очевидно, требует дальнейших упрощений, одно из которых – взятие стандартных $n$-кратных интегралов от степенных функций $\widehat{I}^n$ – возможно только после перехода от потока электронов – $\varphi$ к их току $J$, когда после интегрирования по $d\upsilon$ у функций $E_{j_k}$ исчезает зависимость в аргументах от всех промежуточных $\tau_k$. После вынесения $\tau^k$ сомножителем с помощью простой индукции приходим к равенству (Д2.3), в котором $\gamma_k$ получаются из (Д2.2):

$$\int_0^1 ds_n \int_{s_n}^1 ds_{n-1} \ldots \int_{s_2}^1 ds_1 \left(s_n^{\gamma_n - 1} \cdot \ldots \cdot s_1^{\gamma_1 - 1}\right) = \left[\gamma_n(\gamma_n + \gamma_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (\gamma_n + \gamma_{n-1} \cdot \ldots \cdot \gamma_1)\right]^{-1} \cdot \qquad (Д2.3)$$

Каждое конкретное (из $C_n^k$ возможных) значение мультииндекса $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ нумерует одну из такого же числа частей поправки порядка $n$ в формуле (5). Сумма всех их, взятая по всем неупорядоченным (!) разбиениям [Д2] номера $n$, содержащим ровно $k$ слагаемых будет обладать значительно более высокой симметрией. Приведенные значения интегралов (Д2.3), общий вид полиномов Белла $Y_n^k$ и рекуррентная их формула (см. [Д2], с. 173-175) обеспечивают возможность взятия последнего интеграла по $d\tau$ (при переходе от тока к полю) и совпадению коэффициентов (зависящих от $\upsilon_0', \ldots, \upsilon_0^{(n-k+1)}$ и $\upsilon_0^k$) получающихся выражений с коэффициентами полиномов Белла для следующего значения индекса – $(n+1)$.

## ЛИТЕРАТУРА К ДОПОЛНЕНИЮ

Д1. В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. М.: «Наука», 1968.

Д2. Ф.Клеммоу, Дж. Доуэрти. Электродинамика частиц и плазмы. М.: «Мир», 1996.

Д3. А. Кофман. Введение в прикладную комбинаторику. М.: «Наука», 1975.

Д4. Дж. Риордан. Комбинаторные тождества. М.: «Наука», 1982.