

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Введение .....   | 3  |
| 1. Фрактальные и предфрактальные графы .....                     | 4  |
| 2. Укладка фрактального графа в различные пространства .....     | 5  |
| 3. О критериях планарности фрактальных графов .....              | 6  |
| 4. Формула Эйлера для предфрактальных графов.....                | 10 |
| 5. Число внутренних вершин плоского предфрактального графа ..... | 11 |
| 6. Характеристики непланарности .....                            | 15 |
| 8. Об алгоритмах визуализации и проверки на планарность .....    | 18 |
| Заключение .....   | 19 |
| Литература .....   | 20 |

## ВВЕДЕНИЕ

Неоднократно наглядно изображенное условие задачи в виде схемы или рисунка позволяло быстро и точно решить саму задачу. Возможно, именно по этой причине теория графов основательно и небезуспешно “устроилась” в современной науке. Теория графов является мощным инструментом моделирования и решения большого количества задач [1, 2, 3]. Кроме того, графы особо популярны и, как показывает практика, чрезвычайно полезны в представлении и передаче различных видов информации. Наиболее часто графы используются для изображения различных схем и диаграмм (диаграммы потоков данных, организационные схемы, диаграммы состояний и переходов, схемы связей объектов, концептуальные решетки, молекулярные изображения и т.д.) [3]. От того, насколько удачно изображен граф, зависит то, насколько хорошо будет воспринята информация, которую он несет. Принципы “правильного” изображения графа отражаются в критериях визуализации графов [3].

Одной из главных составляющих визуализации графов является топологическая теория графов [4]. Она закладывает теоретические основы укладки графов на различные поверхности. Именно поэтому, топологическая теория графов занимает прочное место в современной computer science. Если граф с небольшим числом вершин еще можно нарисовать “от руки”, то визуализация графов большой размерности производится автоматизировано [5], и здесь нельзя переоценить значимость методов топологической теории графов.

Настоящая работа посвящена изучению топологических свойств “больших” графов, называемых фрактальными (предфрактальными). Фрактальные (предфрактальные) графы являются моделями структур, обладающих свойством самоподобия. Отличительной чертой фрактальных графов является возможность анализа свойств всего фрактального графа, или его конечного аналога – предфрактального графа, по свойствам его затравки – наименьшей несамopodobной части. Такой подход особенно актуален и полезен в наступившей эпохе больших и сложных задач.

## 1. ФРАКТАЛЬНЫЕ И ПРЕДФРАКТАЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Термином *затравка* условимся называть какой-либо связный граф  $H = (W, Q)$ . Для определения *фрактального (предфрактального) графа* [6] нам потребуется операция *замены вершины затравкой (ЗВЗ)*. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе  $G = (V, E)$  у намеченной для замещения вершины  $\tilde{v} \in V$  выделяется множество  $\tilde{V} = \{\tilde{v}_j\} \subseteq V$ ,  $j = 1, 2, \dots, |\tilde{V}|$ , смежных ей вершин. Далее из графа  $G$  удаляется вершина  $\tilde{v}$  и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина  $\tilde{v}_j \in \tilde{V}$ ,  $j = 1, 2, \dots, |\tilde{V}|$ , соединяется ребром с одной из вершин затравки  $H = (W, Q)$ . Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу, при необходимости.

Предфрактальный граф будем обозначать через  $G_L = (V_L, E_L)$ , где  $V_L$  – множество вершин графа, а  $E_L$  – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе  $l = 1, 2, \dots, L - 1$  графе  $G_l = (V_l, E_l)$  каждую его вершину затравкой  $H = (W, Q)$ . На этапе  $l = 1$  предфрактальному графу соответствует затравка  $G_1 = H$ . Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф*  $G_L = (V_L, E_L)$  *порожден затравкой*  $H = (W, Q)$ . Процесс порождения предфрактального графа  $G_L$ , по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов  $G_1, G_2, \dots, G_l, \dots, G_L$ , называемой *траекторией*. Фрактальный граф  $G = (V, E)$ , порожденный затравкой  $H = (W, Q)$ , определяется бесконечной траекторией.

Использование операции ЗВЗ в процессе порождения предфрактального графа  $G_L$ , для элементов  $G_l = (V_l, E_l)$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, L - 1\}$ , его траектории позволяет ввести отображение  $\varphi: V_l \rightarrow V_{l+1}$  или  $\varphi(V_l) = V_{l+1}$ , а в общем виде

$$\varphi^t(V_l) = V_{l+t}, \quad t = 1, 2, \dots, L - l. \quad (1)$$

В выражении (1) множество  $V_{l+t}$  – *образ* множества  $V_l$ , а множество  $V_l$  – *прообраз* множества  $V_{l+t}$ .

Для предфрактального графа  $G_L$ , ребра, появившиеся на  $l$ -ом,  $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ , этапе порождения, будем называть *ребрами ранга*  $l$ . *Новыми* ребрами предфрактального графа  $G_L$  назовем ребра ранга  $L$ , а все остальные ребра назовем – *старыми*.

Если из предфрактального графа  $G_L$ , порожденного  $n$ -вершинной затравкой  $H$ , последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга  $l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L - 1$ ), то исходный граф распадется на множество связных компонент  $\{B_L^{(1)}\}$ , каждая из которых изоморфна [7] затравке  $H$ . Множество компонент  $\{B_L^{(1)}\}$  будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично, при удалении из предфрактального графа  $G_L$  всех старых ребер рангов  $l = 1, 2, \dots, L - 2$ , получим множество *блоков*  $\{B_L^{(2)}\}$  *второго ранга*. Обобщая, скажем, что при удалении

из предфрактального графа  $G_L$  всех ребер рангов  $l=1,2,\dots,L-r$ , получим множество  $\{B_{L,i}^{(r)}\}$ ,  $r \in \{1,2,\dots,L-1\}$ , блоком  $r$ -го ранга, где  $i=1,2,\dots,n^{L-r}$  - порядковый номер блока. Блоки  $B_L^{(1)} \subseteq G_L$  первого ранга также будем называть *подграф-затравками*  $H$  предфрактального графа  $G_L$ . Очевидно, что всякий блок  $B_L^{(r)} = (U_L^{(r)}, M_L^{(r)})$ ,  $r \in \{1,2,\dots,L-1\}$ , является предфрактальным графом  $B_r = (U_r, M_r)$ , порожденным затравкой  $H$ .

Уточним для отображения  $\varphi$  в формуле (1) ряд подробностей. Для любой вершины  $v_j \in V_l$ ,  $j \in \{1,2,\dots,n^l\}$ , предфрактального графа  $G_l = (V_l, E_l)$ ,  $l \in \{1,2,\dots,L-1\}$ , из траектории графа  $G_L$ , справедливо

$$\varphi^t(v_j) = U_{l+t,j}^{(t)}, \quad (2)$$

$$\varphi^t(v_j) = B_{l+t,j}^{(t)}, \text{ где } B_{l+t,j}^{(t)} = (U_{l+t,j}^{(t)}, M_{l+t,j}^{(t)}) \subseteq G_{l+t}, \quad t = 1,2,\dots,L-l.$$

Аналогично,

$$\varphi^t(U_{l,i}^{(r)}) = U_{l+t,i}^{(r+t)}, \quad (3)$$

$$\varphi^t(B_{l,i}^{(r)}) = B_{l+t,i}^{(r+t)}, \quad r \in \{1,2,\dots,L-t\}, \quad i \in \{1,2,\dots,n^{l-r}\}.$$

Два блока предфрактального графа назовем *смежными*, если существует ребро, вершины которого принадлежат различным блокам. Не требует доказательства тот факт, что блоки предфрактального графа смежны тогда и только тогда, когда смежны их прообразы из (2).

Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа  $G_L$  является такой случай, когда вместо единственной затравки  $H$  используется множество затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\} = \{H_1, H_2, \dots, H_t, \dots, H_T\}$ ,  $T \geq 2$ . Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа  $G_{l-1}$  к графу  $G_l$  каждая вершина замещается некоторой затравкой  $H_t \in \mathbf{H}$ , которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры.

## 2. УКЛАДКА ФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА В РАЗЛИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

*Плоским графом* [7] называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный [7] плоскому графу, будем называть *планарным* [7].

О планарных графах говорят, что они *укладываются на плоскости* (имеют *плоскую укладку*). Вообще говоря, рассматриваются укладки графов не только на плоскости, но и на других поверхностях и в пространстве. Поэтому дадим определение укладки графа в произвольное пространство.

Прежде всего введем понятие *жордановой кривой*, под которой будем понимать непрерывную спрямляемую линию, не имеющую самопересечений.

Будем говорить, что граф  $G$ , конечный или бесконечный [8], *укладывается в пространстве  $\Lambda$*  (часто говорят о вложении графа в поверхность [9]), если существует такое отображение вершин и ребер графа  $G$  соответственно в точки и жордановы кривые этого пространства, что различным вершинам соответствуют различные точки, а кривые, соответствующие различным ребрам, пересекаются только в инцидентных этим ребрам вершинах. Изображенный таким образом граф называется *укладкой графа  $G$  в пространстве  $\Lambda$* .

**ТЕОРЕМА 1.** Всякий предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$  укладывается в трехмерное пространство  $E^3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Все вершины предфрактального графа  $G_L$  поместим в различные точки оси  $OX$  пространства  $E^3$ . Из пучка плоскостей, проходящих через эту ось, выберем  $|E_L|$  различных плоскостей. Далее каждое ребро  $e = (v, u) \in E_L$  изобразим в соответствующей плоскости полуокружностью, проходящей через вершины  $v \in V_L$  и  $u \in V_L$ . Как результат получим укладку предфрактального графа  $G_L$  в пространство  $E^3$ . Действительно все ребра предфрактального графа лежат в различных плоскостях пространства и поэтому не пересекаются. ◀<sup>1</sup>

**ТЕОРЕМА 2.** Всякий фрактальный граф  $G = (V, E)$  укладывается в трехмерное пространство  $E^3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** этой теоремы повторяет доказательство предыдущей теоремы. С той лишь разницей, что количество фиксируемых плоскостей из числа проходящих через ось  $OX$  в пространстве  $E^3$  бесконечно, поскольку множество ребер  $E$  фрактального графа  $G$  – есть множество счетное. ◀

### 3. О КРИТЕРИЯХ ПЛАНАРНОСТИ ФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ

Введем операцию *подразбиения ребра*  $e = (v, u)$  графа. Она заключается в следующем: из графа удаляется ребро  $e$  и добавляются два новых ребра  $e_1 = (v, w)$  и  $e_2 = (w, u)$ , где  $w$  - новая вершина. Два графа называются *гомеоморфными*, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

Теорема Понтрягина – Куратовского (критерий планарности графа) [10] гласит, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Ясно, что теорема Понтрягина – Куратовского, как и прочие критерии планарности графов [10], справедлив и для всех предфрактальных графов. Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  изображены на рис. 1.

Согласно определению, для предфрактального графа  $G_L$ , порожденного затравкой  $H$ , его блоки первого  $B_{L,i}^{(1)} = H$ ,  $i = \overline{1, n^{L-1}}$ , изоморфны затравке  $H$ . Поэтому из критерия планарности графа совершенно очевидным образом вытекают следующие утверждения.

<sup>1</sup> Здесь и далее символом “◀” будем обозначать конец доказательств лемм и теорем.

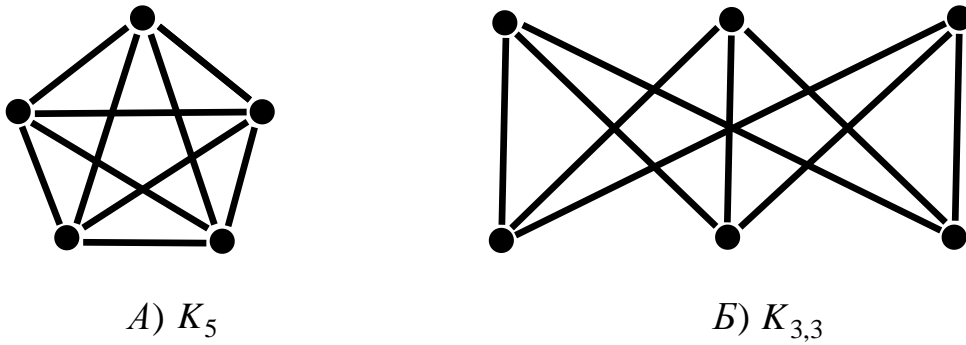


Рис. 1

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Всякий предфрактальный граф, порожденный затравкой, гомеоморфной  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , не является планарным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Всякий предфрактальный граф, порожденный затравкой, имеющий подграф гомеоморфный  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , не является планарным.

*Гранью* [7] плоского графа принято называть максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой, не пересекающей ребра графа. Тем самым каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одной грани плоского графа. *Границей грани* [7] будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

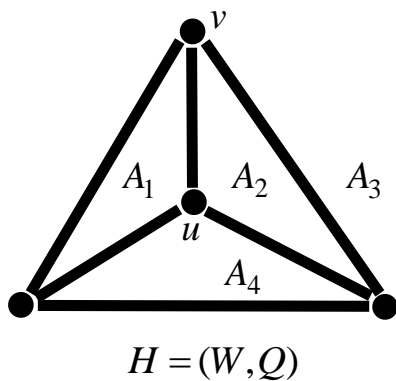


Рис. 2

На рис. 2 изображен граф  $H = (W, Q)$  с четырьмя гранями. Отметим, что всякий плоский граф имеет одну и притом единственную, неограниченную грань. Такая грань называется *внешней*, а остальные грани – *внутренними* (на рис. 2 грань  $A_3$  – внешняя). Важно, что всякую внутреннюю грань плоского графа легко преобразовать во внешнюю [7]. Кроме того, для любого плоского графа каждая точка плоскости, не лежащая на ребре, входит только в одну грань. А каждая точка ребра, не являющаяся вершиной, входит только в одну грань, если это

ребро является мостом, и точно в две грани, если оно не мост. Вершина, не являющаяся висячей, принадлежит не менее чем двум граням. К примеру, вершина  $v$ , как показано на рис. 2, входит сразу в три грани –  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ .

*Внутренней вершиной* плоского графа назовем такую вершину, которую нельзя соединить жордановой кривой с точками внешней грани графа, так чтобы она не пересекала ни одно из ребер графа, образующих границу внешней грани. В противном случае, вершина называется *внешней*. На рис. 2 вершина  $u$  – внутренняя.

*Число внутренних вершин* планарного графа  $G$  напрямую зависит от вида его плоской укладки. Поэтому в дальнейшем будем говорить, что фрактальный (предфрактальный) граф порожден *произвольно-плоской затравкой*, если вид плоской укладки затравки в процессе порождения не фиксирован, и что фрактальный (предфрактальный) граф порожден *плоской затравкой* в том слу-

чае, когда вид плоской укладки затравки в процессе порождения строго фиксирован. Вопрос эквивалентности плоских упаковок планарного графа широко освещен в книге [9]. В нашей работе, порождение предфрактального графа произвольно-плоской затравкой предполагает использование неэквивалентных плоских упаковок затравки.

**ТЕОРЕМА 3.** Предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный произвольно-плоской затравкой  $H = (W, Q)$ , планарен, если смежность старых ребер не нарушается.

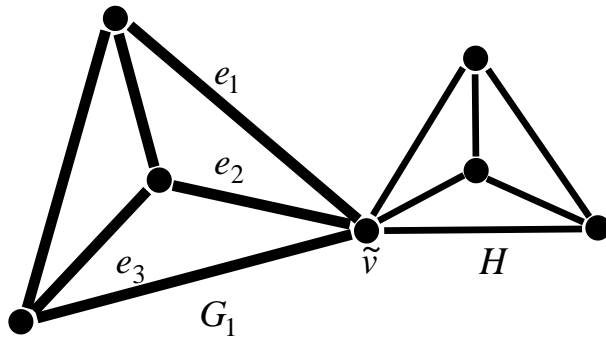


Рис. 3

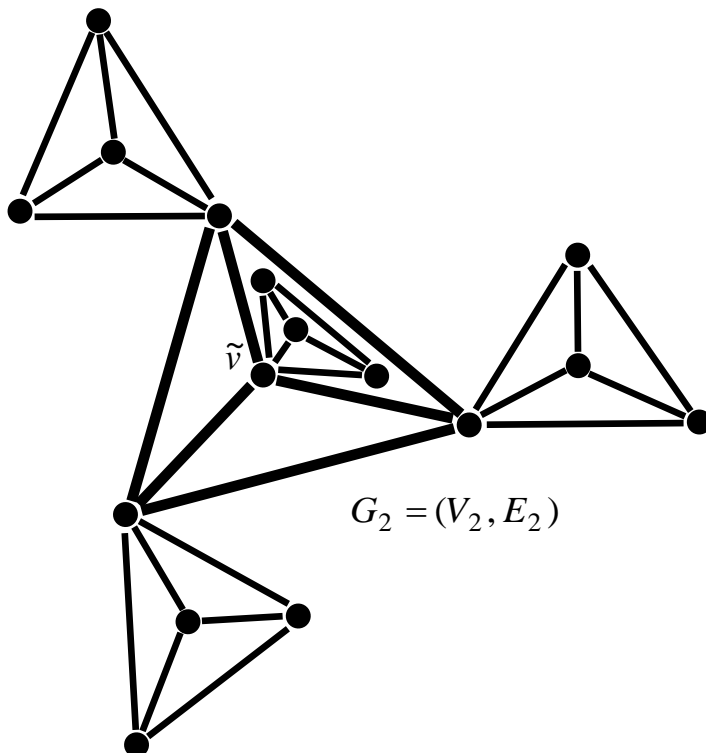


Рис. 4

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства теоремы нам понадобится операция “склеивания” плоских графов. Рассмотрим два плоских графа  $G' = (V', E')$  и  $G'' = (V'', E'')$ . Произвольным образом выберем две вершины  $v' \in V'$  и  $v'' \in V''$ . Тогда, согласно [7], граф  $\tilde{G} = (\tilde{V}, E' \cup E'')$  полученный из  $G'$  и  $G''$  слиянием вершин  $v'$  и  $v''$  в некоторую вершину  $\tilde{v} \in \tilde{V}$ , является планарным, т.е. имеет плоскую укладку. При этом, очевидно, если все ребра графа  $G''$  расположатся во внешней грани графа  $G'$ , то полученный при их склеивании граф  $\tilde{G}$  будет плоским.

Доказательство проведем конструктивно. На этапе  $l=1$ , дан плоский предфрактальный граф  $G_1 = (V_1, E_1) = H = (W, Q)$ , он изображен на рис. 2. На этапе  $l=2$  на графе  $G_1 = H = (W, Q)$  произвольно выделим вершину  $v \in V_1$  и множество  $\omega(v)$  инцидентных ей ребер, для графа  $G_1$  на рис. 3  $\omega(v) = \{e_1, e_2, e_3\}$ . В соответствии с правилами порождения предфрактального графа, заместим вершину  $v \in V_1$  затравкой  $H = (W, Q)$ . При этом, удовлетворяя требованиям теоремы,

множество ребер  $\omega(v)$  сохраним инцидентными одной из вершин затравки, что, вообще говоря, будет соответствовать операции “склеивания” плоских графов  $G_1$  и  $H$ . А поэтому, в результате, получим планарный граф, см. рис. 3. Который, используя любой из известных способов [7, 10], преобразуем в плоский

граф (граф на рис. 3 уже преобразован в плоский граф). Далее, описанную последовательность операций (замена вершины затравкой, преобразование в плоский граф) произведем со всеми оставшимися вершинами графа  $G_1 = (V_1, E_1)$ . В итоге, по окончании второго этапа порождения, получим плоский предфрактальный граф  $G_2 = (V_2, E_2)$ , см. рис. 4. На всех последующих этапах  $l = 3, \dots, L$  порождения с предфрактальным графом  $G_l = (V_l, E_l)$  последовательно сделаем те же операции, что на этапе  $l = 2$ . В результате на этапе  $l = L$  получим планарный предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ . ◀

Вообще говоря, процесс “склеивания” затравки  $H = (W, Q)$  и предфрактального графа  $G_l = (V_l, E_l)$  во всех его вершинах можно продолжить до бесконечности  $l = 1, 2, 3, \dots, L, L + 1, \dots$ . Для полученного таким путем фрактального графа  $G = (V, E)$  справедливо

**СЛЕДСТВИЕ 3.1.** Всякий фрактальный граф  $G = (V, E)$ , порожденный произвольно-плоской затравкой  $H = (W, Q)$ , планарен, если смежность старых ребер не нарушается.

Поскольку, операция “склеивания” плоских графов возможна и для совершенно различных графов, то имеют место и такие следствия.

**СЛЕДСТВИЕ 3.2.** Всякий предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный множеством произвольно-плоских затравок  $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_t, \dots, H_T\}$ ,  $T \geq 2$ , планарен, если смежность старых ребер не нарушается.

**СЛЕДСТВИЕ 3.3.** Всякий фрактальный граф  $G = (V, E)$ , порожденный множеством произвольно-плоских затравок  $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_t, \dots, H_T\}$ ,  $T \geq 2$ , планарен, если смежность старых ребер не нарушается.

**ТЕОРЕМА 4.** У всякого плоского предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  старые ребра инцидентны внешним вершинам блоков первого ранга.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольный плоский предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный затравкой  $H = (W, Q)$ . Предфрактальный граф  $G_L$ , согласно определению, представляет собой множество подграфов-затравок  $H$  соединенных старыми ребрами. При чем каждая подграф-затравка  $H$  является плоским графом, в противном случае предфрактальный граф  $G_L$  не будет плоским.

Доказательство теоремы проведем от противного. Предположим, что у предфрактального графа  $G_L$  существует старое ребро  $e = (v_1, v_2) \in E_L$  ранга  $l$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, L - 1\}$ , такое что вершина  $v_2 \in V_L$  является внутренней вершиной одного из подграфов-затравок  $H' = (W', Q') \subseteq G_L$ , см. рис. 5. Но тогда, из определения внутренней вершины следует, что отрезок жордановой кривой, на рис. 5 он изображен пунктиром, отражающий на плоскости ребро  $e$ , пересечет хотя бы одно ребро  $e' \in Q'$  подграф-

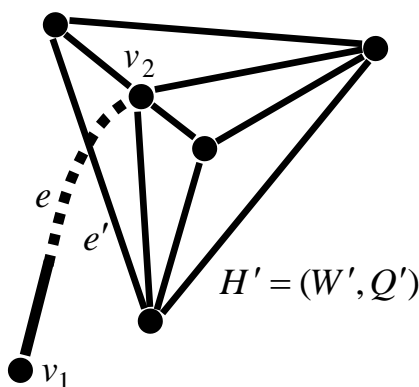


Рис. 5

затравки  $H'$  в точке принадлежащей границе внешней грани. А это противоречит тому, что предфрактальный граф  $G_L$  является плоским графом. Поэтому, заключаем, что наше предположение не верно, а значит старые ребра плоского предфрактального графа  $G_L$  инцидентны внешним вершинам подграф-затравок  $H = (W, Q)$ , или блоков первого ранга. ◀

Граф называется *максимально плоским (планарным)* [7], если он перестает быть плоским при добавлении к нему хотя бы одного ребра. На рис. 2 и 5 графы  $H$  и  $H'$  соответственно являются 4-вершинным и 5-вершинным – максимально плоские графами. Известно [7], что граф является максимально плоским тогда и только тогда, когда он представляет собой плоскую триангуляцию, т.е. каждая его грань, в том числе и внешняя, является треугольником (3-циклом). Поэтому любой максимально плоский граф имеет ровно три внешние вершины, образующие 3-цикл. Поскольку, как отмечалось ранее, любая внутренняя грань может быть преобразована во внешнюю, то из теоремы 4 очевидным образом вытекает следующее

**СЛЕДСТВИЕ 4.1.** У всякого планарного предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного максимально планарной затравкой  $H = (W, Q)$ , вершины отдельно взятого блока первого ранга, инцидентные старым ребрам, образуют 3-цикл.

#### 4. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ

Многие результаты для планарных графов были получены благодаря широко известной *формуле Эйлера* [7]. Напомним ее. Для всякого связного плоского графа  $H = (W, Q)$ , у которого  $|W| = n$ ,  $|Q| = q$ , и  $f_H$  – число граней, справедливо равенство  $n - q + f_H = 2$ . Вид плоской укладки графа  $H$  при этом не имеет значения. Тогда для плоского предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  порожденного затравкой  $H = (W, Q)$  так же справедливо

$$n^L - q \frac{n^L - 1}{n - 1} + f_{G_L} = 2, \quad (4)$$

где  $f_{G_L}$  – число граней графа  $G_L$ . Из (1) выразим  $f_{G_L}$ .

$$\begin{aligned} f_{G_L} &= 2 - n^L + q \frac{n^L - 1}{n - 1} = 2 + \frac{qn^L - q - n^{L+1} + n^L}{n - 1} = 2 + \frac{(q + 1)n^L - q - n^{L+1}}{n - 1} = \\ &= 2 + \frac{(1 - n + q)n^L - q}{n - 1} = 1 + \frac{(1 - n + q)n^L - q + n - 1}{n - 1} = 1 + \frac{(1 - n + q)n^L - q + n - 1}{n - 1} = \\ &= 1 + \frac{(1 - n + q)(n^L - 1)}{n - 1}, \text{ а т.к. } f_H = 2 - n + q, \text{ то} \end{aligned}$$

$$f_{G_L} = 1 + (f_H - 1) \frac{n^L - 1}{n - 1}. \quad (5)$$

Проведенные рассуждения являются основанием для теоремы.



ТЕОРЕМА 5. Для всякого связного плоского предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного затравкой  $H = (W, Q)$ , число граней  $f_{G_L}$  определяется формулой (5).

К формуле (5) можно подойти и с другой стороны. В процессе порождения предфрактального графа  $G_L$  производится ровно  $\frac{n^L - 1}{n - 1}$  операций ЗВЗ.

При необходимости можно убедиться в том, что каждая операция ЗВЗ приносит графу  $G_L$  по  $(f_H - 1)$ -ой внутренней грани, при этом внешняя грань остается

одна и та же. Поэтому общее число  $(f_H - 1) \frac{n^L - 1}{n - 1}$  внутренних граней предф-

рактального графа  $G_L$  в сумме с одной внешней гранью дают формулу (5).

Для предфрактального графа  $G_L$ , порожденного множеством затравок  $\mathbf{H} = \{H_t\}$ ,  $t = \overline{2, T}$ , обозначим через  $f_{\min} = \min_{t=2, T} f_{H_t}$ ,  $f_{\max} = \max_{t=2, T} f_{H_t}$  соответственно минимальное и максимальное число граней среди затравок из множества  $\mathbf{H}$ .

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Числа граней  $f_{G_L}$  предфрактального графа  $G_L$ , порожденного множеством затравок  $\mathbf{H}$  ограничено двойным неравенством

$$(f_{\max} - 1) \frac{n^L - 1}{n - 1} \leq f_{G_L} - 1 \leq (f_{\max} - 1) \frac{n^L - 1}{n - 1}. \quad (6)$$

Отметим, что правая часть неравенства (6) достигается, когда в порождении предфрактального графа  $G_L$  участвует только одна затравка из  $\mathbf{H}$  с числом граней равным  $f_{\max}$ . А левая часть (6) достигается, когда  $G_L$  порожден затравкой из  $\mathbf{H}$  с минимальным числом  $f_{\min}$  граней.

## 5. ЧИСЛО ВНУТРЕННИХ ВЕРШИН ПЛОСКОГО ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА

Число внутренних вершин  $\mathbf{zt}(H)$  планарного графа  $H = (W, Q)$  зависит от вида его плоской укладки. Тогда, в свою очередь, число внутренних вершин  $\mathbf{zt}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  зависит от числа внутренних вершин  $\mathbf{zt}(H)$  его затравки  $H = (W, Q)$ .

Будем последовательны, и рассмотрим плоский предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный плоской затравкой  $H = (W, Q)$ ,  $|W| = n$ , с сохранением смежности старых ребер. Тогда на  $l$ -ом,  $l = 1, 2, 3, \dots, L$ , этапе порождения, замена вершины  $\tilde{v} \in V_{l-1}$  графа  $G_{l-1} = (V_{l-1}, E_{l-1})$  затравкой  $H$  соответствует операции “склеивания” графа  $G_{l-1}$  и затравки  $H$  в замещаемой вершине  $\tilde{v} \in V_{l-1}$ . В операции “склеивания” совмещается по одной вершине графов  $G_{l-1}$  и  $H$ , поэтому возникает вопрос о взаимном расположении остальных вершин на плоскости.

Первое. Если  $\tilde{v} \in V_{l-1}$  – внутренняя вершина, то все грани, которым она принадлежит являются внутренними гранями графа  $G_{l-1}$ . Поэтому все вершины затравки  $H$ , “склеенной” с графом  $G_{l-1}$  в вершине  $\tilde{v}$  будут принадлежать только одной из внутренних граней графа  $G_{l-1}$ , которой принадлежит и сама вершина  $\tilde{v}$  (см. рис. 4). В противном случае будет нарушаться плоская укладка графа, полученного в результате проведения “склеивания”. При это все вершины подграфа-затравки  $H$  станут внутренними.

Второе. Если  $\tilde{v} \in V_{l-1}$  – внешняя невисячая вершина, то она принадлежит как внутренним так и внешней граням графа  $G_{l-1}$  (висячая вершина [7], в силу своей специфики, может принадлежать либо внешней, либо одной внутренней грани графа). Поэтому вершины затравки  $H$ , кроме вершины совмещенной с  $\tilde{v}$ , при “склеивании” с  $G_{l-1}$ , не нарушая плоской укладки, могут расположиться либо в одной из внутренних, либо во внешней грани графа  $G_{l-1}$ . При расположении затравки  $H$  в одной из внутренних граней графа  $G_{l-1}$ , все ее вершины, кроме совмещенной, станут внутренними (см. рис. 6), как и в случае с внутренней вершиной  $\tilde{v}$ . А при расположении затравки  $H$  во внешней грани графа  $G_{l-1}$  (см. рис. 3), ее вершины не поменяют свой тип (внешние вершины останутся внешними).

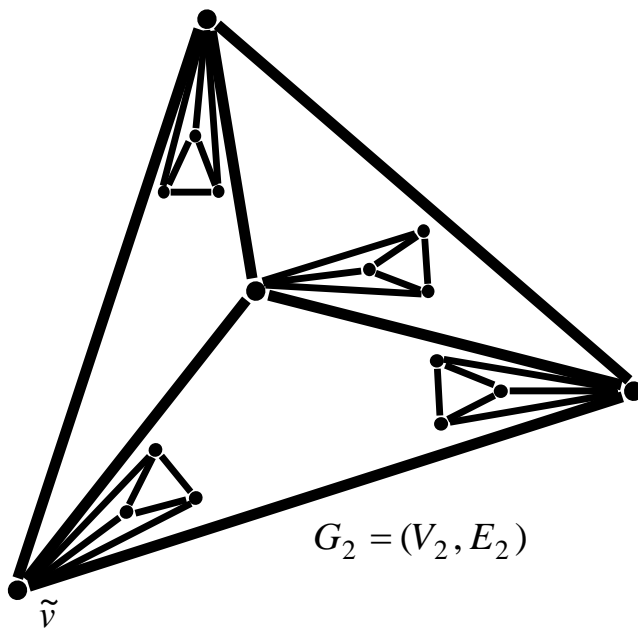


Рис. 6

Будем говорить, что плоский предфрактальный граф имеет *внутреннюю укладку*, если границу его внешней грани образуют только старые ребра первого ранга. Также будем говорить, что плоский предфрактальный граф имеет *внешнюю укладку*, если смежность его старых ребер не нарушается, а в процессе порождения этого предфрактального графа, при замещении внешних вершин затравка располагалась во внешней грани. На рис. 6 изображен предфрактальный граф  $G_2 = (V_2, E_2)$  с внутренней укладкой, порожденный затравкой  $H = (W, Q)$  (см. рис. 2). На рис. 4 изображен тот же предфрактальный граф  $G_2 = (V_2, E_2)$ , но с внешней укладкой.

ЛЕММА 1. Для числа внутренних вершин  $\mathbf{zt}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  с внутренней укладкой, порожденного плоской затравкой  $H = (W, Q)$ ,  $|W| = n$ , справедливо равенство

$$\mathbf{zt}(G_L) = n^L - n + \mathbf{zt}(H). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения внутренней вершины следует, что ребрам плоского графа, образующих границу внешней грани, инцидентны только внешние вершины этого графа. Ребра, инцидентные внутренним вершинам

графа, в образовании границы внешней грани не участвуют. А поскольку границу внешней грани предфрактального графа  $G_L$  с внутренней укладкой образуют только лишь старые ребра первого ранга, то число внешних вершин предфрактального графа  $G_L$  будет равно числу  $n - \mathbf{zt}(H)$  внешних вершин его плоской затравки  $H = (W, Q)$ ,  $|W| = n$ . Но тогда для числа внутренних вершин графа  $G_L$  справедливо равенство  $\mathbf{zt}(G_L) = n^L - n + \mathbf{zt}(H)$ , где  $n^L$  – число всех вершин графа  $G_L$ . ◀

ЛЕММА 2. Для числа внутренних вершин  $\mathbf{zt}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$  с внешней укладкой, порожденного плоской затравкой  $H = (W, Q)$ ,  $|W| = n$ , справедливо равенство

$$\mathbf{zt}(G_L) = n^L - (n - \mathbf{zt}(H))^L. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по индукции. Пусть дан плоский граф  $H = (W, Q)$ ,  $|W| = n$ , с числом  $\mathbf{zt}(H)$  внутренних вершин. Проследим за процессом порождения предфрактального графа  $G_L$  с внешней укладкой и с затравкой  $H$ . На этапе  $l = 1$  предфрактальный граф  $G_1 = H$ , поэтому число его внутренних вершин  $\mathbf{zt}(G_1) = \mathbf{zt}(H)$ , а число внешних вершин, соответственно, равно  $n - \mathbf{zt}(H)$ . На этапе  $l = 2$  в результате замещения каждой из  $n - \mathbf{zt}(H)$  внешних вершин графа  $G_1$  затравкой  $H$  будем получать по  $n - \mathbf{zt}(H)$  внешней вершине для предфрактального графа  $G_2$ , поскольку, в соответствии с определением внешней укладки, затравка (все ее ребра и вершины) будут расположены во внешней грани графа  $G_2$ . При замещении внутренних вершин графа  $G_1$  затравкой  $H$  мы не будем получать внешних вершин для предфрактального графа  $G_2$ , поэтому число внутренних вершин графа  $G_2$  равно  $\mathbf{zt}(G_2) = n^2 - (n - \mathbf{zt}(H))^2$ , где  $n^2$  – число всех вершин графа  $G_2$ . Продолжая подобным образом, на этапе  $l = L - 1$  порождения предфрактального графа  $G_L$ , замещение каждой из  $(n - \mathbf{zt}(H))^{L-1}$  внешних вершин графа  $G_{L-1}$ , приведет к появлению числа  $(n - \mathbf{zt}(H))^L$  внешних вершин предфрактального графа  $G_L$ . Но тогда число внутренних вершин предфрактального графа  $G_L$  вычисляется по формуле  $\mathbf{zt}(G_L) = n^L - (n - \mathbf{zt}(H))^L$ , где  $n^L$  – общее число вершин предфрактального графа  $G_L$ . ◀

Вообще говоря, лемма 1 и лемма 2 описывают, соответственно, условия достижения максимального и минимального числа внутренних вершин для плоского предфрактального графа, порожденного плоской затравкой. Действительно, в первом случае число внешних вершин на всей траектории предфрактального графа не меняется, поэтому число внутренних вершин для него максимально. Во втором случае, наоборот, максимально число внешних вершин предфрактального графа, т.к. в процессе его порождения, затравки при замещении вершин располагаются во внешней грани.

Доказанные леммы позволяют сформулировать теорему дающую оценку числа внутренних вершин для любого плоского предфрактального графа.

**ТЕОРЕМА 6.** Для всякого плоского предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного произвольно-плоской затравкой  $H = (W, Q)$ ,  $|W| = n$ , число  $\mathbf{zt}(G_L)$  его внутренних вершин ограничено неравенством  $n^L - (n - \mathbf{zt}(H_{\min}))^L \leq \mathbf{zt}(G_L) \leq n^L - n + \mathbf{zt}(H_{\max})$ , где  $H_{\min}$  и  $H_{\max}$  – плоские укладки затравки  $H$ , соответственно, с минимальным и максимальным числом внутренних вершин.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим плоский предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный произвольно-плоской затравкой  $H = (W, Q)$ ,  $|W| = n$ . Как и для любого графа число внутренних вершин  $\mathbf{zt}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L$  зависит от конкретного вида его плоской укладки. А вид плоской укладки графа  $G_L$ , в свою очередь, зависит от вида укладки его затравки  $H$ . Очевидно, что максимальное число внутренних вершин для предфрактального графа  $G_L$  будет достигнуто, если он порожден плоской затравкой  $H_{\max}$ , являющейся укладкой графа  $H$  также с максимальным числом внутренних вершин. Аналогично, минимальное число внутренних вершин для предфрактального графа  $G_L$  будет достигнуто, если он порожден плоской затравкой  $H_{\min}$ , являющейся укладкой графа  $H$  с минимальным числом внутренних вершин. Далее, следуя сделанным рассуждениям, в формулах (7) и (8) заменим затравку  $H$  на ее плоские укладки  $H_{\max}$  и  $H_{\min}$ , соответственно, и получим, что число внутренних вершин  $\mathbf{zt}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L$  ограничивается двойным неравенством  $n^L - (n - \mathbf{zt}(H_{\min}))^L \leq \mathbf{zt}(G_L) \leq n^L - n + \mathbf{zt}(H_{\max})$ . ◀

Для общего случая, когда предфрактальный граф  $G_L$  порожден множеством затравок  $\mathbf{H}$  (см. параграф 1) справедливо

**СЛЕДСТВИЕ 6.1.** Число внутренних вершин  $\mathbf{zt}(G_L)$  плоского предфрактального графа  $G_L$  порожденного множеством  $\mathbf{H}$  произвольно-плоских затравок ограничено двойным неравенством

$$n^L - (n - \mathbf{zt}_{\min})^L \leq \mathbf{zt}(G_L) \leq n^L - n + \mathbf{zt}_{\max}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{zt}_{\min}$  и  $\mathbf{zt}_{\max}$ , – соответственно, минимальное и максимальное числа внутренних вершин среди всех возможных плоских упаковок графов из множества  $\mathbf{H}$ .

Левая часть неравенства (9) достигается, когда плоский предфрактальный граф  $G_L$  с внутренней укладкой порождается плоской затравкой с минимальным числом внутренних вершин. Правая часть (9), в свою очередь, достигается, когда в порождении плоского предфрактального графа с внешней укладкой участвует только одна плоская затравка с максимальным числом внутренних вершин из множества  $\mathbf{H}$ .

## 6. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЛАНАРНОСТИ

В этом параграфе будут приведены оценки для некоторых характеристик, которые представляют ту или иную меру непланарности предфрактальных графов.

Одной из самых наглядных характеристик непланарных графов является искаженность графа [7]. *Искаженностью*  $\mathbf{sk}(G)$  графа  $G$  называется наименьшее число ребер, удаление которых из  $G$  приводит к планарному графу.

Рассмотрим произвольный граф  $G = (V, E)$ , выделим на нем множество ребер  $\tilde{E} = \{\tilde{e}_i \subseteq E, i = 1, 2, \dots, \mathbf{sk}(G)\}$ , удаление которых приводит к планарному графу  $\tilde{G} = (V, E / \tilde{E})$ . Множество  $\tilde{E}$  будем называть *множеством искажения* графа  $G$ .

Граф  $\tilde{G}$ , без особого труда, можно уложить (вложить [9]) на плоскость или сферу. Здесь возникает вопрос, на какую поверхность можно уложить сам граф  $G \supseteq \tilde{G}$ . Утвердительный ответ можно получить сразу, если к сфере, на которой уложен граф  $\tilde{G}$ , добавить  $\mathbf{sk}(G)$  непересекающихся ручек, и по каждой из которых провести ребро  $\tilde{e}_i \in \tilde{E}$ . Таким образом граф  $G$  можно уложить на сфере с  $\mathbf{sk}(G)$  ручками. Предположим, что при укладке графа  $G$  на сферу с  $\mathbf{sk}(G)$  ручками, несколько ребер из  $\tilde{E} \subseteq E$  пройдут по одной ручке. В этом смысле использование  $\mathbf{sk}(G)$  ручек для укладки на плоскости графа  $G$  было не оптимальным. Поэтому целесообразно ввести характеристику, которая качественно иначе отражает “непланарность” графа  $G$ .

*Род*  $\gamma(G)$  графа  $G$  определяется как наименьшее число ручек, которые необходимо добавить к сфере, чтобы граф  $G$  можно было бы уложить на полученной таким образом поверхности.

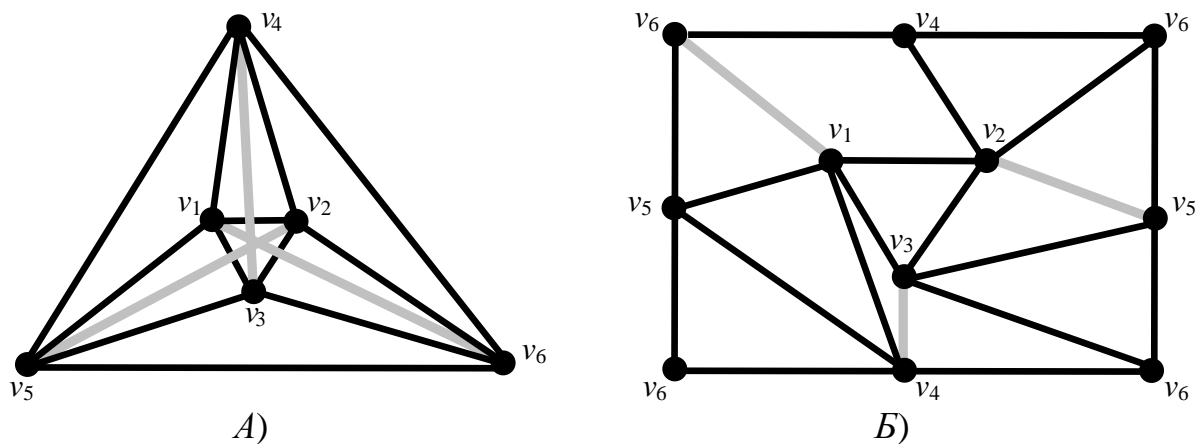


Рис. 7

На рис. 7 А изображен полный шестивершинный граф  $K_6$ . Его искаженность  $\mathbf{sk}(K_6) = 3$ , а род  $\gamma(K_6) = 1$  [7]. На рис 7 Б представлена укладка графа  $K_6$  на торе (сфере с одной ручкой). Укладка изображена в виде прямоугольни-

ка с отождествленными противоположными сторонами. Серым цветом выделено множество искажения. Рис. 7 Б наглядно демонстрирует, как по одной ручке, добавленной к сфере, проходит несколько ребер из множества искажения графа. Если быть точным, то по одной ручке на сфере проходят все ребра множества искажения графа  $K_6$ , о чем свидетельствует его род.

Связь между родом затравки и родом порожденного ею предфрактального графа устанавливает

ТЕОРЕМА 7. Род  $\gamma(G_L)$  предфрактального графа  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного затравкой  $H = (W, Q)$  с сохранением смежности старых ребер, определяется равенством

$$\gamma(G_L) = \gamma(H) \frac{n^L - 1}{n - 1}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Блоком [11] графа называется его максимальный не содержащий точек сочленения подграф.

Рассмотрим предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный затравкой  $H = (W, Q)$  с сохранением смежности старых ребер. Тогда, как и ранее, предфрактальный граф  $G_{l+1}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L - 1$ , из траектории можно получить из графа  $G_l$  “склеиванием” (проводя операцию “склеивания”) с затравкой  $H$  в каждой его вершине. Вершины, в которых были проведены склеивания, в соответствии с [12] являются точками сочленения, поскольку именно в них пересекаются старые ребра предфрактального графа. Поэтому каждая подграф-затравка  $H$ , если она сама не имеет точек сочленения, является блоком предфрактального графа  $G_{l+1}$ .

В процессе порождения предфрактального графа  $G_L$ , смежность старых ребер которого не нарушается, было использовано  $\frac{n^L - 1}{n - 1}$  затравок  $H$ , каждая из которых впоследствии стала блоком графа  $G_L$ . Это легко подсчитать, если производить переход от  $G_l$  к  $G_{l+1}$ , используя операцию склеивания с затравкой, на всей траектории  $l = 1, 2, \dots, L - 1$ .

Согласно [11], род графа равен сумме родов его блоков, поэтому в справедливости формулы (10) можно убедиться умножив число блоков предфрактального графа  $G_L$ , которое равно  $\frac{n^L - 1}{n - 1}$ , на род  $\gamma(H)$  его затравки, не имеющей точек сочленения.

В случае, когда затравка  $H$  имеет точки сочленения, а значит и блоки, в процессе порождения предфрактального графа  $G_L$ , каждая операция склеивания будет увеличивать род текущего предфрактального графа в траектории на число  $\gamma(H)$ , как и в случае с неразделимой (без точек сочленения) затравкой. Поэтому (10) верно и для этого случая. ◀

Фактически, род графа это число ручек, по которым проходит множество искажения, а мощность этого множества и есть искаженность графа. Для предфрактального графа, смежность старых ребер которого не нарушается, множе-

ство искажения распределено по его блокам (это показано в доказательстве теоремы 7), поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Искаженность  $\mathbf{sk}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L$ , порожденного затравкой  $H$  с сохранением смежности старых ребер, определяется равенством  $\mathbf{sk}(G_L) = \mathbf{sk}(H) \frac{n^L - 1}{n - 1}$ .

Суть множества искажения непланарного графа – концы каждого ребра из этого множества являются вершинами, для которых не существует общей грани плоского графа, полученного из исходного удалением множества искажения. Очевидно, что при замещении концов любого ребра из множества искажения затравками, их образы также будут обладать подобным свойством. Т.е. ребро, соединяющее образы замещенных вершин, будет входит в множество искажения полученного графа. А это значит, что в процессе порождения предфрактального графа (с произвольной смежностью старых ребер) мощность его множества искажения (или его искаженность) не убывает. Этот факт отражен в следующих следствиях.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Для рода  $\gamma(G_L)$  предфрактального графа  $G_L$ , порожденного затравкой  $H$ , справедливо неравенство  $\gamma(G_L) \geq \gamma(H) \frac{n^L - 1}{n - 1}$ .

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Для искаженности  $\mathbf{sk}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L$ , порожденного затравкой  $H$ , справедливо неравенство  $\mathbf{sk}(G_L) \geq \mathbf{sk}(H) \frac{n^L - 1}{n - 1}$ .

При более широком рассмотрении, когда предфрактальный граф  $G_L$ , порожден множеством затравок  $\mathbf{H}$  (см. параграф 1), для характеристик непланарности, исследуемых в настоящем параграфе, очевидны следующие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. Род  $\gamma(G_L)$  предфрактального графа  $G_L$ , порожденного множеством затравок  $\mathbf{H}$  ограничивается неравенством  $\gamma_{\min} \frac{n^L - 1}{n - 1} \leq \gamma(G_L) \leq \gamma_{\max} \frac{n^L - 1}{n - 1}$ , если смежность старых ребер не нарушается и неравенством  $\gamma(G_L) \geq \gamma_{\min} \frac{n^L - 1}{n - 1}$  – в противном случае. Где  $\gamma_{\min}$  и  $\gamma_{\max}$ , соответственно наименьший и наибольший род среди всех графов из множества  $\mathbf{H}$ .

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Искаженность  $\mathbf{sk}(G_L)$  предфрактального графа  $G_L$ , порожденного множеством затравок  $\mathbf{H}$  ограничивается неравенством  $\mathbf{sk}_{\min} \frac{n^L - 1}{n - 1} \leq \mathbf{sk}(G_L) \leq \mathbf{sk}_{\max} \frac{n^L - 1}{n - 1}$ , если смежность старых ребер не нарушается и неравенством  $\mathbf{sk}(G_L) \geq \mathbf{sk}_{\min} \frac{n^L - 1}{n - 1}$  – в противном случае. Где  $\mathbf{sk}_{\min}$  и  $\mathbf{sk}_{\max}$ , соответственно наименьшая и наибольшая искаженность среди всех графов из множества  $\mathbf{H}$ .

## 8. ОБ АЛГОРИТМАХ ВИЗУАЛИЗАЦИИ И ПРОВЕРКИ НА ПЛАНАРНОСТЬ

Для визуализации (изображения на плоскости) планарных и непланарных графов используются различные методы. Изображение на плоскости непланарных графов обычно требует оптимизации по ряду критериев [3]. Это связано с наличием у непланарных графов множества искажения – ребер, которые обязательно пересекаются с другими ребрами в точках плоскости отличных от вершин графа. Чрезмерная насыщенность изображения графа такими пересечениями (их называют скрещиваниями [7]) отрицательно сказывается на восприятии изображения. Критериев, по которым оптимизируется изображение непланарного графа – много, среди них существуют и чисто эстетические [3]. В любом случае, произвести автоматизированное изображение непланарных графов на плоскости существенно сложнее, чем планарных. В такой ситуации важно знать какой граф нам предстоит визуализировать – планарный или непланарный.

В параграфе 3 предложен критерий планарности (теорема 3) предфрактального графа. Вообще говоря, не отрицается возможность существования и других критериев. Основываясь на теореме 3, чтобы убедиться в планарности предфрактального графа, смежность старых ребер которого не нарушена, достаточно убедиться в планарности его затравки (затравок). А это можно сделать любым из известных алгоритмов проверки планарности [3]. Они позволяют проверять планарность графа за линейное время  $O(n)$ . Важно, что  $n$  – число вершин затравки, а не всего предфрактального графа. Число вершин предфрактального графа  $G_L$  равно  $N = n^L$  [6]. Поэтому, ввиду того, что алгоритм обрабатывает всего лишь часть предфрактального графа – его затравку, а не весь предфрактальный граф, можно говорить об существенном улучшении эффективности линейного алгоритма проверки планарности предфрактального графа.

После того, как получен утвердительный ответ на вопрос о планарности предфрактального графа можно переходить непосредственно к его визуализации, в нашем случае – к изображению предфрактального графа на плоскости. Изображение графа, в первую очередь, подразумевает разработку алгоритма укладки графа на плоскости, а потом привязку полученной плоской укладки к координатной сетке на плоскости.

Фактически, в качестве алгоритма укладки планарного предфрактального графа на плоскости можно использовать доказательство теоремы 3 (критерия планарности предфрактального графа). Следуя доказательству, на первом шаге, необходимо получить плоскую укладку затравки, для этого можно использовать любой из известных алгоритмов, к примеру алгоритм предложенный в книге [7]. А на втором шаге, используя операцию склеивания плоских графов, склеить последовательно требуемое количество затравок. Количество склеиваемых затравок равно числу проведенных операций ЗВЗ в процессе порождения предфрактального графа. Во избежание скрещиваний, при склеивании затравки с текущим графом, надо располагать все вершины и ребра затравки в одной из граней склеиваемой вершины (см. параграф 3).



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ученые – синергетики часто говорят о “целом” и его “частях”, иногда только на интуитивном уровне определяя эти важные понятия. А это с точки зрения математики, не всегда удачный подход, тем более когда ставится задача исследовать свойства, которые есть у “целого” и не наблюдаются у его “частей”, или наоборот. К примеру, если моделью какой-либо структуры или системы является граф, скажем большая периодическая решетка, то нам всегда удастся выделить на нем “части”, его подграфы, не обладающие свойствами периодической решетки. Этот пример наглядно подтверждает необходимость приведения точных определений “целого” и его “частей” касательно конкретно взятой системы или структуры.

В качестве “частей” фрактального (предфрактального) графа можно рассматривать его подграф-затравки или, в зависимости от постановки задачи, блоки различных рангов. Строгое определение “части” фрактального графа позволило установить связь между свойствами затравки и всего фрактального графа. Причем установлены правила соединения подграф-затравок старыми ребрами, при соблюдении которых можно говорить о наличии (или об отсутствии) у фрактальных (предфрактальных) графов тех или иных свойств. Анализ состояния всей структуры только по ее отдельным “частям” существенно снижает трудоемкость решения “больших” задач, и возможно, станет одним из принципов нелинейной динамики, которые лягут в основу концепции мягкого моделирования [13].

Подводя итоги, признаем что, проведенное исследование не претендует на полноту охвата всех топологических свойств фрактальных (предфрактальных) графов. Поэтому очертим круг исследований по данной тематике, проводимых в настоящее время и планируемых провести в будущем.

- Получить критерий планарности для фрактального (предфрактального) графа, смежность старых ребер которого не сохраняется.
- Изучить вопрос эквивалентности плоских укладок предфрактального графа и подсчитать число всевозможных неэквивалентных укладок предфрактального графа.
- Уточнить связь для искаженности и рода затравки и всего предфрактального графа в случае произвольной смежности старых ребер.
- Установить связь для толщины [11], крупности [11] и числа скрещиваний [11] затравки и всего предфрактального графа.
- Разработать параллельные алгоритмы [3] визуализации фрактальных (предфрактальных) графов.
- Рассмотреть вопрос гомеоморфизма предфрактальных графов.

Считаем приятным долгом выразить свою признательность *профессору Малинецкому Г.Г.* за неоценимую помощь и поддержку при выполнении этой и многих других работ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Басакер Р., Саати Т.*, Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974.
2. *Райнише К., Ушаков И.А.*, Оценка надежности систем с использованием графов. – М.: Радио и связь, 1988.
3. *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
4. *Archcheason D.*, Topological graph theory: a survey. *Congressus Numerantium*, 115, 1996, pp. 5 – 54.
5. *Munzler T.* Interactive visualization of large graphs and networks. PhD dissertation, Stanford University, 2000.
6. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
7. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
8. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1980.
9. *Дистель Р.* Теория графов. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
10. *Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск: НИЦ “РХД”, 2001.
11. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973.
12. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №10, 2003.
13. *Малинецкий Г.Г., Кульба В.В. и др.* Управление риском. – М.: Наука. 2000.