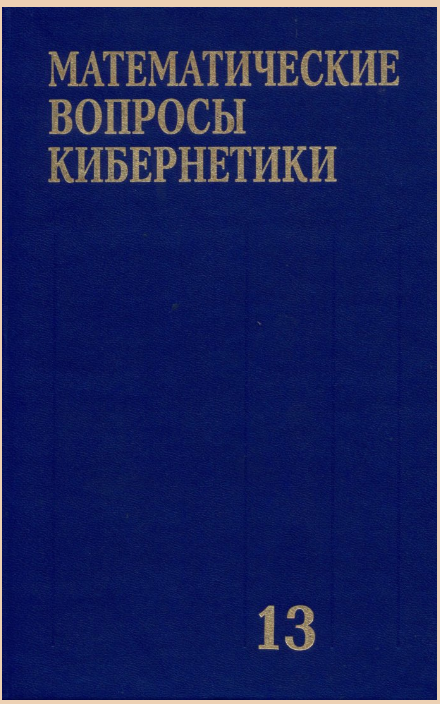

А. А. Часовских

Замкнутые классы линейно-автоматных функций

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Часовских А. А. Замкнутые классы линейно-автоматных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 13. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — С. 113–136. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2004-113

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ЛИНЕЙНО-АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИЕ СУММАТОР

А. А. ЧАСОВСКИХ

(МОСКВА)

Известно, что проблема полноты в классе $P_{\text{о.д.}}$ конечных автоматов, рассматриваемом вместе с операциями композиции (суперпозиции и обратной связи), алгоритмически неразрешима [2, 4, 5]. В [8] для класса линейно-автоматных функций (л.-а. функций) L, $L \subseteq P_{\text{о.д.}}$, с теми же операциями построен алгоритм, проверяющий полноту конечных систем. Алгоритм формулируется в терминах предполных классов.

Полученные результаты позволяют перейти к изучению замкнутых классов линейно-автоматных функций. В настоящей работе изучается задача выразимости в классе L через конечные системы, содержащие сумматор $F_+^{(2)}$. Получено описание замкнутых классов в L, содержащих сумматор. Решена задача выразимости конечных систем с сумматором.

Для $P_{\text{о.д.}}$ известен критерий полноты систем, содержащих полную в классе функций алгебры логики подсистему [1]. Мы построили алгоритм, проверяющий выразимость в L через конечные системы с $F_+^{(2)}$ и критерий вхождения $F_+^{(2)}$ в замкнутый класс. Таким образом, получен алгоритм, который по паре (M_1, M_2) конечных множеств из L устанавливает справедливо ли включение

$$\left\{F_+^{(2)}\right\} \cup M_1 \subseteq K\left(M_2\right),$$

что раньше было сформулировано в [7].

§ 1. Основные понятия и обозначения

В настоящей работе приведены доказательства фактов, полученных в [7] и использованы определения и результаты работы [8].

Поле из двух элементов 0 и 1 будем обозначать E_2, а множество всех формальных рядов переменной ξ с коэффициентами из E_2 обозначим $R_2[\xi]$. Таким образом,

$$R_2[\xi] = \{ \quad a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots \quad | \quad a_i \in E_2, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad \}.$$

Множество $R_2[\xi]$ с операциями сложения и умножения является кольцом, содержащим подкольцо периодических (с предпериодом) рядов, изоморфное подкольцу L_1^0 кольца отношений многочленов,

$$L_1^0 = \left\{ \quad \frac{a_0 + a_1\xi + \ldots a_n \xi^n}{1 + b_1\xi + \ldots b_m \xi^m} \quad \Big| \quad a_i \in E_2, \quad b_j \in E_2, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m \quad \right\}.$$

Как показано в [8], л.-а. функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, $F(x_1, \ldots, x_n) \in L$, осуществляет отображение из $R_2^n[\xi]$ в $R_2[\xi]$ следующим образом. Найдутся $\mu_1, \ldots, \mu_n, \gamma$ — элементы L_1^0 такие, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $R_2[\xi]$ выполнено:

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i + \gamma. \tag{1}$$

Будем говорить, что *л.-а. функция* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет* 0, если $F(0, \ldots, 0) = 0$. Следовательно, функция, задаваемая равенством (1), сохраняет 0 в точности тогда, когда $\gamma = 0$.

Множество всех л.-а. функций, сохраняющих 0, обозначим L^0, а множество всех л.-а. функций, зависящих от одной переменной, обозначим L_1. Таким образом, множество $L^0 \cap L_1$ совпадает с L_1^0, а его элементы 1 и ξ называются соответственно *проводником* и *задержкой с нулевым начальным состоянием.*

Если в (1) для любого i, $i = 1, \ldots, n$, выполнено $\mu_i = 0$, то $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *константной л.-а. функцией.* Множество всех константных л.-а. функций обозначается L_c.

На множестве L_1^0 помимо операций сложения и умножения можно рассматривать и операцию деления для случаев, когда делитель содержится в $1 + \xi L_1^0$.

Так при $\mu_1 \in L_1^0$ и $\mu_2 \in 1 + \xi L_1^0$ результат деления определен и выполнено: $\mu_1/\mu_2 \in L_1^0$. Если $\mu_2 \in \xi L_1^0$, то на μ_2 делить нельзя. Кроме того, на L_1^0 удобно ввести операцию «Об», положив в случае $\mu_1 \in L_1^0$, $\mu_2 \in \xi L_1^0$,

$$\text{Об}(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{1 + \mu_2}.$$

На множестве L стандартным образом [5] вводятся операции композиции (отождествления переменных, переименования переменных, подстановки и обратной связи)

Л.-а. функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, задаваемая равенством (1), где $\mu_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\gamma = 0$, называется *сумматором с n входами* и обозначается $F_+^{(n)}\left(x_1, \ldots x_n\right)$.

Если теперь л.-а. функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ задается равенством (1), то, используя сумматор $F_+^{(n+1)}\left(x_1, \ldots x_{n+1}\right)$, а также функции $\mu_1(x_1), \ldots$ $\ldots, \mu_n(x_n), \gamma$, $\mu_i \in L_1^0$, $i = 1, \ldots, n$, $\gamma \in L_c$, и операции подстановки, получим

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_+^{(n+1)}\left(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_n(x_n), \gamma\right). \tag{2}$$

Пусть наряду с (2) выполнено

$$F'(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+n'}) = F_+^{(n'+1)}\left(\mu_{n+1}(x_{n+1}), \mu_{n+2}(x_{n+2}), \ldots, \mu_{n+n'}(x_{n+n'}), \gamma'\right). \tag{3}$$

Тогда для функций $F^{=}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $F^{\leftrightarrow}(x_1', x_2', \ldots, x_n')$,

$F^{\surd}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+n'-1})$, $F^{\circ}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, построенных из F и F' соответственно отождествлением переменных x_n и x_{n-1} у F, переименованием переменных у F с $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, подстановкой $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вместо переменной $x_{n+n'}$ функции $F'(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+n'})$, применением обратной связи к переменной x_n функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если обратная связь в данном случае применима, имеют место равенства

$$F^{=} = F_{+}^{(n)}\left(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_{n-2}(x_{n-2}), (\mu_{n-1} + \mu_n)(x_{n-1}), \gamma\right), \quad (4)$$

$$F^{\leftrightarrow} = F_{+}^{(n+1)}\left(\mu_1(x'_1), \mu_2(x'_2), \ldots, \mu_n(x'_n), \gamma\right), \quad (5)$$

$$F^{\surd} = F_{+}^{(n+n')}\left(\mu_1\mu_{n+n'}(x_1), \ldots, \mu_n\mu_{n+n'}(x_n),\right.$$
$$\left.\mu_{n+1}(x_{n+1}), \ldots, \mu_{n+n'-1}(x_{n+n'-1}), \mu_{n+n'}\gamma + \gamma'\right), \quad (6)$$

$$F^{\circ} = F_{+}^{(n)}\left(\text{Об}(\mu_1, \mu_n)(x_1),\right.$$
$$\left.\text{Об}(\mu_2, \mu_n)(x_2), \ldots, \text{Об}(\mu_{n-1}, \mu_n)(x_{n-1}), \text{Об}(\gamma, \mu_n)\right). \quad (7)$$

Замыкание множества M, $M \subseteq L$, по операциям композиции, т. е. операциям отождествления переменных, переименования переменных, подстановки и обратной связи обозначим $K(M)$. Замыкание множества M, $M \subseteq L_1^0$ по операциям «+», «·» и «Об» обозначим $K^{(1)}(M)$, а замыкание этого множества по операциям «+», «·» обозначим $K_c^1(M)$.

Если справедливо (2), то положим

$$U(F) = \{\mu_i | i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$C(F) = \{\gamma\}.$$

Пусть $M \subseteq L$. Тогда

$$U(M) = \bigcup_{F \in M} U(F),$$

$$C(M) = \bigcup_{F \in M} C(F).$$

Каждой паре M, C подмножеств из L_1^0, L_c соответственно, можно сопоставить множество

$$\{\ \mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \ldots + \mu_m\gamma_m \ \mid \ m \in N, \quad \gamma_i \in C, \quad \mu_i \in K^{(1)}(M), \quad i = 1, 2, \ldots, m\ \},$$

которое обозначается $S(M, C)$.

В дальнейшем для доказательства некоторых утверждений будет использоваться метод, который называется индукцией по построению. При этом рассматривается некоторое множество M л.-а. функций, замкнутое по некоторому набору операций Θ. Пусть также множество M', $M' \subseteq M$ порождает M по операциям из Θ. Если удается доказать некоторое свойство ω для каждого элемента из M', а также, то, что в результате применения любой операции из Θ к любым элементам из M, обладающим свойством ω, получаются л.-а. функции, обладающие свойством ω, то свойство ω считается доказанным для любого элемента M. Использованный принцип доказательства называется индукцией по построению.

Лемма 1. 1. *Для любого* M, $M \subseteq L$, *справедливы включения*

$$U(K(M)) \subseteq K^{(1)}(U(M)),$$
$$C(K(M)) \subseteq S(U(M), C(M)).$$

2. *При*
$$F_+^{(2)} \in K(M), \tag{8}$$
функция F, *удовлетворяющая соотношению* (2), *содержится в* $K(M)$ *в точности тогда, когда для каждого* i, $i = 1, 2, \ldots, n$,
$$\mu_i \in K^{(1)}(U(M))$$
и
$$\gamma \in S(U(M), C(M)).$$

Доказательство. Утверждение 1 леммы нетрудно доказать, используя индукцию по построению элементов из $K(M)$ и равенства (2)–(7).

Докажем утверждение 2. Если $F(x_1, \ldots, x_n) \in M$ и выполнены соотношения (2), (8), то из равенств
$$0^\infty = F_+^{(2)}(x, x),$$
$$\gamma = F(0^\infty, 0^\infty, \ldots 0^\infty),$$
$$\mu_i(x) = F_+^{(2)}(\gamma, F(\underbrace{0^\infty, 0^\infty, \ldots 0^\infty}_{i-1 \text{ раз } 0^\infty}, x, 0^\infty, 0^\infty, \ldots 0^\infty))$$
получаем: $\gamma \in K(M)$ и $\mu_i \in K(M)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что
$$(\mu + \mu')(x) = F_+^{(2)}(\mu(x), \mu'(x)), \quad (\mu \cdot \mu')(x) = \mu(\mu'(x))$$
и в случае $\mu' \in \xi L_1^0$ функцию Об $(\mu, \mu')\,(x)$ получаем применением обратной связи к переменно x' функции $F_+^{(2)}(\mu(x), \mu'(x'))$. Поэтому
$$K^{(1)}(U(M)) \subseteq K(M) \quad \text{и} \quad C(M) \subseteq K(M).$$
Отсюда и из (8) вытекает утверждение 2 леммы.

Лемма доказана.

Из утверждения 2 леммы следует, что, если $F_+^{(2)} \in K(M)$, то
$$U(K(M)) = K^{(1)}(U(M))$$
$$C(K(M)) = S(U(M), C(M)).$$

Нетрудно видеть, что из (8) следует
$$1 \in K^{(1)}(U(M)). \tag{9}$$
Поэтому в дальнейшем изучается множество L_1^0 и замыкания $K^{(1)}(M)$, $S(M, C)$, $|C| < \infty$, с некоторыми ограничениями на систему M, вытекающими из (9).

Рассмотрим следующие замкнутые в L_1^0 по операциям «$+$», «$\cdot$», «Об» классы.

$$M^{(1)}(\mu, u_0) = \Big\{a_0 + \mu u_0(\mu)\tfrac{u(\mu)}{v(\mu)} \mid$$
$$a_0 \in E_2,\ u(\xi) \in E_2[\xi],\ v(\xi) \in 1 + \xi E_2[\xi],\ (u_0(\xi), v(\xi)) = 1\Big\},$$
$$P^{(1)}(\mu, u_0) = \Big\{\ a_0 + \mu u_0(\mu)\tfrac{u(\mu)}{v(\mu)} \ \mid\ a_0 \in E_2,\ u(\xi) \in E_2[\xi],$$
$$v(\xi) \in 1 + \xi E_2[\xi]\ ,\ (u_0(\xi), v(\xi)) = 1,$$
$$\deg u(\xi) \leqslant \deg v(\xi) - 2(1 + \deg u_0(\xi))\Big\},$$
$$R^{(1)}(\mu, u_0) = \Big\{u_0(\mu)\tfrac{u(\mu)}{v(\mu)} \mid$$
$$u(\xi) \in E_2[\xi],\ v(\xi) \in 1 + \xi E_2[\xi],\ (u_0(\xi), v(\xi)) = 1\Big\},$$

$\mu \in \xi L_1^0$, $u_0 \in E_2[\xi] \setminus \{0\}$.

Введем следующие обозначения

$$L_1^0(\mu) = M^{(1)}(\mu, 1),$$
$$M^{(1)}(u_0) = M^{(1)}(\xi, u_0),$$
$$R^{(1)}(u_0) = R^{(1)}(\xi, u_0),$$
$$P^{(1)}(u_0) = P^{(1)}(\xi, u_0).$$

Нетрудно видеть, что

$$L_1^0(\xi) = M^{(1)}(1) = R^{(1)}(1) = L_1^0.$$

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность всех неприводимых многочленов из $E_2[\xi]$, $p_1 = \xi$ и $p_i \neq p_j$, если $i \neq j$. Положим

$$M_i^{(1)}(\mu) = M^{(1)}(\mu, p_i),$$
$$R_i^{(1)}(\mu) = R^{(1)}(\mu, p_i),$$

$i = 1, 2, \ldots$

$$M_0^{(1)}(\mu) = \Big\{ a_0 + \tfrac{\mu u(\mu)}{v(\mu)} | a_0 \in E_2,$$
$$u(\xi) \in E_2[\xi], v(\xi) \in 1 + \xi E_2[\xi], \deg \xi u(\xi) < \deg v(\xi) \Big\},$$
$$R_0^{(1)}(\mu) = \Big\{ \tfrac{u(\mu)}{v(\mu)} |$$
$$u(\xi) \in E_2[\xi], v(\xi) \in 1 + \xi E_2[\xi], \deg u(\xi) < \deg v(\xi) \Big\},$$

$\mu \in \xi L_1^0$.

В дальнейшем $M_i^{(1)}(\xi)$ и $R_i^{(1)}(\xi)$ обозначаем соответственно $M_i^{(1)}$ и $R_i^{(1)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Лемма 2 [8]. 1. *Множество* $J^{(1)}$,

$$J^{(1)} = \{ R_i^{(1)}, M_i^{(1)} \quad | \quad i = 0, 1, 2, \ldots \},$$

является приведенной критериальной системой в L_1^0, *т. е. для любого* M, $M \subseteq L_1^0$,

$$K^{(1)}(M) = L_1^0$$

в точности тогда, когда

$$M \nsubseteq \Theta^{(1)}$$

для любого $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(1)} \in J^{(1)}$.

2. *Множество* $J^{(1)}$ *состоит из предполных классов в* L_1^0 *и содержит все предполные классы.*

§ 2. Замкнутые классы в L_1^0

Замкнутые в L_1^0 классы, не содержащиеся в тех же предполных классах, в которых не содержится проводник, имеют структуру, описанную в следующей теореме.

Теорема 1. 1. *Пусть*

$$M \subseteq L_1^0, \quad K^{(1)}(M) = M, \quad M \setminus E_2 \neq \varnothing, \quad M \not\subseteq R_i^{(1)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Тогда найдутся такие μ, u_0, T, $\mu \in \xi L_1^0$, $u_0 \in 1 + \xi E_2[\xi]$, $T \in N$, *что выполнено одно из двух следующих соотношений:*

$$M^{(1)}(\mu, (\xi u_0)^T) \subseteq M \subseteq M^{(1)}(\mu, u_0), \tag{11}$$

$$P^{(1)}(\mu, (\xi u_0)^T) \subseteq M \subseteq M_0^{(1)}(\mu) \cap M^{(1)}(\mu, u_0). \tag{12}$$

2. *Число замкнутых в* L_1^0 *классов* M, *удовлетворяющих включениям* (11) *или включениям* (12) *конечно.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые предварительные сведения.

Если $\mu' \in L_1^0(\mu)$, где $\mu \in \xi L_1^0 \setminus \{0\}$, то найдутся a_i, b_j, $a_i \in E_2$, $b_j \in E_2$, $i = 0, 1, \ldots, n'$, $j = 1, 2, \ldots, n''$ такие, что

$$\mu' = \frac{a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots a_{n'}\mu^{n'}}{1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots b_{n''}\mu^{n''}}. \tag{13}$$

Рассмотрим отображение Ψ_μ из $L_1^0(\mu)$ в L_1^0, положив для μ', удовлетворяющего равенству (13),

$$\Psi_\mu(\mu') = \frac{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots a_{n'}\xi^{n'}}{1 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots b_{n''}\xi^{n''}}.$$

Из трансцендентности расширения поля E_2 элементом μ [3] следует корректность определения отображения Ψ_μ.

Нетрудно видеть, что имеют место следующие равенства.

$$\Psi_\mu(1) = 1,$$

$$\Psi_\mu(\mu) = \xi,$$

$$\Psi_\mu(\mu' + \mu'') = \Psi_\mu(\mu') + \Psi_\mu(\mu''), \tag{14}$$

$$\Psi_\mu(\mu'\mu'') = \Psi_\mu(\mu')\Psi_\mu(\mu''), \tag{15}$$

$$\Psi_\mu\left(\frac{\mu'}{1 + \mu\mu''}\right) = \frac{\Psi_\mu(\mu')}{1 + \xi\Psi_\mu(\mu'')} \tag{16}$$

для любых μ', μ'' из $L_1^0(\mu)$.

Для множества M такого, что $M \subseteq L_1^0(\mu)$, через $\Psi_\mu(M)$ обозначим $\{\Psi_\mu(\mu') \ \ |\mu' \in M\}$.

Лемма 3. *Пусть выполнены* (10). *Тогда найдутся такие* μ, μ_0, $\mu \in \xi L_1^0 \setminus \{0\}$, $\mu_0 \in L_1^0 \setminus \{0\}$, *что*

$$\{\mu\mu_0, \mu_0\} \subset K_c^1(M), \tag{17}$$

$$M \subseteq L_1^0(\mu), \tag{18}$$

$$K^{(1)}(\Psi_\mu(M)) = \Psi_\mu(M), \tag{19}$$

$$\Psi_\mu(M) \setminus E_2 \neq \varnothing, \tag{20}$$

$$\Psi_\mu(M) \not\subseteq R_i^{(1)}, \tag{21}$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Из доказательства леммы 9 в [8] следует, что найдутся μ, μ_0, $\mu \in \xi L_1^0 \setminus \{0\}$, $\mu = \frac{u}{v}$, $(u, v) = 1$, $\mu_0 \in L_1^0 \setminus \{0\}$, со свойствами (17) и (18). Соотношения (19), (20) следуют из (10), (14)–(16).

Докажем (21) при $i = 0$.

Пусть

$$\mu' = \frac{a_0 + a_1\mu + \ldots + a_n\mu^n}{1 + b_1\mu + \ldots + b_{s-1}\mu^{s-1} + \mu^s}, \quad n < s.$$

Тогда

$$\mu' = \frac{\left(a_0 v^n + a_1 u v^{n-1} + \ldots + a_n u^n\right) v^{s-n}}{v^s + b_1 u v^{s-1} + \ldots + b_{s-1} u^{s-1} v + u^s}$$

Поэтому в случае $\mu' \in R_0^{(1)}(\mu)$ и $\deg v \geqslant 1$, справедливо $\mu' \in R^{(1)}(v)$. Если же $\mu' \in R_0^{(1)}(\mu)$ и $v = 1$, то $\deg u \geqslant 1$ и $\mu' \in R_0^{(1)}$. Отсюда следует $\Psi_\mu(M) \not\subseteq R_0^{(1)}$.

Нетрудно видеть, что (21) справедливо при $i = 1$.

Докажем (21) при $i \in \{2, 3, \ldots\}$.

Рассмотрим неприводимые многочлены u', u'' из $E_2[\xi]$,

$$u' = 1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n'-1}\xi^{n'-1} + \xi^{n'},$$
$$u'' = 1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n''-1}\xi^{n''-1} + \xi^{n''}.$$

Тогда $v^{n'}u'\left(\frac{u}{v}\right) \in E_2[\xi]$ и $v^{n''}u''\left(\frac{u}{v}\right) \in E_2[\xi]$.

Если

$$\left\{v^{n'}u'\left(\frac{u}{v}\right), v^{n''}u''\left(\frac{u}{v}\right)\right\} \subseteq pE_2[\xi] \tag{22}$$

для некоторого неприводимого p из $E_2[\xi]$, то

$$u' = u''. \tag{23}$$

Действительно, пусть (23) не имеет места. Тогда найдутся такие многочлены u_1' и u_1'' из $E_2[\xi]$, $\deg u_1'(\xi) = n_1'$, $\deg u_1''(\xi) = n_1''$, что

$$u_1'(\xi)u'(\xi) + u_1''(\xi)u''(\xi) = 1,$$

поэтому

$$n' + n_1' = n'' + n_1'',$$
$$v^{n_1'}u_1'\left(\frac{u}{v}\right) \cdot v^{n'}u'\left(\frac{u}{v}\right) + v^{n_1''}u_1''\left(\frac{u}{v}\right) \cdot v^{n''}u''\left(\frac{u}{v}\right) = v^{n'+n_1'}$$

и

$$v \in pE_2[\xi].$$

Отсюда и из (22) получаем $u \in pE_2[\xi]$, противоречие с $(u, v) = 1$.

Равенство (23) доказано.

Далее, пусть $\Psi_\mu(M) \subseteq R^{(1)}(u'')$, $\deg u'' = n''$ и $v^{n''}u''(\mu) \neq 1$. Для любого μ', $\mu' \in M$, найдутся u_1 и u_2 — многочлены из $E_2[\xi]$ и найдутся целые неотрицательные числа k_1 и k_2 такие, что $\mu' = v^{n''}u''(\mu)\frac{v^{k_1}u_1(\mu)}{v^{k_2}u_2(\mu)}$ и $v^{k_i}u_i(\mu) \in E_2[\xi]$, $i = 1, 2$. Из приведенных выше рассуждений с учетом взаимной простоты многочленов v и $v^{n''}u''(\mu)$ следует

$$M \subseteq R^{(1)}\left(v^{n''}u''(\mu)\right).$$

Для завершения доказательства соотношения (21) при $i > 1$ осталось рассмотреть случай

$$\Psi_\mu(M) \subseteq R^{(1)}(u''), \quad v^{n''}u''(\mu) = 1. \tag{24}$$

Пусть $u''(\mu)\frac{u_1(\mu)}{v_1(\mu)} \in M$, $u_1(\xi) \in E_2[\xi]$ и $v_1(\xi) \in 1 + \xi E_2[\xi]$. Степени многочленов $u''(\xi)$, $u_1(\xi)$и $v_1(\xi)$ обозначим соответственно через n'', t и s. Не ограничивая общности рассуждений, будем в дальнейшем считать, что $\big(v_1(\xi), u''(\xi)\big) = 1$ и $s > n''$. (Этих соотношений можно добиться, сначала представив дробь $\frac{u_1(\mu)}{v_1(\mu)}$ в несократимом виде, а потом домножив числитель и знаменатель полученной дроби на многочлен из $E_2[\mu]$ взаимнопростой с $\mu u''(\mu)$.)

Имеет место тождество

$$u''(\mu)\frac{u_1(\mu)}{v_1(\mu)} = \big(v^{n''}u''(\mu)\big)\cdot\frac{\big(v^t u_1(\mu)\big)\, v^s}{\big(v^s v_1(\mu)\big)\, v^{n''+t}}.$$

Из (24) вытекает $\deg u(\xi) = \deg v(\xi)$. Нетрудно видеть, что в $E_2[\xi]$ найдутся $u_2(\xi)$, $u_3(\xi)$, удовлетворяющие равенству

$$v^s v_1(\mu) = v^s u''(\mu) u_2(\mu) + v^s \mu^{s-n''+1} u_3(\mu) \tag{25}$$

и неравенствам $u_3(\xi) \neq 0$, $\deg u_2(\xi) \leqslant s - n''$. Обозначим $\deg u(\xi)$ через k.

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\deg\big(v^s u''(\mu)u_2(\mu)\big) &= \\ &= \deg\Big(\big(v^{n''}u''(\mu)\big)\big(v^{\deg u_2(\xi)}u_2(\mu)\big)v^{s-n''-\deg u_2(\xi)}\Big) \leqslant k(s-n'').\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что выражения

$$v^s(\xi)v_1(\mu(\xi)), \quad v^s(\xi)u''(\mu(\xi))u_2(\mu(\xi))$$

являются многочленами из $E_2[\xi]$. Поэтому из (25) следует, что $v^s(\xi)\mu^{s-n''+1}(\xi)u_3(\mu(\xi)) \in E_2[\xi]$. Так как $v^s(\xi)\mu^{s-n''+1}(\xi)u_3(\mu(\xi)) = u^{s-n''+1}(\xi)(v^{n''-1}(\xi)u_3(\mu(\xi)))$ и знаменатель дроби $v^{n''-1}(\xi)u_3(\mu(\xi))$ взаимнопрост с $u(\xi)$, то $v^{n''-1}(\xi)u_3(\mu(\xi)) \in E_2[\xi]$. Поэтому

$$\deg\big(v^s(\xi)\mu^{s-n''+1}(\xi)u_3(\mu(\xi))\big) \geqslant (s-n''+1)k.$$

Таким образом,

$$\deg\big(v^s(\xi)v_1(\mu(\xi))\big) \geqslant (s-n''+1)k. \tag{26}$$

Положим

$$u'(\xi) = \big(v^{n''}u''(\mu)\big)\,\big(v^t u_1(\mu)\big)\, v^s,$$
$$v'(\xi) = \big(v^s v_1(\mu)\big)\, v^{n''+t},$$
$$\mu'(\xi) = \frac{u'}{v'}.$$

Для степеней числителя и знаменателя дроби $\mu'(\xi)$ из (26) следуют неравенства $\deg u'(\xi) \leqslant k\cdot s + k\cdot t$ и $\deg v'(\xi) \geqslant k(s+1) + kt$. Поэтому $\mu'(\xi) \in R_0^{(1)}$.

Таким образом, в случае (24) справедливо $M \subseteq R_0^{(1)}$.

Тем самым получено доказательство (21) при $i > 1$. Соотношение (21) доказано для любого i, $i \in \{0, 1, \ldots\}$.

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1 проведем при условии, что найдется μ_0, $\mu_0 \in L_1^0 \setminus \{0\}$,

$$\{\mu_0, \xi\mu_0\} \subset K_c^1(M). \tag{27}$$

По лемме 3 это условие не ограничивает общность рассуждений.

Утверждение 1 теоремы 1 будет доказано, если в предположениях (10), (27) показать, что для некоторого T, $T \in N$,

$$M^{(1)}\left((\xi u_0)^T\right) \subseteq M \subseteq M^{(1)}(u_0) \tag{28}$$

или

$$P^{(1)}\left((\xi u_0)^T\right) \subseteq M \subseteq M_0^{(1)} \cap M^{(1)}(u_0). \tag{29}$$

Через $\Omega(T', \mu')$, где $T' \in N$, $\mu' \in 1+\xi L_1^0$, обозначим

$$\{\xi^j \mu' \quad | \quad j \in N, j \geqslant T'\}.$$

Через $\Omega_1(\lambda', \mu')$, где $\lambda' \in N$, $\mu' \in 1+\xi L_1^0$, $\mu' = \frac{u'}{v'}$, $\deg u' < \deg v' - 2$, обозначим

$$\left\{\xi^j \mu'\left(\xi^{2^{\lambda'}}\right)\right\} \quad | \quad j \in N, 2^{\lambda'} \leqslant j \leqslant \left(\deg v'(\xi) - \deg u'(\xi) - 1\right) 2^{\lambda'}.$$

Лемма 4. *Пусть имеют место* (10), (27). *При*

$$M \not\subseteq M_0^{(1)} \tag{30}$$

для некоторых μ_1, T_0

$$\Omega\left(T_0, \mu_1^{T_0}\right) \subseteq K^{(1)}(M). \tag{31}$$

При

$$M \subseteq M_0^{(1)} \tag{32}$$

для некоторых μ_1 *и* λ_1

$$\Omega_1\left(\lambda_1, \mu_1\right) \subseteq K^{(1)}(M). \tag{33}$$

Доказательство (31) в случае (30) нетрудно получить, воспользовавшись обоснованием леммы 9 в [8].

Пусть выполнено (32).

Для некоторых n_1, μ_1, $n_1 \in N$, $\mu_1 \in 1+\xi L_1^0$,

$$\left\{\xi^{n_1}\mu_1, \xi^{n_1+1}\mu_1\right\} \subset M.$$

Найдутся n_2 и n_3 из N, что

$$\mu_1 = \frac{a_{10} + a_{11}\xi + \ldots + a_{1, n_2 - 1}\xi^{n_2 - 1} + \xi^{n_2}}{1 + a_{21}\xi + \ldots + a_{2, n_3 - 1}\xi^{n_3 - 1} + \xi^{n_3}},$$

где $a_{ij} \in E_2$. Если $n_2 > 0$, то в последнем равенстве $a_{10} = 1$.

Из (32) вытекают неравенства

$$\begin{gathered} n_3 > n_2 + n_1 + 1, \\ n_1 > 0, \\ \mu_1 \neq 1. \end{gathered}$$

Положим

$$A_0 = \left\{(j_1, j_2) \quad | \quad n_1 j_1 \leqslant j_2 \leqslant (n_1+1) j_1, j_1 \in \{1, 2, \ldots\}\right\}.$$

Для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots\}$, найдутся, и притом единственным образом, числа n' и n'', удовлетворяющие соотношениям

$$n' \in \{1, 2, \ldots\},$$
$$n'' \in \{1, 2, \ldots, n_3 - n_2 - n_1 - 1\},$$
$$i = (n_3 - n_2 - n_1 - 1)(n' - 1) + n''.$$

Если выполнены последние три соотношения, то положим

$$A_i' = \{(j_1, j_2) \mid j_2 = (n_1 + 1)j_1 + i, j_1 \geqslant n' + n_3 - 2\},$$
$$A_i'' = \{(j_1, j_2) \mid j_2 = n_1 j_1 - i, j_2 \geqslant (n_3 - 2)n_1\},$$

$i = 1, 2, \ldots$.

Множество $\bigcup\limits_{i=1}^{r} (A_i' \cup A_i'') \cup A_0$ обозначим через A_r, $r = 1, 2, \ldots$. Положим

$$A = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r.$$

Покажем, что для любой пары (j_1, j_2) из A справедливо

$$\xi^{j_2} \mu_1^{j_1} \in M. \tag{34}$$

Соотношение (34) выполнено, очевидно, если $(j_1, j_2) \in A_0$. Пусть (34) имеет место для любой (j_1, j_2), $(j_1, j_2) \in A_{r-1}$, $r \geqslant 1$. Из соотношения $(j_1, j_2) \in A_r'$ следует

$$\{(j_1, j_2 - n_3), (j_1, j_2 - n_3 + 1), \ldots (j_1, j_2 - 1), (j_1 - 1, j_2 - n_3),$$
$$(j_1 - 1, j_2 - n_3 + 1), \ldots (j_1 - 1, j_2 - n_3 + n_2)\} \subseteq A_{r-1}, \tag{35}$$

а из $(j_1, j_2) \in A_r''$ следует

$$\{(j_1, j_2 + 1), (j_1, j_2 + 2), \ldots, (j_1, j_2 + n_3 - 1), (j_1, j_2 + n_3),$$
$$(j_1 - 1, j_2), (j_1 - 1, j_2 + 1), \ldots (j_1 - 1, j_2 + n_2 - 1),$$
$$(j_1 - 1, j_2 + n_2)\} \subseteq A_{r-1}. \tag{36}$$

Воспользуемся тождеством

$$\mu_1 + a_{21}\xi\mu_1 + \ldots + a_{2, n_3 - 1}\xi^{n_3 - 1}\mu_1 + \xi^{n_3}\mu_1 +$$
$$+ a_{10} + a_{11}\xi + \ldots + a_{1, n_2 - 1}\xi^{n_2 - 1} + \xi^{n_2} = 0.$$

При $j_1 \geqslant 1$ получим

$$\xi^{j_2}\mu_1^{j_1} = a_{21}\xi^{j_2 + 1}\mu_1^{j_1} + \ldots + a_{2, n_3 - 1}\xi^{j_2 + n_3 - 1}\mu_1^{j_1} +$$
$$+ \xi^{j_2 + n_3}\mu_1^{j_1} + a_{10}\xi^{j_2}\mu_1^{j_1 - 1} + a_{11}\xi^{j_2 + 1}\mu_1^{j_1 - 1} + \ldots +$$
$$+ a_{1, n_2 - 1}\xi^{j_2 + n_2 - 1}\mu_1^{j_1 - 1} + \xi^{j_2 + n_2}\mu_1^{j_1 - 1}. \tag{37}$$

При $j_2 \geqslant n_3$ и $j_1 \geqslant 1$ получим

$$\xi^{j_2}\mu_1^{j_1} = \xi^{j_2 - n_3}\mu_1^{j_1} + a_{2,1}\xi^{j_2 - n_3 + 1}\mu_1^{j_1} + \ldots +$$
$$+ a_{2, n_3 - 1}\xi^{j_2 - 1}\mu_1^{j_1} + a_{10}\xi^{j_2 - n_3}\mu_1^{j_1 - 1} + \ldots +$$
$$+ a_{1, n_2 - 1}\xi^{j_2 - n_3 + n_2 - 1}\mu_1^{j_1 - 1} + \xi^{j_2 - n_3 + n_2}\mu_1^{j_1 - 1}. \tag{38}$$

Используя свойства (35), (36) множеств A'_r, A''_r и тождества (37), (38), получим (34) при $(j_1, j_2) \in A_r$.

Таким образом, (34) доказано для любой (j_1, j_2) из A.

Нетрудно видеть, что

$$\{(j_1, j_2) \mid (n_3-2)n_1 \leqslant j_2 \leqslant (n_3-n_2)j_1 + \\ +(n_3-2)(n_2+n_1+1-n_3), \\ j_1 \in \{1,2,\ldots\}, j_2 \in \{1,2,\ldots\}\} \subseteq A. \quad (39)$$

Из (39) следует (33) для λ_1,

$$2^{\lambda_1} \geqslant \max\left((n_3-2)n_1, (n_3-2)(n_3-n_2-n_1-1)\right).$$

Лемма 4 доказана.

С использованием известных рассуждений (см. обоснование леммы 9 в [8]) доказывается

Л е м м а 5. *Если имеют место* (10) *и, кроме того,*

$$M \not\subseteq M_j^{(1)}, j = j_1, j_2, \ldots, j_{n'}, 1 < j_1 < j_2 < \ldots < j_{n'},$$

то найдется μ',

$$\mu' \in K^{(1)}(M), \quad \mu' = \frac{u'}{v'}, \quad (u', v') = 1, \\ v' \in p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_{n'}} E_2[\xi].$$

Продолжая доказательство теоремы 1, положим

$$I_0 = \{i \mid i \in \{2,3,\ldots\}, M \subseteq M_i^{(1)}\}, \quad (40)$$
$$I_2 = \{j \mid j \in \{2,3,\ldots\} \setminus I_0, \mu_1 \in R_j^{(1)}\}, \quad (41)$$

где μ_1 — дробь из L_1^0, $\mu_1 = \frac{u_1}{v_1}$, удовлетворяющая в случае (30) соотношению (31) или в случае (32) соотношению (33).

Из равенств (40), (41) следует, что найдутся многочлены u_M, u_2 из $E_2[\xi]$ такие, что

$$u_1 = u_M u_2$$

и для любых i, j, $i \in I_0$, $j \in I_2$,

$$(u_M, p_j) = 1, \qquad (u_2, p_i) = 1.$$

Положим

$$u_0 = \begin{cases} \Pi_{(i \in I_0)} p_i, & \text{если } I_0 \neq \varnothing, \\ 1, & \text{если } I_0 = \varnothing. \end{cases}$$

Пусть имеет место (30). Из леммы 4 для некоторого T_0, $T_0 \in N$, вытекает

$$\Omega\left(T_0, (u_M u_2)^{T_0}\right) \subseteq M. \quad (42)$$

По лемме 5 в M найдется дробь $\frac{u_3}{v_3 u_2}$, $(u_3, u_2) = 1$. Отсюда и из (42)

$$\Omega\left(T_0, \left(u_M u_3\right)^{T_0}\right) \subseteq M. \quad (43)$$

Используя (42), (43) и равенство

$$u_4 u_2^{T_0} + u_5 u_3^{T_0} = 1,$$

справедливое для некоторых многочленов u_4, u_5 из $E_2[\xi]$, получим

$$\Omega\left(T_0, u_M^{T_0}\right) \subseteq M.$$

В дальнейшем используется следующая лемма.

Лемма 6. *Для взаимнопростых многочленов u' и $\xi u_M(\xi)$, $u'(\xi) \in E_2[\xi]$, $u_M(\xi) \in E_2[\xi] \setminus \{0\}$ найдется u'', $u'' \in E_2[\xi]$,*

$$\left(u''(\xi), \xi u_M(\xi)\right) = 1, \tag{44}$$

такой, что

$$u' u'' \in E_2[\xi u_M(\xi)]. \tag{45}$$

Доказательство. Для любого i, $i \in N$, в $E_2[\xi]$ найдутся $u_i^{(1)}(\xi)$, $u_i^{(2)}(\xi)$, удовлетворяющие соотношениям

$$(\xi u_M(\xi))^i = u'(\xi) u_i^{(1)}(\xi) + u_i^{(2)}(\xi), \quad \deg u_i^{(2)} < \deg u'(\xi).$$

Ввиду конечности множества многочленов со степенями меньше $\deg u'(\xi)$, в N найдутся i_0, i_1, $i_0 < i_1$, $u_{i_0}^{(2)} = u_{i_1}^{(2)}$. При этом

$$\left(\xi u_M(\xi)\right)^{i_0} \left(1 + \left(\xi u_M(\xi)\right)^{i_1 - i_0}\right) = u'(\xi) \left(u_{i_0}^{(1)} + u_{i_1}^{(1)}\right). \tag{46}$$

Обозначим $\dfrac{u_{i_0}^{(1)}(\xi) + u_{i_1}^{(1)}(\xi)}{(\xi u_M(\xi))^{i_0}}$ через u''. Из условий леммы и равенства (46) вытекает $u''(\xi) \in E_2[\xi]$, а также соотношения (44) и (45). Лемма 6 доказана.

Пусть $\mu' = \dfrac{u'}{v'}$, $\left(v', u_M\right) = 1$. Тогда из доказательства леммы 6 следует, что найдутся T' и u'', $T' \in N$, $T' \geqslant T_0$, $u'' \in E_2[\xi]$, такие что

$$\mu' = \frac{u''}{1 + (\xi u_M)^{T'}}.$$

Отсюда следует

$$\left(\xi u_M\right)^{T_0} \mu' \in M,$$

так как

$$\left\{\left(\xi u_M\right)^{T_0} u'', \quad \left(\xi u_M\right)^{T'}\right\} \subset K_c^{(1)}\left(\Omega\left(T_0, u_M^{T_0}\right)\right).$$

Для некоторого T, $T \in N \setminus \{0\}$, верно

$$\left(\xi u_0\right)^T \in \left(\xi u_M\right)^{T_0} E_2[\xi].$$

Поэтому

$$\left(\xi u_0\right)^T \mu' \in M,$$

если $\mu' = \dfrac{u'}{v'}$, $(v', u_0) = 1$.

Найдется μ_e, принадлежащее $M \cap \left(1 + \xi L_1^0\right)$.

Заметим, что

$$\mu_e^{2^T} = 1 + \left(\xi u_0\right)^T \mu^*$$

для некоторого μ^*, $\mu^* = \frac{u^*}{v^*}$, $\left(v^*, u_0\right) = 1$. Отсюда

$$1 \in M.$$

Таким образом,

$$M^{(1)}\left((\xi u_0)^T\right) \subseteq M.$$

Очевидно

$$M \subseteq M^{(1)}(u_0).$$

Поэтому имеет место (28).

Утверждение 1 теоремы 1 в случае (30) доказано. Докажем его в случае (32).

Имеют место следующие свойства M.

Свойство 1. Если

$$\Omega_1(\lambda', \mu') \subseteq M,$$

то для любого λ'', $\lambda'' \in N$, $\lambda'' \geqslant \lambda'$,

$$\Omega_1(\lambda'', \mu') \subseteq M.$$

Свойство 2. Если

$$\Omega_1\left(\lambda', \frac{u'}{v'}\right) \subseteq M, \tag{47}$$

$$\Omega_1\left(\lambda', \frac{u''}{v'}\right) \subseteq M, \tag{48}$$

$$\deg u' = n', \quad \deg u'' = n'', \quad n' \geqslant n'', \tag{49}$$

$$u' + \xi^{n' - n''} u'' = \xi^{n_1'} u_1', \quad u_1' \in 1 + \xi E_2[\xi], \tag{50}$$

то для некоторого λ'', $\lambda'' \in N$,

$$\Omega_1\left(\lambda'', \frac{u_1'}{v'}\right) \subseteq M. \tag{51}$$

Свойство 3. Если

$$\Omega_1\left(\lambda', \frac{u'}{v'}\right) \subseteq M,$$

$$\Omega_1\left(\lambda'', \frac{u''}{v'}\right) \subseteq M,$$

то для некоторого λ_1' из N

$$\Omega_1\left(\lambda_1', \frac{(u', u'')}{v'}\right) \subseteq M.$$

Свойство 1 следует из доказательства леммы 4. Докажем свойство 2. Пусть имеют место (47)–(50). Тогда

$$\frac{\xi^{2^{\lambda'}(n_1'+1)} u_1'\left(\xi^{2^{\lambda'}}\right)}{v'\left(\xi^{2^{\lambda'}}\right)} \in M,$$

$$\frac{\xi^{2^{\lambda'}(n_1'+1)+1} u_1'\left(\xi^{2^{\lambda'}}\right)}{v'\left(\xi^{2^{\lambda'}}\right)} \in M.$$

Используя последние два соотношения и лемму 4, получим (51). Свойство 2 доказано.

Свойство 3 доказывается с использованием свойств 1, 2 и алгоритма Эвклида.

Вернемся к доказательству теоремы.

Докажем, что найдутся $d_0(\xi)$, λ_2, $d_0(\xi)\in E_2[\xi]$, $\deg d_0(\xi)\geqslant 4$, $\lambda_2\in N$,

$$\Omega_1\left(\lambda_2, \frac{u_M(\xi)}{d_0(\xi u_M(\xi))}\right)\subseteq M. \tag{52}$$

Используя леммы 4 и 6 для некоторых $d_0(\xi)$, $u_6(\xi)$, λ_3, $d_0(\xi)\in 1+E_2[\xi]$, $\deg d_0(\xi)\geqslant 4$, $u_6(\xi)\in 1+\xi E_2[\xi]$, $\lambda_3\in N$, получаем

$$\Omega_1\left(\lambda_3, \frac{u_M(\xi)u_6(\xi)}{d_0(\xi u_M(\xi))}\right)\subseteq M, \tag{53}$$

где $\big(u_6(\xi), \xi u_M(\xi)\big)=1$.

По лемме 5 в M содержится некоторая дробь $\frac{\xi^s u_7(\xi)}{u_6(\xi)v_0(\xi)}$, $u_7(\xi)\in 1+$ $+\xi E_2[\xi]$, $v_0(\xi)\in 1+\xi E_2[\xi]$, $(u_7(\xi), u_6(\xi)v_0(\xi))=1$.

Тогда из (52) и доказательства леммы 4 имеем

$$\Omega_1\left(\lambda_4, \frac{u_M(\xi)u_7(\xi)}{d_0(\xi u_M(\xi))v_0(\xi)}\right)\subseteq M. \tag{54}$$

Используя свойство 3 множества M, равенство $\big(u_6(\xi)v_0(\xi), u_7(\xi)\big)=1$ и соотношения (53), (54), получим

$$\Omega_1\left(\lambda_2, \frac{u_M}{d_0(\xi u_M(\xi))v_0(\xi)}\right)\subseteq M. \tag{55}$$

Из (55) следует (52).

Обозначим $\deg d_0(\xi)$ через n, $\deg u_M(\xi)$ через m, $\xi^{2^{\lambda_2}}$ через η.

Покажем, что для любых r, i, j,

$$r\in N\setminus\{0\},\quad 0\leqslant i\leqslant 2^{\lambda_2}(m+1),\quad 1\leqslant j\leqslant nr-2, \tag{56}$$

имеет место

$$\frac{(\eta u_M(\eta))^j\,\xi^i}{d_0^r\,(\eta u_M(\eta))}\in M. \tag{57}$$

Доказательство проведем индукцией по r. При $r=1$ справедливость (57) для любых i, j, удовлетворяющих (56), вытекает из (52).

Пусть (57) выполнено при $r=r'$, $r'\geqslant 1$, для всех указанных в (56) i, j.

Нетрудно видеть, что (57) выполнено при

$$r=r'+1,\quad 0\leqslant i\leqslant 2^{\lambda_2}(m+1),\quad 2\leqslant j\leqslant (r'+1)n-3.$$

При $a_i\in E_2$, $i=1,2,\ldots,n-1$ имеет место

$$d_0=1+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_{n-1}\xi^{n-1}+\xi^n.$$

Обозначим $\eta u_M(\eta)$ через Υ. Тогда

$$\frac{\Upsilon\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}=\frac{\Upsilon d_0(\Upsilon)\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+a_1\frac{\Upsilon^2\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+ +a_2\frac{\Upsilon^3\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+\ldots+a_{n-1}\frac{\Upsilon^n\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+\frac{\Upsilon^{n+1}\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}, \tag{58}$$

$$\frac{\Upsilon^{(r'+1)n-2}\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}=\frac{\Upsilon^{r'n-2}d_0(\Upsilon)\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+\frac{\Upsilon^{r'n-2}\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+ +a_1\frac{\Upsilon^{r'n-1}\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+a_2\frac{\Upsilon^{r'n}\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}+\ldots+a_{n-2}\frac{\Upsilon^{(r'+1)n-3}\xi^i}{d_0^{r'+1}(\Upsilon)}. \tag{59}$$

Из того, что $\deg d_0(\xi) \geqslant 4$, следует, что каждое слагаемое в правых частях равенств (58), (59) содержится в M. Поэтому (57) выполнено для всех i, j, удовлетворяющих (56) при $r = r' + 1$.

Таким образом, (57) при ограничениях (56) доказано.

Из (57) для любых r, $u'(\xi)$, $r \in N \setminus \{0\}$, $u'(\xi) \in E_2[\xi]$, $\deg u' \leqslant nr2^{\lambda_2}(m+ +1) - 2^{\lambda_2+1}(m+1)$, вытекает

$$\frac{\Upsilon u'(\xi)}{d_0^r(\Upsilon)} \in M. \tag{60}$$

Пусть $u'(\xi) \in E_2[\xi]$, $v'(\xi) \in E_2[\xi]$, $(v'(\xi), \xi u_M(\xi)) = 1$, $\deg u'(\xi) \leqslant \leqslant \deg v' - 2^{\lambda_2+1}(m+1)$,

$$\mu' = \frac{\Upsilon u'(\xi)}{v'(\xi)}.$$

Докажем, что

$$\mu' \in M. \tag{61}$$

Предположим

$$v'(\xi) \in 1 + \Upsilon E_2[\Upsilon],$$
$$\deg v'(\xi) = nr_0(m+1)2^{\lambda_2}.$$

Ввиду леммы 5 эти предположения не ограничивают общности. Из (60) для μ_1', μ_2',

$$\mu_1' = \frac{v'(\xi) + d_0^{r_0}(\Upsilon)}{d_0^{r_0}(\Upsilon)},$$
$$\mu_2' = \frac{\Upsilon u'(\xi)}{d_0^{r_0}(\Upsilon)},$$

получим

$$\mu_1' \in M, \qquad \mu_2' \in M.$$

Отсюда и из равенства

$$\mu' = \frac{\mu_2'}{1 + \mu_1'}$$

следует (61).

Через T обозначим натуральное число, $T \geqslant 1$, удовлетворяющее соотношению

$$\big(\xi u_0(\xi)\big)^T \subseteq \Upsilon E_2[\xi].$$

Для любой μ', $\mu' \in L_1^0$, $\mu' = \frac{u'}{v'}$, $\big(v', u_0\big) = 1$, $\deg u'(\xi) \leqslant \deg v' - 2T\big(\deg u_0(\xi) + 1\big)$,

$$\big(\xi u_0(\xi)\big)^T \mu' \in M.$$

Найдется μ_e, $\mu_e \in M \cap \big(1 + \xi L_1^0\big)$. Тогда

$$\mu_e^{2^{T(\deg u_0 + 1)}} = 1 + \frac{(\xi u_0)^T u^*(\xi)}{v^*(\xi)},$$

где $(v^*(\xi), u_0(\xi)) = 1$, $\deg u^*(\xi) \leqslant \deg v^*(\xi) - 2T(\deg u_0(\xi)+1)$, т. е. $1 \in M$.

Таким образом,

$$P^{(1)}\left((\xi u_0)^T\right) \subseteq M.$$

Очевидно,

$$M \subseteq M_0^{(1)} \cap M^{(1)}(u_0).$$

Поэтому имеет место (29).

Утверждение 1 теоремы 1 доказано. Докажем утверждение 2. Пусть $u_0 \in 1 + \xi E_2[\xi]$, положим

$$M_*^{(1)}(u_0^T) = \{\xi u | u \in E_2[\xi], \deg \xi u < T(\deg u_0 + 1)\},$$

$$P_*^{(1)}\left(u_0^T\right) = \left\{ \frac{\xi u_1 + (\xi u_0)^T \xi u_2}{1 + (\xi u_0)^{2T}} \middle| \quad u_i \in E_2[\xi], \right.$$

$$\left. \deg \xi u_i < T(\deg u_0 + 1),\ i = 1, 2 \right\}.$$

Для доказательства второй части теоремы 1 используется

Л е м м а 7. 1. *При* $\mu' \in M^{(1)}(u_0)$ *для любого* T, $T \in N \setminus \{0\}$, *найдутся, и притом единственным образом,* μ_1', μ_2', $\mu_1' \in M_*^{(1)}(u_0^T)$, $\mu_2' \in M^{(1)}((\xi u_0)^T)$ *такие, что*

$$\mu' = \mu_1' + \mu_2'. \tag{62}$$

2. *При* $\mu' \in M_0^{(1)} \cap M^{(1)}(u_0)$ *для любого* T, $T \in N \setminus \{0\}$, *найдутся, и притом единственным образом,* μ_1', μ_2', $\mu_1' \in P_*^{(1)}(u_0^T)$, $\mu_2' \in P^{(1)}((\xi u_0)^T)$ *такие, что выполнено* (62).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть $\mu' = \frac{u'}{v'}$,

$$\mu' \in M^{(1)}(u_0). \tag{63}$$

Не ограничивая общности, предположим, что

$$v' \in 1 + (\xi u_0)^T E_2[\xi u_0].$$

Найдутся u_1', u_2', $\deg u_1' < T(\deg u_0 + 1)$, удовлетворяющие равенству

$$u' = u_1' v'(\xi) + (\xi u_0)^T u_2'.$$

Отсюда

$$\mu' = u_1' + \frac{(\xi u_0)^T u_2'}{v'},$$

т. е. имеет место разложение (62).

Если помимо (63) выполнено еще

$$\mu' \in M_0^{(1)}, \tag{64}$$

то для некоторых a, u_1', u_2', u_3', $a \in E_2$, $u_i' \in E_2[\xi]$, $i = 1, 2, 3$, $\deg \xi u_j' < T(\deg u_0 + 1)$, $j = 1, 2$, $\deg u_3' \leqslant \deg v' - 2T(\deg u_0 + 1)$,

$$\frac{u'}{v'} = a + \frac{\xi u_1' + (\xi u_0)^T u_3' + (\xi u_0)^{\deg v' - T} \xi u_2'}{v'}.$$

Тогда

$$\mu' + \frac{\xi u_1' + (\xi u_0)^T \xi u_2'}{1 + (\xi u_0)^{2T}} \in P^{(1)}((\xi u_0)^T), \tag{65}$$

и разложение (62) имеет место при

$$\mu_1' \in P_*^{(1)}(u_0), \qquad \mu_2' \in P^{(1)}(u_0^T).$$

Докажем единственность разложения (62).

Пусть в случае (63) наряду с (62) имеет место

$$\mu' = \mu_1'' + \mu_2'', \tag{66}$$

где $\mu_1'' \in M_*^{(1)}(u_0^T)$, $\mu_2'' \in M^{(1)}(u_0^T)$. Тогда

$$\mu_1' + \mu_1'' = \mu_2' + \mu_2''. \tag{67}$$

Ввиду

$$M_*^{(1)}(u_0^T) \cap M^{(1)}(u_0^T) = \{0\},$$

из (67) получим $\mu_1' = \mu_1''$, $\mu_2' = \mu_2''$. Поэтому разложения (62) и (66) совпадают. Единственность разложения (62) в случае (63) доказана.

Пусть имеют место (63) и (64) и наряду с (65) выполнено

$$\mu' + \frac{\xi u_1'' + (\xi u_0)^T \xi u_2''}{1 + (\xi u_0)^{2T}} \in P^{(1)}((\xi u_0)^T), \tag{68}$$

$$\deg \xi u_i'' < T(\deg u_0 + 1), \quad i = 1, 2.$$

Из (65) и (68) получим

$$\frac{\xi(u_1' + u_1'') + (\xi u_0)^T \xi(u_2' + u_2'')}{1 + (\xi u_0)^{2T}} \in P^{(1)}((\xi u_0)^T),$$

откуда $u_1' = u_1''$ и $u_2' = u_2''$.

Используя приведенные рассуждения, нетрудно показать единственность разложения (62), когда выполнены (63) и (64).

Лемма 7 доказана.

Из леммы 7, первой части теоремы 1, конечности множеств $M_*^{(1)}(u_0^T)$ и $P_*^{(1)}(u_0^T)$ и изоморфизма множеств L_1^0 и $L_1^0(\mu)$ вытекает второе утверждение.

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Соотношение*

$$1 \in K^{(1)}(M) \tag{69}$$

выполнено тогда и только тогда, когда для каждого i, $i = 0, 1, 2, \ldots$,

$$M \not\subseteq R_i^{(1)}. \tag{70}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если (69) имеет место, то (70) выполнено ввиду $1 \notin R_i^{(1)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Необходимость утверждения теоремы доказана.

Его достаточность установлена при доказательстве теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

§ 3. Об алгоритме проверки выразимости через конечные системы с сумматором

Т е о р е м а 3. *Существует алгоритм, который для любых* μ', γ', M, C,

$$\mu' \in L_1^0, \quad \gamma' \in L_c, \quad M \subset L_1^0, \quad C \subset L_c, \tag{71}$$

$$|M| < \infty, \quad |C| < \infty, \quad 1 \in K^{(1)}(M), \tag{72}$$

определяет справедливость соотношений

$$\mu' \in K^{(1)}(M), \tag{73}$$

$$\gamma \in S(M, C). \tag{74}$$

Доказательство. Пусть имеют место (71), (72). Положим

$$M^* = \{\mu'' | \quad \mu'' \in M \cap \xi L_1^0\} \cup \{\mu'' + 1 | \quad \mu'' \in M \setminus \xi L_1^0\} \cup \{1\}.$$

Выполнено

$$K^{(1)}(M) = K^{(1)}(M^*).$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, рассмотрим случай

$$M = \{1\} \cup M', \quad M' \subseteq \xi L_1^0 \setminus \{0\}.$$

Доказательство теоремы 3 нетривиально при условии $M' \neq \varnothing$, что равносильно соотношению

$$K^{(1)}(M) \setminus E_2 \neq \varnothing. \tag{75}$$

Пусть (75) имеет место. Используя известные результаты [3, с. 259], нетрудно показать, что для некоторой дроби μ, $\mu \in \xi L_1^0$, выполнено

$$E_2(M) = E_2(\mu), \tag{76}$$

где через $E_2(M)$ и $E_2(\mu)$ обозначены замыкания по операциям сложения, умножения и деления множеств $E_2 \cup M$ и $E_2 \cup \{\mu\}$ соответственно.

Из [3, с. 146, 258], [6] вытекает

Утверждение 1. *Пусть* μ'', $\mu_1'' \in \xi L_1^0$,

$$E_2(\mu'') \subseteq E_2(\mu_1'') \subseteq E_2(\xi).$$

Тогда $\mu'' = \mu_a(\mu_1'')$ *для некоторого* $\mu_a(\xi)$ *из* L_1^0 *и* $\deg \mu_a(\xi) \cdot \deg \mu_1'' = \deg \mu''(\xi)$.

Имеет место также

Утверждение 2. *Дробь* μ, *удовлетворяющая равенству* (76), *содержится в множестве*

$$M_a = \{\mu^* | \quad \mu^* \in L_1^0, \quad E_2(\mu'') \subseteq E_2(\mu^*) \quad \text{для любого} \quad \mu'' \quad \text{из} \quad M\}.$$

и имеет максимальную возможную степень.

Докажем утверждение 2. Из (76) следует $\mu \in M_a$. Если бы в M_a нашлась дробь μ^*, $\deg \mu^* > \deg \mu$, то

$$E_2(\mu) \subseteq E_2(\mu^*) \subseteq E_2(\xi),$$

что противоречит утверждению 1.

Таким образом, утверждение 2 доказано.

Заметим, что для любого M, $|M| < \infty$, множество M_a конечно и может быть найдено ввиду утверждения 1.

Далее, найдется такое μ_0, $\mu_0 \in K_c^1(M)$, $\mu_0 \neq 0$, что $\mu\mu_0 \in K_c^1(M)$.

Для каждого μ', $\mu' \in M$, строится $\mu''(\xi)$, $\mu''(\xi) \in L_1^0$, удовлетворяющая соотношению

$$\mu''(\mu) = \mu'.$$

Конечность этой процедуры следует из утверждения 1.

Далее доказательство ведется параллельно для двух случаев.

Случай 1. $M \not\subseteq M_0^{(1)}(\mu)$.

Случай 2. $M \subseteq M_0^{(1)}(\mu)$.

Используя доказательство теоремы 1, для M можно найти $u_0(\xi)$ и T такие, что в случае 1 имеет место (11), а в случае 2 выполнено (12).

Положим в случае 1

$$M^{**} = \{u'(\mu) | \quad \deg u'(\xi) < T(1 + \deg u_0(\xi))\},$$
$$M''' = \left\{(\mu u_0(\mu))^T \frac{u'(\mu)}{v'(\mu)} | \quad \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} \in L_1^0, \quad (v'(\xi), \xi u_0(\xi)) = 1\right\},$$

а в случае 2

$$M^{**} = \left\{ \frac{u^{(1)}(\mu) + (\mu u_0(\mu))^T u^{(2)}(\mu)}{1 + (\mu u_0(\mu))^{2T}} \quad | \right.$$
$$\left. u^{(i)}(\xi) \in E_2[\xi], \quad \deg u^{(i)}(\xi) < T(\deg u_0(\xi) + 1), \quad i = 1, 2\right\},$$
$$M''' = \left\{ \frac{(\mu u_0(\mu))^T u'(\mu)}{v'(\mu)} \quad | \quad \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} \in L_1^0, \right.$$
$$\left. \big(v'(\xi), \xi u_0(\xi)\big) = 1, \quad \deg u'(\xi) \leqslant \deg v'(\xi) - 2T\,\big(1 + \deg u_0(\xi)\big)\right\}.$$

Имеет место

$$K^{(1)}(M) = M'' + M''',$$

где

$$M'' \subseteq M^{**}.$$

Множество M'' находится следующим образом. Пусть

$$M'_n = \{u' \quad | \quad \mu' = u' + \mu'', \quad u' \in M^{**}, \quad \mu'' \in M''',$$
μ' может быть получен из элементов множества M
с использованием не более чем n операций «+» , «·», «Об»$\}$,

$n = 1, 2, \ldots$.

Тогда для некоторого n_0, $n_0 \in N$, выполнено

$$M'_{n_0} = M'_{n_0+1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$M'' = M'_{n_0}.$$

Таким образом, указан алгоритм, определяющий справедливость соотношения (73).

Множество $S(M, C)$ — линейное пространство над кольцом $K^{(1)}(M)$ с порождающим множеством C, $C = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m\}$.

Рассмотрим линейное пространство $S'(\mu, C)$ над полем $E_2(\mu)$ с порождающим множеством C. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$, $r \leqslant m$, — базис этого пространства. Конечный базис в $S'(\mu, C)$ существует [3, с. 258] и может быть выделен из C известными методами.

Для любого i, $r < i \leqslant m$, определяются элементы $L_1^0(\mu)$, $\eta_i(\mu)$, $\eta_{1,i}(\mu)$, $\eta_{2,i}(\mu)$,...$\eta_{r,i}(\mu)$, не все равные нулю и удовлетворяющие равенству

$$\eta_i(\mu)\gamma_i = \eta_{1,i}(\mu)\gamma_1 + \ldots + \eta_{r,i}(\mu)\gamma_r.$$

При этом, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\eta_i(\xi)\in\left(\xi u_0(\xi)\right)^T L_1^0(\xi)$, и $\eta_{j,i}(\xi)\in\left(\xi u_0(\xi)\right)^T L_1^0(\xi)$.

Положим

$$\chi(\xi)=\begin{cases}\left(\xi u_0(\xi)\right)^T, & \text{если } r=m,\\ \eta_{r+1}(\xi)\cdot\eta_{r+2}(\xi)\cdot\ldots\cdot\eta_m(\xi), & \text{если } r\neq m.\end{cases}$$

Тогда для некоторых $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$, $v_1(\xi)$,

$$\chi(\xi)=\frac{u_1(\xi)u_2(\xi)}{v_1(\xi)},$$
$$\left(u_1(\xi),\left(\xi u_0(\xi)\right)^T\right)=\left(\xi u_0(\xi)\right)^T,$$
$$\left(u_2(\xi)v_1(\xi),\xi u_0(\xi)\right)=1.$$

Пусть $s=\deg u_1(\xi)$. Положим в случае 1

$$\widetilde{N}=\{u'(\mu)\quad|\quad\deg u'<s\},$$
$$N''=\left\{u_1(\mu)\frac{u'(\mu)}{v'(\mu)}\quad|\quad\frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}\in L_1^0,\quad\left(v'(\xi),\xi u_0(\xi)\right)=1\right\},$$

а в случае 2:

$$\widetilde{N}=\left\{\frac{u^{(1)}(\mu)+u_1(\mu)u^{(2)}(\mu)}{1+u_1^2(\mu)}\quad|\quad u^{(i)}(\xi)\in E_2[\xi],\quad\deg u^{(i)}(\xi)<s,\quad i=1,2\right\},$$
$$N''=\left\{u_1(\mu)\frac{u'(\mu)}{v'(\mu)}\quad|\quad\frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}\in L_1^0,\quad\left(v'(\xi),\xi u_0(\xi)\right)=1,\deg u'(\xi)\leqslant\deg v'(\xi)-2s\right\}.$$

Для некоторого N', $N'\subseteq\widetilde{N}$,

$$K^{(1)}(M)=N'+N''.$$

Множество N' определяется методом, использованным для получения M'.

Включение (74) имеет место в точности тогда, когда

$$\{\zeta_1\gamma_1+\ldots+\zeta_m\gamma_m+\gamma\quad|\quad\zeta_i\in N',\quad i=1,2,\ldots,m\}\bigcap\bigcap\{\zeta_1\gamma_1+\ldots+\zeta_m\gamma_m\quad|\quad\zeta_i\in N'',\quad i=1,2,\ldots,m\}\neq\varnothing,$$

что, в свою очередь, равносильно соотношению

$$\{\zeta_1\gamma_1+\ldots+\zeta_m\gamma_m+\gamma\quad|\quad\zeta_i\in N',\quad i=1,2,\ldots,m\}\bigcap\bigcap\{\zeta_1\gamma_1+\ldots+\zeta_r\gamma_r\quad|\quad\zeta_i\in M''',\quad i=1,2,\ldots,r\}\neq\varnothing.\qquad(77)$$

Соотношение (77) может быть установлено с использованием известных алгоритмов.

Таким образом, теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Проблема выразимости в L через конечные системы, содержащие сумматор в замыкании, алгоритмически разрешима.*

§ 4. Выразимость сумматора через конечные системы

Далее будет получен алгоритм для проверки свойства

$$F_+^{(2)} \in K(M) \tag{78}$$

любой конечной системы л.-а. функций M.

В [8] для L построена приведенная критериальная система J,

$$J = \{ T_0, T_1, V_1, V_{\text{Н}}, M_i, R_j^{\text{С}}, R_j^{\text{Н}} \quad | \quad i = 0, 1, \ldots, j = 0, 2, 3, \ldots \} .$$

Положим

$$J' = \{ T_1, V_1, V_{\text{Н}}, R_j^{\text{С}}, R_j^{\text{Н}} \quad | \quad j = 0, 2, 3, \ldots \} .$$

Из (78) для любого Θ,

$$\Theta \in J',$$

следует

$$M \not\subseteq \Theta.$$

Обратное, вообще говоря, неверно. Приведем соответствующий пример. Пусть

$$M_0 = \{ F_+^{(3)}(x_1, x_2, x_3), F_+(\xi(x), 010^\infty) \} .$$

Тогда $M \not\subseteq \Theta$ для любого Θ, $\Theta \in J'$, но любой F, $F \in K(M_0)$, либо имеет нечетное число непосредственных входов [8] и второй элемент последовательности $F(0^\infty, 0^\infty, \ldots, 0^\infty)$ равен 0, либо имеет четное число непосредственных входов и второй элемент этой последовательности равен 1. Доказательство последнего утверждения нетрудно провести индукцией по построению функций из $K(M_0)$.

Положим

$$J^* = J' \setminus \{T_1\}.$$

Л е м м а 8. *Если* $M \not\subseteq \Theta$ *для любого* Θ, $\Theta \in J^*$, *то*

$$F_+^{(3)} \in K(M).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M \not\subseteq \Theta$ для любого Θ, $\Theta \in J$. Используя доказательства лемм 9 и 10 из [8], нетрудно показать, что для некоторых $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, γ и l, $\mu_i \in L_1^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\gamma \in L_{\text{С}}$, $l \in N \cup \{0\}$, $\{\mu_i \quad | \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \not\subseteq R_i^{(1)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, выполнено

$$F_+^{(2n+1)} \left(\mu_1^{2^l}(x_1), \mu_1^{2^l}(x_2), \mu_2^{2^l}(x_3), \mu_2^{2^l}(x_4), \ldots, \right.$$
$$\left. \mu_n^{2^l}(x_{2n-1}), \mu_n^{2^l}(x_{2n}), \gamma \right) \in K(M)$$

Далее, воспользовавшись доказательством теоремы 3 из [8], и свойством

$$1 \in K^{(1)} \left(\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} \right) ,$$

вытекающим из теоремы 2, для некоторого γ', $\gamma' \in L_{\text{С}}$, получим

$$F_+^{(3)}(x_1, x_2, \gamma') \in K(M).$$

Следовательно,

$$F_+^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = F_+^{(3)}\left(x_1, F_+^{(3)}(x_2, x_3, \gamma'), \gamma'\right).$$

Лемма доказана.

Используя лемму 8, получим критерий для свойства (78).

Теорема 5. *Пусть* $M \not\subseteq \Theta$ *для любого* Θ, $\Theta \in J^*$, $|M| < \infty$, $C(M) = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$, $C(M \setminus V_H) = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$.

Тогда условия 1–4 *эквивалентны.*

1. *Найдутся* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ *из* $K^{(1)}(U(M))$, *такие что*

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i \gamma_i = 0^\infty$$

и $|\{i \mid \beta_i \in 1 + \xi L_1^0, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}|$ *нечетно.*

2.
$$\left(K(M) \cap L^0\right) \setminus V_H \neq \varnothing.$$

3.
$$0^\infty \in K(M).$$

4.
$$F_+^{(2)} \in K(M).$$

Доказательство. Пусть $M \not\subseteq \Theta$ для любого Θ, $\Theta \in J^*$, $|M| < \infty$. По лемме 8

$$F_+^{(3)} \in K(M).$$

Пусть выполнено условие 1 теоремы. Можно считать, что $\beta_i \in K_{\mathrm{C}}(U(M))$.

Для каждого μ из $U(M)$

$$F_+^{(3)}(\mu(x_1), \mu(x_2), x_3) \in K(M).$$

Имеет место

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r_i} \Pi_{ij} \gamma_i = 0^\infty,$$

где Π_{ij} получается с использованием лишь операции подстановки из элементов множества $U(M)$ и

$$\left|\{(i, j) \mid i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, r_i, \quad \Pi_{ij} \in 1 + \xi L_1^0\}\right|$$

нечетно. Положим

$$k^* = \sum_{i=1}^{s} r_i.$$

Из сумматора $F_+^{(3)}$ с использованием операции подстановки построим $F_+^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с $m \geqslant k^*$. Для некоторого m', $m' \geqslant m$ в L_1^0 найдутся $\mu_{k^*+1}, \mu_{k^*+2}, \ldots, \mu_{m'}$ такие, что

$$\begin{aligned}F_+^{(m')}\Big(&\Pi_{11}(x_{11}), \Pi_{12}(x_{12}), \ldots \Pi_{1r_1}(x_{1r_1}), \Pi_{21}(x_{21}), \Pi_{22}(x_{22}), \ldots \\ &\Pi_{2r_2}(x_{2r_2}), \ldots, \Pi_{s1}(x_{s1}), \Pi_{s2}(x_{s2}), \ldots \Pi_{sr_s}(x_{sr_s}), \mu_{k^*+1}(x_{k^*+1}), \\ &\mu_{k^*+2}(x_{k^*+2}), \ldots, \mu_{m'}(x_{m'})\Big) \in K\left(\{F_+^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_m),\right. \\ &\left. F_+^{(3)}(\mu(x_1), \mu(x_2), x_3) \mid \mu \in U(M)\}\right) \cap V_{\mathrm{H}}.\end{aligned}$$

Через G_i, $G_i = G_i(x_{i1}, \ldots, x_{ip_i})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, обозначим такие функции из множества M, что $\gamma_i = C(G_i)$ и, если $1 \leqslant i \leqslant k$, то $G_i \notin V_{\text{Н}}$.

Тогда

$$F_+^{(m')}\Big(\Pi_{11}(G_1), \Pi_{12}(G_1), \ldots \Pi_{1r_1}(G_1), \Pi_{21}(G_2), \Pi_{22}(G_2), \ldots$$
$$\Pi_{2r_2}(G_2), \ldots, \Pi_{s1}(G_s), \Pi_{s2}(G_s), \ldots \Pi_{sr_s}(G_s), \mu_{k^*+1}(x_{k^*+1}),$$
$$\mu_{k^*+2}(x_{k^*+2}), \ldots, \mu_{m'}(x_{m'})\Big) \in \big(K(M) \cap L^0\big) \setminus V_{\text{Н}}.$$

Пусть выполнено условие 2 теоремы. Отождествляя переменные функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $\big(K(M) \cap L^0\big) \setminus V_{\text{Н}}$, получим функцию $F'(x)$, $F'(x) \in \xi L_1^0$. Тогда

$$\text{Об}_x F'(x) = 0^\infty.$$

Условие 3 теоремы доказано.

Если выполнено условие 3 теоремы, то из равенства

$$F_+^{(2)}(x_1, x_2) = F_+^{(3)}(x_1, x_2, 0^\infty)$$

вытекает условие 4.

Пусть имеет место условие 4 теоремы. Индукцией по построению функций из $K(M)$ нетрудно показать, что справедливо

Утверждение. *В условиях теоремы* 5 *пусть* $F \in K(M)$, $C(F) = \{\gamma\}$,

$$\gamma = \sum_{i=1}^{s} \beta_i' \gamma_i,$$
$$N' = \{i \mid \beta_i' \in 1 + \xi L_1^0, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Тогда либо $F \in V_H$ *и* $|N'|$ *четно, либо* $F \notin V_H$ *и* $|N'|$ *нечетно.*

Так как $F_+^{(2)} \notin V_{\text{Н}}$, то из приведенного утверждения следует условие 1 теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Существует алгоритм, проверяющий для любой пары конечных множеств* M_1, M, $M \subset L$, $M_1 \subset L$, *справедливо ли*

$$M_1 \cup \big\{F_+^{(2)}\big\} \subseteq K(M).$$

Доказательство. По теореме 4 достаточно доказать алгоритмическую разрешимость проверки соотношения (78) для любого конечного M, $M \subset L$.

Пусть $C(M) = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ — базис $S'(\mu, C(M))$ в смысле доказательства теоремы 3 и $\widetilde{N}$, M''', N' — множества, построенные в этом доказательстве.

Линейной комбинации l, $l = \zeta_1\gamma_1 + \ldots + \zeta_m\gamma_m$, $\zeta_i \in N'$, $i = 1, 2, \ldots, m$, сопоставим число $v(l)$,

$$v(l) = \Big|\big\{i \mid \zeta_i \in 1 + \xi L_1^0, \quad \gamma_i \in C\,\big(M \setminus V_{\text{Н}}\big)\big\}\Big|.$$

По условию 1 теоремы 5 включение (78) выполнено в точности тогда, когда

$$\{l \mid l = \zeta_1\gamma_1 + \ldots + \zeta_m\gamma_m, \quad \zeta_i \in N', \quad , i = 1, 2, \ldots, m, v(l) \quad \text{нечетно}\} \cap$$
$$\cap \{\zeta_1\gamma_1 + \ldots + \zeta_r\gamma_r, \quad | \quad \zeta_i \in M''', \quad i = 1, 2, \ldots, r\} \neq \varnothing.$$

Отсюда вытекает конечность процедуры проверки соотношения (78).

Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 41–56.
2. Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 6. — С. 687–697.
3. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976.
4. Кратко М. И. Алгортмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 191–195.
5. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
6. Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.
7. Часовских А. А. О выразимости систем с сумматором в классе линейных автоматов // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1990. — № 4. — С. 31–34.
8. Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3. — М.: Наука, 1991. — С. 140–166.

Поступило в редакцию 14 V 2004