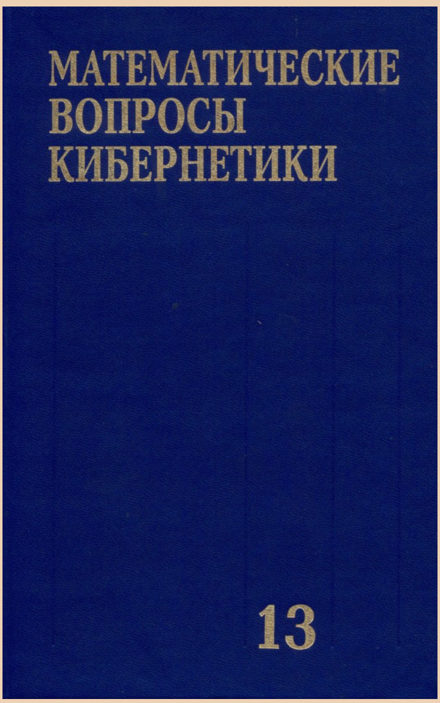


Т. В. Андреева

Развитие метода граничных функционалов и его приложение к комбинаторным задачам

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К КОМБИНАТОРНЫМ ЗАДАЧАМ *)

Т. В. АНДРЕЕВА

(МОСКВА)

Введение

Значительное место в математике занимают перечислительные задачи, связанные с доказательством существования, алгоритмами построения и подсчетом числа элементов данного множества, обладающих некоторыми свойствами. Речь может идти, например, о числе решений задач целочисленного линейного программирования, числе n-вершинных графов с определенными свойствами или о числе изомеров химических элементов. Существующие методы решения таких задач можно разделить на два типа: комбинаторные и вероятностные.

К комбинаторным методам относится классический метод производящих функций, получивший развитие в середине XX века. Использование перечислительных теорем Пойа, де Брёйна и Робинсона позволяет получать некоторые соотношения между числовыми характеристиками изучаемых объектов. Метод заключается в том, что на основании рекуррентных соотношений выводится дифференциальное уравнение, решением которого является производящая функция. Разложение производящей функции в ряд дает точные или асимптотические формулы для коэффициентов. Тем не менее, методика построения производящих функций сложна и не всегда приводит к обозримым результатам, поэтому существует класс задач, которые не могут быть решены с помощью классических методов.

Существенную роль играют комбинаторно-вероятностные методы решения перечислительных задач. В своих работах эти методы применяли Ю.Л. Васильев, В.В. Глаголев, В.Л. Гончаров, В.Ф. Колчин, А.А. Сапоженко, В.Н. Сачков, Н. Алон, Дж. Спенсер, П. Эрдёш. Идея вероятностного метода заключается в том, чтобы показать, что почти все объекты из рассматриваемого класса обладают некоторым свойством. Вероятностные формулировки комбинаторных задач дают возможность при отыскании асимптотических формул использовать аппарат предельных теорем.

Задачи, в которых речь идет о нахождении числа объектов, имеющих заданную границу или заданную мощность границы, естественно назвать перечислительными изопериметрическими задачами. Такими являются, например, задачи о числе монотонных булевых функций (так называемая

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04–01–00359).

проблема Дедекинда), независимых множеств в двудольных графах, булевых функций ранга ноль, двоичных кодов с расстоянием 2, пар подмножеств с расстоянием 2 в графах.

Оказалось что, такие задачи сводятся к вычислению сумм специального вида, которые называются суммами граничных функционалов. Метод граничных функционалов разработан А.А. Сапоженко для решения перечислительных изопериметрических задач. Он сочетает в себе комбинаторный и вероятностный подходы и позволяет получать предельные распределения для случайных величин типа числа компонент связности. Сущность метода заключается в сведении исходной комбинаторной задачи к вычислению сумм граничных функционалов и дальнейшему аналитическому исследованию последних. Цель метода — получение оценки исходных сумм через «простейшие» суммы граничных функционалов. Это позволяет уйти от перебора и громоздких конструкций, возникающих при чисто комбинаторном подходе.

К классу перечислительных изопериметрических задач относятся задачи о числе антицепей в частично упорядоченных множествах, а, значит, и задачи о числе конечнозначных монотонных функций. Наибольшую известность среди таких задач получила упоминавшаяся выше проблема Дедекинда о числе $\psi(n)$ монотонных булевых функций или, что то же, о числе антицепей в единичном n-мерном кубе B^n.

В 1897 г. Р. Дедекинд вычислил значение $\psi(4)$. Р. Черч в 1940 г. и М. Уорд в 1946 г. получили соответственно значения $\psi(5)$ и $\psi(6)$. В 1954 г. Е. Гильберт показал, что $\psi(n)$ удовлетворяет неравенствам

$$2^{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} \leqslant \psi(n) \leqslant n^{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} + 2.$$

В.К. Коробков в 1962–65 гг. показал, что $\psi(n) \leqslant 2^{4.23\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$, Ж. Ансель в 1968 г. улучшил верхнюю оценку до $3^{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$, а Д. Клейтмен в 1969 г. доказал, что

$$\log_2 \psi(n) \sim \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

Асимптотическое решение проблемы Дедекинда было получено А.Д. Коршуновым в 1980 г. Оно основано на описании «типичных» монотонных булевых функций и оценках числа подмножеств вершин слоев единичного n-мерного куба, имеющих заданную мощность границы.

В 1989 г. А.А. Сапоженко получил асимптотику числа антицепей в унимодальных частично упорядоченных множествах, из которой вытекает и асимптотика для $\psi(n)$.

Проблема вычисления мощности множеств функций n переменных из замкнутых классов исследовалась и для k-значных логик. В 1974 г. В.Б. Алексеев в статье [2] получил асимптотику логарифма числа k-значных функций, монотонных относительно произвольно заданного частичного порядка на S.

В данной статье получена асимптотика числа антицепей в частично упорядоченном множестве S_k^n, являющемся декартовой степенью k-звезды при $5 \leqslant k \leqslant 11$, а также улучшена нижняя оценка числа антицепей в трехзначной n-мерной решетке E_3^n.

ГЛАВА 1
ОЦЕНКИ СУММ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

§ 1.1. Основные понятия

В параграфе приводятся основные понятия и определения, введенные в [7, 8, 10].

Модельной задачей, иллюстрирующей подход, связанный с методом граничных функционалов, является проблема нахождения числа независимых множеств в двудольных графах. Пусть дан двудольный граф $\Gamma=(X, Z; E)$ с долями вершин X, Z и множеством ребер E. *Границей* множества $A\subseteq X$ называется множество

$$\partial(A)=\big\{v\in Z\colon\ \exists\, u\in A\ \ \{u,v\}\in E\big\}.$$

Подмножество C вершин графа Γ называется *независимым*, если подграф, порожденный множеством C, не содержит ребер. Пусть $I(\Gamma)$ — число независимых множеств в графе Γ. Тогда

$$I(\Gamma)=2^{|Z|}\sum_{A\subseteq X}2^{-|\partial(A)|}. \tag{1.1.1}$$

В самом деле, произвольное независимое множество C в Γ может быть представлено в виде $C=A\cup B$, где $A=C\cap X$, $B=C\cap Z$. Если выбрано множество $A\subseteq X$, то все подмножества $B\subseteq Z\setminus\partial(A)$, и только они, образуют вместе с A независимое множество в Γ. Число таких подмножеств равно $2^{|Z\setminus\partial(A)|}$. Отсюда следует (1.1.1). Через 2^X обозначается семейство всех подмножеств множества X.

Функционал $f(A)=2^{-|\partial(A)|}$ обладает следующими свойствами:

1) $0<f(A)\leqslant 1$ для всех $A\subseteq X$;
2) $f(A)=1$ тогда и только тогда, когда $A=\varnothing$;
3) $f(A\cup B)\geqslant f(A)f(B)$;
4) $f(A\cup B)>f(A)f(B)$ тогда и только тогда, когда существуют $u\in A$ и $v\in B$ такие, что $f(\{u,v\})>f(\{u\})f(\{v\})$.

Из равенства (1.1.1) следует, что вопрос о числе независимых множеств сводится к вычислению сумм вида $\sum\limits_{A\subseteq X}f(A)$.

Функционал $f\colon 2^X\to\mathbf{R}$, удовлетворяющий условиям 1) – 4), называется *граничным*. Пара $I=(X,f)$, где X — конечное множество, а f — граничный функционал, называется *функциональной парой*. Через

$$T(I)=T(X,f)=\sum_{A\subseteq X}f(A)$$

обозначается *полная сумма значений функционала* f.

Пусть $I=(X,f)$ — функциональная пара. Вершины u и v из X такие, что $f(\{u,v\})>f(\{u\})f(\{v\})$, называются *смежными* (обозначение $u\#v$). Вершины u и v, для которых выполнено равенство $f(\{u,v\})=f(\{u\})f(\{v\})$, называются *несмежными* (обозначение $u\parallel v$). Множества $A\subseteq X$ и $B\subseteq X$ называются *смежными* (обозначение $A\#B$), если $f(A\cup B)>f(A)f(B)$. Множества A и B называются *несмежными* (обозначение $A\parallel B$), если $f(A\cup B)=f(A)f(B)$.

Граф $G_I=(X;E_I)$ с множеством ребер $E_I=\big\{\{u,v\}\colon\ u\#v\big\}$ называется *графом функциональной пары* $I=(X,f)$. Через $H_{G_I}(A)=(A;E_I')$, где $A\subseteq X$, $E_I'=\big\{\{u,v\}\in E_I:\ \{u,v\}\subseteq A\big\}$ обозначается *подграф графа* G_I, *порожденный множеством* A. Непустое множество $F \subseteq X$ называется *связным*, если подграф $H_{G_I}(F)$ графа G_I, порожденный множеством F, связен. Семейство всех связных подмножеств множества X обозначается через $\mathscr{A}(I)$.

Подмножество $B \subseteq A$ называется *компонентой связности* множества A (обозначение $B \vdash A$), если граф $H_{G_I}(B)$ является компонентой связности графа $H_{G_I}(A)$. Для $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$ полагаем

$$C(\mathscr{B}) = \{A \subseteq X : \ B \vdash A \ \Rightarrow \ B \in \mathscr{B}\}.$$

Таким образом, $C(\mathscr{B})$ состоит из всех множеств, у которых все компоненты принадлежат семейству $\mathscr{B}$. Положим

$$S(\mathscr{B}) = \sum_{A \in C(\mathscr{B})} f(A).$$

Справедливо утверждение (см. [10]), что

$$S(\mathscr{B}) \leqslant T(I) = S\big(\mathscr{A}(I)\big) \leqslant S(\mathscr{B}) S\big(\mathscr{A}(I) \setminus \mathscr{B}\big).$$

При получении оценок сумм значений граничных функционалов мы будем иметь дело с последовательностями функциональных пар $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. Все асимптотические соотношения выводятся в предположении, что n достаточно велико. Чтобы не загромождать изложение, индексы n опускаются.

Идея получения асимптотики сумм $T(I)$ заключается в том, чтобы найти семейство $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$, для которого выполняются следующие условия:

1) $S(\mathscr{A}(I) \setminus \mathscr{B}) \sim 1$;

2) существует простая асимптотическая формула, выражающая $S(\mathscr{B})$ через суммы граничных функционалов по связным семействам малой мощности, вычисление которых обычно не вызывает затруднений.

Пусть ν — натуральное число и $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$ — прозвольное семейство, тогда *) положим

$$\alpha^{\nu}(\mathscr{B}) = \sum_{A \in \mathscr{B}} f^{\nu}(A).$$

Пусть $m \geqslant 0$ — целое, тогда положим

$$\mathscr{A}_m(I) = \{A \in \mathscr{A}(I) : |A| = m\},$$

$$\mathscr{A}_{\widehat{m}}(I) = \bigcup_{0 \leqslant j \leqslant m} \mathscr{A}_m(I), \qquad \mathscr{A}_{\overline{m}}(I) = \mathscr{A}(I) \setminus \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I).$$

Назовем *характеристикой* функциональной пары $I = (X, f)$ наименьшее целое Δ такое, что выполнено условие

$$\alpha^1\big(\mathscr{A}_{\Delta+1}(I)\big) = o(1).$$

А.А. Сапоженко [8,10] получил асимптотическую формулу для сумм граничных функционалов в случае, когда функциональные пары имеют характеристику $\Delta \leqslant 2$.

Функциональная пара I называется Δ-*сходящейся*, если

$$\alpha^1\big(\mathscr{A}_{\overline{\Delta}}(I)\big) = o(1).$$

---

*) В дальнейшем для краткости $\big(f(A)\big)^{\nu} = f^{\nu}(A)$.

Лемма 1.1.1 [10]. *Для любой функциональной пары $I=(X,f)$ и любого $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ выполнено неравенство*

$$S(\mathscr{B})\leqslant T(I)=S\big(\mathscr{A}(I)\big)\leqslant S(\mathscr{B})\exp\big\{\alpha^1\big(\mathscr{A}(I)\setminus\mathscr{B}\big)\big\}.$$

Из леммы 1.1.1 следует, что для Δ-сходящихся функциональных пар справедливо

$$T(I)\sim S\big(\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I)\big).$$

Существенной частью метода граничных функционалов является выражение сумм $S(\mathscr{B})$ через суммы типа $\alpha^\nu(\mathscr{B})$ по связным множествам малой мощности.

§ 1.2. Асимптотики сумм граничных функционалов

В статье А.А. Сапоженко [9] было введено понятие α_n-ограниченной последовательности. Сумма такой последовательности приближается суммой ее «типичных» членов. При этом случайные величины, связанные с типичными членами последовательности, имеют в пределе при $n\to\infty$ распределение Пуассона или нормальное распределение. Пусть даны последовательность функциональных пар $\{I_n=(X_n,f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность семейств $\{\mathscr{B}_n\subseteq\mathscr{A}(I_n)\}_{n=1}^{\infty}$. В данном параграфе доказано, что последовательность сумм $\{\widetilde{S}(\mathscr{B}_n)\}_{n=1}^{\infty}$, являющихся обобщением сумм $S(\mathscr{B}_n)$, является $\alpha^1(\mathscr{B}_n)$-ограниченной.

Последовательность $\{\sigma_{n,j}\}_{n,j=0}^{\infty}$ называется α_n*-ограниченной*, если при любом j выполняется неравенство

$$(j+1)\sigma_{n,j+1}\leqslant\sigma_{n,j}\alpha_n.$$

Для α_n-ограниченных последовательностей справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.2.1 [9]. *Пусть последовательность $\{\sigma_{n,j}\}_{n,j=0}^{\infty}$ является α_n-ограниченной и $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=\infty$, Положим $\theta_n=\alpha_n+\omega_n\sqrt{\alpha_n}$, $\sigma_n=\sum\limits_{0\leqslant j}\sigma_{n,j}$ Тогда при $n\to\infty$*

$$\sum_{j\leqslant\theta_n}\sigma_{n,j}=\sigma_n(1-\varepsilon_n),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. При этом $\varepsilon_n=O\big(e^{-\omega_n^2/4}\big)$, если $\omega_n\leqslant\sqrt{\alpha_n}$, и $\varepsilon_n=O\big(\omega_n^{-1}e^{-\omega_n^2/2}\big)$, если $\omega_n=o\big((\alpha_n)^{1/6}\big)$.

Следствие 1.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2.1 *и $\omega_n=o\big((\alpha_n)^{1/6}\big)$. Тогда при $n\to\infty$*

$$\sigma_n=\Big(1+O\big(\omega_n^{-1}e^{-\omega_n^2/2}\big)\Big)\sum_{j\leqslant\theta_n}\sigma_{n,j}.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть последовательность $\{\sigma_{n,j}\}_{n,j=0}^{\infty}$ является α_n-ограниченной и $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=\infty$. Положим $\theta_n=\alpha_n+\omega_n\sqrt{\alpha_n}$, $\sigma_n=\sum\limits_{0\leqslant j}\sigma_{n,j}$, $\alpha_{n,j}=(j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $\beta_n=\min\limits_{j\leqslant\theta_n}\{\alpha_{n,j}\}$, $\tau_n=\beta_n-\omega_n\sqrt{\beta_n}$, $\widetilde{\sigma}_n=\sum\limits_{\tau_n\leqslant j\leqslant\theta_n}\sigma_{n,j}$. Тогда при $n\to\infty$*

$$\widetilde{\sigma}_n=\sigma_n(1-\varepsilon_n),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. *При этом* $\varepsilon_n=O\left(e^{-\omega_n^2/4}\right)$, *если* $\omega_n\leqslant\sqrt{\alpha_n}$, *и* $\varepsilon_n=O\left(\omega_n^{-1}e^{-\omega_n^2/2}\right)$, *если* $\omega_n=o\left((\alpha_n)^{1/6}\right)$.

Пусть функционал $\pi\colon 2^X\to(0;1]$ удовлетворяет следующему условию:

$$\pi(B)\pi(D)\leqslant\pi(B\cup D)\leqslant\pi(B) \tag{1.2.1}$$

при всех $B,D\subseteq X$.

Для функциональной пары $I=(X,f)$ и семейства $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ положим

$$\widetilde{S}(\mathscr{B})=\sum_{A\in C(\mathscr{B})}f(A)\pi(A).$$

В параграфе 1.3 будет введен функционал π, удовлетворяющий условию (1.2.1), а также получены асимптотические формулы, выражающие суммы $\widetilde{S}(\mathscr{B})$ через суммы вида $\alpha^\nu(\mathscr{B})$. В дальнейшем для нахождения асимптотики сумм $S(\mathscr{B})$ необходимо получить оценку функционала π. Теорема 1.2.2 дает возможность при оценке $\pi(B)$ ограничиться рассмотрением только тех множеств B, у которых количество компонент мало отличается от $\alpha^1(\mathscr{B})$. При выполнении некоторых условий это позволяет получить асимптотические формулы для сумм граничных функционалов, имеющих характеристику 3 (см. параграф 1.4).

Через $\eta(A)$ обозначается число компонент связности множества $A\subseteq X$. Для функциональной пары $I=(X,f)$, семейства $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ и натурального k положим

$$C_k(\mathscr{B})=\left\{F\in C(\mathscr{B})\colon\ \eta(F)=k\right\},$$

$$\mathscr{B}_{\overline{A}}=\left\{B\in\mathscr{B}:\ A\parallel B\right\}.$$

Лемма 1.2.1. *Пусть даны функциональная пара* $I=(X,f)$ *и функционал* π. *Тогда для любого семейства* $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ *и целого числа* $k\geqslant 0$ *выполнено*

$$(k+1)\sum_{A\in C_{k+1}(\mathscr{B})}f(A)\pi(A)=\sum_{B\in C_k(\mathscr{B})}f(B)\sum_{D\in\mathscr{B}_{\overline{B}}}f(D)\pi(B\cup D). \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Правая часть равенства (1.2.2) равна сумме произведений $f(B)f(D)\pi(B\cup D)$ по всем упорядоченным парам (B,D) таким, что $B\in C_k(\mathscr{B})$, $D\in\mathscr{B}_{\overline{B}}$.

Для каждой такой пары множество $A=B\cup D$ принадлежит семейству $C_{k+1}(\mathscr{B})$. При этом $f(A)\pi(A)=f(B\cup D)\pi(B\cup D)=f(B)f(D)\pi(B\cup D)$. Таким образом, каждая пара (B,D) определяет множество $A\in C_{k+1}(\mathscr{B})$, причем каждое множество A порождается $k+1$ раз. Отсюда следует (1.2.2).

Пусть $I=(X,f)$ — функциональная пара, $A\subseteq X$, $\mathscr{N}\subseteq 2^X$. Через $\eta_{\mathscr{N}}(A)$ обозначим *число компонент* множества A, принадлежащих семейству $\mathscr{N}$. Если k натуральное, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$, то положим

$$C_k(\mathscr{B}|\mathscr{N})=\left\{A\in C(\mathscr{B})\colon\ \eta_{\mathscr{N}}(A)=k\right\},$$

$$C_{\widehat{k}}(\mathscr{B}|\mathscr{N})=\bigcup_{j\leqslant k}C_j(\mathscr{B}|\mathscr{N}).$$

Лемма 1.2.2. *Пусть* $I=(X,f)$ *— функциональная пара, функционал* π *удовлетворяет условию* (1.2.1), $\mathscr{B}_1\subseteq\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$, $\alpha_1=\alpha^1(\mathscr{B}_1)$, $\mathscr{N}\subseteq 2^X$, $\mathscr{N}\cap\mathscr{B}_1=\varnothing$, θ *— натуральное число. Положим*

$$\sigma_k(\mathscr{B}_1)=\sum_{B\in C_k(\mathscr{B}|\mathscr{B}_1)\cap C_{\widehat{\theta}}(\mathscr{B}|\mathscr{N})}f(B)\pi(B). \tag{1.2.3}$$

Тогда последовательность $\{\sigma_k(\mathscr{B}_1)\}_{k=0}^{\infty}$ *является* α_1*-ограниченной.*

Доказательство. Из (1.2.1) и (1.2.2) получаем

$$
\begin{aligned}
(k+1) \sum_{B \in C_{k+1}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_1) \cap C_{\widehat{\theta}}(\mathscr{B}|\mathscr{N})} f(B)\pi(B) = \\
= \sum_{B \in C_k(\mathscr{B}|\mathscr{B}_1) \cap C_{\widehat{\theta}}(\mathscr{B}|\mathscr{N})} f(B) \sum_{C \in \mathscr{B}_{1\overline{B}}} f(C)\pi(B \cup D) \leqslant \\
\leqslant \sum_{B \in C_k(\mathscr{B}|\mathscr{B}_1) \cap C_{\widehat{\theta}}(\mathscr{B}|\mathscr{N})} f(B)\pi(B) \sum_{C \in \mathscr{B}_{1\overline{B}}} f(C) \leqslant \\
\leqslant \alpha^1(\mathscr{B}_1) \sum_{B \in C_k(\mathscr{B}|\mathscr{B}_1) \cap C_{\widehat{\theta}}(\mathscr{B}|\mathscr{N})} f(B)\pi(B).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует (1.2.3).

Теорема 1.2.3. *Пусть* $I=(X,f)$ *— функциональная пара, функционал* π *удовлетворяет условию* (1.2.1), $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$, l *— натуральное число. Пусть также*

$$\mathscr{B} = \bigcup_{1 \leqslant t \leqslant l} \mathscr{B}_t, \qquad \mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_j = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad \alpha_t = \alpha^1(\mathscr{B}_t) \to \infty.$$

Положим $\theta_t = \alpha_t + \alpha_t^{9/14}$, $\widehat{C}(\mathscr{B}) = \bigcap_{1 \leqslant t \leqslant l} C_{\widehat{\theta}_t}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_t)$. *Тогда*

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(\sum_{t=1}^{l} \alpha_t^{-1/7} e^{-\alpha_t^{2/7}/2}\right)\right) \sum_{B \in \widehat{C}(\mathscr{B})} f(B)\pi(B). \tag{1.2.4}$$

Доказательство. Из леммы 1.2.2 следует, что для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant l$, последовательность

$$\sigma_k(\mathscr{B}_t) = \sum_{B \in C_k(\mathscr{B}|\mathscr{B}_t) \cap \widehat{C}(\mathscr{B})} f(B)\pi(B)$$

является α_t-ограниченной. Теперь утверждение вытекает из следствия 1.2.1.

Следствие 1.2.2. *Пусть* $I=(X,f)$ *— функциональная пара,* $\mathscr{B}_1 \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$, l *— натуральное число. Пусть также*

$$\mathscr{B} = \bigcup_{1 \leqslant t \leqslant l} \mathscr{B}_t, \qquad \mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_j = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad \alpha_t = \alpha^1(\mathscr{B}_t) \to \infty.$$

Положим $\theta_t = \alpha_t + \alpha_t^{9/14}$, $\widehat{C}(\mathscr{B}) = \bigcap_{1 \leqslant t \leqslant l} C_{\widehat{\theta}_t}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_t)$. *Тогда*

$$S(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(\sum_{t=1}^{l} \alpha_t^{-1/7} e^{-\alpha_t^{2/7}/2}\right)\right) \sum_{B \in \widehat{C}(\mathscr{B})} f(B).$$

Доказательство. Заметим, что по определению

$$S(\mathscr{B}) = \sum_{B \in C(\mathscr{B})} f(B) \cdot 1.$$

Функционал $\pi(B) \equiv 1$, очевидно, удовлетворяет условию (1.2.1).

§ 1.3. Отношения между суммами граничных функционалов

В этом параграфе введен функционал специального вида π и получены асимптотические формулы для сумм $\widetilde{S}(\mathscr{B})$ (теоремы 1.3.3, 1.3.4) в тех случаях, когда выполнены условия типа

$$\alpha^{\nu}(\mathscr{B}^{(r)}) = o(1).$$

Для дальнейшей оценки сумм $S(\mathscr{B})$ необходимо получить асимптотику функционала π. Отметим, что значение функционала π асимптотически равно 1, если выполнены условия теоремы 1.3.3, тем самым, задача об оценке сумм $S(\mathscr{B})$ окончательно решена для функционалов с характеристикой 2. В параграфе 1.4 будет получена оценка π для функционалов с характеристикой 3.

Нам понадобятся обобщения введенных ранее сумм на случай семейств подмножеств.

Пусть $I=(X, f)$ — функциональная пара, введем понятие *семейства ранга r над X*. Произвольное подмножество $A \subseteq X$ называется *семейством ранга* 1. Если $A_1, \ldots, A_s$ — различные семейства ранга r, то $F=\{A_1, \ldots, A_s\}$ называется *семейством ранга* $r+1$. Семейства $A_1, \ldots, A_s$ называются *элементами* семейства F. Множество всех семейств ранга r над X обозначается через $X^{(r)}$.

Для произвольного семейства F ранга r по индукции определены величины $|F|$ — *мощность семейства* F, $\|F\|$ — *мультимощность семейства* F, $f(F)$ — *значение функционала на семействе* F и множество $\langle F\rangle$ — *основа семейства* F. Если F — семейство ранга 1, т.е. $F \subseteq X$, то $\|F\| = |F|$, где $|F|$ — число элементов множества F, $f(F)$ определяется функциональной парой $I=(X, f)$, а $\langle F\rangle = F$. Пусть для некоторого $r \geqslant 1$ эти величины и множество определены, и пусть $F=\{A_1, \ldots, A_s\}$ — семейство ранга $r+1$. Тогда

$$|F| = s, \quad \|F\| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \|A_i\|, \quad f(F) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} f(A_i), \quad \langle F\rangle = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} \langle A_i\rangle.$$

Введем понятие *связного семейства ранга* r. Пусть $I=(X, f)$ — функциональная пара. Для семейств ранга 1 связность определена ранее. Семейство $F=\{A_1, \ldots, A_s\}$ ранга $r>1$ называется *связным*, если каждое из A_i, $i=1, \ldots, s$, является связным семейством ранга $r-1$ и $\langle F\rangle \in \mathscr{A}(I)$. Множество всех связных семейств ранга r обозначается через $\mathscr{A}^{(r)}(I)$. По определению $\mathscr{A}^{(1)}(I) = \mathscr{A}(I)$.

Для произвольного подсемейства $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$ определено *семейство $\mathscr{B}^{(r)}$ связных подмножеств ранга r, порожденное множеством* $\mathscr{B}$. Положим $\mathscr{B}^{(1)} = \mathscr{B}$. Если $\mathscr{B}^{(r-1)}$ определено, то

$$\mathscr{B}^{(r)} = 2^{\mathscr{B}^{(r-1)}} \cap \mathscr{A}^{(r)}(I).$$

Подсемейство B семейства F ранга r называется *компонентой связности семейства* F (обозначение $B \vdash F$), если $B \in \mathscr{A}^{(r)}(I)$ и $\langle B\rangle$ — компонента связности множества $\langle F\rangle$. Через $\eta(F)$, как и раньше, обозначается число компонент связности семейства F.

Пусть $I=(X, f)$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}^{(r)}(I)$. По аналогии со случаем $r=1$ полагаем

$$\alpha^{\nu}(\mathscr{B}) = \sum_{A \in \mathscr{B}} f^{\nu}(A),$$

$$C(\mathscr{B}) = \bigl\{F \subseteq X^{(r)}:\ A \vdash F \ \Rightarrow\ A \in \mathscr{B}\bigr\},$$

$$C_j(\mathscr{B}) = \bigl\{F \in C(\mathscr{B}):\ \eta(F) = j\bigr\},$$

$$S(\mathscr{B}) = \sum_{A \in C(\mathscr{B})} f(A), \qquad S_k(\mathscr{B}) = \sum_{A \in C_k(\mathscr{B})} f(A).$$

Если $\mathcal{B} \subseteq X^{(r)}$, $B \in X^{(s)}$, $r, s \geqslant 1$, то положим

$$\mathcal{B}_B = \left\{A \in \mathcal{B} : \langle A\rangle \# \langle B\rangle\right\}, \quad \mathcal{B}_{\overline{B}} = \left\{A \in \mathcal{B} : \langle A\rangle \parallel \langle B\rangle\right\}.$$

Далее доказываются некоторые соотношения между суммами граничных функционалов разных типов.

Л е м м а 1.3.1 [10]. *Для любой функциональной пары $I = (X, f)$, любого натурального r и любого $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{(r)}(I)$ справедливо неравенство*

$$S(\mathcal{B}) \leqslant \exp\left\{\alpha^1(\mathcal{B})\right\}. \tag{1.3.1}$$

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{B}^{(r-1)}$, через $\mathcal{D}'$ обозначим семейство $\mathcal{B}^{(r)}$.

Т е о р е м а 1.3.1. *Пусть функциональная пара $I = (X, f)$, натуральное r и подсемейство $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{(r)}(I)$ таковы, что для некоторых положительных чисел ψ и δ выполняются неравенства*

$$\alpha^1(\mathcal{B}') \leqslant \psi, \tag{1.3.2}$$

$$\alpha^2(\mathcal{B}) \leqslant \delta. \tag{1.3.3}$$

Тогда

$$\exp\left\{\alpha^1(\mathcal{B}) - \psi - \frac{\delta}{2}\right\} \leqslant S(\mathcal{B}) \leqslant \exp\left\{\alpha^1(\mathcal{B})\right\}. \tag{1.3.4}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1 из статьи [10] для случая $r = 1$.

Л е м м а 1.3.2 [10]. *Для любой функциональной пары $I = (X, f)$, любого натурального числа r и любого $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{(r)}(I)$ выполнено*

$$\prod_{A \in \mathcal{B}} \bigl(1 + f(A)\bigr) = \sum_{B \in C(\mathcal{B})} f(B) \sum_{D \in C(\mathcal{B}'_{\overline{B}})} f(D).$$

Т е о р е м а 1.3.2. *Пусть функциональная пара $I = (X, f)$ и подсемейство $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ таковы, что для положительных чисел λ и ζ выполняется*

$$\alpha^1(\mathcal{B}^{(3)}) \leqslant \lambda, \tag{1.3.5}$$

$$\alpha^2(\mathcal{B}^{(2)}) \leqslant \zeta. \tag{1.3.6}$$

Тогда

$$\exp\left\{-\alpha^1(\mathcal{B}^{(2)})\right\} \prod_{A \in \mathcal{B}} \bigl(1 + f(A)\bigr) \leqslant \sum_{B \in C(\mathcal{B})} f(B) \exp\left\{-\alpha^1\bigl(\mathcal{B}^{(2)}_B\bigr)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}) + \lambda + \frac{\zeta}{2}\right\} \prod_{A \in \mathcal{B}} \bigl(1 + f(A)\bigr).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1.3.2 имеем

$$\prod_{A \in \mathcal{B}} \bigl(1 + f(A)\bigr) = \sum_{B \in C(\mathcal{B})} f(B) \sum_{D \in C(\mathcal{B}^{(2)}_{\overline{B}})} f(D). \tag{1.3.7}$$

Поскольку $\mathcal{B}^{(2)}_{\overline{B}} \subseteq \mathcal{B}^{(2)}$, из теоремы 1.3.1 при $r = 2$, $\psi = \lambda$ и $\delta = \zeta$ следует, что

$$\exp\left\{\alpha^1\bigl(\mathcal{B}^{(2)}_{\overline{B}}\bigr) - \lambda - \frac{\zeta}{2}\right\} \leqslant \sum_{D \in C(\mathcal{B}^{(2)}_{\overline{B}})} f(D) \leqslant \exp\left\{\alpha^1\bigl(\mathcal{B}^{(2)}_{\overline{B}}\bigr)\right\}. \tag{1.3.8}$$

Заметим что

$$\alpha^1\bigl(\mathcal{B}^{(2)}_{\overline{B}}\bigr) = \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}) - \alpha^1\bigl(\mathcal{B}^{(2)}_B\bigr). \tag{1.3.9}$$

Теперь из (1.3.7) − (1.3.9) следует утверждение теоремы.

Везде в дальнейшем будем рассматривать функционал $\pi(B) = \exp\left\{-\alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right)\right\}$. Положим

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \sum_{B \in C(\mathscr{B})} f(B)\pi(B), \qquad \widetilde{S}_k(\mathscr{B}) = \sum_{B \in C_k(\mathscr{B})} f(B)\pi(B).$$

Теперь для получения асимптотики сумм $S(\mathscr{B})$ необходимо получить асимптотики сумм $\widetilde{S}(\mathscr{B})$ и оценки функционала π.

Лемма 1.3.3. *Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$. Тогда функционал $\pi(B) = \exp\left\{-\alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right)\right\}$ удовлетворяет условию* (1.2.1).

Доказательство. Пусть $B, D \subseteq X$, утверждение следует из определения функционала π и из того, что

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right) \leqslant \alpha^1\left(\mathscr{B}_{B\cup D}^{(2)}\right) = \alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right) + \alpha^1\left(\mathscr{B}_D^{(2)}\right) - \alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)} \cap \mathscr{B}_D^{(2)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right) + \alpha^1\left(\mathscr{B}_D^{(2)}\right).$$

Следствие 1.3.1. *Пусть для функциональной пары $I = (X, f)$, подсемейства $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$ и положительных чисел ψ, δ выполнены неравенства* (1.3.2) *и* (1.3.3). *Тогда*

$$\exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B}) - 2\psi - \frac{\delta}{2}\right\} \leqslant \widetilde{S}(\mathscr{B}) \leqslant \exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B})\right\}. \tag{1.3.10}$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1.3.1 с $r = 1$ и того, что

$$S(\mathscr{B}) \exp\left\{-\alpha^1(\mathscr{B}^{(2)})\right\} \leqslant \widetilde{S}(\mathscr{B}) \leqslant S(\mathscr{B}).$$

Теорема 1.3.3. *Пусть даны функциональная пара $I = (X, f)$, семейство $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$ и натуральное число l. Кроме того, пусть $\mathscr{B} = \bigcup_{1 \leqslant t \leqslant l} \mathscr{B}_t$, $\mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, и $\alpha_t = \alpha^1(\mathscr{B}_t) \to \infty$. Положим $\theta_t = \alpha_t + \alpha_t^{9/14}$, $\widehat{C}(\mathscr{B}) = \bigcap_{1 \leqslant t \leqslant l} C_{\widehat{\theta}_t}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_t)$. Пусть также для положительных чисел λ и ζ выполняются неравенства* (1.3.5), (1.3.6) *и для некоторых положительных γ и φ выполнено*

$$\max_{A \in \widehat{C}(\mathscr{B})} \alpha^1\left(\mathscr{B}_A^{(2)}\right) \leqslant \gamma, \tag{1.3.11}$$

$$\alpha^3(\mathscr{B}) \leqslant \varphi. \tag{1.3.12}$$

Тогда

$$\exp\left\{\mu_2(\mathscr{B})\right\} \leqslant S(\mathscr{B}) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + O(\alpha_1^{-1/7} e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7} e^{-\alpha_2^{2/7}/2})\right) \exp\left\{\mu_2(\mathscr{B}) + \lambda + \frac{\zeta}{2} + \frac{\varphi}{3} + \gamma\right\}, \tag{1.3.13}$$

где $\mu_2(\mathscr{B}) = \alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) - \alpha^1(\mathscr{B}^{(2)})$.

Доказательство. С использованием неравенства

$$\ln(1+x) \leqslant x - x^2/2 + x^3/3$$

при $x > 0$ и условия (1.3.12) получаем

$$\prod_{A\in\mathscr{B}}\bigl(1+f(A)\bigr) = \exp\left\{\sum_{A\in\mathscr{B}}\ln\bigl(1+f(A)\bigr)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\sum_{A\in\mathscr{B}}\left(f(A) - \frac{1}{2}f^2(A) + \frac{1}{3}f^3(A)\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B})\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \frac{\varphi}{3}\right\}. \qquad (1.3.14)$$

С другой стороны, из неравенства $x - x^2/2 \leqslant \ln(1+x)$ при $x > 0$ следует, что

$$\exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B})\right\} \leqslant \prod_{A\in\mathscr{B}}\bigl(1+f(A)\bigr). \qquad (1.3.15)$$

Из (1.3.14), (1.3.15) и теоремы 1.3.2 вытекает неравенство

$$\exp\{\mu_2(\mathscr{B})\} \leqslant \sum_{B\in C(\mathscr{B})} f(B)\pi(B) = \widetilde{S}(\mathscr{B}) \leqslant \exp\left\{\mu_2(\mathscr{B}) + \lambda + \frac{\zeta}{2} + \frac{\varphi}{3}\right\}. \qquad (1.3.16)$$

Поскольку $1 \leqslant \bigl(\pi(B)\bigr)^{-1}$, то из первого неравенства (1.3.16) следует, что

$$\exp\{\mu_2(\mathscr{B})\} \leqslant S(\mathscr{B}). \qquad (1.3.17)$$

В силу (1.3.11) для всякого $B \in \widehat{C}(\mathscr{B})$ справедливо неравенство

$$\bigl(\pi(B)\bigr)^{-1} = \exp\bigl\{\alpha^1\bigl(\mathscr{B}_B^{(2)}\bigr)\bigr\} \leqslant e^{\gamma}. \qquad (1.3.18)$$

Из следствия 1.2.2, второго неравенства (1.3.16) и (1.3.18) имеем

$$S(\mathscr{B}) \leqslant \Bigl(1 + O\bigl(\alpha_1^{-1/7}e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7}e^{-\alpha_2^{2/7}/2}\bigr)\Bigr)\sum_{B\in\widehat{C}(\mathscr{B})} f(B) \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl(1 + O\bigl(\alpha_1^{-1/7}e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7}e^{-\alpha_2^{2/7}/2}\bigr)\Bigr)\sum_{B\in\widehat{C}(\mathscr{B})} f(B)\pi(B)\bigl(\pi(B)\bigr)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl(1 + O\bigl(\alpha_1^{-1/7}e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7}e^{-\alpha_2^{2/7}/2}\bigr)\Bigr)\sum_{B\in\widehat{C}(\mathscr{B})} e^{\gamma} f(B)\pi(B) \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl(1 + O\bigl(\alpha_1^{-1/7}e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7}e^{-\alpha_2^{2/7}/2}\bigr)\Bigr)\exp\left\{\mu_2(\mathscr{B}) + \lambda + \frac{\zeta}{2} + \frac{\varphi}{3} + \gamma\right\}. \qquad (1.3.19)$$

Из (1.3.17) и (1.3.19) вытекает (1.3.13).

Теорема 1.3.4. *Пусть даны функциональная пара $I = (X, f)$ и подсемейство $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$. Пусть для положительных λ и ζ выполняются неравенства* (1.3.5), (1.3.6) *и для положительного ξ выполнено*

$$\alpha^4(\mathscr{B}) \leqslant \xi. \qquad (1.3.20)$$

Тогда

$$\exp\left\{\mu_3(\mathscr{B}) - \frac{\xi}{4}\right\} \leqslant \widetilde{S}(\mathscr{B}) \leqslant \exp\left\{\mu_3(\mathscr{B}) + \lambda + \frac{\zeta}{2}\right\}, \qquad (1.3.21)$$

где $\mu_3(\mathscr{B}) = \alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B}) - \alpha^1(\mathscr{B}^{(2)})$.

Доказательство. С использованием неравенства

$$\ln(1+x) \geqslant x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4$$

при $x > 0$ и условия (1.3.20) получаем

$$\prod_{A\in\mathscr{B}}\bigl(1+f(A)\bigr) = \exp\Bigl\{\sum_{A\in\mathscr{B}}\ln\bigl(1+f(A)\bigr)\Bigr\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\Bigl\{\sum_{A\in\mathscr{B}}\Bigl(f(A) - \tfrac{1}{2}f^2(A) + \tfrac{1}{3}f^3(A) - \tfrac{1}{4}f^4(A)\Bigr)\Bigr\} =$$

$$= \exp\Bigl\{\alpha^1(\mathscr{B}) - \tfrac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \tfrac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B}) - \tfrac{1}{4}\alpha^4(\mathscr{B})\Bigr\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\Bigl\{\alpha^1(\mathscr{B}) - \tfrac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \tfrac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B}) - \tfrac{\xi}{4}\Bigr\}. \quad (1.3.22)$$

С другой стороны, из неравенства $x - x^2/2 + x^3/3 \geqslant \ln(1+x)$ при $x > 0$ следует, что

$$\exp\Bigl\{\alpha^1(\mathscr{B}) - \tfrac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \tfrac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B})\Bigr\} \geqslant \prod_{A\in\mathscr{B}}\bigl(1+f(A)\bigr). \quad (1.3.23)$$

Из (1.3.22), (1.3.23) и теоремы 1.3.2 вытекает (1.3.21).

§ 1.4. Оценки сумм $S(\mathscr{B})$ для ординарных функциональных пар

В [10] определен класс так называемых *ординарных* функциональных пар, для которых условия теорем 1.3.1 − 1.3.4 выполняются автоматически, и с использованием аналога теоремы 1.3.3 получены асимптотические формулы для сумм $S(\mathscr{B})$ в случае $(2, \varkappa, q, c)$-ординарных функциональных пар. В данном параграфе получены асимптотические формулы для сумм $\widetilde{S}(\mathscr{B})$ (теорема 1.4.1), а также оценки функционала π (теорема 1.4.2, лемма 1.4.14) для регулярных семейств в случае $(3, \varkappa, q, c)$-ординарных функциональных пар. Результатом является асимптотика сумм $S(\mathscr{B})$ (теорема 1.4.3).

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $B \subseteq X$, $m \geqslant 0$ целое, положим

$$\mathscr{A}_{B,\widehat{m}}(I) = \bigl\{A \in \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I) : A \# B\bigr\}.$$

Функциональная пара $I = (X, f)$ называется $(\Delta, \varkappa, q, c)$-*ординарной* *), если

1) Δ — наименьшее целое такое, что

$$|X| \leqslant 2^{(\Delta+1)\varkappa - 2\log_2^2\varkappa}, \quad (1.4.1)$$

2) для всякого $v \in X$

$$f\bigl(\{v\}\bigr) \leqslant 2^{-\varkappa}, \quad (1.4.2)$$

3) для любых $A \subseteq X$ и $v \in A$

$$f(A) \leqslant f\bigl(A \setminus \{v\}\bigr)\, f\bigl(\{v\}\bigr)\, 2^{(|A|-1)q}, \quad (1.4.3)$$

4) для всякого $v \in X$ и любого натурального числа m

$$\bigl|\mathscr{A}_{\{v\},\widehat{m}}(I)\bigr| \leqslant \varkappa^{cm}. \quad (1.4.4)$$

---

*) Везде в дальнейшем Δ, q — натуральные числа, $c \geqslant 1$.

Как и ранее, для получения асимптотики сумм $S(\mathscr{B})$ мы имеем дело с последовательностью функциональных пар $\{I_n = (X_n, f_n)\}_{n=1}^{\infty}$, считаем, что $\varkappa = \varkappa(n)$ и $\varkappa \to \infty$ при $n \to \infty$. Индексы n в дальнейшем опускаем.

Если какие-либо из неравенств (1.4.1) − (1.4.4) могут не выполняться для функциональной пары $I = (X, f)$, то в соответствующих координатах ставятся прочерки. Например, если для функциональной пары $I = (X, f)$ выполнены неравенства (1.4.2) и (1.4.3), но, быть может, не выполнены неравенства (1.4.1), (1.4.4), то такая пара называется $(-, \varkappa, q, -)$-ординарной.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.4.1 [10]. *Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \varkappa, q, -)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$ и $A \in C(\mathscr{B})$. Тогда*

$$f(A) \leqslant 2^{-|A|(\varkappa - q(m-1)/2)}. \tag{1.4.5}$$

Для функциональной пары $I = (X, f)$ натурального r, $B \subseteq X$ и $\mathscr{B} \subseteq \subseteq \mathscr{A}(I)$, положим

$$\mathscr{B}_{[j]}^{(r)} = \left\{F \in \mathscr{B}^{(r)} : \|F\| = j\right\}, \quad \mathscr{B}_{B,[j]}^{(r)} = \mathscr{B}_{[j]}^{(r)} \cap \mathscr{B}_B^{(r)}.$$

Лемма 1.4.2 [10]. *Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $v \in X$ и $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$. Тогда для всех натуральных ν, r, j*

$$\alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{\{v\},[j]}^{(r)}\right) \leqslant 8^{(r-1)j} \varkappa^{crj}\, 2^{-j(\varkappa - q(m-1)/2)\nu}. \tag{1.4.6}$$

Следствие 1.4.1 [10]. *Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $B \subseteq X$ и $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$. Тогда для всех натуральных ν, r, j*

$$\alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{B,[j]}^{(r)}\right) \leqslant |B| 8^{(r-1)j} \varkappa^{crj}\, 2^{-j(\varkappa - q(m-1)/2)\nu}. \tag{1.4.7}$$

Лемма 1.4.3 [10]. *Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, ν, r, j — произвольные фиксированные натуральные числа, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$, $m \leqslant \lceil \varkappa/(2q) \rceil$. Тогда при $j \leqslant \frac{1}{3cr} \log_2 \varkappa$*

$$\alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(r)}\right) \leqslant 2^{-(\nu j - (\Delta+1))\varkappa - \frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa} \tag{1.4.8}$$

и при $j > \frac{1}{3cr} \log_2 \varkappa$

$$\alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(r)}\right) \leqslant 2^{-\nu\varkappa j/2} \tag{1.4.9}$$

Следствие 1.4.2. *Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, ν, r — произвольные фиксированные натуральные числа, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$, $m \leqslant \lceil \varkappa/(2q) \rceil$, $s \geqslant (\Delta+1)/\nu$. Тогда*

$$\sum_{j \geqslant s} \alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(r)}\right) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa}. \tag{1.4.10}$$

Доказательство. Положим $j_0 = \frac{1}{3cr} \log_2 \varkappa$. Тогда из (1.4.8), (1.4.9) следует, что

$$\sum_{j \geqslant s} \alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(r)}\right) = \sum_{s \leqslant j \leqslant j_0} \alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(r)}\right) + \sum_{j > j_0} \alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(r)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s \leqslant j \leqslant j_0} 2^{-(\nu j - (\Delta+1))\varkappa - \frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa} + \sum_{j > j_0} 2^{-\nu\varkappa j/2} \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa}.$$

1.4.1. Оценки сумм $\widetilde{S}(\mathscr{B})$ для ординарных функциональных пар. Здесь получены оценки сумм $\widetilde{S}(\mathscr{B})$ для $(3, \varkappa, q, c)$-ординарных функциональных пар.

Лемма 1.4.4. *Пусть $I=(X, f)$ является $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $r_0=\lceil \varkappa/(2q)\rceil$, $\mathscr{B}\subseteq \mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$. Тогда*

$$\widetilde{S}(\mathscr{B})=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa}\right)\right)\widetilde{S}\left(\mathscr{B}\cap \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I)\right). \tag{1.4.11}$$

Доказательство. Положим $\widehat{\mathscr{B}}=\mathscr{B}\cap\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I)$ и $\overline{\mathscr{B}}=\mathscr{B}\setminus\widehat{\mathscr{B}}$. С использованием (1.3.1), (1.2.1), (1.4.8) и (1.4.9) с $r=1$, $\nu=1$ имеем

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S}(\widehat{\mathscr{B}})\leqslant \widetilde{S}(\mathscr{B})=\widetilde{S}(\widehat{B}\cup\overline{\mathscr{B}})=\\
&\quad=\sum_{B\in C(\widehat{\mathscr{B}})} f(B)\sum_{D\in C(\overline{\mathscr{B}}_{\overline{B}})} f(D)\pi(B\cup D)\leqslant \sum_{B\in C(\widehat{\mathscr{B}})} f(B)\pi(B)\sum_{D\in C(\overline{\mathscr{B}})} f(D)\leqslant\\
&\qquad\leqslant \widetilde{S}(\widehat{\mathscr{B}})\exp\{\alpha^1(\overline{\mathscr{B}})\}\leqslant\left(1+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa}\right)\right)\widetilde{S}(\widehat{\mathscr{B}}).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1.4.1. *Пусть $I=(X, f)$ является $(3, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$. Тогда*

$$\widetilde{S}(\mathscr{B})=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa}\right)\right)\exp\{\mu_3(\mathscr{B})\}, \tag{1.4.12}$$

где

$$\mu_3(\mathscr{B})=\alpha^1(\mathscr{B})-\tfrac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B})+\tfrac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B})-\alpha^1(\mathscr{B}^{(2)}).$$

Доказательство. Предположим сначала, что

$$\alpha^1(\mathscr{B})\geqslant 2^{\log_2^2\varkappa}. \tag{1.4.13}$$

Воспользуемся теоремой 1.3.4. Для этого докажем, что условия (1.3.5), (1.3.6) и (1.3.20) выполнены соответственно при $\lambda=\zeta=\xi=2^{-\log_2^2\varkappa}$. Тогда (1.4.12) будет следовать из (1.3.21).

В силу (1.4.10) с $\nu=1$, $r=3$ и $s=4$

$$\alpha^1(\mathscr{B}^{(3)})=\sum_{j\geqslant 4}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(3)}_{[j]}\right)\leqslant 2^{-\log_2^2\varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.5) выполнено при $\lambda=2^{-\log_2^2\varkappa}$.

В силу (1.4.10) с $\nu=2$, $r=2$ и $s=2$

$$\alpha^2(\mathscr{B}^{(2)})=\sum_{j\geqslant 2}\alpha^2\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right)\leqslant 2^{-\log_2^2\varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.6) выполнено при $\zeta=2^{-\log_2^2\varkappa}$.

В силу (1.4.10) с $\nu=4$, $r=1$ и $s=1$

$$\alpha^4(\mathscr{B})=\sum_{j\geqslant 1}\alpha^4(\mathscr{B}_{[j]})\leqslant 2^{-\log_2^2\varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.20) выполнено при $\xi=2^{-\log_2^2\varkappa}$.

Таким образом, условия теоремы 1.3.4 выполнены при указанных значениях параметров λ, ζ и ξ. Теперь из (1.3.21), вытекает (1.4.12), а, значит, утверждение доказано при условии (1.4.13).

Пусть теперь

$$\alpha^1(\mathscr{B})<2^{\log_2^2\varkappa}. \tag{1.4.14}$$

Покажем, что выполнены условия следствия 1.3.1 при соответствующих ψ и δ. Тогда (1.4.12) будет следовать из (1.3.10). Проверим выполнение условия (1.3.2). В силу (1.4.2), (1.4.4) с $m=1$ и (1.4.14) имеем

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[2]}\right) = \sum_{\{u\}\in\mathscr{B}} f\left(\{u\}\right) \sum_{\{v\}\in\mathscr{B}:\ v\# u} f\left(\{v\}\right) \leqslant \alpha^1(\mathscr{B})\varkappa^c\, 2^{-\varkappa} \leqslant \varkappa^c 2^{-\varkappa+\log_2^2\varkappa}. \tag{1.4.15}$$

Аналогично (1.4.15) с использованием (1.4.2) и (1.4.3) получаем, что

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[3]}\right) \leqslant (3\cdot 2^q+1)\varkappa^{2c}2^{-2\varkappa+\log_2^2\varkappa}. \tag{1.4.16}$$

В силу (1.4.15), (1.4.16), а также (1.4.10) при $\nu=1$, $r=2$ и $s=4$ имеем

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}\right) = \sum_{j\geqslant 2}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right) = \sum_{j\geqslant 2}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right) = \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[2]}\right) + \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[3]}\right) + \sum_{j\geqslant 4}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa^c 2^{-\varkappa+\log_2^2\varkappa} + (3\cdot 2^q+1)\varkappa^{2c}2^{-2\varkappa+\log_2^2\varkappa} + 2^{-\log_2^2\varkappa} \leqslant 2\cdot 2^{-\log_2^2\varkappa} \tag{1.4.17}$$

Отсюда вытекает (1.3.2) с $\psi=2\cdot 2^{-\log_2^2\varkappa}$.

Проверим выполнение условия (1.3.3). Для любого $A\in\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$ имеем из (1.4.5)

$$f(A)\leqslant 2^{-|A|(\varkappa-q)}\leqslant 2^{-\varkappa+q},$$

поэтому

$$f^2(A)\leqslant f(A)2^{-\varkappa+q}.$$

С учетом (1.4.14) получаем, что

$$\alpha^2(\mathscr{B}) = \sum_{A\in\mathscr{B}} f^2(A) \leqslant \alpha^1(\mathscr{B})2^{-\varkappa+q} \leqslant 2^{-\varkappa+\log_2^2\varkappa+q}. \tag{1.4.18}$$

Отсюда вытекает справедливость условия (1.3.3) с $\delta=2^{-\varkappa+\log_2^2\varkappa+q}$. Теперь из (1.3.10) при соответствующих ψ и δ получаем

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \left(1+O\left(2\cdot 2^{-\log_2^2\varkappa}\right)\right)\exp\{\alpha^1(\mathscr{B})\} =$$

$$= \left(1+O\left(2\cdot 2^{-\log_2^2\varkappa}\right)\right)\exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B}) - \alpha^1(\mathscr{B}^{(2)})\right\}.$$

Утвержение доказано при условии (1.4.14).

Лемма доказана.

Пусть $I=(X,f)$ — функциональная пара, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$, положим для краткости

$$\mathscr{B}^{(2)}_{[2,3]} = \mathscr{B}^{(2)}_{[2]}\cup\mathscr{B}^{(2)}_{[3]},$$

а также

$$\mu_{\widehat{3}}(\mathscr{B}) = \alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B}) - \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[2,3]}\right).$$

С л е д с т в и е 1.4.3. *Пусть* $I=(X,f)$ *является* $(3,\varkappa,q,c)$*-ординарной функциональной парой,* $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$. *Тогда*

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \left(1+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa}\right)\right)\exp\left\{\mu_{\widehat{3}}(\mathscr{B})\right\}. \tag{1.4.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (1.4.10) с $\nu=1$, $r=2$ и $s=4$ имеем

$$\alpha^1(\mathscr{B}^{(2)}) - \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[2,3]}\right) = \sum_{j\geqslant 4}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right) \leqslant 2^{-\log_2^2\varkappa}. \tag{1.4.20}$$

Теперь (1.4.19) следует из (1.4.11) и (1.4.20).

Следствие 1.4.4. *Пусть* $I=(X,f)$ *является* $(3,\varkappa,q,c)$*-ординарной функциональной парой,* $r_0=\lceil \varkappa/(2q)\rceil$, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$, $\widehat{\mathscr{B}}=\mathscr{B}\cap\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$. *Тогда*

$$\widetilde{S}(\mathscr{B})=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa}\right)\right)\exp\left\{\mu_{\widehat{3}}(\widehat{\mathscr{B}})\right\}.$$

Утверждение вытекает из леммы 1.4.4 при $\Delta=3$ и из (1.4.19).

1.4.2. Оценки сумм $\widetilde{S}(\mathscr{B})$ для семейств d-связных множеств. В предыдущем пункте была получена асимптотика сумм $\widetilde{S}(\mathscr{B})$. Теперь для получения оценок сумм $S(\mathscr{B})$ необходимо найти асимптотическую формулу, выражающую функционал $\pi(B)=\exp\left\{-\alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right)\right\}$ через суммы вида $\alpha^\nu(\mathscr{B}^{(r)})$. В данном пункте получена оценка функционала π для множеств, d-компоненты которых имеют мощность большую 1 (лемма 1.4.13). Это позволит при дальнейшей оценке π ограничиться рассмотрением только тех множеств, компоненты которых имеют мощность 1 и находятся на достаточно большом растоянии друг от друга.

Для графа $G=(X;E)$ через $\rho_G(u,v)$ обозначается расстояние между вершинами u и v. Последовательность $(w_0,w_1,\ldots,w_k)$ называется *d-цепью* длины k, соединяющей u и v, если $u=w_0$, $v=w_k$ и $\rho_G(w_{i-1},w_i)\leqslant d$ при $i=1,2,\ldots,k$. Подмножество $A\subseteq X$ называется *связным с шагом* d, если для любых u, v из A существует d-цепь, состоящая из элементов множества A и соединяющая u и v. Далее для краткости множества связные с шагом d будем называть *d-связным* (не путать с понятием d-связности графа, [13]).

Пусть $I=(X,f)$ — функциональная пара. Через $\mathscr{A}^d(I)$ обозначается семейство всех d-связных подмножеств множества вершин графа G_I, порожденного функциональной парой I. Положим

$$\mathscr{A}_k^d(I)=\left\{A\in\mathscr{A}^d(I)\colon |A|=k\right\},\quad \mathscr{A}_{\widehat{k}}^d(I)=\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{A}_i^d(I).$$

Подмножество $B\subseteq A$ называется *d-компонентой* множества A (обозначение $B\vdash_d A$), если $B\in\mathscr{A}^d(I)$, но ни для какого $D\in\mathscr{A}^d(I)$ неверно, что $B\subset D\subseteq A$. Если $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{A}^d(I)$, то положим

$$C^d(\mathscr{D})=\{A\subseteq X\colon\ B\vdash_d A\ \Rightarrow\ B\in\mathscr{D}\},$$

таким образом, $C^d(\mathscr{D})$ состоит из всех множеств, все d-компоненты которых принадлежат семейству $\mathscr{D}$. Положим также

$$\alpha^{1,d}(\mathscr{D})=\sum_{B\in\mathscr{D}}f(B),$$

$$\widetilde{S}^d(\mathscr{D})=\sum_{B\in C^d(\mathscr{D})}f(B)\pi(B).$$

Через $\eta^d(A)$ обозначается число d-компонент множества A. Для $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{A}^d(I)$ и натурального k положим

$$C_k^d(\mathscr{D})=\left\{A\in C^d(\mathscr{D})\colon\ \eta^d(A)=k\right\},$$

$$C_{\widehat{k}}^d(\mathscr{D})=\bigcup_{j\leqslant k}C_j^d(\mathscr{D}).$$

Для $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ положим

$$\mathscr{B}^{<d,1>}=C(\mathscr{B})\cap\mathscr{A}^d(I).$$

Таким образом, семейство $\mathscr{B}^{<d,1>}$ состоит из всех d-связных множеств, у которых все 1-компоненты принадлежат семейству $\mathscr{B}$. Положим также

$$\mathscr{B}^{<d,1>}_{<-,\Delta>} = \{A \in \mathscr{B}^{<d,1>}\colon B \vdash A \Rightarrow B \in \mathscr{B},\ |B| = \Delta\},$$

$$\mathscr{B}^{<d,1>}_{<-,\widehat{\Delta}>} = \{A \in \mathscr{B}^{<d,1>}\colon B \vdash A \Rightarrow B \in \mathscr{B},\ |B| \leqslant \Delta\},$$

$$\mathscr{B}^{<d,1>}_{<k,->} = \{A \in \mathscr{B}^{<d,1>}\colon |A| = k\},$$

$$\mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{k},->} = \bigcup_{j \leqslant k} \mathscr{B}^{<d,1>}_{<j,->}, \qquad \mathscr{B}^{<d,1>}_{<\overline{k},->} = \mathscr{B}^{<d,1>} \setminus \mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{k},->},$$

$$\mathscr{B}^{<d,1>}_{<k,\Delta>} = \mathscr{B}^{<d,1>}_{<-,\Delta>} \cap \mathscr{B}^{<d,1>}_{<k,->}.$$

Для $v \in X$, положим

$$\mathscr{A}^{d}_{\{v\},j}(I) = \{A \in \mathscr{A}^{d}(I)\colon |A| = j,\ A \cup \{v\} \in \mathscr{A}^{d}(I)\}.$$

Из леммы 2.2 из статьи [6] следует

Лемма 1.4.5. *Пусть $\Gamma = (X; E)$ — граф, максикальная степень вершины в котором равна Δ, $u \in X$. Пусть $n_d(\{u\}, a)$ — число всех d-связных множеств $A \subseteq X$ таких, что $|A| = a$ и $u \in A$. Тогда*

$$n_d(\{u\}, a) \leqslant (4\Delta^d)^{a-1}.$$

Лемма 1.4.6. *Пусть функциональная пара $I = (X, f)$ такова, что для всякого $v \in X$, всякого натурального m и некоторого натурального c выполнено*

$$\left|\mathscr{A}_{\{v\},\widehat{m}}(I)\right| \leqslant \varkappa^{cm}, \tag{1.4.21}$$

тогда для всех натуральных d и j справедливо

$$\left|\mathscr{A}^{d}_{\{v\},j}(I)\right| \leqslant (4\varkappa^{cd})^{j}.$$

Доказательство. Из включения $B \in \mathscr{A}^{d}_{\{v\},j}(I)$ следует, что множество B является d-связным, и что существует вершина $u \in B$ такая, что $\rho_{G_I}(u, v) \leqslant d$. Для выбора множества $B \in \mathscr{A}^{d}_{\{v\},j}(I)$ достаточно указать вершину $u \in X$ такую, что $\rho_{G_I}(u, v) \leqslant d$, и d-связное множество B такое, что $u \in B$.

Каждая вершина $u \in X$ соединена в графе G_I с вершинами из множества $\mathscr{A}_{\{u\},1}$, из (1.4.21) следует, что число таких вершин не превышает $\varkappa^{c}$. Таким образом, граф G_I удовлетворяет условию леммы 1.4.5 с $\Delta = \varkappa^{c}$, и, следовательно,

$$n_d(\{u\}, j) \leqslant (4\varkappa^{cd})^{j-1}.$$

Для заданной вершины v вершину $u \in X$ такую, что $\rho_{G_I}(u, v) \leqslant d$, можно выбрать не более, чем $4\varkappa^{dc}$ способами, следовательно,

$$\left|\mathscr{A}^{d}_{\{v\},j}(I)\right| \leqslant 4\varkappa^{cd}(4\varkappa^{cd})^{j-1} = (4\varkappa^{cd})^{j}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4.7. *Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой d — натуральное, $m \leqslant \lceil \varkappa/(2q) \rceil$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$. Тогда*

$$\alpha^{1,d}\left(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<\overline{\Delta},->}\right) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa}. \tag{1.4.22}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.4.3.

Лемма 1.4.8. *Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $r_0 = \lceil \varkappa/(2q) \rceil$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$, d — натуральное. Тогда*

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa}\right)\right) \widetilde{S}^{d}\left(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},\widehat{\Delta}>}\right).$$

Доказательство. Поскольку

$$C(\mathscr{B}) = C^d\big(C(\mathscr{B}) \cap \mathscr{A}^d(I)\big) = C^d(\mathscr{B}^{<d,1>}),$$

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \widetilde{S}^d(\mathscr{B}^{<d,1>}).$$

Из определения следует, что

$$\mathscr{B}^{<d,1>} = \mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},->} \cup \mathscr{B}^{<\underline{d},1>}_{<\overline{\Delta},->} = \mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},\widehat{\Delta}>} \cup \mathscr{B}^{<\underline{d},1>}_{<\overline{\Delta},->}.$$

Аналогично доказательству леммы 1.4.4 получаем с использованием (1.4.22)

$$\widetilde{S}^d\Big(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},\widehat{\Delta}>}\Big) \leqslant \widetilde{S}(\mathscr{B}) = \widetilde{S}^d(\mathscr{B}^{<d,1>}) = \widetilde{S}^d\Big(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},\widehat{\Delta}>} \cup \mathscr{B}^{<\underline{d},1>}_{<\overline{\Delta},->}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{S}^d\Big(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},\widehat{\Delta}>}\Big) \exp\Big\{\alpha^{1,d}\Big(\mathscr{B}^{<\underline{d},1>}_{<\overline{\Delta},->}\Big)\Big\} \leqslant \Big(1 + O\big(2^{-\log_2^2 \varkappa}\big)\Big)\widetilde{S}^d\Big(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},\widehat{\Delta}>}\Big).$$

Лемма доказана.

Для $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}^d(I)$, целого j и $A \subseteq X$ положим

$$\mathscr{D}_{[j]} = \{B \in \mathscr{D}\colon\ |B| = j\},$$

$$\mathscr{D}_A = \big\{C \in \mathscr{D}\colon\ (A \cup C) \in \mathscr{A}^d(I)\big\}, \qquad \mathscr{D}_{\overline{A}} = \mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_A,$$

Пусть $A \subseteq X$, $\mathscr{M} \subseteq 2^X$. Через $\eta^d_{\mathscr{M}}(A)$ обозначим *число d-компонент* множества A, принадлежащих семейству $\mathscr{M}$. Если j натуральное, $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}^d(I)$, то положим

$$C^d_j(\mathscr{D}|\mathscr{M}) = \big\{A \in C^d(\mathscr{D})\colon\ \eta^d_{\mathscr{M}}(A) = j\big\},$$

$$C^d_{\widehat{j}}(\mathscr{D}|\mathscr{M}) = \bigcup_{k \leqslant j} C^d_k(\mathscr{D}|\mathscr{M}).$$

Для натуральных j, θ и семейств $\mathscr{N}$, $\mathscr{M} \subseteq 2^X$, $\mathscr{N} \cap \mathscr{M} = \varnothing$, положим

$$C^d_{j,\widehat{\theta}}(\mathscr{D}|\mathscr{N}, \mathscr{M}) = C^d_j(\mathscr{D}|\mathscr{N}) \cap C^d_{\widehat{\theta}}(\mathscr{D}|\mathscr{M}).$$

Лемма 1.4.9. *Пусть даны функциональная пара $I = (X, f)$, семейство $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$ и натуральное θ. Пусть также $\mathscr{D}_1 \subseteq \mathscr{D} = \mathscr{B}^{<d,1>}_{<-,->}$, $\mathscr{N} \in 2^X$, $\mathscr{N} \cap \mathscr{D}_1 = \varnothing$. Положим $\alpha = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1)$,*

$$\widetilde{\sigma}^d_j(\mathscr{D}_1) = \widetilde{\sigma}^d_j = \sum_{B \in C^d_{j,\widehat{\theta}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1, \mathscr{N})} f(B)\pi(B).$$

Тогда последовательность $\{\widetilde{\sigma}^d_j\}_{j=0}^{\infty}$ является α-ограниченной.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.2.2.

Лемма 1.4.10. *Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I)$, $\mathscr{D}_1 \subseteq \mathscr{D} \subseteq \mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{\Delta},\widehat{\Delta}>}$, $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_1$, а также*

$$\log_2\big(\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_2)\big) - \log_2\big(\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1)\big) \leqslant O(\log_2 \varkappa), \tag{1.4.23}$$

Положим $\alpha_1 = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1)$, $\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}$, $\alpha_2 = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_2)$, $\theta_2 = \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}$,

$$\widetilde{\sigma}^d_j(\mathscr{D}_1) = \widetilde{\sigma}^d_j = \sum_{B \in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B),$$

$\beta_1(\mathscr{D}_1) = \beta_1 = \min\limits_{j \leqslant \theta_1}\big\{(j+1)\widetilde{\sigma}^d_{j+1}/\widetilde{\sigma}^d_j\big\}$. Тогда существует положительное число ε_1 такое, что

$$\beta_1 \geqslant \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1) \cdot (1 - \varepsilon_1 2^{-\varkappa} \varkappa^c).$$

Доказательство. Оценим $\dfrac{(j+1)\widetilde{\sigma}^d_{j+1}}{\widetilde{\sigma}^d_j}$ при $j \leqslant \theta_1$. Аналогично (1.2.2) имеем из (1.2.1)

$$(j+1)\sum_{B\in C^d_{j+1,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B) = \sum_{B\in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\sum_{D\in\mathscr{D}_{1\overline{B}}} f(D)\pi(B\cup D) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{B\in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B)\sum_{D\in\mathscr{D}_{1\overline{B}}} f(D)\pi(D). \qquad (1.4.24)$$

Оценим $\pi(D)$. Заметим, что если $D\in\mathscr{D}_{1\overline{B}}\subseteq\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}$, то $|D|=1$. Воспользуемся (1.4.7) с $m=\Delta$, $r=2$ и $\nu=1$

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_D\right) = \sum_{j\geqslant 2}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{D,[j]}\right) \leqslant |D|\sum_{j\geqslant 2} 8^j \varkappa^{2jc} 2^{-j(\varkappa - q(\Delta-1)/2)} \leqslant 2^{-2\varkappa + O(1)}\varkappa^{4c}.$$

Следовательно, существует такое положительное число $\widehat{\varepsilon}$ такое, что

$$\pi(D) \geqslant \exp\left\{-2^{-2\varkappa+O(1)}\varkappa^{4c}\right\} \geqslant 1-\widehat{\varepsilon}2^{-2\varkappa}\varkappa^{4c}.$$

Тогда

$$\sum_{B\in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B)\sum_{D\in\mathscr{D}_{1\overline{B}}} f(D)\pi(D) \geqslant$$

$$= (1-\widehat{\varepsilon}2^{-2\varkappa}\varkappa^{4c})\sum_{B\in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B)\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_{1\overline{B}}) =$$

$$= (1-\widehat{\varepsilon}2^{-2\varkappa}\varkappa^{4c})\Bigg(\sum_{B\in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B)\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1) -$$

$$- \sum_{B\in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B)\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_{1B})\Bigg). \qquad (1.4.25)$$

Оценим $\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_{1B})$ при $B\in C^d_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)$. Множество B состоит не более, чем из $(j+\theta_2)$ d-компонент, каждая компонента имеет мощность, не превосходящую Δ. Поскольку $\alpha_i>1$, то $\theta_i\leqslant 2\alpha_i$, $i=1,2$, следовательно, $|B|\leqslant(j+\theta_2)\Delta\leqslant(\theta_1+\theta_2)\Delta\leqslant 2\Delta(\alpha_1+\alpha_2)$. Аналогично (1.4.6) имеем

$$\alpha^1(\mathscr{D}_{1B}) = \sum_{j\geqslant 1}\alpha^1(\mathscr{D}_{1B,[j]}) \leqslant |B|\sum_{j\geqslant 1}\varkappa^{cdj}2^{-j(\varkappa-q(\Delta-1)/2)} \leqslant$$

$$\leqslant 2|B|2^{-\varkappa+O(1)}\varkappa^{cd} \leqslant 4\Delta\, 2^{-\varkappa+O(1)}\varkappa^{cd}\left(\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1)+\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_2)\right). \qquad (1.4.26)$$

Отсюда и из (1.4.23) следует, что

$$\alpha^1(\mathscr{D}_{1B}) \leqslant 2^{-\varkappa+O(\log_2\varkappa)}\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1). \qquad (1.4.27)$$

При $j\leqslant\theta$ для некоторого $\varepsilon_1>0$ из (1.4.24) – (1.4.27) следует

$$\frac{(j+1)\widetilde{\sigma}^d_{j+1}}{\widetilde{\sigma}^d_j} \geqslant (1-\widehat{\varepsilon}2^{-2\varkappa}\varkappa^{4c})\left(\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1) - \frac{\sum\limits_{B\in C_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B)\alpha^1(\mathscr{D}_{1B})}{\sum\limits_{B\in C_{j,\widehat{\theta_2}}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)} f(B)\pi(B)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1)(1-\varepsilon_1 2^{-\varkappa}\varkappa^{cd}).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4.11. *Пусть* $I=(X,f)$ *является* $(\Delta,\varkappa,q,c)$*-ординарной функциональной парой,* $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I)$, $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{B}^{<d,1>}_{<-,->}$, $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}\cap\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}$, $\mathscr{D}_2=\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_1$. *Тогда* $\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1)$ *и* $\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_2)$ *удовлетворяют условию* (1.4.23).

Доказательство. Оценим $\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1)$ и $\alpha^{1,d}(\mathscr{D}_2)$. Из определения следует, что

$$\alpha_1 = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1) = \sum_{\{v\} \in \mathscr{B}_{[1]}} f(\{v\}).$$

Из (1.4.2), (1.4.3) получаем

$$\alpha_2 = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_2) = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}) - \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1) \leqslant \sum_{\{v\} \in \mathscr{B}_{[1]}} \sum_{1 \leqslant j} \sum_{A \in \mathscr{A}^d_{\{v\},j}(I)} f(A \cup \{v\}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\{v\} \in \mathscr{B}_{[1]}} f(\{v\}) \sum_{1 \leqslant j} \sum_{A \in \mathscr{A}^d_{\{v\},j}(I)} f(A) 2^{(j-1)q} \leqslant 2 \cdot 2^{-\varkappa} \varkappa^{cd} \alpha_1.$$

Лемма 1.4.12. *Пусть α достаточно велико, и для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ выполнено $\alpha(1-\varepsilon_1) \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Положим $\tau = \beta - \alpha^{1/7}\sqrt{\beta}$, тогда существует положительное число ε_2 такое, что*

$$(\alpha - \alpha^{9/14})(1 - \varepsilon_2) \leqslant \tau \leqslant \alpha - \alpha^{9/14}.$$

Доказательство. Заметим, что если $\alpha \geqslant 1$, то функция $x - \alpha^{1/7}\sqrt{x}$ возрастает при $x \geqslant \alpha^{2/7}$. Из условия следует, что

$$\tau \leqslant \alpha - \alpha^{9/14}. \tag{1.4.28}$$

С использованием неравенства $\sqrt{1-y} \leqslant 1 - y/2$ нетрудно проверить, что при достаточно больших α

$$\tau \geqslant \alpha \cdot (1-\varepsilon_1) - \alpha^{9/14}\sqrt{1-\varepsilon_1} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha \cdot (1-\varepsilon_1) - \alpha^{9/14}(1-\varepsilon_1) \geqslant (\alpha - \alpha^{9/14})(1 - 3\varepsilon_1/2). \tag{1.4.29}$$

Положим $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1/2$. Теперь из (1.4.28) и (1.4.29) следует утверждение.

Лемма 1.4.13. *Пусть $I = (X, f)$ является $(3, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\hat{3}}(I)$, $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{B}^{<d,1>}_{<\hat{3},\hat{3}>} \setminus \mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}$. Пусть $\alpha = \alpha^{1,d}(\mathscr{D})$, $\theta = \alpha + \alpha^{9/14}$. Пусть также $B \in C^d_{\hat{\theta}}(\mathscr{D})$. Тогда*

$$1 - 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa} \leqslant \pi(B) = \exp\left\{-\alpha\left(\mathscr{B}^{(2)}_B\right)\right\} \leqslant 1.$$

Доказательство. Второе неравенство очевидно. Докажем первое неравенство. Из включения $B \in C^d_{\hat{\theta}}(\mathscr{D})$ следует, что B состоит не более, чем из θ d-компонент, и каждая компонента содержит не более трех элементов. Если $\alpha \geqslant 1$, то $\theta \leqslant 2\alpha$, следовательно $|B| \leqslant 3\theta \leqslant 6\alpha$. Воспользуемся (1.4.7) с $m = 3$, $r = 2$, $\nu = 1$, тогда

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_B\right) = \sum_{j \geqslant 2} \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{B,[j]}\right) \leqslant |B| \sum_{j \geqslant 2} 8^j \varkappa^{2cj} 2^{-j(\varkappa - q)} \leqslant$$
$$\leqslant 2|B| 2^{-2\varkappa + O(1)} \varkappa^{4c} \leqslant 3\alpha^{1,d}(\mathscr{D}) 2^{-2\varkappa + O(1)} \varkappa^{4c}. \tag{1.4.30}$$

Оценим $\alpha^{1,d}(\mathscr{D})$ сверху. По условию семейство $\mathscr{D}$ состоит из множеств, мощность которых не меньше 2 и не больше 3, тогда из (1.4.1) − (1.4.3) и леммы 1.4.6 получаем

$$\alpha^{1,d}(\mathscr{D}) = \sum_{A \in \mathscr{D}} f(A) \leqslant \sum_{A \in \mathscr{A}^d_2(I)} f(A) + \sum_{A \in \mathscr{A}^d_3(I)} f(A) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{v \in X} \sum_{\{u\} \in \mathscr{A}^d_{\{v\}}(I)} f(\{u, v\}) + \sum_{v \in X} \sum_{\{u, w\} \in \mathscr{A}^d_{\{v\}}(I)} f(\{u, v, w\}).$$

Отсюда и из (1.4.1) – (1.4.4) получаем

$$\alpha^{1,d}(\mathscr{D}) \leqslant \varkappa^{cd} 2^{2\varkappa - 2\log_2^2 \varkappa + q} + \varkappa^{2cd} 2^{\varkappa - 2\log_2^2 \varkappa + 2q} \leqslant 2 \cdot 2^{2\varkappa - 2\log_2^2 \varkappa + q} \varkappa^{cd}. \quad (1.4.31)$$

Из (1.4.30) и (1.4.31) вытекает, что

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right) \leqslant 2^{2\varkappa - 2\log_2^2 \varkappa} 2^{-2\varkappa + O(1)} \varkappa^{c(d+4)} \leqslant 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa}.$$

Отсюда следует утверждение.

Для натуральных $\tau \leqslant \theta$ и $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}^d(I)$ положим для краткости

$$C^d_{[\tau,\theta]}(\mathscr{D}|\mathscr{M}) = \bigcup_{\tau \leqslant j \leqslant \theta} C^d_j(\mathscr{D}|\mathscr{M}).$$

Теорема 1.4.2. *Пусть* $I = (X, f)$ *является* $(3, \varkappa, q, c)$*-ординарной функциональной парой,* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$*. Положим* $\mathscr{D} = \mathscr{B}^{<d,1>}_{<\widehat{3},\widehat{3}>}$*,* $\mathscr{D}_1 = \mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}$*,* $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_1$*. Пусть*

$$\alpha_1 = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_1),\ \theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14},\ \tau_1 = (\alpha_1 - \alpha_1^{9/14})(1 - \varepsilon_1 2^{-\varkappa} \varkappa^{cd}),$$

$$\alpha_2 = \alpha^{1,d}(\mathscr{D}_2),\ \theta_2 = \alpha_2 + \alpha_2^{9/14},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$*. Положим также*

$$\widetilde{C}^d(\mathscr{B}) = C^d_{[\tau_1,\theta_1]}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_1) \bigcap C^d_{\widehat{\theta}_2}(\mathscr{D}|\mathscr{D}_2).$$

Для $B \in \widetilde{C}^d(\mathscr{B})$ *пусть* $B = B_1 \cup B_2$*, где* $B_1 \in C^d(\mathscr{D}_1)$*,* $B_2 \in C^d(\mathscr{D}_2)$*. Тогда*

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa} + \alpha_1^{-1/7} e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7} e^{-\alpha_2^{2/7}/2}\right)\right) \sum_{B \in \widetilde{C}^d(\mathscr{B})} f(B)\pi(B_1).$$

Доказательство. Из леммы 1.4.8 следует, что

$$\widetilde{S}(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa}\right)\right) \widetilde{S}^d(\mathscr{D}).$$

Из условия (1.2.1) получаем

$$\widetilde{S}^d(\mathscr{D}) = \sum_{B \in C^d(\mathscr{D})} f(B)\pi(B_1 \cup B_2) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{B \in C^d(\mathscr{D})} f(B)\pi(B_1)\pi(B_2) \geqslant \sum_{B \in \widetilde{C}^d(\mathscr{B})} f(B)\pi(B_1)\pi(B_2).$$

Нижняя оценка следует из леммы 1.4.13. С другой стороны,

$$\widetilde{S}^d(\mathscr{D}) \leqslant \sum_{B \in C^d(\mathscr{D})} f(B)\pi(B_1).$$

Теперь доказательство верхней оценки аналогично доказательству (1.2.4) и следует из лемм 1.4.9 – 1.4.13 и теоремы 1.2.2.

Теорема доказана.

1.4.3. Оценки сумм $S(\mathscr{B})$ для регулярных семейств. Здесь рассматриваются так называемые регулярные семейства связных множеств. Получена асимптотическая формула для функционала $\pi(B)$ в случае, когда множество B состоит из компонент мощности 1, находящихся на достаточно большом растоянии друг от друга.

Пусть $I=(X,f)$ — функциональная пара, семейство $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ назовем *регулярным*, если для любых $\{u\},\{v\}\in\mathscr{B}$ выполняются равенства

$$f(\{v\})=f(\{u\}),$$
$$\left|\mathscr{B}^{(2)}_{\{v\},[2]}\right|=\left|\mathscr{B}^{(2)}_{\{u\},[2]}\right|.$$

Для $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ положим

$$\mathscr{B}^{(1,2)}_{[3]}=\left\{\left\{\{v\},\{\{u\},\{w\}\}\right\}:\ \{v\}\in\mathscr{B},\ \{\{u\},\{w\}\}\in\mathscr{B}^{(2)}_{\{v\},[2]}\right\}.$$

З а м е ч а н и е 1.4.1. Из доказательства теоремы 1.4.1 ясно, что при $\alpha^1(\mathscr{B})<2^{\log_2^2\varkappa}$ выполнены условия теоремы 1.3.1 с $r=1$, $\delta=2^{-\varkappa+\log_2^2\varkappa+q}$ и $\psi=2\varkappa^c2^{-\varkappa+\log_2^2\varkappa}$, следовательно,

$$S(\mathscr{B})=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa}\right)\right)\exp\left\{\mu_3(\mathscr{B})\right\},$$

поэтому осталось получить асимптотическую формулу для $S(\mathscr{B})$ при $\alpha^1(\mathscr{B})\geqslant 2^{\log_2^2\varkappa}$.

Л е м м а 1.4.14. *Пусть $I=(X,f)$ является $(3,\varkappa,q,c)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\hat{1}}(I)$ является регулярным семейством. Положим $\alpha=\alpha^{1,d}\left(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\right)$, $\theta=\alpha+\alpha^{9/14}$, $\tau=(\alpha-\alpha^{9/14})(1-\varepsilon 2^{-\varkappa}\varkappa^{cd})$, где $\varepsilon>0$. Пусть $d\geqslant 4$, $B\in C^d_{[\tau,\theta]}\left(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\right)$. Тогда*

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_B\right)=\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(1,2)}_{[3]}\right)+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что при $B\in C^d_{[\tau,\theta]}\left(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\right)$

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_B\right)=\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{B,[2]}\right)+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa}\right).\tag{1.4.32}$$

Оценим α сверху. Из включения $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\hat{1}}(I)$ следует, что

$$\alpha=\alpha^{1,d}\left(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\right)=\alpha^1(\mathscr{B}).$$

Из (1.4.1) и (1.4.2) получаем

$$\alpha=\alpha^1(\mathscr{B})=\sum_{\{v\}\in\mathscr{B}}f(\{v\})\leqslant|\mathscr{B}|2^{-\varkappa}\leqslant|X|2^{-\varkappa}\leqslant 2^{3\varkappa-2\log_2^2\varkappa}.\tag{1.4.33}$$

Поскольку $B\in C^d_{[\tau,\theta]}\left(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\right)$, множество B состоит из d-компонент мощности 1, и $\tau\leqslant|B|\leqslant\theta$. Из определения τ и θ следует, что существует ξ, $\xi\in[-1,1]$, такое, что

$$|B|=\alpha+\xi\left(\alpha^{9/14}+2^{-\varkappa}\alpha\right).\tag{1.4.34}$$

Отсюда и из (1.4.7) при $m=1$, $r=2$ и $\nu=1$ получаем

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_B\right)-\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{B,[2]}\right)=\sum_{j\geqslant 3}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{B,[j]}\right)\leqslant|B|\sum_{j\geqslant 3}8^j\varkappa^{2cj}2^{-j\varkappa}\leqslant$$
$$\leqslant 2\alpha\sum_{j\geqslant 3}2^{-j\varkappa+3j}\varkappa^{2cj}\leqslant 4\cdot 2^{-3\varkappa+9}\varkappa^{6c}\alpha\leqslant 2^{-\log_2^2\varkappa}.$$

Отсюда и из (1.4.33) следует (1.4.32).

Докажем теперь утверждение леммы. По формуле включений-исключений имеем

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{B,[2]}\right)=\alpha^1\left(\bigcup_{A\subseteq B}\mathscr{B}_{A,[2]}\right)=\sum_{\{u\}\subseteq B}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{u\},[2]}\right)-\sum_{\{u,v\}\subseteq B}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{u\},[2]}\cap\mathscr{B}^{(2)}_{\{v\},[2]}\right)+$$
$$+\sum_{\{u,v,w\}\subseteq B}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{u\},[2]}\cap\mathscr{B}^{(2)}_{\{v\},[2]}\cap\mathscr{B}^{(2)}_{\{w\},[2]}\right)-\ldots\tag{1.4.35}$$

Пусть $H \in \mathscr{B}^{(2)}_{B,[2]}$, это значит, что существует вершина $v \in B$ такая, что $H\#\{v\}$. Если множество B удовлетворяет условию леммы, то оно состоит из компонент мощности 1, расстояние между которыми не меньше d, тогда при $d \geqslant 4$ для любой вершины $u \in B$, отличной от v, выполнено $H \parallel \{u\}$. Следовательно, $\mathscr{B}^{(2)}_{\{v\},[2]} \cap \mathscr{B}^{(2)}_{\{u\},[2]} = \varnothing$, и все слагаемые, кроме первого, равняются нулю. Теперь из регулярности семейства $\mathscr{B}$ для произвольного $\{v_0\} \in \mathscr{B}$ получаем

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{B,[2]}\right) = \sum_{v \in B} |B|\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{v\},[2]}\right) = \sum_{v \in B} \sum_{\{\{u\},\{w\}\} \subseteq B^{(2)}_{\{v\}}} f(\{u\})f(\{w\}) =$$
$$= |B| f^2(\{v_0\}) \left|\mathscr{B}^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\right| = |B|\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\right).$$

Из (1.4.34) следует, что

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{B,[2]}\right) = \alpha^1(\mathscr{B})\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\right) + \xi\left(\alpha^{9/14} + 2^{-\varkappa}\alpha\right)\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\right). \tag{1.4.36}$$

Из (1.4.33) и (1.4.6) с $m=1$, $r=2$, $\nu=1$ и $j=2$ получаем

$$0 \leqslant \left(\left(\alpha^1(\mathscr{B})\right)^{9/14} + 2^{-\varkappa}\alpha^1(\mathscr{B})\right)\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(2^{(27/14)\varkappa - (9/7)\log_2^2 \varkappa} + 2^{2\varkappa - 2\log_2^2 \varkappa}\right) 8\varkappa^{4c} 2^{-2\varkappa} \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa}. \tag{1.4.37}$$

Оценим первое слагаемое. Из регулярности $\mathscr{B}$ и определения $\mathscr{B}^{(1,2)}_{[3]}$ следует, что

$$\alpha^1(\mathscr{B})\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\right) = \sum_{\{v\} \in \mathscr{B}} f(\{v\})\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{\{v\},[2]}\right) =$$
$$= \sum_{\{v\} \in \mathscr{B}} f(\{v\}) \sum_{\{\{u\},\{w\}\} \in \mathscr{B}^{(2)}_{\{v\}}} f(\{u\})f(\{w\}) = \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(1,2)}_{[3]}\right). \tag{1.4.38}$$

Из (1.4.32), (1.4.36) – (1.4.38) следует утверждение леммы.

Теорема 1.4.3. *Пусть $I = (X, f)$ является $(3, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, семейство $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$ является регулярным. Тогда*

$$S(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa}\right)\right) \exp\left\{\widehat{\mu_3}(\mathscr{B})\right\}, \tag{1.4.39}$$

где

$$\widehat{\mu_3}(\mathscr{B}) = \alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathscr{B}) - \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[2,3]}\right) + \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(1,2)}_{[3]}\right).$$

Утверждение вытекает из следствия 1.4.3, теоремы 1.4.2 и леммы 1.4.14.

Следствие 1.4.5. *Пусть $I = (X, f)$ является $(3, \varkappa, q, c)$-ординарной функциональной парой, $r_0 = \lceil \varkappa/(2q) \rceil$, семейство $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$ является регулярным, $\widehat{\mathscr{B}} = \mathscr{B} \cap \mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$. Тогда*

$$S(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa}\right)\right) \exp\left\{\widehat{\mu_3}(\widehat{\mathscr{B}})\right\}.$$

Утверждение вытекает из леммы 1.4.4 при $\Delta = 3$ и $\pi(B) \equiv 1$ и из (1.4.39).

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, семейства $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}(I)$ и $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}(I)$, $\mathscr{B} \cap \mathscr{D} = \varnothing$, назовем *сильно регулярными*, если они являются регулярными,

$$\left|\log_2\left(\alpha^1(\mathscr{B}_{[1]})\right) - \log_2\left(\alpha^1(\mathscr{D}_{[1]})\right)\right| \leqslant O(\log_2 \varkappa), \tag{1.4.40}$$

для любых $\{u\}, \{v\} \in \mathscr{B}$ выполняется $\left|(\mathscr{B} \cup \mathscr{D})^{(2)}_{\{v\},[2]}\right| = \left|(\mathscr{B} \cup \mathscr{D})^{(2)}_{\{u\},[2]}\right|$, и для любых $\{u\}, \{v\} \in \mathscr{D}$ выполняется $\left|(\mathscr{B} \cup \mathscr{D})^{(2)}_{\{v\},[2]}\right| = \left|(\mathscr{B} \cup \mathscr{D})^{(2)}_{\{u\},[2]}\right|$.

Лемма 1.4.15. *Пусть* $I=(X,f)$ *является* $(3,\varkappa,q,c)$*-ординарной функциональной парой, семейства* $\mathscr{B},\mathscr{D}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{1}}(I)$ *являются сильно регулярными. Положим* $\alpha_1=\alpha^{1,d}(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>})$, $\alpha_2=\alpha^{1,d}(\mathscr{D}^{<d,1>}_{<1,1>})$,

$$\theta_1=\alpha_1+\alpha_1^{9/14},\quad \tau_1=(\alpha_1-\alpha_1^{9/14})(1-\varepsilon_1 2^{-\varkappa}\varkappa^{cd}),\quad \theta_2=\alpha_2+\alpha_2^{9/14},$$

$\tau_2=(\alpha_2-\alpha_2^{9/14})(1-\varepsilon_2 2^{-\varkappa}\varkappa^{cd})$, *где* $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$. *Пусть* $d\geqslant 4$, $B\in C^d_{[\tau_1,\theta_1]}\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{<d,1>}_{<1,1>}\big|\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\big)\cap C^d_{[\tau_2,\theta_2]}\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{<d,1>}_{<1,1>}\big|\mathscr{D}^{<d,1>}_{<1,1>}\big)$. *Тогда*

$$\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_B\big)=\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(1,2)}_{[3]}\big)+O\big(2^{-\log_2^2\varkappa}\big).$$

Доказательство. Доказательство утверждения аналогично доказательству леммы 1.4.14. Заметим, что

$$\alpha^1(\mathscr{B}\cup\mathscr{D})=\alpha^1(\mathscr{B})+\alpha^1(\mathscr{D})=\alpha^{1,d}\big(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\big)+\alpha^{1,d}\big(\mathscr{D}^{<d,1>}_{<1,1>}\big). \tag{1.4.41}$$

Положим $B=B_1\cup B_2$, где $B_1\in C^d_{[\tau_1,\theta_1]}\big(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>}\big)$, $B_2\in C^d_{[\tau_2,\theta_2]}\big(\mathscr{D}^{<d,1>}_{<1,1>}\big)$. Аналогично (1.4.36) и (1.4.38) из сильной регулярности $\mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$ для произвольных $\{v_0\}\in\mathscr{B}$, $\{u_0\}\in\mathscr{D}$ следует

$$\begin{aligned}\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{B,[2]}\big)&=\sum_{v\in B_1}\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{v\},[2]}\big)+\sum_{u\in B_2}\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{u\},[2]}\big)=\\
&=|B_1|\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\big)+|B_2|\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{u_0\},[2]}\big)=\\
&=\alpha^1(\mathscr{B})\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\big)+\alpha^1(\mathscr{D})\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{v_0\},[2]}\big)+O\big(2^{-\log_2^2\varkappa}\big)=\\
&=\sum_{\{v\}\in\mathscr{B}}f(\{v\})\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{v\},[2]}\big)+\sum_{\{u\}\in\mathscr{D}}f(\{u\})\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(2)}_{\{u\},[2]}\big)+O\big(2^{-\log_2^2\varkappa}\big)=\\
&=\alpha^1\big((\mathscr{B}\cup\mathscr{D})^{(1,2)}_{[3]}\big)+O\big(2^{-\log_2^2\varkappa}\big).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1.4.4. *Пусть* $I=(X,f)$ *является* $(3,\varkappa,q,c)$*-ординарной функциональной парой, семейства* $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$ *и* $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$ *являются сильно регулярными. Тогда*

$$S(\mathscr{B}\cup\mathscr{D})=\Big(1+O\big(2^{-\log_2^2\varkappa}\big)\Big)\exp\big\{\widehat{\mu_3}(\mathscr{B}\cup\mathscr{D})\big\}.$$

Доказательство. Поскольку семейства $\mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$ являются сильной регулярными, условие (1.4.23) выполнено для $\alpha^{1,d}(\mathscr{B}^{<d,1>}_{<1,1>})$, $\alpha^{1,d}(\mathscr{D}^{<d,1>}_{<1,1>})$. Лемму 1.4.10 можно применить дважды. Теперь утверждение вытекает из следствия 1.4.3, теоремы 1.4.2 и леммы 1.4.15.

Следствие 1.4.6. *Пусть* $I=(X,f)$ *является* $(3,\varkappa,q,c)$*-ординарной функциональной парой,* $r_0=\lceil\varkappa/(2q)\rceil$, *семейства* $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$ *и* $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$ *являются сильно регулярными. Положим* $\widehat{\mathscr{B}}=\mathscr{B}\cap\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$, $\widehat{\mathscr{D}}=\mathscr{D}\cap\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I)$. *Тогда*

$$S(\mathscr{B}\cup\mathscr{D})=\Big(1+O\big(2^{-\log_2^2\varkappa}\big)\Big)\exp\big\{\widehat{\mu_3}(\widehat{\mathscr{B}}\cup\widehat{\mathscr{D}})\big\}.$$

Утверждение вытекает из следствия 1.4.5 и теоремы 1.4.4.

§ 1.5. Оценки сумм $S(\mathscr{B})$ для существенно нерегулярных функциональных пар

В данном параграфе рассматривается обобщение понятия $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарности. В результате получены оценки $S(\mathscr{B})$ для граничных функционалов с характеристикой 2 (теоремы 1.5.2, 1.5.4).

Функциональную пару $I=(X, f)$ назовем $(\Delta, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-*ординарной*, если существует разбиение $X=X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2=\varnothing$, такое, что

1) функциональная пара $I_1=(X_1, f)$ является $(\Delta, \varkappa_1, q, c)$-ординарной, функциональная пара $I_2=(X_2, f)$ является $(\Delta, \varkappa_2, q, c)$-ординарной;

2) для любых $u, v \in X$

$$\left|\log_2 f(\{u\})-\log_2 f(\{v\})\right| \leqslant p. \tag{1.5.1}$$

Как и в параграфе 1.4, считаем, что $\varkappa_1, \varkappa_2 \to \infty$.

Если какие-либо из неравенств (1.4.1) – (1.4.4), (1.5.1) могут не выполняться для функциональных пар I_1, I_2, то будем, как и раньше, ставить прочерки в соответствующих координатах.

Лемма 1.5.1. *Пусть $I=(X, f)$ является $(-, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-ординарной функциональной парой, ν, r, j — произвольные фиксированные натуральные числа, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$. Тогда*

$$\alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{\{v\},[j]}^{(r)}\right) \leqslant 8^{(r-1) j} \varkappa_2^{c r j}\, 2^{-j\left(\varkappa_1-p-q(m-1) / 2\right) \nu}, \tag{1.5.2}$$

если $v \in X_1$ и

$$\alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{\{v\},[j]}^{(r)}\right) \leqslant 8^{(r-1) j} \varkappa_2^{c r j}\, 2^{-j\left(\varkappa_2-q(m-1) / 2\right) \nu}, \tag{1.5.3}$$

если $v \in X_2$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.2, сформулированной в [10] для $(\Delta, \varkappa, q, c)$-ординарных функциональных пар.

Следствие 1.5.1. *Пусть $I=(X, f)$ — $(\Delta, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-ординарная функциональная пара, ν, r — произвольные фиксированные натуральные числа, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{m}}(I)$, $m \leqslant \min\left\{\lceil\varkappa_1/(2q)\rceil, \lceil\varkappa_2/(2q)\rceil\right\}$, $s \geqslant(\Delta+1)/\nu$. Тогда*

$$\sum_{j \geqslant s} \alpha^{\nu}\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(r)}\right) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa_1}+2^{-\log_2^2 \varkappa_2}. \tag{1.5.4}$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.4.2.

Лемма 1.5.2. *Пусть $I=(X, f)$ является $(\Delta, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-ординарной функциональной парой, $r_0=\lceil\varkappa/(2q)\rceil$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$. Тогда*

$$S(\mathscr{B})=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa_1}+2^{-\log_2^2 \varkappa_2}\right)\right) S\left(\mathscr{B} \cap \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I)\right). \tag{1.5.5}$$

Теорема 1.5.1. *Пусть $I=(X, f)$ является $(1, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_1(I)$. Тогда*

$$S(\mathscr{B}) \geqslant\left(1-O\left(2^{-\frac{3}{2} \log_2^2 \varkappa_1}+2^{-\frac{3}{2} \log_2^2 \varkappa_2}\right)\right) \exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B})\right\}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 1.3.1. Покажем, что условия (1.3.2) и (1.3.3) выполнены при $\psi = \delta = 2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\log_2^2 \varkappa_2}$, тогда утверждение будет следовать из (1.3.4).

В силу (1.5.4) с $\nu = 1$, $r = 2$ и $s = 2$

$$\alpha^1(\mathscr{B}^{(2)}) = \sum_{j \geqslant 2} \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.2) выполнено при $\psi = 2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\log_2^2 \varkappa_2}$.

В силу (1.5.4) с $\nu = 2$, $r = 1$ и $s = 1$

$$\alpha^2(\mathscr{B}) = \sum_{j \geqslant 1} \alpha^2(\mathscr{B}_{[j]}) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.3) выполнено при $\delta = 2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{\log_2^2 \varkappa_2}$. Теперь утверждение вытекает из (1.3.4).

Теорема 1.5.2. *Пусть $I = (X, f)$ является $(1, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_1(I)$. Тогда*

$$S(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\log_2^2 \varkappa_2}\right)\right) \exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B})\right\}.$$

Утверждение следует из (1.3.1), леммы 1.5.2 и теоремы 1.5.1.

Теорема 1.5.3. *Пусть $I = (X, f)$ является $(2, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-ординарной функциональной парой, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\widehat{2}}(I)$. Тогда*

$$S(\mathscr{B}) = \left(1 + O\left(2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_2}\right)\right) \exp\left\{\mu_2(\mathscr{B})\right\}, \qquad (1.5.6)$$

где $\mu_2(\mathscr{B}) = \alpha^1(\mathscr{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B}) - \alpha^1(\mathscr{B}^{(2)})$.

Доказательство. Положим $I_1 = (X_1, f)$, $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B} \cap \mathscr{A}(I_1)$, $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}_1$. Заметим, что

$$\alpha^1(\mathscr{B}) = \alpha^1(\mathscr{B}_1) + \alpha^1(\mathscr{B}_2).$$

Предположим сначала, что

$$\alpha^1(\mathscr{B}) \geqslant 2^{\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{\log_2^2 \varkappa_2}. \qquad (1.5.7)$$

Воспользуемся теоремой 1.3.3. Для этого докажем, что условия (1.3.5), (1.3.6), (1.3.11) и (1.3.12) выполнены соответственно при $\lambda = \zeta = \varphi = 2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\log_2^2 \varkappa_2}$ и $\gamma = 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_2}$. Тогда (1.5.6) будет следовать из (1.3.13).

В силу (1.5.4) с $\nu = 1$, $r = 3$ и $s = 4$

$$\alpha^1(\mathscr{B}^{(3)}) = \sum_{j \geqslant 4} \alpha^1\left(\mathscr{B}^{(3)}_{[j]}\right) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.5) выполнено при $\lambda = 2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\log_2^2 \varkappa_2}$.

Покажем, что условие (1.3.11) выполнено для $\gamma = 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_2}$. Пусть $\alpha_1 = \alpha^1(\mathscr{B}_1)$ и $\alpha_2 = \alpha^1(\mathscr{B}_2)$. Положим $\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}$ и $\theta_2 = \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}$. Для $B \in C_{\widehat{\theta_1}}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_1) \cap C_{\widehat{\theta_2}}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_2)$ положим $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 \in C(\mathscr{B}_1)$, а $B_2 \in C(\mathscr{B}_2)$. Оценим α_1 сверху. Поскольку функциональная пара $I_1 = (X_1, f)$ является $(2, \varkappa_1, q, c)$-ординарной, из (1.4.1) – (1.4.4) имеем

$$\alpha_1 = \alpha^1\left(\mathscr{B}_1\right) = \sum_{A \in \mathscr{B}_1} f(A) \leqslant \sum_{A \in \mathscr{A}_{\widehat{2}}(I_1)} f(A) =$$

$$= \sum_{A \in \mathscr{A}_1(I_1)} f(A) + \sum_{A \in \mathscr{A}_2(I_1)} f(A) \leqslant \sum_{v \in X_1} f\left(\{v\}\right) + \sum_{v \in X_1} \sum_{u \in X_1:\ u \# v} f\left(\{u, v\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |X_1|\, 2^{-\varkappa_1} + |X_1| \varkappa_2^c\, 2^{-2\varkappa_1 + q} \leqslant 2^{2\varkappa_1 - 2\log_2^2 \varkappa_1} + \varkappa_2^c\, 2^{\varkappa_1 + q}, \qquad (1.5.8)$$

Теперь оценим α_2 сверху. В силу того, что функциональная пара $I_2 = (X_2, f)$ является $(2, \varkappa_2, q, c)$-ординарной, из (1.4.1) – (1.4.4) при $m = 1$ и (1.5.1) имеем

$$\alpha_2 = \alpha^1\left(\mathscr{B}_2\right) = \sum_{A \in \mathscr{B}_2} f(A) \leqslant \sum_{A \in \mathscr{A}_{\widehat{2}}(I) \setminus \mathscr{A}(I_1)} f(A) =$$

$$= \sum_{A \in \mathscr{A}_1(I) \setminus \mathscr{A}(I_1)} f(A) + \sum_{A \in \mathscr{A}_2(I) \setminus \mathscr{A}(I_1)} f(A) \leqslant \sum_{v \in X_2} f\big(\{v\}\big) + \sum_{v \in X_2} \sum_{u \in X:\ u \# v} f\big(\{u, v\}\big) \leqslant$$

$$\leqslant |X_2|\, 2^{-\varkappa_2} + |X_2| \varkappa_2^c\, 2^{-2\varkappa_2 + q + p} \leqslant 2^{2\varkappa_2 - 2\log_2^2 \varkappa_2} + \varkappa_2^c\, 2^{\varkappa_2 + q + p}. \qquad (1.5.9)$$

Из (1.5.2), (1.5.3) при $r = 2$, $m = 2$ и $\nu = 1$ получаем, что

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right) \leqslant \sum_{v \in B} \alpha^1\left(\mathscr{B}_{\{v\}}^{(2)}\right) = \sum_{v \in B} \sum_{j \geqslant 2} \alpha^1\left(\mathscr{B}_{\{v\},[j]}^{(2)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{v \in B_1} \sum_{j \geqslant 2} \alpha^1\left(\mathscr{B}_{\{v\},[j]}^{(2)}\right) + \sum_{v \in B_2} \sum_{j \geqslant 2} \alpha^1\left(\mathscr{B}_{\{v\},[j]}^{(2)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |B_1| \sum_{j \geqslant 2} 8^j \varkappa_2^{2cj}\, 2^{-j(\varkappa_1 - p - q/2)} + |B_2| \sum_{j \geqslant 2} 8^j \varkappa_2^{2cj}\, 2^{-j(\varkappa_2 - q/2)}. \qquad (1.5.10)$$

Из включения $B \in C_{\widehat{\theta_1}}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_1) \cap C_{\widehat{\theta_2}}(\mathscr{B}|\mathscr{B}_2)$ следует, что B_1 состоит не более, чем из θ_1 компонент, а B_2 состоит не более, чем из θ_2 компонент. Поскольку каждая компонента принадлежит семейству $\mathscr{A}_{\widehat{2}}(I)$, она содержит не более двух элементов, следовательно $|B_1| \leqslant 2\theta_1$ и $|B_2| \leqslant 2\theta_2$.

Если $\alpha_i \geqslant 1$ для $i \in \{1, 2\}$, то $\theta_i \leqslant 2\alpha_i$ и $|B_i| \leqslant 4\alpha_i$. Тогда из (1.5.10) следует, что

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}_B^{(2)}\right) \leqslant 4\alpha_1\, 2^{-2\varkappa_1 + 4c\log_2 \varkappa_1 + O(1)} + 4\alpha_2\, 2^{-2\varkappa_2 + 4c\log_2 \varkappa_2 + O(1)}. \qquad (1.5.11)$$

Теперь из (1.5.8) – (1.5.11) вытекает (1.3.11) с $\gamma = 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_2}$.

Если $\alpha_i < 1$ для какого-нибудь i, то $\theta_i < 2$ и $|B_i| < 4$, тогда выполнение условия (1.3.11) с $\gamma = 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\frac{3}{2}\log_2^2 \varkappa_2}$ также вытекает из (1.5.10), (1.5.11).

В силу (1.5.4) с $\nu = 2$, $r = 2$ и $s = 2$

$$\alpha^2(\mathscr{B}^{(2)}) = \sum_{j \geqslant 2} \alpha^2\left(\mathscr{B}_{[j]}^{(2)}\right) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.6) выполнено при $\zeta = 2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\log_2^2 \varkappa_2}$.

В силу (1.5.4) с $\nu = 3$, $r = 1$ и $s = 1$

$$\alpha^3(\mathscr{B}) = \sum_{j \geqslant 1} \alpha^3(\mathscr{B}_{[j]}) \leqslant 2^{-\log_2^2 \varkappa},$$

следовательно, условие (1.3.12) выполнено при $\varphi = 2^{-\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{-\log_2^2 \varkappa_2}$.

Таким образом, условия теоремы 1.3.3 выполнены при указанных значениях параметров λ, ζ, γ и φ. Теперь из (1.3.13) вытекает (1.5.6), значит, утверждение доказано при условии (1.5.7).

Пусть теперь

$$\alpha^1(\mathscr{B}) < 2^{\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{\log_2^2 \varkappa_2}. \qquad (1.5.12)$$

Покажем, что выполнены условия теоремы 1.3.1 при $r = 1$ и соответствующих ψ и δ. Тогда (1.5.6) будет следовать из (1.3.4).

Проверим выполнение условия (1.3.2). В силу того, что функциональная пара I_1 является $(3, \varkappa_1, q, c)$-ординарной, а функциональная пара I_2 — $(3, \varkappa_2, q, c)$-ординарной, имеем с использованием (1.4.2) – (1.4.4), (1.5.1)

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}_{[2]}^{(2)}\right) \leqslant \sum_{\{u\} \in \mathscr{B}_1} f\big(\{u\}\big) \sum_{\{v\} \in \mathscr{B}_{\{u\}}} f\big(\{v\}\big) + \sum_{\{u\} \in \mathscr{B}_2} f\big(\{u\}\big) \sum_{\{v\} \in \mathscr{B}_{\{u\}}} f(\{v\}) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^1(\mathscr{B}_1)\varkappa_1^c\, 2^{-\varkappa_1 + p} + \alpha^1(\mathscr{B}_2)\varkappa_2^c\, 2^{-\varkappa_2 + p} \leqslant \left(\varkappa_1^c 2^{-\varkappa_1 + p} + \varkappa_2^c 2^{-\varkappa_2 + p}\right)\left(2^{\log_2^2 \varkappa_1} + 2^{\log_2^2 \varkappa_2}\right) \qquad (1.5.13)$$

В силу (1.5.4) с $\nu=1$, $r=2$ и $s=3$

$$\sum_{j\geqslant 3}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right)\leqslant 2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2^{-\log_2^2\varkappa_2}. \tag{1.5.14}$$

Отсюда и из (1.5.13) следует, что

$$\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}\right)\leqslant\left(\varkappa_1^c 2^{-\varkappa_1+p}+\varkappa_2^c 2^{-\varkappa_2+p}\right)\left(2^{\log_2^2\varkappa_1}+2^{\log_2^2\varkappa_2}\right)+2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2^{-\log_2^2\varkappa_2}.$$

Следовательно, (1.3.2) выполнено при $\psi=2\cdot 2^{\log_2^2\varkappa_1}+2\cdot 2^{\log_2^2\varkappa_2}$.

Проверим выполнение условия (1.3.3). Аналогично (1.5.14) получаем оценку

$$\alpha^2(\mathscr{B}_{[1]})\leqslant\alpha(\mathscr{B})(2^{-\varkappa_1}+2^{-\varkappa_2})\leqslant\left(2^{-\varkappa_1}+2^{-\varkappa_2}\right)\left(2^{\log_2^2\varkappa_1}+2^{\log_2^2\varkappa_2}\right) \tag{1.5.15}$$

В силу (1.5.4) с $\nu=2$, $r=1$ и $s=2$, а также (1.5.15) имеем

$$\alpha^2(\mathscr{B})=\alpha^2(\mathscr{B}_{[2]})+\sum_{j\geqslant 2}\alpha^2(\mathscr{B}_{[j]})\leqslant(2^{-\varkappa_1}+2^{-\varkappa_2})\left(2^{\log_2^2\varkappa_1}+2^{\log_2^2\varkappa_2}\right)+2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2^{-\log_2^2\varkappa_2}.$$

Отсюда вытекает справедливость условия (1.3.3) при $\delta=2\cdot 2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2\cdot 2^{-\log_2^2\varkappa_2}$. Теперь из (1.3.4) при указаных значениях ψ и δ получаем

$$S(\mathscr{B})=\left(1+O(2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2^{-\log_2^2\varkappa_2})\right)\exp\{\alpha^1(\mathscr{B})\}=$$
$$=\left(1+O(2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2^{-\log_2^2\varkappa_2})\right)\exp\left\{\alpha^1(\mathscr{B})-\frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B})-\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}\right)\right\}.$$

Утверждение доказано при условии (1.5.12).

Для $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}(I)$ положим

$$\mu_{\widehat{2}}(\mathscr{B})=\alpha^1(\mathscr{B})-\frac{1}{2}\alpha^2(\mathscr{B})-\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[2]}\right).$$

Следствие 1.5.2. *Пусть $I=(X,f)$ — $(2,\{\varkappa_1,\varkappa_2\},q,c,p)$-ординарная функциональная пара, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{2}}(I)$, Тогда*

$$S(\mathscr{B})=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2^{-\log_2^2\varkappa_2}\right)\right)\exp\left\{\mu_{\widehat{2}}(\mathscr{B})\right\}. \tag{1.5.16}$$

Доказательство. Имеем

$$\alpha^1(\mathscr{B}^{(2)})-\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[2]}\right)=\sum_{j\geqslant 3}\alpha^1\left(\mathscr{B}^{(2)}_{[j]}\right).$$

Теперь (1.5.16) следует из (1.5.5) и (1.5.14).

Следствие 1.5.3. *Пусть $I=(X,f)$ является $(2,\{\varkappa_1,\varkappa_2\},q,c,p)$-ординарной функциональной парой, $r_0=\min\{\lceil\varkappa_1/(2q)\rceil,\lceil\varkappa_2/(2q)\rceil\}$, $\mathscr{B}\subseteq\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{r_0}}(I)$, $\widehat{\mathscr{B}}=\mathscr{B}\cap\mathscr{A}_{\widehat{2}}(I)$. Тогда*

$$S(\mathscr{B})=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2\varkappa_1}+2^{-\log_2^2\varkappa_2}\right)\right)\exp\left\{\mu_{\widehat{2}}(\widehat{\mathscr{B}})\right\}.$$

Утверждение вытекает из леммы 1.5.2 при $\Delta=2$ и из (1.5.16).

Функциональную пару $I=(X,f)$ назовем $(\Delta,\{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_l\},q,c,p)$-*ординарной*, если выполнено условие (1.5.1) и существует разбиение

$$X=\bigcup_{1\leqslant t\leqslant k}X_t,\qquad X_i\cap X_j=\varnothing\quad\text{для всех}\quad i,j,$$

такое, что функциональные пары $I_j=(X_j,f)$ являются $(\Delta,\varkappa_j,q,c)$-ординарными для всех $j=1,\ldots,l$.

Теорема 1.5.4. *Пусть* $I=(X,f)$ *является* $(2,\{\varkappa_1,\ldots$ $\ldots,\varkappa_l\},q,c,p)$*-ординарной функциональной парой,* $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}_{\widehat{2}}(I)$. *Тогда*

$$S(\mathscr{B})=\left(1+O\left(\sum_{j=1}^{l}2^{-\log_2^2\varkappa_j}\right)\right)\exp\{\mu_{\widehat{2}}(\mathscr{B})\}.$$

Доказательство. Положим для $j=1,2,\ldots,l$

$$\widehat{X}_j=\bigcup_{1\leqslant t\leqslant j}X_t,\qquad \widehat{I}_j=(\widehat{X}_j,f),$$

$$\mathscr{B}_1=\mathscr{B}\cap\mathscr{A}(\widehat{I}_1),\qquad \mathscr{B}_j=\big(\mathscr{B}\cap\mathscr{A}(\widehat{I}_j)\big)\setminus\mathscr{B}_{j-1}.$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.5.3 и вытекает из следствия 1.2.2.

ГЛАВА 2
АСИМПТОТИКА ЧИСЛА АНТИЦЕПЕЙ В ДЕКАРТОВОЙ СТЕПЕНИ ЗВЕЗД S_k^n

§ 2.1. Основные понятия

В этом параграфе вводятся основные определения из статьи [10].

Рассмотрим двудольный граф $G=(X,Z;E)$ с долями вершин X, Z и множеством ребер E. *Границей* множества $A\subseteq X$, как и раньше, назовем множество

$$\partial(A)=\{v\in Z\colon\ \exists u\in A\ \{u,v\}\in E\}.$$

Степенью вершины $v\in X\cup Z$ называется число $\sigma(v)$ вершин $u\in X\cup Z$ таких, что $\{u,v\}\in E$. Граф G называется *простым* (ε,δ)*-расширителем*, если

$$|A|\leqslant\big|\partial(A)\big|(1-\delta)$$

для всякого множества $A\subseteq X$ такого, что $|A|\leqslant\lceil\varepsilon|X|\rceil$.

Граф G называется *граничным* (ε,δ)*-расширителем*, если

$$|A|\leqslant\big|\partial(A)\big|(1-\delta)$$

для всякого множества $A\subseteq X$ такого, что $\big|\partial(A)\big|\leqslant\lceil\varepsilon|Z|\rceil$.

Положим

$$\min_{v\in X}\sigma(v)=\varkappa. \tag{2.1.1}$$

Везде далее

$$g_1=g_1(G)=\varkappa^3\log_2^{-7}\varkappa,\qquad \varepsilon_1=\varepsilon_1(G)=g_1/|Z|,$$

$$\delta_1=\delta_1(G)=\varkappa^{-1}\log_2^2\varkappa,\qquad \delta_2=\delta_2(G)=\varkappa^{-2}\log_2^9\varkappa.$$

Двудольный граф $G=(X,Z;E)$ называется *полным* $(\Delta,\varkappa,q,p)$*-расширителем,* если он является граничным (ε_1,δ_1)-расширителем, простым $(1,\delta_2)$-расширителем и удовлетворяет условию (2.1.1) и условиям

$$\max_{v\in X\cup Z}\sigma(v)\leqslant\varkappa^p, \tag{2.1.2}$$

$$\max_{\substack{u,v\in X\\ v\neq u}}\big|\partial(\{u\})\cap\partial(\{v\})\big|\leqslant q, \tag{2.1.3}$$

$$\varkappa/\sqrt{\log_2\varkappa}\leqslant\min_{v\in Z}\sigma(v)\leqslant\max_{v\in Z}\sigma(v)\leqslant\varkappa, \tag{2.1.4}$$

$$|X|\leqslant2^{(\Delta+1)\varkappa-2\log_2^2\varkappa}. \tag{2.1.5}$$

Двудольный граф G называется $(\Delta,\varkappa,q,p)$*-полурасширителем,* если он является граничным (ε_1,δ_1)-расширителем, простым $(1/2,\delta_2)$-расширителем и удовлетворяет условиям (2.1.1) – (2.1.5).

Множество P с заданным на нем отношением частичного порядка $\leqslant$ называется *частично упорядоченным* (сокращенно ЧУМ). *Антицепью* в ЧУМ P называется множество, в котором нет пары $\{u, v\}$ такой, что $u \leqslant v$.

Элемент u *непосредственно предшествует* элементу v (обозначение $u \prec v$), если $u \leqslant v$, $u \neq v$ и, кроме того, $\{w\colon\ u \leqslant w \leqslant v\} = \{u, v\}$. Целочисленная функция r, определенная на ЧУМ P, называется *функцией ранга*, если $r(v) = r(u) + 1$ для всех u и v таких, что $u \prec v$. Если на ЧУМ P определена функция ранга r, то P называется *ранжированным множеством*, и если функция ранга принимает ровно n значений, то P называется *n-слойным*, а его подмножество $P_k = \{v \in P\colon\ r(v) = k\}$ называется *k-м слоем* ранжированного множества P. *Диаграммой Хассе* множества P называется граф $\Gamma = (P; E_P)$, в котором вершины u, v соединены ребром в том и только в том случае, когда $u \prec v$.

Через $(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ обозначается ранжированное множество P с $m + 1$ слоями, а через $\overline{P}$ — ранжированное множество $(P_m, P_{m-1}, \ldots, P_0)$ такое, что $u \leqslant v$ в $\overline{P}$ тогда и только тогда, когда $v \leqslant u$ в P. Для i, j, $0 \leqslant i < j \leqslant m$, через $P_{[i,j]}$ обозначется множество $(P_i, P_{i+1}, \ldots, P_j)$ с $j - i + 1$ слоями, в котором частичный порядок индуцирован частичным порядком в P. Обозначим через Γ_i диаграмму Хассе ранжированного множества $P_{[i,i+1]}$.

Двуслойное множество $P_{[i,i+1]}$ называется *полным* $(\Delta, \varkappa, q, p)$*-расширителем*, если граф Γ_i является полным $(\Delta, \varkappa, q, p)$-расширителем.

Многослойное множество $P = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$, $m \geqslant 2$, называется *полным* $(\Delta, \varkappa, q, p)$*-расширителем*, если при каждом $i = 0, 1, \ldots, m-1$ двуслойное множество $P_{[i,i+1]}$ является полным $(\Delta_i, \varkappa_i, q_i, p_i)$-расширителем, и при этом для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$ выполняются неравенства

$$\Delta_i \leqslant \Delta, \qquad \varkappa_i \geqslant \varkappa, \qquad q_i \leqslant q, \qquad \max_{v \in P} \sigma(v) \leqslant \varkappa^p. \tag{2.1.6}$$

Двуслойное множество $P_{[i,i+1]}$ называется $(\Delta, \varkappa, q, p)$*-полурасширителем*, если граф Γ_i является $(\Delta, \varkappa, q, p)$-полурасширителем.

Ранжированное множество $P = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$, $m \geqslant 1$, называется $(\Delta, \varkappa, q, p)$*-полурасширителем*, если при каждом $i = 0, 1, \ldots, m-1$ двуслойное множество $P_{[i,i+1]}$ является $(\Delta_i, \varkappa_i, q_i, p_i)$-полурасширителем, и при этом для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$ выполняется условие (2.1.6).

Ранжированное множество $P = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$, $m \geqslant 1$, называется *двусторонним* $(\Delta, \varkappa, q, p)$*-полурасширителем*, если множества P и $\overline{P} = (P_m, P_{m-1}, \ldots, P_0)$ являются $(\Delta, \varkappa, q, p)$-полурасширителями.

Пусть $m \geqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant m$. Ранжированное множество $P = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$ называется $(\Delta, \varkappa, q, p, r, s)$*-унимодальным*, если его подмножества $P_{[0,r]}$ и $\overline{P_{[s,m]}}$ являются полными $(\Delta, \varkappa, q, p)$-расширителями или однослойными (при $r = 0$, $s = m$) множествами, а $P_{[r,s]}$ является двусторонним $(\Delta, \varkappa, q, p)$-полурасширителем (при $r < s$) или однослойным множеством (при $r = s$).

Пусть $W(P)$ — множество всех антицепей в P и $\psi(P) = |W(P)|$. Для i, $r \leqslant i \leqslant s$, обозначим через $W_{\widehat{\Delta}}(P_{[i-1,i+1]})$ множество тех $A \subseteq W(P_{[i-1,i+1]})$, для которых каждая 2-компонента множеств $A \cap P_{i-1}$ и $B \cap P_{i+1}$ имеет мощность, не превосходящую Δ. Положим

$$\psi_{\widehat{\Delta}}(P_{[i-1,i+1]}) = \bigl|W_{\widehat{\Delta}}(P_{[i-1,i+1]})\bigr|.$$

Обозначим через $\overline{\Gamma}_{i+1}$ диаграмму ранжированного множества $\overline{P_{[i,i+1]}}$. Из [10] следует

Теорема 2.1.1. *Пусть множество $P = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$ является $(\Delta, \varkappa, q, p, r, s)$-унимодальным. Для всякого i, $r \leqslant i \leqslant s$, пусть I_i и $\overline{I}_i$ —*

функциональные пары, порожденные соответственно графами Γ_{i-1} *и* $\overline{\Gamma}_{i+1}$, *а* $|P_i| = \widehat{p}$. *Тогда*

$$\left(1 - 2^{-\varkappa\left(1 - O(\varkappa^{-1}\log\varkappa)\right)}\right)2^{\widehat{p}} \sum_{r \leqslant i \leqslant s} S\left(\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I_i) \cup \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(\overline{I}_i)\right) \leqslant \psi(P) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + 2^{-\log^2\varkappa}\right)^{m-2} 2^{\widehat{p}} \sum_{r \leqslant i \leqslant s} S\left(\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I_i) \cup \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(\overline{I}_i)\right).$$

§ 2.2. Унимодальность множества S_k^n

Пусть k — натуральное число, рассмотрим множество

$$S_k = \{-1, 0, 1, \ldots, k-1\}$$

и зададим на нем отношение частичного порядка $\preceq$ следующим образом: $i \preceq -1$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Положим $S_k^n = \left\{\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \colon\ \alpha_i \in S_k,\ i = 1, \ldots, n\right\}$. Пусть $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in S_k^n$, тогда $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \preceq \widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, если $\alpha_i \preceq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. *Весом набора* $\widetilde{\alpha}$ из S_k^n называется число $\|\widetilde{\alpha}\|$ его координат, равных -1. Вес набора является, очевидно, функцией ранга, поэтому S_k^n является ранжированным частично упорядоченным множеством. Через $S_{k,t}^n$ обозначим t-й слой множества S_k^n, состоящий из наборов веса t.

В данном параграфе доказана унимодальность множества S_k^n (теорема 2.2.3). Это позволяет свести задачу о числе антицепей в множестве S_k^n к задаче о числе антицепей в центральных слоях S_k^n (теорема 2.2.4). Сначала будет доказана расширительность множеств $(S_{k,t}^n, S_{k,t-1}^n)$ при $t > (n+1)/(k+1)$ (лемма 2.2.4) и полурасширительность множества $(S_{k,m+1}^n, S_{k,m}^n)$ при $m = (n-k)/(k+1)$ (лемма 2.2.9). Затем будет доказана расширительность множеств $(S_{k,t}^n, S_{k,t+1}^n)$ при $t < (n-k)/(k+1)$ (лемма 2.2.11) и полурасширительность множества $(S_{k,m}^n, S_{k,m+1}^n)$ при $m = (n-k)/(k+1)$ (лемма 2.2.13). При доказательстве расширительности двуслойного множества (X, Z) важную роль играет утверждение о том, что среди подмножеств A множества X с заданной мощностью наименьшую границу имеет «сжатое» подмножество, т.е. состоящее из первых $|A|$ наборов в некотором упорядочении множества X (см. [4]). В леммах 2.2.6, 2.2.7, 2.2.12 описано сжатое множество, мощность которого превышает $\frac{1}{2}|X|$. Это позволяет доказать полурасширительность центральных слоев S_k^n.

Заметим, что для всех $0 \leqslant t \leqslant k$

$$|S_{k,t}^n| = \binom{n}{t} k^{n-t}.$$

Лемма 2.2.1. *Пусть для целых* m *и* j, $0 \leqslant j \leqslant k$ *выполнено* $n = m(k+1) + j$, *тогда*

1. *для любого* $0 \leqslant t \leqslant n$ *справедливо* $|S_{k,m}^n| \geqslant |S_{k,t}^n|$,
2. *если* $j = k$, *то* $|S_{k,m}^n| = |S_{k,m+1}^n|$.

Нам понадобятся результаты, полученные С.Л. Безруковым в работе [4] для множества S_{k+1}^n.

Приведем определение упорядочения L_k^n вершин множества S_k^n. Для задания порядка сначала необходимо определить упорядочение N_k^n множества $S_{k,0}^n$. Отметим, что если $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in S_{k,0}^n$, то $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

для всех i. Обозначим через $S\Phi_k^n$ множество, полученное из S_{k-1}^n заменой в компонентах всех наборов символа 0 на 1, символа 1 на 2,..., символа $k-2$ на $k-1$. Пусть

$$H_k^n = \{\widetilde{\alpha} \in S_{k,0}^n\colon\ \alpha_i \in \{0, k-1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Определение порядка N_k^n дадим индукцией по k. Отметим, что при $k = 1$ множество $S_{1,0}^n$ состоит всего из одной вершины, так что можно считать, что порядок N_1^n определен.

Базис индукции. По определению положим, что при $k=2$ порядок N_2^n на множестве $S_{2,0}^n = B^n$ совпадает с лексикографическим при любом n.

Индуктивный переход. Будем считать, что при всех $1 \leqslant k' < k$ порядок $N_{k'}^n$ на множестве вершин $S_{k'}^n$ (а значит, и на $S\Phi_{k'}^n$) определен при всех n, и рассмотрим случай $k' = k$.

Положим, что вершина $\widetilde{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ из $S_{k,0}^n$ является самой младшей в порядке N_k^n, скажем, что она образует первый блок, и обозначим $B_1 = \{\widetilde{0}\}$. Пусть уже упорядочены все вершины из $S_{k,0}^n$, входящие в блоки с номерами $1, 2, \ldots, j$, и $j \leqslant 2^n$. Обозначим через $\widetilde{\alpha} \in H_k^n$ самую старшую в порядке N_k^n вершину из j-го блока B_j, и пусть $\widetilde{\beta} \in H_k^n$ — следующая за $\widetilde{\alpha}$ вершина в лексикографическом порядке. Построим совокупность B_{j+1} вершин $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, получающихся из вершины $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ заменой каждого $\beta_i \neq 0$ произвольным числом из множества $\{1, \ldots, k-1\}$ и каждого $\beta_i = 0$ на $\gamma_i = 0$ для всех i. Пусть $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2 \in B_{j+1}$ и s — число нулевых координат набора $\widetilde{\beta}$. Построим вершины $\widetilde{\gamma}_1'$ и $\widetilde{\gamma}_2'$, полученные соответственно из $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2$ вычеркиванием s нулевых координат. Отметим, что $\widetilde{\gamma}_1', \widetilde{\gamma}_2' \in S\Phi_{k,0}^{n-s}$. Положим $\widetilde{\gamma}_1 < \widetilde{\gamma}_2$ в порядке N_k^n, если и только если $\widetilde{\gamma}_1' < \widetilde{\gamma}_2'$ в порядке N_{k-1}^{n-s}. Кроме того, положим, что найденная таким образом из $(j+1)$-го блока самая младшая вершина является непосредственно следующей за $\widetilde{\alpha}$ в порядке N_k^n. Вершину $\widetilde{\beta}$ назовем *образующей* блока B_{j+1}.

Пусть теперь $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} \in S_k^n$. Обозначим через $]\widetilde{\alpha}[$ набор, полученный из $\widetilde{\alpha}$ заменой каждого $\alpha_i = -1$ на $k-1$, через $[\widetilde{\alpha}]$ — набор, полученный из $\widetilde{\alpha}$ заменой каждого $\alpha_i = -1$ на 0. Скажем что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ в порядке L_k^n, если и только если $]\widetilde{\alpha}[<]\widetilde{\beta}[$ в порядке N_k^n либо при $]\widetilde{\alpha}[=]\widetilde{\beta}[$ выполнено $[\widetilde{\alpha}] > [\widetilde{\beta}]$ в порядке N_k^n.

Пусть $A \subseteq S_{k,t}^n$, t — целое число. Обозначим через $CA \subseteq S_{k,t}^n$ множество, полученное заменой A на первые $|A|$ наборов из $S_{k,t}^n$ в порядке L_k^n, а через $LA \subseteq S_{k,t}^n$ — множество, полученное заменой A на последние $|A|$ наборов из $S_{k,t}^n$ в порядке L_k^n. Пусть $A \in S_{k,t}^n$. Совокупность всех наборов $\tau_r(A) \subseteq S_{k,r}^n$ назовем *r-тенью* множества A, если для любого $\widetilde{\beta} \in \tau_r(A)$ найдется сравнимый с ним в частичном порядке $\preceq$ набор $\widetilde{\alpha}$ из A. Положим $\tau_r(\widetilde{\beta}) = \tau_r(\{\widetilde{\beta}\})$.

Теорема 2.2.1[4]. *Пусть $A \subseteq S_{k,t}^n$, $r \geqslant 1$, тогда*

1. $\tau_{t-r}(CA) \subseteq C\tau_{t-r}(A)$,
2. *если* $CA=A$, *то* $\tau_{t-r}(CA) = C\tau_{t-r}(A)$.

Теорема 2.2.2[4]. *Пусть $A \subseteq S_{k,t}^n$, $r \geqslant 1$, тогда*

1. $\tau_{t+r}(LA) \subseteq L\tau_{t+r}(A)$,
2. *если* $LA=A$, *то* $\tau_{t+r}(A) = L\tau_{t+r}(A)$.

2.2.1. Расширительность пар слоев S_k^n с большими k. Для доказательства расширительности множества (X, Z) будем рассматривать множество $B \subseteq X$ и оценивать количество ребер в двудольном графе $\big(B, \partial(B)\big)$, которое, с одной стороны, равно количеству ребер, идущих из множества B в множество $\partial(B)$, а, с другой стороны, — количеству ребер, идущих из $\partial(B)$ в B.

Лемма 2.2.2[10]. *Пусть $G = (X, Z; E)$ — двудольный граф такой, что*

$$\max_{v \in Z} \sigma(v) = \nu, \qquad \min_{v \in X} \sigma(v) = \varkappa \quad \text{и} \quad \varkappa > \nu.$$

Тогда $G = (X, Z; E)$ является простым $(1, 1/\varkappa)$-расширителем.

Обозначим множество первых p наборов слоя $S_{k,t}^n$ в порядке L_k^n через $C_t(p)$. Положим $\widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$, $\|\widetilde{\alpha}\| = r$. Из определения порядка L_k^n следует, что $\tau_t(\widetilde{\alpha}) = C_t(|S_{k,t}^r|)$ для $t \leqslant r$.

Лемма 2.2.3. *Пусть $r = r(n, k, t, s) = \min\left\{i\colon \binom{i}{t} k^{i-t} \geqslant s\right\}$, положим $\widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$, $\|\widetilde{\alpha}\| = r$. Тогда*

$$C_t(s) \subseteq \tau_t(\widetilde{\alpha}). \tag{2.2.1}$$

Доказательство. Положим $q = |S_{k,t}^r| = \binom{r}{t} k^{r-t}$. Поскольку $s \leqslant q$, то

$$C_t(s) \subseteq C_t(q).$$

С другой стороны,

$$C_t(q) = \tau_t(\widetilde{\alpha}).$$

Отсюда вытекает (2.2.1).

Следствие 2.2.1. *Пусть $0 < t \leqslant n$, $r < n$, $A \subseteq S_{k,t}^n$ и $|A| \leqslant \binom{r}{t} k^{r-t}$. Тогда*

$$|A| kt \leqslant \big|\tau_{t-1}(A)\big|(r - t + 1). \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Положим $B = CA$, $\widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0, -1, \ldots, -1)$, $\|\widetilde{\alpha}\| = r$. В силу теоремы 2.2.1 имеем

$$\big|\tau_{t-1}(A)\big| \geqslant \big|\tau_{t-1}(B)\big|, \tag{2.2.3}$$

а из (2.2.1) при $|A| \leqslant \binom{r}{t} k^{r-t}$ получаем

$$B \subseteq \tau_t(\widetilde{\alpha}).$$

Заметим, что $\big|\tau_{t-1}(\widetilde{\beta})\big| = kt$ для всякого $\widetilde{\beta}$ из B, и $\big|\tau_t(\widetilde{\gamma})\big| = (r - t + 1)$ для всякого $\widetilde{\gamma}$ из $\tau_{t-1}(B)$. Число ребер $E(B)$ в двудольном графе $\big(B, \tau_{t-1}(B)\big)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$|B| kt = E(B) \leqslant \big|\tau_{t-1}(B)\big|(r - t + 1).$$

Отсюда с учетом (2.2.3) получаем (2.2.2).

Следствие 2.2.2. *Пусть $r < n$, $0 < t \leqslant n$, $A \subseteq S_{k,t}^n$ и $\big|\tau_{t-1}(A)\big| \leqslant \binom{r}{t-1} k^{r-t+1}$. Тогда выполнено неравенство* (2.2.2).

Доказательство. Покажем, что $|A| \leqslant \binom{r}{t} k^{r-t}$, тогда утверждение будет вытекать из следствия 2.2.1. Предположим, что $|A| > \binom{r}{t} k^{r-t}$. Пусть $B = CA$ и $s = \binom{r}{t-1} k^{r-t+1}$. Тогда существует набор $\widetilde{\beta}$ из $B \setminus C_t\left(\binom{r}{t} k^{r-t}\right)$ такой, что $\left|\tau_{t-1}(\widetilde{\beta}) \setminus C_{t-1}(s)\right| \geqslant 1$. Отсюда получаем

$$\left|\tau_{t-1}(A)\right| \geqslant \left|\tau_{t-1}(B)\right| \geqslant \binom{r}{t-1} k^{r-t+1} + 1 > \binom{r}{t-1} k^{r-t+1},$$

что противоречит условию.

Лемма 2.2.4. *Пусть $t > (n+1)/(k+1)$ и $\Gamma_t^n = (X, Z; E)$ — диаграмма Хассе множества $(S_{k,t}^n, S_{k,t-1}^n)$. Положим $X = S_{k,t}^n$, $Z = S_{k,t-1}^n$. Пусть Δ_t — наименьшее целое такое, что*

$$|X| \leqslant 2^{(\Delta_t+1)kt - 2\log_2^2(kt)}. \tag{2.2.4}$$

Тогда при достаточно больших n граф Γ_t^n является полным $(\Delta_t, kt, 1, 1)$-расширителем.

Доказательство. Положим $\varkappa = kt$, $\delta_1 = \varkappa^{-1}\log_2^2 \varkappa$, $\delta_2 = \varkappa^{-2}\log_2^9 \varkappa$, $g_1 = \varkappa^3 \log_2^{-7} \varkappa$, $\varepsilon_1 = g_1/|Z|$. Пусть $A \subseteq X = S_{k,t}^n$. Проверим выполнение условий (2.1.1) – (2.1.5). Выполнение условия (2.1.1) следует из того, что степень любой вершины $\widetilde{\beta} \in X$ равна kt. Степень любой вершины $\widetilde{\alpha} \in Z$ равна $n - t + 1$, кроме того, из условия следует, что

$$tk > n - t + 1, \tag{2.2.5}$$

поэтому выполняются условия (2.1.2) с $p = 1$ и (2.1.4). Условие (2.1.3) выполнено при $q = 1$, поскольку для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in X$

$$\left|\tau_{t-1}(\widetilde{\alpha}) \cap \tau_{t-1}(\widetilde{\beta})\right| \leqslant 1,$$

выполнение условия (2.1.5) следует из (2.2.4).

При достаточно больших n имеем $g_1 \leqslant \binom{t+2}{t-1} k^3$. Из следствия 2.2.2 при $r = t + 2$ вытекает, что для всякого $A \subseteq X$ такого, что $\left|\tau_{t-1}(A)\right| \leqslant g_1$, выполнено неравенство

$$|A| \leqslant \left|\tau_{t-1}(A)\right| \frac{3}{kt} \leqslant \left|\tau_{t-1}(A)\right|(1 - \delta_1). \tag{2.2.6}$$

Следовательно, граф Γ_t^n является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$-расширителем.

В силу (2.2.5) выполнены условия леммы 2.2.2, тогда для всякого $A \subseteq X$ имеем

$$|A| \leqslant \left|\tau_{t-1}(A)\right|(1 - \varkappa^{-1}) \leqslant \left|\tau_{t-1}(A)\right|(1 - \delta_2).$$

Это означает, что граф Γ_t^n является простым $(1, \delta_2)$-расширителем. Лемма доказана.

Из определения упорядочения L_k^n множества S_k^n следует, что для всех p, $0 \leqslant p \leqslant n$

$$C_{n-1}(p) = \\ = \{(0, -1, \ldots, -1), (-1, 0, -1, \ldots, -1), \ldots, (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{p-1}, 0, -1, \ldots, -1)\}.$$

Для $0 \leqslant p < n$ положим

$$T(n, k, t, p) = \tau_t\bigl(C_{n-1}(p+1)\bigr) \setminus \tau_t\bigl(C_{n-1}(p)\bigr).$$

Множество $T(n, k, t, p)$ состоит из наборов слоя S_k^n, у которых $(p+1)$-я координата равна нулю, а первые p координат отличны от нуля. Обозначим $t(n, k, t, p) = \bigl|T(n, k, t, p)\bigr|$, тогда

$$t(n, k, t, p) = k^{n-1-t} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{n-1-p}{t-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}, \tag{2.2.7}$$

где i-е слагаемое равно количеству наборов, в которых среди первых p координат ровно i имеют значение -1.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [11]).

Лемма 2.2.5. *При всех натуральных $k \geqslant 2$ выполнено*

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k} \leqslant \frac{1}{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}.$$

Лемма 2.2.6. *Пусть $k = 2$, n достаточно велико и таково, что для некоторого целого m выполнено $n = 3m+2$. Тогда*

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n-1}(2)\bigr)\bigr| \geqslant \frac{1}{2}|S^n_{2,\,m+1}|.$$

Доказательство. Вычислим $\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n-1}(2)\bigr)\bigr|$ при $m = (n-2)/3$. Множество $\tau_{m+1}\bigl(C_{n-1}(2)\bigr)$ состоит из наборов, у которых в первых двух координатах есть хотя бы один нуль. По формуле включений-исключений получаем

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n-1}(2)\bigr)\bigr| = 2 \cdot 2^{n-m-2}\binom{n-1}{m+1} - 2^{n-m-3}\binom{n-2}{m+1} =$$

$$= 2^{n-m-2}\binom{n-1}{m+1}\frac{5n-4}{3(n-1)}. \tag{2.2.8}$$

Теперь вычислим $\frac{1}{2}|S^n_{2,\,m+1}|$:

$$\frac{1}{2}|S^n_{2,\,m+1}| = 2^{n-m-2}\binom{n}{m+1} = 2^{n-m-2}\binom{n-1}{m+1}\frac{3n}{2n-1}. \tag{2.2.9}$$

При достаточно больших n из (2.2.8) и (2.2.9) следует утверждение леммы.

Лемма 2.2.7. *Пусть $k \geqslant 3$, n достаточно велико и таково, что для некоторого целого m выполнено $n = (k+1)m+k$. Тогда*

$$\bigl|\tau_{m+1}\bigl(C_{n-1}(k)\bigr)\bigr| \geqslant \frac{1}{2}|S^n_{k,\,m+1}|.$$

Доказательство. Из (2.2.7) следует, что для любых k, n и t, $p \leqslant n$ выполнено

$$t(n, k, t, p) \geqslant |S^{n-1}_{k,\,t}|\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}. \tag{2.2.10}$$

Кроме того, при $m = (n-k)/(k+1)$ выполнено

$$\frac{1}{2}|S^n_{k,\,m+1}| = \frac{1}{2}\binom{n}{m+1}k^{n-m-1} = |S^{n-1}_{k,\,m+1}|\frac{nk(k+1)}{2(kn-1)}. \tag{2.2.11}$$

Из определения $t(n, k, m, p)$, (2.2.10) и формулы суммы геометрической прогрессии следует, что

$$\left|\tau_{m+1}\big(C_{n-1}(k)\big)\right| = \sum_{p=0}^{k-1} t(n, k, m+1, p) \geqslant |S^{n-1}_{k, m+1}|k\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right). \tag{2.2.12}$$

Для $k=3$ из (2.2.11), (2.2.12) получаем, что при достаточно больших n

$$|S^{n-1}_{3, m+1}|\frac{3\cdot 19}{27} \geqslant |S^{n-1}_{3, m+1}|\frac{3\cdot 4n}{6n-2} = \frac{1}{2}|S^{n}_{3, m+1}|. \tag{2.2.13}$$

При $k\geqslant 4$ и достаточно больших n из (2.2.11) и леммы 2.2.5 следует, что

$$|S^{n-1}_{k, m+1}|k\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right) \geqslant |S^{n-1}_{k, m+1}|k\left(1-\frac{1}{e}\right) \geqslant$$
$$\geqslant |S^{n-1}_{k, m+1}|k\frac{n(k+1)}{2(kn-1)} = \frac{1}{2}|S^{n}_{k, m+1}|. \tag{2.2.14}$$

Теперь из (2.2.12) – (2.2.14) вытекает утверждение леммы.

Лемма 2.2.8. *При $k>1$, всех a, n и t, $p<n$ справедливо*

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-p}{t-i}a^i = \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}\binom{n-p}{t-i}a^i + \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}\binom{n-p}{t-1-i}a^{i+1}.$$

Утверждение следует из равенства $\binom{p}{i}=\binom{p-1}{i}+\binom{p-1}{i-1}$.

Лемма 2.2.9. *Пусть n таково, что для некоторого целого m выполнено $n=(k+1)m+k$ и $\Gamma^n_m=(X, Z; E)$ — диаграмма Хассе множества $(S^n_{k, m+1}, Z=S^n_{k, m})$. Положим $X=S^n_{k, m+1}$, $Z=S^n_{k, m}$. Тогда граф Γ^n_m является $\big(\Delta_{m+1}, n-m, 1, 1\big)$-полурасширителем, где $\Delta_{m+1}=\left\lceil\frac{k+1}{k}\log_2(k+1)\right\rceil-1$.*

Доказательство. Положим $\varkappa=k(m+1)=n-m=k(n+1)/(k+1)$. Пусть $A\subseteq X=S^n_{k, m+1}$ и $|A|\leqslant|X|/2=\frac{1}{2}\binom{n}{m+1}k^{n-m-1}$. Из лемм 2.2.6, 2.2.7 следует, что при $k\geqslant 2$

$$|A|\leqslant\left|\tau_{m+1}\big(C_{n-1}(k)\big)\right|.$$

Если $\left|\tau_m(A)\right| \leqslant \left|\tau_m\big(C_{n-1}(1)\big)\right| = \binom{n-1}{m}k^{n-m-1}$, то в силу следствия 2.2.2 имеем

$$|A|k(n+1)/(k+1)\leqslant\left|\tau_m(A)\right|(kn-1)/(k+1).$$

Отсюда получаем, что

$$|A|\leqslant\left|\tau_m(A)\right|(1-\delta_2).$$

Если $\binom{n-1}{m}k^{n-m-1}<\left|\tau_m(A)\right|$, то положим $B=CA$. Для каждого множества B существует p, $1\leqslant p\leqslant k-1$ такое, что

$$\left|\tau_{m+1}\big(C_{n-1}(p)\big)\right|<|B|\leqslant\left|\tau_{m+1}\big(C_{n-1}(p+1)\big)\right|. \tag{2.2.15}$$

Из теоремы 2.2.1 и (2.2.15) вытекает, что $B \subseteq \tau_{m+1}\big(C_{n-1}(p+1)\big)$. Пусть $\widetilde{\alpha} \in B$, тогда хотя бы одна из первых $p+1$ координат набора $\widetilde{\alpha}$ равна нулю. Это же свойство сохраняется у множества $\tau_m(B)$, поэтому

$$\tau_m\big(C_{n-1}(p)\big) \subseteq \tau_m(B) \subseteq \tau_m\big(C_{n-1}(p+1)\big). \tag{2.2.16}$$

Рассмотрим двудольный граф $\big(B, \tau_m(B)\big)$. Заметим, что $\big|\tau_m(\widetilde{\alpha})\big| = \varkappa$. Для $\widetilde{\beta} \in \tau_m(B)$ рассмотрим два случая.

1) В первых p координатах ровно один нуль, и значение $(p+1)$-й координаты отлично от нуля. Тогда $\big|\tau_{m+1}(\widetilde{\beta}) \cap B\big| = \varkappa - 1$. Каждый такой набор принадлежит множеству $\tau_m\big(C_{n-1}(p)\big)$. Пусть $\Phi(p)$ равно числу таких наборов, тогда

$$\Phi(p) = $$
$$= k^{n-m-1} \sum_{i=0}^{p-1} p\binom{p-1}{i}\left[\binom{n-p-1}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} + \binom{n-p-1}{m-1-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1-i}\right],$$

где i-е слагаемое равно количеству наборов, у которых среди первых p координат ровно i имеют значение -1, а значение $(p+1)$-й координаты отлично от нуля. С помощью лемм 2.2.5, 2.2.8 получаем при $p \leqslant k-1$

$$\Phi(p) = pk^{n-m-1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{n-p-1}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} \geqslant$$
$$\geqslant pk^{n-m-1}\binom{n-1}{m}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} \geqslant pk^{n-m-1}\binom{n-1}{m}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{p}{e}k^{n-m-1}\binom{n-1}{m}. \tag{2.2.17}$$

2) В остальных случаях $\big|\tau_{m+1}(\widetilde{\beta}) \cap B\big| \leqslant \varkappa$.

Число ребер $E(B)$ в графе $\big(B, \tau_m(B)\big)$ удовлетворяет соотношениям

$$|B|\varkappa = E(B) \leqslant \big|\tau_m(B)\big|\varkappa - \Phi(p),$$

следовательно,

$$|B| \leqslant \big|\tau_m(B)\big|\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\frac{\Phi(p)}{\big|\tau_m(B)\big|}\right).$$

В силу (2.2.7) и (2.2.16) имеем аналогично (2.2.12)

$$\big|\tau_m(B)\big| \leqslant \big|\tau_m\big(C_{n-1}(p+1)\big)\big| = \sum_{i=0}^{p} t(n, k, m, i) \leqslant$$
$$\leqslant (p+1)|S_{k,m}^{n-1}| = (p+1)k^{n-1-m}\binom{n-1}{m}. \tag{2.2.18}$$

Из (2.2.17), (2.2.18) вытекает, что при $p \geqslant 1$

$$\frac{\Phi(p)}{\big|\tau_m(B)\big|} \leqslant \frac{p}{e(p+1)} \leqslant \frac{1}{e},$$

следовательно,

$$|B| \leqslant \big|\tau_m(B)\big|(1-\delta_2). \tag{2.2.19}$$

Теперь из теоремы 2.2.1 следует, что граф Γ^n_m является простым $(1/2, \delta_2)$-расширителем. Поскольку (2.2.6) справедливо и для $m = (n + 1)/(k + 1)$, то граф Γ^n_m является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$-расширителем. Проверим выполнение условий (2.1.1) – (2.1.5). Выполнение условий (2.1.1), (2.1.2) с $p = 1$ и (2.1.4) следует из того, что степень любой вершины $\widetilde{\beta} \in X \cup Z$ равна $\varkappa = k(n+1)/(k+1) = n - m$. Условие (2.1.3) выполнено при $q = 1$, поскольку для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in X$

$$\left|\tau_m(\widetilde{\alpha}) \cap \tau_m(\widetilde{\beta})\right| \leqslant 1.$$

Проверим выполнение условия (2.1.5). Воспользуемся уточненной формулой Стирлинга и леммой 2.2.1, при $\Delta_{m+1} = \left\lceil \frac{k+1}{k} \log_2(k+1) \right\rceil - 1$ получим

$$|X| = |S^n_{k,\, m+1}| = |S^n_{k,\, m}| = \binom{n}{m} k^{n-m} = \frac{n!k^{n-m}}{m!(n-m)!} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n^{n+1/2} k^{\frac{nk+j}{k+1}} e^{1/(12n)}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n-j}{k+1}\right)^{\frac{n-j}{k+1} + \frac{1}{2}} \left(\frac{nk+j}{k+1}\right)^{\frac{nk+j}{k+1} + \frac{1}{2}}} \leqslant 2^{(n+1)\log_2(k+1)} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(\Delta_{m+1}+1)k(n+1)/(k+1) - 2\log_2^2\left(k(n+1)/(k+1)\right)}. \qquad (2.2.20)$$

Отсюда следует, что Γ^n_m является $\left(\Delta_{m+1}, n-m, 1, 1\right)$-полурасширителем.

2.2.2. Расширительность пар слоев S^n_k с малыми k. Положим для $t, p \leqslant n$

$$L_t(p) = S^n_{k,\, t} \setminus \tau_t\left(C_{n-1}(p)\right).$$

Множество $L_t(p)$ состоит из наборов, в которых значения первых p координат отличны от нуля. Нетрудно видеть, что

$$\left|L_t(n)\right| = \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}. \qquad (2.2.21)$$

Лемма 2.2.10. *Пусть $A \subseteq S^n_{k,\, t}$, $0 \leqslant t < n-1$ и $|A| \leqslant \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$. Тогда*

$$|A|(n-t) \leqslant \left|\tau_{t+1}(A)\right|(t+1)(k-1). \qquad (2.2.22)$$

Доказательство. Положим $B = LA$. В силу теоремы 2.2.2 имеем

$$\left|\tau_{t+1}(A)\right| \geqslant \left|\tau_{t+1}(B)\right|. \qquad (2.2.23)$$

Поскольку $|B| \leqslant \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$, то из (2.2.21) получаем

$$B \subseteq L_t(n).$$

Заметим, что $\left|\tau_{t+1}(\widetilde{\beta})\right| = n - t$ для всякого $\widetilde{\beta}$ из B, и $\left|\tau_t(\widetilde{\gamma})\right| = (t+1)(k-1)$ для всякого $\widetilde{\gamma}$ из $\tau_{t+1}(B)$. Число ребер $E(B)$ в двудольном графе $\left(B, \tau_{t+1}(B)\right)$ удовлетворяет соотношениям

$$|B|(n-t) = E(B) \leqslant \left|\tau_{t+1}(B)\right|(t+1)(k-1).$$

Отсюда с учетом (2.2.23) получаем (2.2.22).

Следствие 2.2.3. *Пусть* $A \subseteq S^n_{k,t}$, $t < n-1$ *и* $\left|\tau_{t+1}(A)\right| \leqslant \leqslant \binom{n}{t+1}(k-1)^{r-t-1}$. *Тогда выполнено неравенство* (2.2.22).

Доказательство. Покажем, что $|A| \leqslant \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$. Утверждение будет вытекать из леммы 2.2.10. Предположим, что $|A| > \binom{n}{t}(k-1)^{n-t}$. Пусть $B = LA$, тогда существует набор $\widetilde{\beta}$ из $B \setminus L_t(n)$ такой, что

$$\left|\tau_{t+1}(\widetilde{\beta}) \setminus L_{t+1}(n)\right| \geqslant 1.$$

Отсюда при $t < n-1$ получаем

$$\left|\tau_{t+1}(A)\right| \geqslant \left|\tau_{t+1}(B)\right| \geqslant \binom{n}{t+1}k^{n-t-1} + 1 > \binom{n}{t+1}k^{n-t-1},$$

что противоречит условию.

Лемма 2.2.11. *Пусть* $t < (n-k)/(k+1)$ *и* $\overline{\Gamma}^n_t = (\overline{X}, \overline{Z}; \overline{E})$ — *диаграмма Хассе множества* $(S^n_{k,t}, S^n_{k,t+1})$. *Положим* $\overline{X} = S^n_{k,t}$, $\overline{Z} = S^n_{k,t+1}$. *Пусть* Δ_t — *наименьшее целое такое, что*

$$|\overline{X}| \leqslant 2^{(\Delta_t+1)(n-t) - 2\log_2^2(n-t)}. \tag{2.2.24}$$

Тогда при достаточно больших n *граф* $\overline{\Gamma}^n_t$ *является полным* $(\Delta_t, n-t, 1, 1)$*-расширителем.*

Доказательство. Положим $\varkappa = n-t$. Проверим выполнение условий (2.1.1) − (2.1.5). Выполнение условия (2.1.1) следует из того, что степень любой вершины $\widetilde{\beta} \in \overline{X}$ равна $n-t$. Степень любой вершины $\widetilde{\alpha} \in \overline{Z}$ равна $k(t+1)$, кроме того, из условия следует, что

$$n - t > k(t+1), \tag{2.2.25}$$

поэтому выполнены условия (2.1.2) с $p=1$ и (2.1.4). Условие (2.1.3) выполнено при $q=1$, поскольку для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \overline{X}$

$$\left|\tau_{t+1}(\widetilde{\alpha}) \cap \tau_{t+1}(\widetilde{\beta})\right| \leqslant 1,$$

выполнение условия (2.1.5) следует из (2.2.24).

При достаточно больших n имеем $g_1 \leqslant \binom{n}{t+1}(k-1)^{n-t-1}$. Из следствия 2.2.3 вытекает, что для всякого $A \subseteq \overline{X}$ такого, что $\left|\tau_{t+1}(A)\right| \leqslant g_1$ выполнено неравенство

$$|A| \leqslant \left|\tau_{t+1}(A)\right| \frac{(t+1)(k-1)}{n-t} \leqslant \left|\tau_{t+1}(A)\right|(1-\delta_1). \tag{2.2.26}$$

Отсюда вытекает, что граф $\overline{\Gamma}^n_t$ является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$-расширителем.

В силу (2.2.25) выполнены условия леммы 2.2.2, следовательно, для всякого $A \subseteq X$ имеем

$$|A| \leqslant \left|\tau_{t+1}(A)\right|(1-\varkappa^{-1}) \leqslant \left|\tau_{t+1}(A)\right|(1-\delta_2).$$

Это означает, что граф $\overline{\Gamma}_t^n$ является простым $(1,\delta_2)$-расширителем. Лемма доказана.

Лемма 2.2.12. *Пусть n достаточно велико и таково, что для некоторого целого m выполнено $n=(k+1)m+k$. Тогда*

$$\left|L_m(\lfloor k/2\rfloor)\right| \geqslant \tfrac{1}{2}|S_{k,m}^n|. \tag{2.2.27}$$

Доказательство. Из определения $L_m(p)$ следует, что (2.2.27) эквивалентно следующему неравенству:

$$\left|\tau_m\big(C_{n-1}(\lfloor k/2\rfloor)\big)\right| \leqslant \tfrac{1}{2}|S_{k,m}^n|.$$

Из (2.2.7) следует, что для любых k, n и m, $p\leqslant n$ выполнено

$$t(n,k,m,p)\leqslant |S_{k,m}^{n-1}|. \tag{2.2.28}$$

При достаточно больших n и $m=(n-k)/(k+1)$ выполнено

$$\tfrac{1}{2}|S_{k,m}^n| = \tfrac{1}{2}\binom{n}{m}k^{n-m} = \frac{n(k+1)}{2(n+1)}|S_{k,m}^{n-1}| \geqslant \left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor |S_{k,m}^{n-1}|. \tag{2.2.29}$$

Из определения $t(n,k,m,p)$ и (2.2.28) имеем

$$\left|\tau_m\big(C_{n-1}(\lfloor k/2\rfloor)\big)\right| = \sum_{p=0}^{\lfloor k/2\rfloor-1} t(n,k,m,p) \leqslant \lfloor k/2\rfloor |S_{k,m}^{n-1}|. \tag{2.2.30}$$

Теперь из (2.2.29) и (2.2.30) следует утверждение леммы.

Лемма 2.2.13. *Пусть $n=(k+1)m+k$ и $\overline{\Gamma}_m^n=(\overline{X},\overline{Z};\overline{E})$ — диаграмма Хассе множества $(S_{k,m}^n, S_{k,m+1}^n)$. Положим $\overline{X}=S_{k,m}^n$, $\overline{Z}=S_{k,m+1}^n$. Тогда граф $\overline{\Gamma}_m^n$ является $\big(\Delta_m, n-m, 1, 1\big)$-полурасширителем, где $\Delta_m=\left\lceil \frac{k+1}{k}\log_2(k+1)\right\rceil-1$.*

Доказательство. Положим $\varkappa=n-m=k(n+1)/(k+1)$. Пусть $A\subseteq X=S_{k,m}^n$ и $|A|\leqslant|\overline{X}|/2=\frac{1}{2}\binom{n}{m}k^{n-m}$. Из леммы 2.2.12 следует, что

$$|A|\leqslant \left|L_m(\lfloor k/2\rfloor)\right|.$$

Если $\left|\tau_{m+1}(A)\right| \leqslant \left|L_{m+1}(n)\right| = \binom{n}{m+1}(k-1)^{n-m-1}$, то в силу следствия 2.2.3 имеем

$$|A|k(n+1)/(k+1)\leqslant \left|\tau_{m+1}(A)\right|(k-1)(n+1)/(k+1),$$

следовательно,

$$|A|\leqslant \left|\tau_{m+1}(A)\right|(1-\delta_2).$$

Если $\binom{n}{m+1}(k-1)^{m-n-1}<\left|\tau_{m+1}(A)\right|$, положим $B=LA$. Для каждого множества B существует p, $\lfloor k/2\rfloor\leqslant p\leqslant n-1$ такое, что

$$\left|L_m(p+1)\right| < |B| \leqslant \left|L_m(p)\right|. \tag{2.2.31}$$

Из теоремы 2.2.2 и (2.2.31) вытекает, что $B\subseteq L_m(p)$. Пусть $\widetilde{\alpha}\in B$, тогда ни одна из первых p координат набора $\widetilde{\alpha}$ не равна нулю. Это же свойство сохраняется у всех наборов из множества $\tau_m(B)$, поэтому

$$L_{m+1}(p+1)\subseteq \tau_{m+1}(B)\subseteq L_{m+1}(p). \tag{2.2.32}$$

Рассмотрим двудольный граф $(B, \tau_m(B))$. Заметим, что $|\tau_{m+1}(\widetilde{\alpha})| = \varkappa$. Для $\widetilde{\beta} \in \tau_{m+1}(B)$ рассмотрим два случая.

1) $\widetilde{\beta} \in L_{m+1}(p+1)$, и ровно i, $0 \leqslant i \leqslant p$ из первых p координат имеют значение -1, тогда $|\tau_m(\widetilde{\beta}) \cap B| = \varkappa - i$.

2) В остальных случаях $|\tau_m(\widetilde{\beta}) \cap B| \leqslant \varkappa$.

Положим

$$\Psi(p) = k^{n-1-m} \sum_{i=0}^{p} i \binom{p}{i} \left[\binom{n-1-p}{m+1-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p+1-i} + \binom{n-1-p}{m-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} \right],$$

где i-е слагаемое равно числу ребер, идущих из вершины $\widetilde{\beta} \in \tau_{m+1}(B)$ в множество $\tau_m(\widetilde{\beta}) \setminus B$, причем среди первых p координат набора $\widetilde{\beta}$ ровно i имеют значение -1, а значение $(p+1)$-й координаты отлично от нуля.

С использованием леммы 2.2.8 получим, что

$$\Psi(p) = pk^{n-1-m} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{n-1-p}{m-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}. \tag{2.2.33}$$

Тогда

$$|B|\varkappa \leqslant |\tau_{m+1}(B)|\varkappa - \Psi(p),$$

следовательно,

$$|B| \leqslant |\tau_{m+1}(B)| \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \frac{\Psi(p)}{|\tau_{m+1}(B)|}\right). \tag{2.2.34}$$

Из (2.2.32) следует, что

$$|\tau_{m+1}(B)| \leqslant |L_{m+1}(p)| = k^{n-m-1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{n-p}{m+1-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}, \tag{2.2.35}$$

где i-е слагаемое равно числу наборов, у которых среди первых p координат ровно i имеют значение -1.

Рассмотрим три случая.

1) $\lfloor k/2 \rfloor \leqslant p \leqslant m+1$, тогда из (2.2.35) получаем

$$|\tau_{m+1}(B)| \leqslant k^{n-m-1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{n-1-p}{m+1-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} + k^{n-m-1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{n-1-p}{m-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} =$$

$$= k^{n-m-1} \binom{n-1-p}{m+1} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p} + k^{n-m-1} \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i+1} \binom{n-1-p}{m-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1-i} + k^{n-m-1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{n-1-p}{m-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}. \tag{2.2.36}$$

Покажем, что при $p \geqslant \lfloor k/2 \rfloor$

$$6\Psi(p) \geqslant |\tau_{m+1}(B)|. \tag{2.2.37}$$

Имеем при $m=(n-k)/(k+1)$

$$3p\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}\geqslant 3p\binom{n-1}{m}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}=$$
$$=\frac{3p(m+1)}{n-m-1}\binom{n-1}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{3p}{k}\binom{n-1}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}\geqslant\binom{n-1-p}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}. \qquad (2.2.38)$$

Кроме того, при всех p, $k\geqslant 2$ и всех $0\leqslant i\leqslant p$

$$2p\binom{p}{i}=\frac{2p(i+1)}{p-i}\binom{p}{i+1}\geqslant 2\binom{p}{i+1}\geqslant\frac{k}{k-1}\binom{p}{i+1},$$

следовательно,

$$2p\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}\geqslant\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i+1}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i-1}. \qquad (2.2.39)$$

Теперь из (2.2.33), (2.2.38), (2.2.39) и (2.2.36) вытекает (2.2.37). Отсюда и из (2.2.34) получаем, что при $p\geqslant\lfloor k/2\rfloor$

$$|B|\leqslant\left|\tau_m(B)\right|\left(1-\frac{1}{6\varkappa}\right). \qquad (2.2.40)$$

2) $m+2\leqslant p\leqslant n-2-m$, тогда из (2.2.33) следует, что

$$\Psi(p)=pk^{n-1-m}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}, \qquad (2.2.41)$$

из (2.2.35) получаем

$$\left|\tau_{m+1}(B)\right|\leqslant k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m+1}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m+1-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}+$$
$$+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}=$$
$$=k^{n-m-1}\binom{n-1-p}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}+$$
$$+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i+1}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1-i}+$$
$$+k^{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}. \qquad (2.2.42)$$

Покажем, что при $m+2\leqslant p\leqslant n-2-m$

$$4\Psi(p)\geqslant\left|\tau_{m+1}(B)\right| \qquad (2.2.43)$$

Имеем

$$p\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}\geqslant p\binom{n-1}{m}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{p}{k}\binom{n-1}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}\geqslant\binom{n-1-p}{m+1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p}. \qquad (2.2.44)$$

Теперь из (2.2.39), (2.2.41), (2.2.44) и (2.2.42) вытекает (2.2.43) при $p \geqslant m+$ $+2$. Отсюда и из (2.2.34) получаем, что при $m+2 \leqslant p \leqslant n-2-m$

$$|B| \leqslant \left|\tau_m(B)\right|\left(1 - \frac{1}{4\varkappa}\right). \tag{2.2.45}$$

3) $n-1-m \leqslant p \leqslant n-1$, тогда из (2.2.33) следует, что

$$\Psi(p) = pk^{n-1-m} \sum_{i=p+1+m-n}^{m} \binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}, \tag{2.2.46}$$

из (2.2.35) получаем

$$\left|\tau_{m+1}(B)\right| \leqslant k^{n-m-1} \sum_{i=p+2+m-n}^{m+1} \binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m+1-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} + \\ + k^{n-m-1} \sum_{i=p+1+m-n}^{m} \binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i} =$$

$$= k^{n-m-1} \sum_{i=p+1+m-n}^{m} \binom{p}{i+1}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-1-i} + \\ + k^{n-m-1} \sum_{i=p+1+m-n}^{m} \binom{p}{i}\binom{n-1-p}{m-i}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{p-i}. \tag{2.2.47}$$

Теперь из (2.2.39), (2.2.46) и (2.2.47) следует, что при $p \geqslant n-1-m$

$$3\Psi(p) \geqslant \left|\tau_m(B)\right|,$$

отсюда и из (2.2.34) получаем, что

$$|B| \leqslant \left|\tau_m(B)\right|\left(1 - \frac{1}{3\varkappa}\right). \tag{2.2.48}$$

Из теоремы 2.2.2, (2.2.40), (2.2.45) и (2.2.48) следует, что

$$|A| \leqslant \left|\tau_{m+1}(A)\right|(1 - \delta_2).$$

Поскольку (2.2.26) справедливо и для $m = (n-k)/(k+1)$, то граф $\overline{\Gamma}^n_m$ является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$-расширителем. Выполнение условий (2.1.1), (2.1.2) при $p = 1$ и (2.1.4) следует из того, что степень каждой вершины $\widetilde{\beta} \in \overline{X} \cup \overline{Z}$ равна $\varkappa = k(n+1)/(k+1) = n - m$. Условие (2.1.3) выполнено при $q = 1$, поскольку для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \overline{X}$

$$\left|\tau_{m+1}(\widetilde{\alpha}) \cap \tau_{m+1}(\widetilde{\beta})\right| \leqslant 1.$$

Проверим выполнение условия (2.1.5). Из (2.2.20) следует, что при $\Delta_m = \lceil \frac{k+1}{k} \log_2(k+1) \rceil - 1$

$$|\overline{X}| = |S^n_{k,m}| = \binom{n}{m} k^{n-m} \leqslant 2^{(\Delta_m + 1)k(n+1)/(k+1) - 2\log_2^2(k(n+1)/(k+1))}.$$

Следовательно, граф Γ^n_m является $\left(\Delta_m, n-m, 1, 1\right)$-полурасширителем. Лемма доказана.

2.2.3. Доказательство основного результата.

Теорема 2.2.3. *Пусть $n=(k+1)m+i$ для некоторых целых m и i, $0\leqslant i\leqslant k$. Положим $\Delta=\left\lceil \frac{k+1}{k}\log_2(k+1)\right\rceil-1$. Тогда при достаточно больших m и $0\leqslant i\leqslant k-1$ множество S_k^n является $(\Delta, n-m+1, 1, 2, m, m)$-унимодальным. При $i=k$ множество S_k^n является $(\Delta, n-m, 1, 2, m, m+1)$-унимодальным.*

Доказательство. Положим $\varkappa=\lceil k(n+1)/(k+1)\rceil$. При $t\leqslant(n-k)/(k+1)$ степень вершины $\widetilde{\beta}\in S_{k,t}^n$ в графе $\overline{\Gamma}_t^n$ равна $n-t\geqslant\varkappa$. При $t\geqslant(n+1)/(k+1)$ степень вершины $\widetilde{\beta}\in X=S_{k,t}^n$ в графе Γ_t^n равна $tk\geqslant\varkappa$. Степень вершины $\widetilde{\beta}\in S_{k,t}^n$ в S_k^n равна $n+t(k-1)\leqslant 2\varkappa\leqslant\varkappa^2$. Выполнение условия (2.1.5) следует из леммы 2.2.1, (2.1.6) и (2.2.20).

В силу леммы 2.2.4 при каждом $t>(n+1)/(k+1)$ граф Γ_t^n является полным $(\Delta_t, kt, 1, 1)$-расширителем. Таким образом, множество $\left(S_{k,n}^n, \ldots, S_{k,\lceil(n+1)/(k+1)\rceil}^n\right)$ является полным $(\Delta, \varkappa, 1, 2)$-расширителем.

В силу леммы 2.2.11 при каждом $t<(n-k)/(k+1)$ граф $\overline{\Gamma}_t^n$ является полным $(\Delta_t, n-t, 1, 1)$-расширителем. Таким образом, множество $\left(S_{k,0}^n, \ldots\right.$ $\left.\ldots, S_{k,\lfloor(n-k)/(k+1)\rfloor}^n\right)$ является полным $(\Delta, \varkappa, 1, 2)$-расширителем.

В силу лемм 2.2.9 и 2.2.13 при $n=(k+1)m+k$ графы Γ_m^n и $\overline{\Gamma}_m^n$ являются $(\Delta_m, \varkappa, 1, 1)$-полурасширителями, поскольку $\Delta_m=\Delta_{m+1}$.

Из сказанного вытекает утверждение теоремы.

Обозначим через $\psi(S_k^n)$ число антицепей в множестве S_k^n. Из статьи [10] следует

Теорема 2.2.4. *Пусть $n=(k+1)m+i$ для некоторых целых m и i, $0\leqslant i\leqslant k$. Положим $\Delta=\left\lceil \frac{k+1}{k}\log_2(k+1)\right\rceil-1$. Тогда при достаточно больших m и $0\leqslant i\leqslant k-1$*

$$\psi(S_k^n)=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2 n}\right)\right)\psi_{\widehat{\Delta}}\left(S_{k,m-1}^n\cup S_{k,m}^n\cup S_{k,m+1}^n\right).$$

При достаточно больших m и $i=k$

$$\psi(S_k^n)=$$
$$=\left(1+O\left(2^{-\log_2^2 n}\right)\right)\left(\psi_{\widehat{\Delta}}\left(S_{k,m-1}^n\cup S_{k,m}^n\cup S_{k,m+1}^n\right)+\psi_{\widehat{\Delta}}\left(S_{k,m}^n\cup S_{k,m+1}^n\cup S_{k,m+2}^n\right)\right).$$

§ 2.3. Асимптотика числа антицепей в S_k^n

В параграфе показано, что функциональные пары, порожденные тройками соседних центральных слоев S_k^n являются $(3, \varkappa, q, c)$-ординарными при подходящих $\varkappa$, q и c (лемма 2.3.1). С помощью теоремы 1.4.3 получена асимптотика числа антицепей (теорема 2.3.2).

Обозначим через $\widetilde{\Gamma}_t^n=(\widetilde{X}_t, \widetilde{Z}_t; \widetilde{E}_t)$ двудольный граф с долями вершин $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{Z}_t$, где $\widetilde{X}_t=S_{k,t-1}^n\cup S_{k,t+1}^n$, $\widetilde{Z}_t=S_{k,t}^n$ $1\leqslant t\leqslant n-1$ и множеством ребер

$$\widetilde{E}_t=\left\{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}\colon\ \widetilde{\alpha}\in\widetilde{X}_t, \widetilde{\beta}\in\widetilde{Z}_t\ \ \widetilde{\alpha}\preceq\widetilde{\beta} \text{ или } \widetilde{\beta}\preceq\widetilde{\alpha}\right\}.$$

Для $A\subseteq\widetilde{X}_t$ полагаем

$$\widetilde{\partial}(A)=\left\{\widetilde{\beta}\in\widetilde{Z}_t\colon\ \exists\,\widetilde{\alpha}\in A\ \ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}\in\widetilde{E}_t\right\}$$

и $\widetilde{f}_t(A)=2^{-|\widetilde{\partial}(A)|}$. Обозначим через $\widetilde{I}_t^n$ функциональную пару $(\widetilde{X}_t, \widetilde{f}_t)$, порожденную графом $\widetilde{\Gamma}_t^n=(\widetilde{X}_t, \widetilde{Z}_t; \widetilde{E}_t)$.

Лемма 2.3.1. *Пусть* $n = m(k+1) + i$ *для некоторых целых* m *и* i, $0 \leqslant i \leqslant k$. *Пусть* m *достаточно велико,* $\Delta = \left\lceil \frac{k+1}{k} \log_2(k+1) \right\rceil - 1$, $\varkappa = \lceil k(n+1)/(k+1) \rceil$. *Тогда если* $0 \leqslant i \leqslant k-1$, *то функциональная пара* $\widetilde{I}^n_m = (\widetilde{X}_m, \widetilde{f}_m)$ *является* $(\Delta, \varkappa, 2, 3)$*-ординарной. Если* $i = k$, *то функциональные пары* $\widetilde{I}^n_m = (\widetilde{X}_m, \widetilde{f}_m)$ *и* $\widetilde{I}^n_{m+1} = (\widetilde{X}_{m+1}, \widetilde{f}_{m+1})$ *являются* $(\Delta, \varkappa, 2, 3)$*-ординарными.*

Доказательство. Убедимся сначала в выполнении условия (1.4.2). Это следует из того, что при $0 \leqslant i \leqslant k-1$ минимальная степень вершины $\widetilde{\beta} \in \widetilde{X}_m$ в графе $\widetilde{\Gamma}^n_m$ равна $(kn+k+i+1)/(k+1)$, а при $i = k$ минимальная степень вершин $\widetilde{\beta} \in \widetilde{X}_m$ в графе $\widetilde{\Gamma}^n_m$ и $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{X}_{m+1}$ в графе $\widetilde{\Gamma}^n_{m+1}$ равна $k(n+1)/(k+1)$, а также из того, что по определению $\widetilde{f}_t(\{\widetilde{\beta}\}) = 2^{-|\widetilde{\partial}(\{\widetilde{\beta}\})|}$.

Проверим выполнение условия (1.4.1). Из (2.2.20) следует, что

$$|S^n_{k,m}| \leqslant 2^{(n+1)\log_2(k+1)}.$$

При достаточно больших n и $(n-k)/(k+1) \leqslant t \leqslant (n+1)/(k+1)$ из леммы 2.2.1 имеем

$$|\widetilde{X}_t| = |S^n_{k,t-1}| + |S^n_{k,t+1}| \leqslant 2 \cdot 2^{(n+1)\log_2(k+1)}.$$

Положим $\Delta = \left\lceil \frac{k+1}{k} \log_2(k+1) \right\rceil - 1$, $\varkappa = \lceil k(n+1)/(k+1) \rceil$. Тогда при $t \in \{m, m+1\}$ имеем

$$|\widetilde{X}_t| \leqslant 2 \cdot 2^{(n+1)\log_2(k+1)} \leqslant 2^{(\Delta+1)\varkappa - 2\log_2^2 \varkappa}. \tag{2.3.1}$$

Из (2.3.1) при достаточно больших n вытекает справедливость (1.4.1).

Убедимся в справедливости условия (1.4.3) при $q = 2$. Заметим, что в графе $\widetilde{\Gamma}^n_t = (\widetilde{X}_t, \widetilde{Z}_t; \widetilde{E}_t)$ для любых двух вершин $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \widetilde{X}_t$ справедливо

$$\left|\widetilde{\partial}(\{\widetilde{\alpha}\}) \cap \widetilde{\partial}(\{\widetilde{\beta}\})\right| \leqslant 2.$$

Отсюда следует, что для любого $A \subseteq \widetilde{X}_t$ выполнено

$$\left|\widetilde{\partial}(A \setminus \{\widetilde{\beta}\}) \cap \widetilde{\partial}(\{\widetilde{\beta}\})\right| \leqslant \sum_{\widetilde{\alpha} \in A \setminus \{\widetilde{\beta}\}} \left|\widetilde{\partial}(\{\widetilde{\alpha}\}) \cap \widetilde{\partial}(\{\widetilde{\beta}\})\right| \leqslant |A| - 2.$$

По формуле включений-исключений имеем

$$\left|\widetilde{\partial}(A)\right| \geqslant \left|\widetilde{\partial}(A \setminus \{\widetilde{\beta}\})\right| + \left|\widetilde{\partial}(\{\widetilde{\beta}\})\right| - |A| + 2.$$

Отсюда

$$\widetilde{f}_t(A) \leqslant \widetilde{f}_t(A \setminus \{\widetilde{\beta}\}) \cdot \widetilde{f}_t(\{\widetilde{\beta}\}) 2^{|A|-2}.$$

Таким образом неравенство (1.4.3) выполнено при $q = 2$.

Наконец, убедимся, что при достаточно больших n и t, $(n-k)/(k+1) \leqslant t \leqslant (n+1)/(k+1)$, выполнено свойство (1.4.4), т.е. при указанном $\varkappa$ и $c = 3$ для всех $\widetilde{\beta} \in \widetilde{X}_t$ и натуральных p

$$\left|\mathscr{A}_{\{\widetilde{\beta}\},\widehat{p}}(\widetilde{I}^n_t)\right| \leqslant \varkappa^{3p}.$$

Заметим, что $B \in \mathscr{A}_{\{\widetilde{\beta}\}}(\widetilde{I}_t^n)$ означает, что множество B является 2-связным, и что существует элемент $\widetilde{\alpha} \in B$ такой, что $\{\widetilde{\alpha}\}\#\{\widetilde{\beta}\}$. В свою очередь $\{\widetilde{\alpha}\}\#\{\widetilde{\beta}\}$ означает, что $\rho_{\widetilde{\Gamma}_t^n}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 2$. Для выбора множества $B \in \mathscr{A}_{\{\widetilde{\beta}\}}(\widetilde{I}_t^n)$ достаточно указать вершину $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{X}_t$ такую, что $\rho_{\widetilde{\Gamma}_t^n}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant 2$, и 2-связное множество $B \subseteq \widetilde{X}_t$ такое, что $\widetilde{\alpha} \in B$.

Степень вершины $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Z}_t$ в графе $\widetilde{\Gamma}_t^n$ равна $kt + (n - t)$. Таким образом, граф $\widetilde{\Gamma}_t^n = (\widetilde{X}_t, \widetilde{Z}_t; \widetilde{E}_t)$ леммы 1.4.5 с $\Delta \leqslant k\varkappa$. Поскольку $k\varkappa \geqslant 4$, то имеем

$$n_2(\{\widetilde{\alpha}\}, a) \leqslant \big(4(k\varkappa)^2\big)^{a-1} \leqslant \varkappa^{3(a-1)}. \tag{2.3.2}$$

Для любой вершины $\widetilde{\beta} \in \widetilde{X}_t$ число вершин $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{X}_t$ таких, что $\rho_{\widetilde{\Gamma}_t^n}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 2$, не превосходит $\big(tk + (n - t) - 1\big)\max\{n - t + 1, k(t + 1)\}$. При $(n - k)/(k + 1) \leqslant t \leqslant (n + 1)/(k + 1)$ это не превосходит $k\varkappa^2$. Из сказанного с учетом (2.3.2) следует, что при достаточно больших n

$$\left|\mathscr{A}_{\{\widetilde{\beta}\}, \widehat{p}}(\widetilde{I}_t^n)\right| \leqslant k\varkappa^2 \sum_{1 \leqslant a \leqslant p} \varkappa^{3(a-1)} \leqslant \varkappa^{3p}.$$

Таким образом, неравенство (1.4.4) выполнено при указанном $\varkappa$ и $c = 3$.

Лемма доказана.

Замечание 2.3.1. Из (2.2.20) и (2.3.1) следует, что $\Delta = 2$ при $1 \leqslant k \leqslant 4$ и $\Delta = 3$ при $5 \leqslant k \leqslant 11$.

Пусть $t > (n+1)/(k+1)$ и $\Gamma_t^n = (X_t, Z_t; E_t)$ — двудольный граф с долями вершин $X_t = S_{k,t}^n$, $Z_t = S_{k,t-1}^n$ и множеством ребер

$$E_t = \big\{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}\colon\ \widetilde{\alpha} \in X_t, \widetilde{\beta} \in Z_t\ \ \widetilde{\beta} \preceq \widetilde{\alpha}\big\}.$$

Для $A \subseteq X_t$ полагаем

$$\partial(A) = \big\{\widetilde{\beta} \in Z_t\colon\ \exists\, \widetilde{\alpha} \in A\ \ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in E_t\big\}$$

и $f(A) = 2^{-|\partial(A)|}$. Обозначим через I_t^n функциональную пару (X_t, f), порожденную графом $\Gamma_t^n = (X_t, Z_t; E_t)$.

Пусть $t < (n - k)/(k + 1)$ и $\overline{\Gamma}_t^n = (\overline{X}_t, \overline{Z}_t; \overline{E}_t)$ — двудольный граф с долями вершин $\overline{X}_t = S_{k,t}^n$, $\overline{Z}_t = S_{k,t+1}^n$ и множеством ребер

$$\overline{E} = \big\{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}\colon\ \widetilde{\alpha} \in \overline{X}_t, \widetilde{\beta} \in \overline{Z}_t\ \ \widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}\big\}.$$

Для $A \subseteq \overline{X}_t$ полагаем

$$\overline{\partial}(A) = \big\{\widetilde{\beta} \in \overline{Z}_t\colon\ \exists\, \widetilde{\alpha} \in A\ \ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \overline{E}\big\}$$

и $\overline{f}(A) = 2^{-|\overline{\partial}(A)|}$. Через $\overline{I}_t^n$ обозначим функциональную пару $(\overline{X}_t, \overline{f})$, порожденную графом $\overline{\Gamma}_t^n = (\overline{X}_t, \overline{Z}_t; \overline{E})$.

Лемма 2.3.2. *Пусть $n = m(k+1) + i$ для некоторых целых m и i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $t = m$ при $0 \leqslant i \leqslant k - 1$, и $t \in \{m, m+1\}$ при $i = k$. Пусть также $\widetilde{I}_t^n = (\widetilde{X}_t, \widetilde{f}_t)$, $I_t^n = (X_t, f_t)$ и $\overline{I}_t^n = (\overline{X}_t, \overline{f}_t)$ — функциональные пары, определенные выше. Тогда множества $\mathscr{B} = \mathscr{A}(I_t^n) \subseteq \mathscr{A}(\widetilde{I}_t^n)$ и $\mathscr{D} = \mathscr{A}(\overline{I}_t^n) \subseteq \mathscr{A}(\widetilde{I}_t^n)$ являются сильно регулярными.*

Доказательство. В графе $\overline{\Gamma}_t = (\overline{X}_t, \overline{Z}_t; \overline{E}_t)$ степень каждой вершины из $\overline{X}_t$ равна $k(t+1)$, степень каждой вершины из $\overline{Z}_t$ равна $n-t$. Следовательно, для любых $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \in \overline{X}_t$

$$f(\{\widetilde{\beta}\}) = f(\{\widetilde{\gamma}\}) = 2^{-k(t+1)},$$

В силу того, что каждая из долей графа $\overline{\Gamma}_t$ симметрична, существует преобразование φ: $2^{X_t \cup Z_t} \to 2^{X_t \cup Z_t}$ такое, что если $u, v \in X_t$ и $\{u\} = \varphi(\{v\})$, то $\partial(\{u\}) = \varphi\big(\partial(\{v\})\big)$. Следовательно,

$$\left|\mathscr{D}^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]}\right| = \left|\mathscr{D}^{(2)}_{\{\widetilde{\gamma}\},[2]}\right|. \tag{2.3.3}$$

Отсюда следует регулярность множества $\mathscr{D}$.

В графе $\Gamma_t = (X_t, Z_t; E_t)$ степень каждой вершины из X_t равна $n-t+1$, степень каждой вершины из Z_t равна kt. Следовательно, для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta} \in X_t$

$$f(\{\widetilde{\alpha}\}) = f(\{\widetilde{\delta}\}) = 2^{-(n-t+1)},$$

аналогично (2.3.3) получаем

$$\left|\mathscr{B}^{(2)}_{\{\widetilde{\alpha}\},[2]}\right| = \left|\mathscr{B}^{(2)}_{\{\widetilde{\delta}\},[2]}\right|.$$

Отсюда следует регулярность множества $\mathscr{B}$.

Заметим, что $\mathscr{B} \cap \mathscr{D} = \varnothing$. Из определения следует, что

$$\alpha^1(\mathscr{B}_{[1]}) = |X_t| 2^{-(n-t+1)}, \qquad \alpha^1(\mathscr{D}_{[1]}) = |\overline{X}_t| 2^{-k(t+1)}.$$

Отсюда и из определения функциональных пар I^n_t, $\overline{I}^n_t$ следует выполнение условия (1.4.40). Для любой вершины $\widetilde{\beta} \in X_t \cup \overline{X}_t$

$$\alpha^1\big((\mathscr{B} \cup \mathscr{D})^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]}\big) = \left|\mathscr{B}^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]}\right| 2^{-2k(t+1)} + \\ + \left|\mathscr{D}^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]}\right| 2^{-2(n-t+1)} + \left|\mathscr{E}^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]}\right| 2^{-k(t+1)-(n-t+1)},$$

где $\mathscr{E}^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]} = \Big\{\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\gamma}\}\} \in (\mathscr{B} \cup \mathscr{D})^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]} \colon \widetilde{\alpha} \in X_t, \widetilde{\gamma} \in \overline{X}_t\Big\}$. Аналогично (2.3.3) для любых $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \in \overline{X}_t$ справедливо

$$\left|\mathscr{E}^{(2)}_{\{\widetilde{\beta}\},[2]}\right| = \left|\mathscr{E}^{(2)}_{\{\widetilde{\gamma}\},[2]}\right|,$$

а для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta} \in X_t$ справедливо

$$\left|\mathscr{E}^{(2)}_{\{\widetilde{\alpha}\},[2]}\right| = \left|\mathscr{E}^{(2)}_{\{\widetilde{\delta}\},[2]}\right|.$$

Из сказанного выше следует сильная регулярность множеств $\mathscr{B}$ и $\mathscr{D}$. Лемма доказана.

Из теорем 2.1.1 и 2.2.4 следует

Теорема 2.3.1. *Пусть $n = (k+1)m + i$ для некоторых целых m и i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Для $m \leqslant t \leqslant m+1$ пусть I^n_t и $\overline{I}^n_t$ — функциональные пары, определенные выше. Положим $\Delta = \left\lceil \frac{k+1}{k} \log_2(k+1) \right\rceil - 1$. Тогда при достаточно больших m и $0 \leqslant i \leqslant k-1$*

$$\psi(S^n_k) = \Big(1 + O\big(2^{-\log_2^2 n}\big)\Big) 2^{|S^n_{k,m}|} S\big(\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I^n_m) \cup \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(\overline{I}^n_m)\big).$$

При достаточно больших m и $i = k$

$$\psi(S^n_k) = \Big(1 + O\big(2^{-\log_2^2 n}\big)\Big) \Big(2^{|S^n_{k,m}|} S\big(\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I^n_m) \cup \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(\overline{I}^n_m)\big) + \\ + 2^{|S^n_{k,m+1}|} S\big(\mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(I^n_{m+1}) \cup \mathscr{A}_{\widehat{\Delta}}(\overline{I}^n_{m+1})\big)\Big).$$

Теорема 2.3.2. *Пусть* $5 \leqslant k \leqslant 11$, n *достаточно велико и* $n = (k+1)m+i$ *для некоторых* m, i, $0 \leqslant i \leqslant k$. *Для* $m \leqslant t \leqslant m+1$ *пусть* I_t^n *и* $\overline{I}_t^n$ *— функциональные пары, определенные в теореме* 2.3.1. *Положим* $\mathscr{B}_t = \mathscr{A}_{\widehat{3}}(I_t^n)$, $\mathscr{D}_t = \mathscr{A}_{\widehat{3}}(\overline{I}_t^n)$, *а также*

$$\alpha_{t,j}^{(r),\nu} = \alpha^{\nu}\big((\mathscr{B}_t \cup \mathscr{D}_t)_{[j]}^{(r)}\big), \quad \alpha_{t,\widehat{3}}^{(r),\nu} = \sum_{j \leqslant 3} \alpha^{\nu}\big((\mathscr{B}_t \cup \mathscr{D}_t)_{[j]}^{(r)}\big),$$

$$\widehat{\mu}_{t,3} = \widehat{\mu}_3(\mathscr{B}_t \cup \mathscr{D}_t) = \alpha_{t,\widehat{3}}^{(1),1} - \frac{1}{2}\alpha_{t,1}^{(1),2} + \frac{1}{3}\alpha_{t,1}^{(1),3} - \alpha_{t,\widehat{3}}^{(2),1} + \alpha_{t,\widehat{3}}^{(1,2),1}.$$

Тогда если $0 \leqslant i \leqslant k-1$, *то*

$$\psi(S_k^n) \sim 2^{\binom{n}{m}k^{n-m}} \exp\{\widehat{\mu}_{m,3}\}.$$

Если $i = k$, *то*

$$\psi(S_k^n) \sim 2^{\binom{n}{m}k^{n-m}} \exp\{\widehat{\mu}_{m,3}\} + 2^{\binom{n}{m+1}k^{n-m-1}} \exp\{\widehat{\mu}_{m+1,3}\}.$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{I}_t^n = (\widetilde{X}_t, \widetilde{f}_t)$ — функциональная пара, определенная выше. Тогда $\mathscr{A}(I_m^n), \mathscr{A}(\overline{I}_m^n) \subseteq \mathscr{A}(\widetilde{I}_t^n)$. Согласно лемме 2.3.2 множества $\mathscr{B}_t$ и $\mathscr{D}_t$ являются сильно регулярными. Из следствия 1.4.6 получаем, что

$$S\big(\mathscr{A}(I_m^n) \cup \mathscr{A}(\overline{I}_m^n)\big) \sim \exp\big\{\widehat{\mu}_3\big(\mathscr{A}_{\widehat{3}}(I_m^n) \cup \mathscr{A}_{\widehat{3}}(\overline{I}_m^n)\big)\big\} = \exp\{\widehat{\mu}_{m,3}\}.$$

Теперь утверждение следует из теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $5 \leqslant k \leqslant 11$, n *достаточно велико и* $n = (k+1)m+i$ *для некоторых* m, i, $0 \leqslant i \leqslant k$. *Тогда*

$$\psi(S_k^n) \sim 2^{\binom{n}{m}k^{n-m}} \exp\{\widehat{\mu}_{m,3}\}.$$

Доказательство. При $0 \leqslant i \leqslant k-1$ утверждение следует непосредственно из теоремы 2.3.2.

При $i = k$ из определения следует, что при $m \leqslant t \leqslant m+1$

$$\widehat{\mu}_{t,3} = \alpha_{t,1}^{(1),1}\Big(1 + O\big(2^{-m(k+1)}\big)\Big).$$

Кроме того,

$$\alpha_{t,1}^{(1),1} = \binom{n}{t-1} k^{n-t+1} 2^{-(n-t+1)} + \binom{n}{t+1} k^{n-t-1} 2^{-k(t+1)} =$$

$$= \binom{n}{t} k^{n-t} \left[2^{-(n-t+1)} \frac{tk}{n-t+1} + 2^{-k(t+1)} \frac{n-t}{(t+1)k}\right].$$

При $m = (n-k)/(k+1)$ получаем

$$\alpha_{m,1}^{(1),1} = \binom{n}{m} k^{n-m} \left[2^{-k\frac{n+1}{k+1}-1} \frac{k(n-k)}{nk+2k+2} + 2^{-k\frac{n+1}{k+1}}\right],$$

$$\alpha_{m+1,1}^{(1),1} = \binom{n}{m+1} k^{n-m-1} \left[2^{-k\frac{n+1}{k+1}} + 2^{-k\frac{n+1}{k+1}-k} \frac{nk-1}{k(n+k+2)}\right].$$

Поскольку $\binom{n}{m} k^{n-m} = \binom{n}{m+1} k^{n-m-1}$ в силу леммы 2.2.1, получаем

$$\exp\{\widehat{\mu}_{m+1,3}\} = o\big(\exp\{\widehat{\mu}_{m,3}\}\big),$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

В приложении суммы $\alpha_j^{(r),\nu}$ вычислены через параметры множества S_k^n.

Теорема 2.3.4. *Пусть $k > 11$, n достаточно велико и $n = (k+1)m + i$ для некоторых m, i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Тогда*

$$\psi(S_k^n) \geqslant 2^{\binom{n}{m}k^{n-m}} \exp\{\widehat{\mu}_{m,3}\}.$$

Утверждение следует из теорем 2.3.1 – 2.3.3.

ГЛАВА 3
ОЦЕНКИ ЧИСЛА АНТИЦЕПЕЙ В ТРЕХЗНАЧНОЙ n-МЕРНОЙ РЕШЕТКЕ E_3^n

§ 3.1. О мощности слоев множества E_3^n

Трехзначной n-мерной решеткой, $n \geqslant 1$, называется множество

$$E_3^n = \left\{ \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \colon \alpha_j \in E_3 = \{0, 1, 2\}, j = 1, 2 \ldots, n \right\}.$$

Нормой набора $\widetilde{\alpha} \in E_3^n$ называется величина $\|\widetilde{\alpha}\| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$. Подмножество множества E_3^n, состоящее из всех наборов с нормой i, $0 \leqslant i \leqslant 2n$, называется *$i$-м слоем* и обозначается через $F(n, i)$. Мощность множества $F(n, i)$ обозначается через $N(n, i)$. В данном параграфе получена оценка мощности слоев для $F(n, n-1)$ и $F(n, n)$ (теорема 3.1.1), а также отношения $N(n, n-1)/N(n, n)$ (следствие 3.1.2). Это позволит в дальнейшем доказать расширительность графов, порожденных парами соседних слоев E_3^n.

Нетрудно получить явные формулы для $N(n, i)$:

$$N(n, i) = \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-2j} \qquad \text{при} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.1.1}$$

$$N(n, i) = \sum_{j=i-n}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-2j} \qquad \text{при} \qquad n \leqslant i \leqslant 2n, \tag{3.1.2}$$

где параметр j — число двоек в наборе с нормой i, а $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое, меньше или равное x. Отсюда следует, что $N(n, 2n-i) = N(n, i)$, поэтому в дальнейшем считаем $0 \leqslant i \leqslant n$.

Положим

$$a_j^i = a_j^i(n) = \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-2j}.$$

Тогда

$$N(n, i) = \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} a_j^i(n).$$

Лемма 3.1.1. 1. *Если $0 \leqslant i \leqslant \sqrt{n+1}$, то величина a_j^i убывает с ростом j.*

2. *Если $\sqrt{n+1} \leqslant i \leqslant n$, то величина a_j^i возрастает при $0 \leqslant j < j_0(i)$ и убывает при $j_0(i) < j \leqslant i/2$, где*

$$j_0(i) = \left\lfloor \frac{(n+3i) - \sqrt{(n+3i)^2 - 12(i^2 - n - 1)}}{6} \right\rfloor.$$

Доказательство. Положим $\mu_j^i = a_j^i/a_{j+1}^i$. Найдем промежуток возрастания a_j^i по j, для этого решим неравенство $\mu_j^i < 1$. Заметим, что

$$\mu_j^i = (j+1)(n-i+j+1)/\big((i-2j-1)(i-2j)\big).$$

Неравенство $\mu_j^i < 1$ при $0 \leqslant j \leqslant i/2-1$ эквивалентно неравенству

$$3j^2 - (n+3i)j + (i^2 - n - 1) > 0. \tag{3.1.3}$$

При $0 \leqslant i < \sqrt{n+1}$ неравенство (3.1.3) не имеет решений, а при $\sqrt{n+1} \leqslant \leqslant i \leqslant n$ решение имеет вид $0 \leqslant j < j_0(i)$, и, следовательно, при этих условиях a_j^n возрастает. Если же $j_0(i) < j \leqslant i/2-1$ и $\sqrt{n+1} \leqslant i \leqslant n$ или $0 \leqslant j \leqslant i/2-1$ и $0 \leqslant i < \sqrt{n+1}$, то a_j^i убывает. Лемма доказана.

Следствие 3.1.1. *Если $\sqrt{n+1} \leqslant i \leqslant n$, то a_j^i достигает максимального значения при $j_0(i)$.*

Известно (см., например, [3]), что при $a > 0$ справедливы формулы

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} a^{2i} = \frac{(1+a)^n}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \tag{3.1.4}$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1} a^{2i+1} = \frac{(1+a)^n}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \tag{3.1.5}$$

Лемма 3.1.2. *Положим $\omega(n) = \sqrt{n \ln n}$. Тогда при $|j - n/3| \leqslant \omega(n)$ выполнены равенства*

$$a_j^n = b_j^n(1+\varepsilon_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = 0, \tag{3.1.6}$$

$$a_j^{n-1} = c_j^{n-1}(1+\xi_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0, \tag{3.1.7}$$

где

$$b_j^n = \sqrt{\frac{3}{\pi n}}\binom{n}{2j} 2^{2j}\left(\frac{15}{8} - \frac{15j}{4n} + \frac{27j^2}{8n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{8j}\right),$$

$$c_j^{n-1} = \sqrt{\frac{3}{\pi n}}\binom{n}{2j+1} 2^{2j+1}\left(\frac{15}{8} - \frac{15j}{4n} + \frac{27j^2}{8n^2}\right)\left(1 - \frac{5}{8j}\right).$$

Доказательство. По уточненной формуле Стирлинга имеем

$$(2j)! = \sqrt{2\pi}\, 2^{2j+1/2} j^{2j+1/2} \exp\left\{-2j + \frac{1}{12\cdot 2j} + O\left(\frac{1}{j^3}\right)\right\},$$

$$j!j! = 2\pi j^{2j+1} \exp\left\{-2j + \frac{2}{12j} + O\left(\frac{1}{j^3}\right)\right\}.$$

Следовательно,

$$a_j^n = \frac{n!}{j!j!(n-2j)!} = \frac{2^{2j} n!}{(2j)!(n-2j)!} \frac{\exp\{-1/(8j)\}}{\sqrt{\pi j}}\left(1 + O\left(\frac{1}{j^3}\right)\right).$$

Воспользовавшись разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3),$$

имеем при $|j-n/3|\leqslant \omega(n)$

$$\frac{1}{\sqrt{j}}=\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\sqrt{1-\frac{n-3j}{n}}\right)^{-1}=\sqrt{\frac{3}{n}}\left(1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3j}{n}\right)+\frac{3}{8}\left(1-\frac{3j}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{3}{n}}\left(\frac{15}{8}-\frac{15j}{4n}+\frac{27j^2}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3.1.8)$$

Кроме того,

$$\exp\left\{-\frac{1}{8j}\right\}=1-\frac{1}{8j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right). \quad (3.1.9)$$

Отсюда следует (3.1.6).

В силу разложения

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3) \quad (3.1.10)$$

и уточненной формулы Стирлинга имеем

$$j!(j+1)!=2\pi j^{2j+2}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+3/2}\exp\left\{-2j-1+\frac{2j+1}{12j(j+1)}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right\}=$$
$$=2\pi j^{2j+2}\exp\left\{-2j+\frac{1}{j}+\frac{1}{6(j+1)}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right\},$$

а также

$$(2j+1)!=\sqrt{2\pi}2^{2j+3/2}j^{2j+3/2}\left(1+\frac{1}{2j}\right)^{2j+3/2}\exp\left\{-2j-1+\frac{1}{24(j+1)}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right\}=$$
$$=\sqrt{2\pi}2^{2j+3/2}j^{2j+3/2}\exp\left\{-2j+\frac{1}{2j}+\frac{1}{24(j+1)}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right\}.$$

Следовательно,

$$a_j^{n-1}=\frac{n!}{j!(j+1)!(n-2j-1)!}=\frac{2^{2j+1}n!}{(2j+1)!(n-2j-1)!}\frac{\exp\{-5/(8j)\}}{\sqrt{\pi j}}\left(1+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right).$$

Отсюда и из (3.1.8) и (3.1.9) получаем (3.1.7). Лемма доказана.

Лемма 3.1.3. 1. *Если* $1\leqslant j<n/3$, *то* b_j^n *возрастает с ростом* j.

2. *Если* $n/3<j\leqslant n/2$, *то* b_j^n *убывает с ростом* j.

Доказательство. Положим $\nu_j^n=b_j^n/b_{j+1}^n$. Найдем промежуток возрастания b_j^n по j, для этого решим неравенство $\nu_j^n<1$. Заметим, что

$$\nu_j^n=\frac{(2j+1)(2j+2)}{4(n-2j-1)(n-2j)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Неравенство $\nu_j^n<1$ при $1\leqslant j\leqslant n/2-1$ эквивалентно неравенству

$$6j^2-(8n-1)j+(2n^2-2n-1)>0. \quad (3.1.11)$$

Решение неравенства (3.1.11) относительно j имеет вид

$$1\leqslant j<\frac{8n-1-\sqrt{16(n+1)^2+9}}{12}\leqslant\frac{n}{3}-\frac{5}{12}.$$

Следовательно, b_j^n возрастает при $1\leqslant j<n/3$. Если $n/3<j\leqslant n/2$, то b_j^n убывает. Лемма доказана.

Лемма 3.1.4. 1. *Если* $1 \leqslant j < n/3$, *то* c_j^{n-1} *возрастает с ростом* j.

2. *Если* $n/3 < j \leqslant (n-1)/2$, *то* c_j^{n-1} *убывает с ростом* j.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1.3.

Лемма 3.1.5. *При достаточно больших* n *справедливы равенства*

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor} b_j^n = \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{3}{16n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

$$\sum_{j=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} c_j^{n-1} = \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{15}{16n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Доказательство. По определению b_j^n имеем

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor} b_j^n = \sqrt{\frac{3}{\pi n}}\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}2^{2j}\left(\frac{15}{8}-\frac{15j}{4n}+\frac{27j^2}{8n^2}-\frac{15}{64j}+\frac{15}{32n}-\frac{27j}{64n^2}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{15j}{4n}\binom{n}{2j}2^{2j} = \frac{15}{8}\cdot\frac{2j}{n}\cdot\frac{n!}{(2j)!(n-2j)!}2^{2j} = \frac{15}{4}\binom{n-1}{2j-1}2^{2j-1}.$$

Для остальных слагаемых справедливы аналогичные равенства. Раскрыв скобки, получим

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor} b_j^n = \sqrt{\frac{3}{\pi n}}\left\{\frac{15}{8}\left(\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}2^{2j}-1\right)-\frac{15}{4}\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-1}{2j-1}2^{2j-1}+\right.$$
$$+\frac{27}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-2}{2j-2}2^{2j-2}+\frac{27}{16n}\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-1}{2j-1}2^{2j-1}-$$
$$-\frac{15}{64n}\left(\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2j+1}2^{2j+1}-2(n+1)\right)+\frac{15}{32n}\left(\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}2^{2j}-1\right)-$$
$$\left.-\frac{27}{64n}\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-1}{2j-1}2^{2j-1}+O\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}2^{2j}\right)\right\}.$$

Используя (3.1.4) и (3.1.5), имеем

$$\sum_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor} b_j^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi n}}\left(\frac{15}{8}3^n-\frac{15}{4}3^{n-1}+\frac{27}{8}3^{n-2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{27}{16n}3^{n-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{15}{64n}3^{n+1}+\frac{15}{32n}3^n-\frac{27}{64n}3^{n-1}O\left(\frac{3^n}{n^2}\right)\right)=$$
$$=\frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{3}{16n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \quad (3.1.12)$$

Получаем

$$\sum_{j=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} c_j^{n-1} =$$
$$=\sqrt{\frac{3}{\pi n}}\sum_{j=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2j+1}2^{2j+1}\left(\frac{15}{8}-\frac{15j}{4n}+\frac{27j^2}{8n^2}-\frac{75}{64j}+\frac{75}{32n}-\frac{135j}{64n^2}\right)=$$
$$=\frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{15}{16n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \quad (3.1.13)$$

Из (3.1.12), (3.1.13) следует утверждение леммы.

Оценим теперь $N(n, n-1)$ и $N(n, n)$. В силу (3.1.6) имеем при достаточно больших n и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{n}=0$

$$\begin{aligned}N(n, n) &= \sum_{0\leqslant j\leqslant n/2} a_j^n = \sum_{|j-n/3|\leqslant\omega(n)} a_j^n + \sum_{\substack{|j-n/3|>\omega(n),\\ 0\leqslant j\leqslant n/2}} a_j^n = \\ &= (1+\varepsilon_n)\sum_{|j-n/3|\leqslant\omega(n)} b_j^n + \sum_{\substack{|j-n/3|>\omega(n),\\ 0\leqslant j\leqslant n/2}} a_j^n = \\ &= (1+\varepsilon_n)\sum_{1\leqslant j\leqslant n/2} b_j^n + \sum_{\substack{|j-n/3|>\omega(n),\\ 0\leqslant j\leqslant n/2}} a_j^n - (1+\varepsilon_n)\sum_{\substack{|j-n/3|>\omega(n),\\ 1\leqslant j\leqslant n/2}} b_j^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N(n, n-1) &= \sum_{0\leqslant j\leqslant (n-1)/2} a_j^{n-1} = \\ &= (1+\xi_n)\sum_{1\leqslant j\leqslant (n-1)/2} c_j^{n-1} + \sum_{\substack{|j-n/3|>\omega(n),\\ 0\leqslant j\leqslant (n-1)/2}} a_j^{n-1} - (1+\xi_n)\sum_{\substack{|j-n/3|>\omega(n),\\ 1\leqslant j\leqslant (n-1)/2}} c_j^{n-1}.\end{aligned}$$

Для удобства оценки изменим индекс суммирования, тогда

$$\begin{aligned}N(n, n) &= \sum_{-n/3\leqslant j\leqslant n/6} a_j^n = \\ &= (1+\varepsilon_n)\sum_{-n/3<j\leqslant n/6} b_j^n + \sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3\leqslant j\leqslant n/6}} a_j^n - (1+\varepsilon_n)\sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3<j\leqslant n/6}} b_j^n, \end{aligned}\tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned}N(n, n-1) &= \sum_{-n/3\leqslant j\leqslant n/6} a_j^{n-1} = \\ &= (1+\xi_n)\sum_{-n/3<j\leqslant n/6} c_j^{n-1} + \sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3\leqslant j\leqslant n/6}} a_j^{n-1} - (1+\xi_n)\sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3<j\leqslant n/6}} c_j^{n-1}. \end{aligned}\tag{3.1.15}$$

Л е м м а 3.1.6. *Если $c>0$, r достаточно велико и $0<x<1$, то справедливы оценки*

$$\ln(1+x)^{r(1+x)+c} \geqslant rx + rx^2/2 - rx^3/2, \tag{3.1.16}$$

$$\ln(1-x)^{r(1-x)+c} \geqslant -rx + rx^2/2 + cx^2/2 - cx. \tag{3.1.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (3.1.16) следует из монотонности функции $\ln x$ и из (3.1.10). Докажем неравенство (3.1.17):

$$\begin{aligned}\ln(1-x)^{r(1-x)+c} &= -\big(r(1-x)+c\big)\sum_{i\geqslant 1}\frac{x^i}{i} = -r\sum_{i\geqslant 1}\frac{x^i}{i} + r\sum_{i\geqslant 1}\frac{x^{i+1}}{i} - c\sum_{i\geqslant 1}\frac{x^i}{i} = \\ &= -rx - cx + r\sum_{i\geqslant 2}\frac{x^i}{i}\left(\frac{i}{i-1} - 1 - \frac{c}{r}\right) \geqslant -rx - cx + r\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{c}{r}\right) = \\ &= -rx + \frac{rx^2}{2} + \frac{cx^2}{2} - cx.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3.1.7. *При $\omega(n)<|j|\leqslant n/6$ справедливы неравенства*

$$a_{n/3+j}^n \leqslant a_{n/3}^n \exp\left\{-\frac{3j^2}{n} + O(1)\right\}, \tag{3.1.18}$$

$$b_{n/3+j}^n \leqslant b_{n/3}^n \exp\left\{-\frac{3j^2}{n} + O(1)\right\}, \qquad a_{n/3+j}^{n-1} \leqslant a_{n/3}^{n-1} \exp\left\{-\frac{3j^2}{n} + O(1)\right\},$$

$$c_{n/3+j}^{n-1} \leqslant c_{n/3}^{n-1} \exp\left\{-\frac{3j^2}{n} + O(1)\right\}.$$

Доказательство. В силу следствия 3.1.1 для любого целого j справедливы неравенства $a^n_{n/3} > a^n_{n/3+j}$ и $a^{n-1}_{n/3} > a^{n-1}_{n/3+j}$, а в силу лемм 3.1.2 и 3.1.3 — неравенства $b^n_{n/3} > b^n_{n/3+j}$ и $c^{n-1}_{n/3} > c^{n-1}_{n/3+j}$. Докажем (3.1.18). Остальные неравенства доказываются аналогично. По уточненной формуле Стирлинга имеем

$$a^n_{n/3} = \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!} = \frac{3^{n+3/2}\exp\{-2/(3n)+\mathrm{O}(n^{-3})\}}{2\pi n}. \tag{3.1.19}$$

Для удобства будем считать, что $j > 0$. Оценим сначала $a^n_{n/3+j}$. Отметим, что если $j = n/6$, то

$$a^n_{n/2} = \binom{n}{n/2} \leqslant \frac{2^{n+1/2}}{\sqrt{\pi n}} \leqslant a^n_{n/3}\exp\left(-\frac{1}{12}n + O(1)\right). \tag{3.1.20}$$

Пусть теперь $j < n/6$. По уточненной формуле Стирлинга имеем

$$a^n_{n/3+j} = \frac{n!}{(n/3+j)!(n/3+j)!(n/3-2j)!} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3^{n+3/2}\exp\{1/(12n)\}}{2\pi n(1+3j/n)^{2n/3+2j+1}(1-6j/n)^{n/3-2j+1/2}}. \tag{3.1.21}$$

В силу (3.1.16) при $c=1$, $r=2n/3$ и $x=3j/n$ и (3.1.17) при $c=1/2$, $r=n/3$ и $x=6j/n$, имеем при $j<n/6$

$$\ln\left(\left(1+\frac{3j}{n}\right)^{2n/3+2j+1}\left(1-\frac{6j}{n}\right)^{n/3-2j+1/2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2n}{3}\cdot\frac{3j}{n} + \frac{2n}{3}\cdot\frac{9j^2}{2n^2} - \frac{2n}{3}\cdot\frac{27j^3}{2n^3} - \frac{n}{3}\cdot\frac{6j}{n} + \frac{n}{3}\cdot\frac{18j^2}{n^2} + \frac{9j^2}{n^2} - \frac{3j}{n} =$$
$$= \frac{9j^2}{n} - \frac{9j^3}{n^2} + O(1) = \frac{9j^2}{n}\left(1-\frac{j}{n}\right) + O(1) \geqslant \frac{15j^2}{2n} + O(1).$$

Отсюда и из (3.1.20), (3.1.21) следует, что

$$a^n_{n/3+j} \leqslant a^n_{n/3}\exp\left\{-\frac{15j^2}{2n} + O(1)\right\}. \tag{3.1.22}$$

Теперь оценим $a^n_{n/3-j}$ при $j \leqslant n/6$. Получаем

$$a^n_{n/3-j} = \frac{n!}{(n/3-j)!(n/3-j)!(n/3+2j)!} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3^{n+3/2}\exp\{1/(12n)\}}{2\pi n(1-3j/n)^{2n/3-2j+1}(1+6j/n)^{n/3+2j+1/2}}. \tag{3.1.23}$$

В силу (3.1.16) при $c=1$, $r=2n/3$ и $x=3j/n$ и (3.1.17) при $c=1/2$, $r=n/3$ и $x=6j/n$, имеем при $j\leqslant n/6$

$$\ln\left(\left(1-\frac{3j}{n}\right)^{2n/3-2j+1}\left(1+\frac{6j}{n}\right)^{n/3+2j+1/2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{2n}{3}\cdot\frac{3j}{n} + \frac{2n}{3}\cdot\frac{9j^2}{2n^2} + \frac{9j^2}{2n^2} - \frac{3j}{n} + \frac{n}{3}\cdot\frac{6j}{n} + \frac{n}{3}\cdot\frac{18j^2}{n^2} - \frac{n}{3}\cdot\frac{108j^3}{n^3} =$$
$$= \frac{9j^2}{n} - \frac{36j^3}{n^2} + O(1) = \frac{9j^2}{n}\left(1-\frac{4j}{n}\right) + O(1) \geqslant \frac{3j^2}{n} + O(1).$$

Отсюда, из (3.1.19) и (3.1.23) следует, что

$$a^n_{n/3-j} \leqslant a^n_{n/3} \exp\left\{-\frac{3j^2}{n} + O(1)\right\}. \tag{3.1.24}$$

Теперь из (3.1.22) и (3.1.24) следует (3.1.18).

Лемма 3.1.8. *При достаточно больших n справедливы равенства*

$$\sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3\leqslant j\leqslant n/6}} a^n_{n/3+j} = o\left(\frac{1}{n}a^n_{n/3}\right), \tag{3.1.25}$$

$$\sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3<j\leqslant n/6}} b^n_{n/3+j} = o\left(\frac{1}{n}b^n_{n/3}\right), \qquad \sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3\leqslant j\leqslant n/6}} a^{n-1}_{n/3+j} = o\left(\frac{1}{n}a^{n-1}_{n/3}\right),$$

$$\sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3<j\leqslant n/6}} c^{n-1}_{n/3+j} = o\left(\frac{1}{n}c^{n-1}_{n/3}\right).$$

Доказательство. Докажем (3.1.25), остальные равенства доказываются аналогично. Заметим, что

$$\sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3\leqslant j\leqslant n/6}} a^n_{n/3+j} = \sum_{-n/3\leqslant j<-n/6} a^n_{n/3+j} + \sum_{-n/6\leqslant j<-\omega(n)} a^n_{n/3+j} + \sum_{\omega(n)<j\leqslant n/6} a^n_{n/3+j}.$$

В силу следствия 3.1.1 $a^n_{n/3+j}$ возрастает, если $-n/3\leqslant j\leqslant -n/6$, поэтому из (3.1.24) следует, что

$$\sum_{-n/3\leqslant j<-n/6} a^n_{n/3+j} < \frac{n}{6}a^n_{n/6} = \frac{n}{6}a^n_{n/3}\exp\left\{-\frac{n}{12}+O(1)\right\} = o\left(\frac{1}{n}a^n_{n/3}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{\substack{\omega(n)<|j|,\\ -n/3\leqslant j\leqslant n/6}} a^n_{n/3+j} \leqslant a^n_{n/3}\left(\sum_{\omega(n)<|j|\leqslant n/6} \exp\left\{-\frac{3j^2}{n}+O(1)\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3.1.26}$$

Известно (см., например, [3]), что если $f(x)$ — непрерывная, монотонно возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция, то

$$f(a)\leqslant \sum_{i=a}^{b} f(i) - \int_a^b f(x)dx \leqslant f(b). \tag{3.1.27}$$

Из [12] следует, что при $x\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{-x} e^{-x^2/2}dx < e^{-x^2/2}\,\frac{1}{x}. \tag{3.1.28}$$

Функция $f(x)=e^{-x^2/2}$ непрерывна и монотонно возрастает на интервале $(-\infty; 0]$. Из (3.1.27), (3.1.28) следует, что при $\omega(n)=\sqrt{n\ln n}$ справедливо

$$\sum_{\omega(n)<j} \exp\left\{-\frac{3j^2}{n}+O(1)\right\} = \sum_{j<-\omega(n)} \exp\left\{-\frac{3j^2}{n}+O(1)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{-\omega(n)} \exp\left\{-\frac{3x^2}{n}+O(1)\right\}dx + \exp\left\{-\frac{3\omega(n)^2}{n}+O(1)\right\} <$$

$$< \sqrt{\frac{n}{\ln n}}\exp\{-3\ln n+O(1)\} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда и из (3.1.26) следует (3.1.25).

В силу лемм 3.1.1 и 3.1.2 при всех j имеем $b^n_{n/3}\geqslant b^n_{n/3+j}$ и $c^{n-1}_{n/3}\geqslant c^{n-1}_{n/3+j}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны.

Теорема 3.1.1. *При достаточно достаточно больших n справедливы равенства*

$$N(n, n-1) = \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{15}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.1.29}$$

$$N(n, n) = \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{3}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Утверждение следует из (3.1.14), (3.1.15) и лемм 3.1.7, 3.1.9.

Следствие 3.1.2. *При достаточно достаточно больших n справедливо неравенство*

$$\frac{N(n, n-1)}{N(n, n)} \leqslant 1 - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

§ 3.2. Нижняя оценка числа антицепей в средних слоях множества E_3^n

В этом параграфе доказана $(2, \{\varkappa_1, \varkappa_2\}, q, c, p)$-ординарность функциональной пары I_n, порожденной тремя центральными слоями трехзначной n-мерной решетки E_3^n (лемма 3.2.1). Это позволяет воспользоваться теоремой 1.5.3 и получить асимптотику сумм $S\big(\mathscr{A}_2(I_n)\big)$ (теорема 3.2.1).

Набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$ *не превосходит* набор $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$ (т.е. $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$) тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, E_3^n является частично упорядоченным множеством. Наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_3^n$ называются *сравнимыми*, если либо $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, либо $\widetilde{\beta} \leqslant \widetilde{\alpha}$.

Обозначим через $\Gamma_n = (X_n, Z_n; E_n)$ двудольный граф с множествами вершин $X_n = F(n, n-1) \cup F(n, n+1)$, $Z_n = F(n, n)$ и множеством ребер

$$E_n = \big\{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} : \widetilde{\alpha} \in X_n, \widetilde{\beta} \in Z_n,\ \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \text{ сравнимы}\big\}.$$

Для $A \subseteq X_n$ положим

$$\partial(A) = \big\{\widetilde{\beta} \in Z_n\colon\ \exists\, \widetilde{\alpha} \in A\ \ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in E_n\big\}$$

и $f_n(A) = 2^{-|\partial(A)|}$. Обозначим через I_n функциональную пару (X_n, f_n), порожденную графом $\Gamma_n = (X_n, Z_n; E_n)$.

Лемма 3.2.1. *При $n \to \infty$ функциональная пара $I_n = (X_n, f_n)$ является $(2, \{\varkappa_1^n, \varkappa_2^n\}, 2, 4, 1)$-ординарной с $\varkappa_1^n = \lfloor 0.53n \rfloor$, $\varkappa_2^n = \lfloor 0.5n \rfloor$.*

Доказательство. Для $\widetilde{\alpha} \in F(n, n-1)$ пусть $j(\widetilde{\alpha})$ — число двоек в наборе $\widetilde{\alpha}$, а для $\widetilde{\alpha} \in F(n, n+1)$ пусть $j(\widetilde{\alpha})$ — число нулей в наборе $\widetilde{\alpha}$. Из определения следует, что $0 \leqslant j(\widetilde{\alpha}) \leqslant \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ для всех $\widetilde{\alpha} \in X_n$.

Степень вершины $\widetilde{\alpha} \in X_n$ в графе Γ_n равна $n - j(\widetilde{\alpha})$. Следовательно,

$$\lceil (n-1)/2 \rceil \leqslant \big|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\big| \leqslant n.$$

Пусть $X_n = X_{n,1} \cup X_{n,2}$, где $X_{n,1}$ — множество вершин $\widetilde{\alpha}$, для которых выполнено $\lfloor 0.53n \rfloor \leqslant \big|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\big|$, а $X_{n,2}$ — множество вершин $\widetilde{\alpha}$, для которых $\lfloor 0.5n \rfloor \leqslant \big|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\big| < \lfloor 0.53n \rfloor$. Покажем, что функциональная пара $I_{n,1} = (X_{n,1}, f_n)$ является $(2, \varkappa_1^n, 2, 4)$-ординарной, а функциональная пара $I_{n,2} = (X_{n,2}, f_n)$ является $(2, \varkappa_2^n, 2, 4)$-ординарной.

Из определения множеств $X_{n,1}$, $X_{n,2}$ следует, что условие (1.4.1) выполняется с $\varkappa_1^n = \lfloor 0.53n \rfloor$ и с $\varkappa_2^n = \lfloor 0.5n \rfloor$.

Убедимся в выполнении условий (1.4.3) с q=2 и (1.5.1) с p=1. Заметим, что в графе $\Gamma_n = (X_n, Z_n; E_n)$ для любых двух вершин $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta} \in X_n$ выполнено

$$\big||\partial(\{\widetilde{\alpha}\})| - |\partial(\{\widetilde{\beta}\})|\big| \leqslant 1,$$
$$\big|\partial(\{\widetilde{\alpha}\}) \cap \partial(\{\widetilde{\beta}\})\big| \leqslant 2.$$

Отсюда вытекает, что для любого $A \subseteq X$ и $\widetilde{\beta} \in A$ справедливо

$$\big|\partial(A \setminus \{\widetilde{\beta}\}) \cap \partial(\{\widetilde{\beta}\})\big| \leqslant \sum_{\widetilde{\alpha} \in A \setminus \{\widetilde{\beta}\}} \big|\partial(\{\widetilde{\alpha}\}) \cap \partial(\{\widetilde{\beta}\})\big| \leqslant 2(|A| - 1).$$

По формуле включений-исключений имеем

$$\big|\partial(A)\big| \geqslant \big|\partial(A \setminus \{\widetilde{\beta}\})\big| + \big|\partial(\{\widetilde{\beta}\})\big| - 2(|A| - 1).$$

Из определения функционала f_n следует, что

$$f_n(A) \leqslant f_n(A \setminus \{\widetilde{\beta}\}) f_n(\{\widetilde{\beta}\})\, 2^{2(|A|-1)}.$$

Таким образом неравенство (1.4.3) справедливо при $q = 2$, а неравенство (1.5.1) — при $p = 1$.

Теперь убедимся, что при $n \to \infty$ для любого натурального m и любой $\widetilde{\alpha} \in X_n$ справедливо

$$\big|\mathscr{A}_{\{\widetilde{\alpha}\},\, \widehat{m}}(I_n)\big| \leqslant (0.5n)^{4m}. \tag{3.2.1}$$

Заметим, что $B \in \mathscr{A}_{\{\widetilde{\alpha}\}}(I_n)$ означает, что существует вершина $\widetilde{\beta} \in B$ такая, что $\{\widetilde{\alpha}\} \# \{\widetilde{\beta}\}$, и что множество B является 2-связным. В свою очередь $\{\widetilde{\alpha}\} \# \{\widetilde{\beta}\}$ означает, что $\rho_{\Gamma_n}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant 2$.

Граф $\Gamma_n = (X_n, Z_n; E_n)$ удовлетворяет условиям леммы 1.4.5 с $\Delta = 2n$. Поскольку $n \geqslant 16$, имеем

$$n_2(\{\widetilde{\alpha}\}, a) \leqslant \left(4(2n)^2\right)^{a-1} \leqslant (0.5n)^{4(a-1)}. \tag{3.2.2}$$

Для заданной вершины $\widetilde{\alpha} \in X_n$ вершину $\widetilde{\beta} \in X_n$ такую, что $\rho_{\Gamma_n}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant 2$ можно выбрать не более, чем $2n^2$ способами. Из сказанного с учетом (3.2.2) при $n \to \infty$ следует, что

$$\big|\mathscr{A}_{\{\widetilde{\alpha}\},\, \widehat{m}}(I_n)\big| \leqslant 2n^2 \sum_{1 \leqslant a \leqslant m} (0.5n)^{4(a-1)} \leqslant (0.5n)^{4m}.$$

Неравенство (3.2.1) доказано. Отсюда следует, что

$$\big|\mathscr{A}_{\{\widetilde{\alpha}\},\, \widehat{m}}(I_n)\big| \leqslant (0.53n)^{4m}.$$

Таким образом, доказано выполнение условия (1.4.4) при $c = 4$ и соответствующих $\varkappa_1^n$, $\varkappa_2^n$.

Наконец, проверим выполнение условия (1.4.2). При $\varkappa_1^n = \lfloor 0.53n \rfloor$ и $\Delta = 2$ из (3.1.29) следует, что при $n \to \infty$

$$|X_{n,1}| \leqslant |X_n| = \frac{3^{n+1/2}}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{15}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 3^{n - \frac{1}{2}\log_3 n} \leqslant 2^{n \log_2 3} \leqslant 2^{1.59n - 2\log_2^2(0.53n)}.$$

Оценим теперь мощность множества $X_{n,2}$. Заметим, что $X_{n,2}$ состоит из таких наборов $\widetilde{\alpha} \in X_n$, для которых $\lceil 0.47n \rceil = n - \varkappa_1^n < j(\widetilde{\alpha}) \leqslant n - \varkappa_2^n = \lceil 0.5n \rceil$. Аналогично (3.1.19) и (3.1.22) получаем, что при $j \geqslant n/3$ количество вершин слоя $F(n, n-1)$ с j двойками равно a_j^{n-1}, и количество вершин слоя $F(n, n+1)$ с j нулями равно a_j^{n-1}, где

$$a_j^{n-1} = \frac{3^{n+3/2}}{2\pi n} \exp\left\{-\frac{2}{3n} - \frac{15}{2n}\left(j - \frac{n}{3}\right)^2\right\}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3.2.3}$$

Таким образом,

$$|X_{n,2}| = 2 \sum_{0.47n < j \leqslant 0.5n} a_j^{n-1}. \tag{3.2.4}$$

Из (3.2.3), (3.2.4) и (3.1.27), (3.1.28) вытекает

$$\begin{aligned}|X_{n,2}| &< 2\,\frac{3^{n+3/2}}{2\pi n} \int\limits_{0.47n}^{0.5n} e^{-15(y-n/3)^2/(2n)}dy \leqslant \\ &\leqslant \frac{3^{n+3/2}}{\pi n} \int\limits_{0.136n}^{+\infty} e^{-15x^2/(2n)}dx \leqslant \frac{3^{n+3/2}}{\pi n}\,\frac{e^{-0.136n}}{15\cdot 0.136} \leqslant \\ &\leqslant 2^{n(\log_2 3 - 0.136\log_2 e)} \leqslant 2^{1.5n - 2\log_2^2(0.5n)}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость (1.4.2). Лемма доказана.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\{I_n = (X_n, f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функциональных пар, порожденных графами $\Gamma_n = (X_n, Z_n; E_n)$, где $X_n = F(n, n-1) \cup F(n, n+1)$, $Z_n = F(n, n)$ и $f_n(A) = 2^{-|\partial(A)|}$ для всякого $A \subseteq X_n$. Тогда при $n \to \infty$*

$$S\big(\mathscr{A}_{\widehat{2}}(I_n)\big) \sim \exp\{\mu_{\widehat{2}}\}, \tag{3.2.5}$$

где

$$\begin{aligned}\mu_{\widehat{2}} = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-2j-1} 2^{-(n-j)} \times \\ \times \left[2 + 2^{-(n-j)}\left(3n^2 - 7nj + 11\tfrac{1}{4}j^2 + 10\tfrac{3}{4}j + n - 2\right)\right].\end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5.3 с $\mathscr{B} = \mathscr{A}_{\widehat{2}}(I_n)$. Положим для $\nu, r, k \in \{1, 2\}$

$$\alpha_k^{(r),\nu} = \alpha^{\nu}(\mathscr{B}_{[k]}^{(r)}).$$

Из (3.1.1), (3.1.2) следует, что

$$N(n, n-1) = N(n, n+1) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-1-2j},$$

где, как и в лемме 3.2.1, $j = j(\widetilde{\alpha})$ для $\widetilde{\alpha} \in F(n, n-1) \cup F(n, n+1)$. Кроме того, $f_n(\{\widetilde{\alpha}\}) = 2^{-(n-j(\widetilde{\alpha}))}$.

Теперь непосредственно из определения получаем, что при $\nu \in \{1, 2\}$

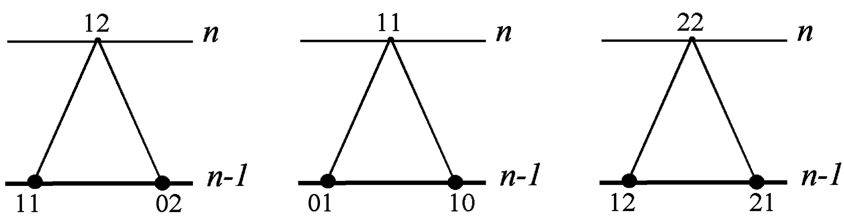
$$\alpha_1^{(1),\nu} = \sum_{\widetilde{\alpha} \in X_n} f^{\nu}(\{\widetilde{\alpha}\}) = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-2j-1} 2^{-\nu(n-j)}.$$

Из определения следует, что $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{A}_2(I_n)$, если $\partial(\{\widetilde{\alpha}\}) \cap \partial(\{\widetilde{\beta}\}) \neq \varnothing$. На рисунках 3.1 – 3.4 изображены множества вершин, принадлежащие семейству $\mathscr{A}_2(I_n)$. Каждое такое множество является 2-связным в графе $\Gamma_n = (X_n, Z_n; E_n)$. Жирными точками изображены вершины, входящие в рассматриваемое множество, а простыми точками — вершины, принадлежащие множеству Z_n. Вершины соединены отрезком, если в графе G_{I_n}, порожденном функциональной парой I_n, существует ребро, соединяющее их. Если две вершины образуют 2-связное множество, то наборы их координат отличаются в одной позиции. Рядом с каждой вершиной выписаны координаты, в которых она отличается от остальных вершин множества.

На рис. 3.1, 3.2 и 3.4 изображены пары вершин $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, для которых

$$\left|\partial(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\})\right| = \left|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\right| + \left|\partial(\{\widetilde{\beta}\})\right| - 1,$$

на рис. 3.3 — пары, для которых $\left|\partial(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\})\right| = \left|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\right| + \left|\partial(\{\widetilde{\beta}\})\right| - 2$.

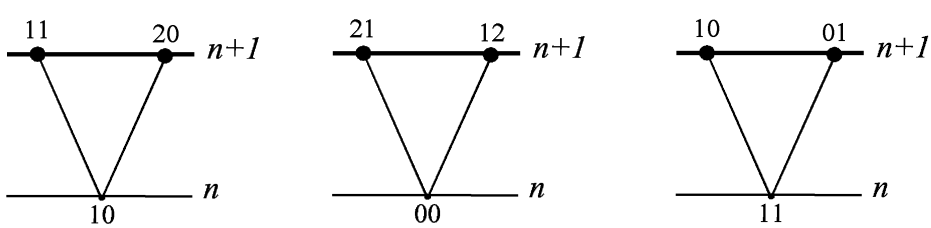


а *б* *в*

Рис.3.1

Рассмотрим пару $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, изображенную на рис. 3.1,*а*. Пусть $j(\widetilde{\alpha}) = j$, $j(\widetilde{\beta}) = j+1$, количество таких пар равно $j(j+1)$. Вклад, вносимый такими парами вершин в сумму $\alpha_2^{(1),1}$ равен

$$\sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} j(j+1) 2^{-(n-j)-(n-j-1)+1} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} j(j+1) 2^{-2(n-j)+2}.$$



а *б* *в*

Рис.3.2

Кроме того, каждая пара вершин $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{A}(I_n)$ порождает семейство $\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}\} \in \mathscr{A}^{(2)}(I_n)$, для которого

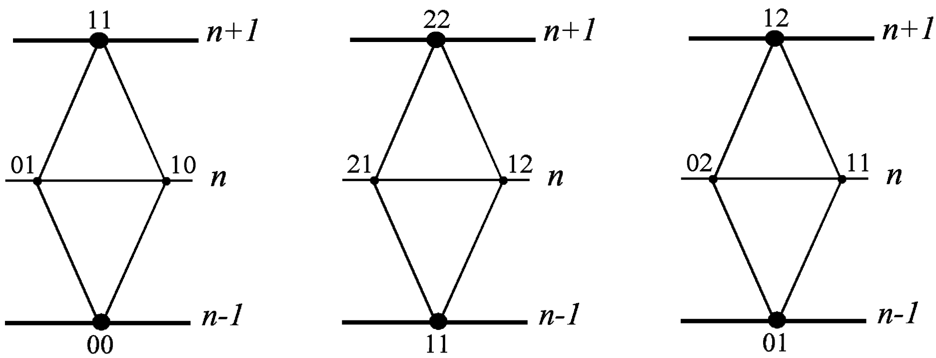
$$f(\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}\}) = f(\{\widetilde{\alpha}\}) f(\{\widetilde{\beta}\}).$$

Вклад, вносимый парами, изображенными на рис. 3.1,a, в сумму $\alpha_2^{(2),1}$ равен

$$\sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} j(j+1) 2^{-(n-j)-(n-j-1)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} j(j+1) 2^{-2(n-j)+1}.$$

Случай, изображенный на рис. 3.2,a симметричен случаю, изображенному на рис. 3.1,a.



а б в

Рис. 3.3

Рассмотрим пару вершин, изображенную на рис. 3.3,a. Обозначим через $\widetilde{\alpha}$ вершину, принадлежащую множеству $F(n, n-1)$, а через $\widetilde{\beta}$ — вершину, принадлежащую множеству $F(n, n+1)$. Положим $j(\widetilde{\alpha}) = j$, тогда $j(\widetilde{\beta}) = j - 1$, количество таких пар равно $\binom{j+1}{2}$. Вклад, вносимый такими парами вершин в сумму $\alpha_2^{(1),1}$ равен

$$\sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \binom{j+1}{2} 2^{-(n-j)-(n-j+1)+2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \binom{j+1}{2} 2^{-2(n-j)+1}.$$

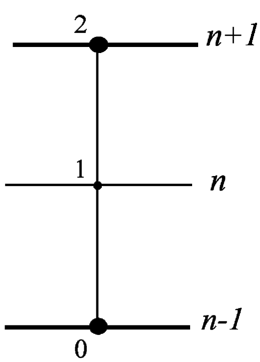


Рис. 3.4

Вклад, вносимый парами вершин $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ в сумму $\alpha_2^{(2),1}$ равен

$$\sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \binom{j+1}{2} 2^{-(n-j)-(n-j+1)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \binom{j+1}{2} 2^{-2(n-j)-1}.$$

Остальные случаи аналогичны рассмотренным. В итоге получаем

$$\alpha_2^{(1),1} = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \Bigg[2 \cdot 2^2 j(j+1) +$$

$$+ 2 \cdot 2 \cdot \frac{(j+1)(n-2j-1)}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{j(n-2j-1)}{2} + \binom{n-2j-1}{2} 2^3 +$$

$$+ \binom{j+1}{2} 2 + (j+1)(n-2j-1) 2^2 + (j+1) 2 \Bigg] 2^{-2(n-j)}.$$

$$\alpha_2^{(2),1} = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \left[2 \cdot 2j(j+1) + \right.$$
$$+ 2 \cdot \frac{(j+1)(n-2j-1)}{2} + 2 \cdot \frac{j(n-2j-1)}{2} + \binom{j+1}{2} 2^{-1} +$$
$$\left. + \binom{n-2j-1}{2} 2 + (j+1)(n-2j-1) + (j+1) \right] 2^{-2(n-j)}.$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\psi(E_3^n)$ число антицепей в множестве E_3^n. Из теорем 3.2.1, 2.1.1 и 2.2.4 следует

Теорема 3.2.2. *При* $n \to \infty$

$$\psi(E_3^n) \geqslant 2^{N(n,n,3)} \exp\{\mu_{\widehat{2}}\},$$

где $\mu_{\widehat{2}}$ *определено в предыдущей теореме.*

Замечание 3.2.1. С помощью вычислений, аналогичных вычислениям, проделанным в параграфе 3.1, можно убедиться, что

$$\mu_{\widehat{2}} = c\sqrt{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2} \right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

где $c = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{3(289 - 74\sqrt{2})}{196} \approx 1.95$.

§ 3.3. Логарифмическая выпуклость мощностей слоев k-значной n-мерной решетки

Последовательность чисел $\{a_k\}_{k \geqslant 0}$ называется *логарифмически выпуклой*, если для всех $k \geqslant 1$ справедливо

$$\frac{1}{2}\left(\log_2 a_{k-1} + \log_2 a_{k+1}\right) \leqslant \log_2 a_k.$$

Множество

$$E_k^n = \left\{ \widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \colon \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \right\}$$

называется *k-значной n-мерной решеткой. Нормой набора* $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ называется величина $\|\widetilde{\alpha}\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_n$. Положим $F(n, i, k) = \{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \colon \|\widetilde{\alpha}\| = i\}$. Множество $F(n, i, k)$ называется *i-м слоем* E_k^n. Через $N(n, i, k)$ обозначим мощность множества $F(n, i, k)$. В [5] оценивалась величина $\delta(i, n, k) = N(n, i+1, k) - N(n, i, k)$. В [1 с. 498, предложение 8.60] сформулировано без доказательства утверждение, из которого следует, что последовательность мощностей слоев множества E_k^n логарифмически выпукла. В данном параграфе это утверждение будет доказано.

Теорема 3.3.1. *При любых* $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ *и* $2 \leqslant i \leqslant n(k-1)$ *справедливо*

$$\frac{N(n, i-2, k)}{N(n, i-1, k)} \leqslant \frac{N(n, i-1, k)}{N(n, i, k)}. \tag{3.3.1}$$

Доказательство. Заметим, что для любых n, k и $0 \leqslant i \leqslant n(k-1)$ $N(n, i, k)$ равно количеству целочисленных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = i, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant k-1. \tag{3.3.2}$$

Докажем выполнение (3.3.1) индукцией по n.

Если $n=2$, то $N(2, i, k) = i+1$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$, и $N(2, i, k) = 2k-i-1$ при $k \leqslant i \leqslant 2(k-1)$. Тогда имеем при $2 \leqslant i \leqslant k-1$

$$\frac{N(2, i-2, k)}{N(2, i-1, k)} = \frac{i-1}{i} < \frac{i}{i+1} = \frac{N(2, i-1, k)}{N(2, i, k)}.$$

При $i=k$ получаем $N(2, k-2, k) = N(2, k, k) = k-1$, тогда

$$\frac{N(2, k-2, k)}{N(2, k-1, k)} = \frac{k-1}{k} < \frac{k}{k-1} = \frac{N(2, k-1, k)}{N(2, k, k)}.$$

При $k+1 \leqslant i \leqslant 2(k-1)$ получаем

$$\frac{N(2, i-2, k)}{N(2, i-1, k)} = \frac{2k-i+1}{2k-i} < \frac{2k-i}{2k-i-1} = \frac{N(2, i-1, k)}{N(2, i, k)}.$$

Базис индукции доказан. Пусть (3.3.1) верно для всех $2 \leqslant n' \leqslant n$, k и i. Докажем утверждение для $n' = n+1$ и $k+1 \leqslant i \leqslant (n-1)(k-1)$, т.е. необходимо доказать неравенство

$$\frac{N(n+1, i-2, k)}{N(n+1, i-1, k)} \leqslant \frac{N(n+1, i-1, k)}{N(n+1, i, k)}. \tag{3.3.3}$$

При $n \geqslant 3$ и $k-1 \leqslant i \leqslant (n-1)(k-1)$ имеем

$$N(n, i, k) = \sum_{j=0}^{k-1} N(n-1, i-j, k). \tag{3.3.4}$$

С использованием (3.3.4) получаем, что при $k+1 \leqslant i \leqslant (n-1)(k-1)$ неравенство (3.3.3) эквивалентно неравенству

$$1 - \frac{N(n, i-1, k) - N(n, i-2-(k-1), k)}{N(n+1, i-1, k)} \leqslant 1 - \frac{N(n, i, k) - N(n, i-1-(k-1), k)}{N(n+1, i, k)}$$

или

$$N(n, i, k) \sum_{j=0}^{k-1} N(n, i-1-j, k) + N(n, i-1-k, k) \sum_{j=0}^{k-1} N(n, i-j, k) \leqslant$$

$$\leqslant N(n, i-1, k) \sum_{j=0}^{k-1} N(n, i-j, k) + N(n, i-k, k) \sum_{j=0}^{k-1} N(n, i-1-j, k).$$

Это справедливо, поскольку в силу индуктивного предположения при $0 \leqslant j \leqslant k-1$ и $k+1 \leqslant i \leqslant (n-1)(k-1)$ выполнены неравенства

$$\frac{N(n, i-1-j, k)}{N(n, i-j, k)} \leqslant \frac{N(n, i-1, k)}{N(n, i, k)},$$

$$\frac{N(n, i-1-k, k)}{N(n, i-k, k)} \leqslant \frac{N(n, i-1-j, k)}{N(n, i-j, k)}.$$

Неравенство (3.3.1) доказано при $k+1 \leqslant i \leqslant (n-1)(k-1)$.

Теперь докажем, что (3.3.1) выполняется при всех $n \geqslant 3$ и k для любых $2 \leqslant i \leqslant k$. При $0 \leqslant i \leqslant k-1$ из (3.3.2) получаем $N(n, i, k) = \binom{n+i-1}{i}$.

Следовательно,

$$\frac{N(n, i-2, k)}{N(n, i-1, k)} = \frac{i-1}{n+i-2} < \frac{i}{n+i-1} = \frac{N(n, i-1, k)}{N(n, i, k)}.$$

В случае, когда $i=k$, имеем из (3.3.2)

$$N(n,k,k)=\binom{n+k-1}{k}-n<\binom{n+k-1}{k},$$

отсюда следует, что

$$\frac{N(n,k-2,k)}{N(n,k-1,k)}=\frac{k-1}{n+k-2}<\frac{k}{n+k-1}<\frac{N(n,k-1,k)}{N(n,k,k)}.$$

Таким образом неравенство (3.3.1) доказано при $2\leqslant i\leqslant k$.

Наконец, докажем, что (3.3.1) выполняется при всех $n\geqslant 3$ и k для любых i, $(k-1)(n-1)+1\leqslant i\leqslant n(k-1)$. В этом случае уравнение (3.3.2) эквивалентно уравнению

$$y_1+y_2+\dots+y_n=(k-1)n-i,\quad 0\leqslant y_i\leqslant k-1, \tag{3.3.5}$$

где $y_i=k-1-x_i$. Тогда имеем $N(n,i,k)=\binom{(k-1)n-i+n-1}{n-1}=\binom{nk-i-1}{n-1}$, следовательно

$$\frac{N(n,i-2,k)}{N(n,i-1,k)}=\frac{nk-i+1}{nk-i+2-n}<\frac{nk-i}{nk-i+1-n}=\frac{N(n,i-1,k)}{N(n,i,k)}.$$

Тем самым теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.3.1. *Для любых $k\geqslant 2$, $n\geqslant 1$ и $0\leqslant i\leqslant n(k-1)$ справедливо*

$$N(i,n,k)=N\big(n(k-1)-i,n,k\big).$$

Утверждение следует из эквивалентности (3.3.2) и (3.3.5).

§ 3.4. Расширительность пар слоев E_3^n

В этом параграфе доказана расширительность графов, порожденных парами соседних слоев множества E_3^n (леммы 3.4.3, 3.4.4, 3.4.5), а также унимодальность множеств $(E^n_{3,0},E^n_{3,1},\dots,E^n_{3,2n/3})$ и $(E^n_{3,2n},E^n_{3,2n-1},\dots,E^n_{3,4n/3})$ (теорема 3.4.3).

Пусть $A\subseteq F(n,i)$, $0\leqslant i<2n$, через $\tau_t(A)$ обозначается множество всех наборов t-го слоя E_3^n, сравнимых с наборами из A. Положим $\tau_t(\widetilde{\beta})=$ $=\tau_t(\{\widetilde{\beta}\})$.

Будем использовать понятие лексикографического порядка на множестве E_3^n, при котором набор $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ предшествует набору $(\beta_1,\dots,\beta_n)$, если либо $\alpha_1<\beta_1$, либо $\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_{i-1}=\beta_{i-1}$, $\alpha_i<\beta_i$ для некоторого i, $2\leqslant i\leqslant n$.

Пусть $A\subseteq F(n,i)$. Через CA обозначается множество, состоящее из $|A|$ первых в лексикографическом порядке, а через LA — множество из $|A|$ последних в лексикографическом порядке элементов $F(n,i)$. Из [14] следует

Т е о р е м а 3.4.1. *Для произвольного $A\subseteq F(n,i)$, $i=0,1,\dots,2n$, справедливо*

1. $\big|\tau_{i-1}(A)\big|\geqslant\big|\tau_{i-1}(CA)\big|$;
2. $\big|\tau_{i+1}(A)\big|\geqslant\big|\tau_{i+1}(LA)\big|$;
3. *если $A=CA$, то $\tau_{i-1}(A)=C\tau_{i-1}(A)$;*
4. *если $A=LA$, то $\tau_{i+1}(A)=L\tau_{i+1}(A)$.*

Докажем вспомогательные утверждения. Обозначим множество последних p векторов множества $F(n, i)$ в лексикографическом порядке через $L_{n,i}(p)$.

Лемма 3.4.1. *Пусть* $A \subseteq F(n, i)$, $i < n$, $|A| = s$, $t = t(n, i, s) = \min\{l\colon N(n-l, i-2l) \geqslant s\}$. *Положим* $\widetilde{\alpha}_t = (2, \ldots, 2, 0, \ldots, 0)$, $\|\widetilde{\alpha}_t\| = 2t$. *Тогда*

$$LA \subseteq F(n, i) \cap \tau_i(\widetilde{\alpha}_t). \tag{3.4.1}$$

Доказательство. Положим $q = \left|\tau_i(\widetilde{\alpha}_t)\right| = N(n-t, i-2t)$. Поскольку $s \leqslant q$, то

$$L_{n,i}(s) \subseteq L_{n,i}(q).$$

С другой стороны,

$$L_{n,i}(q) = F(n, i) \cap \tau_i(\widetilde{\alpha}_t).$$

Отсюда вытекает (3.4.1). Лемма доказана.

Следствие 3.4.1. *Пусть* $A \subseteq F(n, i)$, $i < n$ *и* r *такое, что* $|A| \leqslant N(n-2r, 2)$. *Тогда*

$$|A|(n-2r-1) \leqslant 3\left|\tau_{i+1}(A)\right|. \tag{3.4.2}$$

Доказательство. Положим $B = LA$, $\widetilde{\alpha}_r = (2, \ldots, 2, 0, \ldots, 0)$, $\|\widetilde{\alpha}_r\| = 2r$. В силу теоремы 3.4.1 имеем $\left|\tau_{i+1}(A)\right| \geqslant \left|\tau_{i+1}(B)\right|$, а в силу леммы 3.4.1 при $|B| \leqslant N(n-2r, 2)$ справедливо

$$B \subseteq F(n, i) \cap \tau_i(\widetilde{\alpha}_r).$$

Заметим, что $\left|\tau_{i+1}(\widetilde{\beta})\right| \geqslant n-2r-1$ для всякого $\widetilde{\beta} \in B$, и $\left|\tau_i(\widetilde{\gamma})\right| \leqslant 3$ для всякого $\widetilde{\gamma} \in \tau_{i+1}(B)$. Обозначим через $E(B)$ множество ребер в графе с долями вершин B и $\tau_{i+1}(B)$. Тогда

$$|A|(n-2r-1) = |B|(n-2r-1) \leqslant |E(B)| \leqslant 3\left|\tau_{i+1}(B)\right| \leqslant 3\left|\tau_{i+1}(A)\right|.$$

Отсюда следует (3.4.2).

Следствие 3.4.2. *Пусть* $A \subseteq F(n, i)$, $i < n$ *и* r *такое, что* $\left|\tau_{i+1}(A)\right| \leqslant N(n-2r, 3)$. *Тогда выполнено неравенство (3.4.2).*

Доказательство. Покажем, что $|A| < N(n-2r, 2)$, тогда утверждение будет вытекать из следствия 3.4.1. Предположим, что $|A| = s > N(n-2r, 2)$. Пусть $B = LA$ и $t = N(n-2r, 3)$. Тогда для всякого набора $\widetilde{\beta}$ из $B \setminus L_{n,i}\big(N(n-2r, 2)\big)$

$$\left|\tau_{i+1}(\widetilde{\beta}) \setminus L_{n,i+1}(t)\right| \geqslant 1.$$

Отсюда получаем, что при $i < n$

$$\left|\tau_{i+1}(A)\right| \geqslant \left|\tau_{i+1}(B)\right| \geqslant N(n-2r, 3) + 1 > N(n-2r, 3),$$

что противоречит условию.

Лемма 3.4.2. *Пусть* $A \subseteq F(n, i)$, $i < n$, $|A| = s$, $t = t(n, i, s) = \min\{l\colon N(n-l-1, i-2l-1) + N(n-l-1, i-2l-2) \geqslant s\}$. *Положим* $\widetilde{\beta}_t = (2, \ldots, 2, 1, 0, \ldots, 0)$, $\|\widetilde{\beta}_t\| = 2t+1$. *Тогда*

$$LA \subseteq F(n, i) \cap \tau_i(\widetilde{\beta}_t). \tag{3.4.3}$$

Доказательство. Пусть $q = \left|\tau_i(\widetilde{\beta}_t)\right| = N(n-t-1, i-2t-1) + N(n-t-1, i-2t-2)$. Поскольку $s \leqslant q$, то

$$L_{n,i}(s) \subseteq L_{n,i}(q).$$

С другой стороны,

$$L_{n,i}(q) = F(n, i) \cap \tau_i(\widetilde{\beta}_t).$$

Отсюда вытекает (3.4.3). Лемма доказана.

Теорема 3.4.2. *При* $n \to \infty$ *и* $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *справедливо*

$$\frac{N(n, i)}{N(n, i+1)} \leqslant 1 - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.4.4}$$

а при $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$ *справедливо*

$$\frac{N(n, i)}{N(n, i-1)} \leqslant 1 - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.4.5}$$

Доказательство. При $i = n$ неравенство (3.4.4) вытекает из следствия 3.1.2. При $0 \leqslant i \leqslant n$ неравенство (3.4.4) следует из теоремы 3.3.1 с $N(n, i) = N(n, i, 3)$.

При $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$ неравенство (3.4.5) вытекает из неравенства (3.4.4) и следствия 3.3.1 с $N(n, i) = N(n, i, 3)$.

Теорема доказана

Из теоремы 3.4.2 вытекает

Следствие 3.4.3. *При* $n \to \infty$ *и произвольных* $1 \leqslant i \leqslant n$ *выполнено*

$$\frac{N(n, i-1)}{N(n, i)} \leqslant 1 - \frac{7}{10n}. \tag{3.4.6}$$

Лемма 3.4.3. *Пусть* $n \to \infty$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *и* $\Gamma_i^n = (X_i, Z_i; E_i)$ — *диаграмма Хассе множества* $\big(F(n, i), F(n, i+1)\big)$. *Положим* $X_i = F(n, i)$, $Z_i = F(n, i+1)$. *Тогда* Γ_i^n *является простым* $(1, \delta_2)$*-расширителем.*

Доказательство. Положим $\varkappa = n - \lfloor i/2 \rfloor$, $\delta_2 = (\log_2^9 \varkappa)/\varkappa^2$. Для любого $\widetilde{\alpha} \in F(n, i)$ справедливо $n - \lfloor i/2 \rfloor \leqslant \left|\tau_{i+1}(\widetilde{\alpha})\right| \leqslant n$, кроме того, $n/2 \leqslant \varkappa \leqslant n$ при $i \leqslant n-1$. Пусть $A \subseteq X_i$, покажем, что $|A| \leqslant \left|\tau_{i+1}(A)\right|(1-\delta_2)$. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha}_m = (2, \ldots, 2, 0, \ldots, 0) \in F(n, 2m)$ и $\widetilde{\beta}_r = (2, \ldots, 2, 1, 0, \ldots, 0) \in F(n, 2r+1)$. Если множество LA совпадает либо с $\tau_i(\widetilde{\alpha}_m)$ для некоторого m, $2m \leqslant i$, либо с $\tau_i(\widetilde{\beta}_r)$ для некоторого r, $2r+1 \leqslant i$, то в силу лемм 3.4.1, 3.4.2 и следствия 3.4.3 справедливо (3.4.6). В противном случае возможны два варианта.

1) Найдется t, $1 \leqslant t \leqslant i/2$ такое, что $\left|\tau_i(\widetilde{\alpha}_t)\right| < |A| < \left|\tau_i(\widetilde{\beta}_{t-1})\right|$. Положим $C = LA \setminus \tau_i(\widetilde{\alpha}_t)$, $\tau^*_{i+1}(C) = \tau_{i+1}(C) \setminus \tau_{i+1}(\widetilde{\alpha}_t)$, тогда $\tau_{i+1}(LA) = \tau_{i+1}(\widetilde{\alpha}_t) \cup \cup \tau^*_{i+1}(C)$. Имеем в силу следствия 3.4.3

$$|A| = |LA| = \left|\tau_i(\widetilde{\alpha}_t)\right| + |C| \leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t)}\right) \left|\tau_{i+1}(\widetilde{\alpha}_t)\right| + |C| = \\ = \left(1 - \frac{7}{10(n-t)} \frac{\left|\tau_{i+1}(\widetilde{\alpha}_t)\right|}{\left|\tau_{i+1}(\widetilde{\alpha}_t)\right| + |C|}\right) \left(\left|\tau_{i+1}(\widetilde{\alpha}_t)\right| + |C|\right).$$

Поскольку $\left|\tau_i(\widetilde{\beta}_{t-1}) \setminus \tau_i(\widetilde{\alpha}_t)\right| = \left|\tau_i(\widetilde{\beta}_{t-1})\right| - \left|\tau_i(\widetilde{\alpha}_t)\right| = N(n-t, i-2t+1)$, то, $|C| < N(n-t, i-2t+1) = \left|\tau_{i+1}(\widetilde{\alpha}_t)\right|$. Из [5] следует, что $|C| \leqslant \left|\tau^*_{i+1}(C)\right|$, с учетом этого и теоремы 3.4.1 получаем

$$|A| < \left(1 - \frac{7}{20(n-t)}\right) \left(N(n-t, i-2t+1) + |C|\right) \leqslant \\ \leqslant \left(1 - \frac{7}{20(n-t)}\right) \left(N(n-t, i-2t+1) + \left|\tau^*_{i+1}(C)\right|\right) = \\ = \left(1 - \frac{7}{20(n-t)}\right) \left|\tau_{i+1}(LA)\right| \leqslant (1 - \delta_2)\left|\tau_{i+1}(A)\right|.$$

2) Найдется t, $0 \leqslant t \leqslant i/2$ такое, что $\left|\tau_i(\widetilde{\beta}_t)\right| < |A| < \left|\tau_i(\widetilde{\alpha}_t)\right|$. Положим $C = LA \setminus \tau_i(\widetilde{\beta}_t)$, $\tau^*_{i+1}(C) = \tau_{i+1}(C) \setminus \tau_{i+1}(\widetilde{\beta}_t)$, тогда $\tau_{i+1}(LA) = \tau_{i+1}(\widetilde{\beta}_t) \cup \cup \tau^*_{i+1}(C)$. Имеем в силу следствия 3.4.3

$$|A| = |LA| = \left|\tau_i(\widetilde{\beta}_t)\right| + |C| \leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right) \left|\tau_{i+1}(\widetilde{\beta}_t)\right| + |C| = \\ = \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right) \left(N(n-t-1, i-2t) + N(n-t-1, i-2t+1)\right) + |C| = \\ = \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right) N(n-t-1, i-2t+1) + \\ + \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)} \frac{N(n-t-1, i-2t)}{N(n-t-1, i-2t) + |C|}\right) \left(N(n-t-1, i-2t) + |C|\right).$$

Поскольку $\left|\tau_i(\widetilde{\alpha}_t) \setminus \tau_i(\widetilde{\beta}_t)\right| = N(n-t-1, i-2t)$, то, $|C| < N(n-t-1, i-2t)|$. Из [5] следует, что $|C| \leqslant \left|\tau^*_{i+1}(C)\right|$, с учетом этого и теоремы 3.4.1 получаем

$$|A| \leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right) N(n-t-1, i-2t+1) + \\ + \left(1 - \frac{7}{20(n-t-1)}\right) \left(N(n-t-1, i-2t) + |C|\right) \leqslant \\ \leqslant \left(1 - \frac{7}{10(n-t-1)}\right) N(n-t-1, i-2t+1) + \\ + \left(1 - \frac{7}{20(n-t-1)}\right) \left(N(n-t-1, i-2t) + \left|\tau^*_{i+1} C\right|\right) \leqslant \\ \leqslant \left(1 - \frac{7}{20(n-t-1)}\right) \left|\tau_{i+1}(LA)\right| \leqslant (1 - \delta_2)\left|\tau_{i+1}(A)\right|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4.4. *Пусть* $n \to \infty$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *и* $\Gamma^n_i = (X_i, Z_i; E_i)$ — *граф, определенный в лемме* 3.4.4. *Тогда* Γ^n_i *является граничным* $(\delta_1, \varepsilon_1)$*-расширителем.*

Доказательство. Положим $\varkappa = n - \lfloor i/2 \rfloor$. При $n \to \infty$ и $0 \leqslant i \leqslant n-1$ имеем

$$N\bigl(n - \lfloor i/2 \rfloor + 2, 3\bigr) = \binom{n - \lfloor i/2 \rfloor + 2}{3} + \binom{n - \lfloor i/2 \rfloor + 2}{1}\binom{n - \lfloor i/2 \rfloor + 1}{1} \geqslant \geqslant \frac{\bigl(n - \lfloor i/2 \rfloor\bigr)^3}{6} \geqslant g_2.$$

Из следствия 3.4.2 при $r = \lfloor i/4 \rfloor - 1$ вытекает, что для всякого $A \subseteq X$ такого, что $\bigl|\tau_{i+1}(A)\bigr| = g \leqslant g_2$ выполнено неравенство

$$|A| \leqslant \bigl|\tau_{i+1}(A)\bigr| \frac{3}{n - \lfloor i/2 \rfloor + 1} \leqslant \bigl|\tau_{i+1}(A)\bigr|(1 - \delta_1).$$

Следовательно, граф Γ_i^n является граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$-расширителем.

Лемма доказана.

Из теоремы 3.4.2 и следствия 3.3.1 при $k = 3$ и $N(n, i) = N(n, i, 3)$ вытекает

Следствие 3.4.4. *При $n \to \infty$ и произвольных $n \leqslant i \leqslant 2n - 1$ выполнено*

$$\frac{N(n, i+1)}{N(n, i)} \leqslant 1 - \frac{7}{10n}.$$

Лемма 3.4.5. *Пусть $n \to \infty$, $n + 1 \leqslant i \leqslant 2n$ и $\overline{\Gamma}_i^n = (\overline{X}_i, \overline{Z}_i; \overline{E}_i)$ — диаграмма Хассе множества $\bigl(F(n, i), F(n, i-1)\bigr)$. Тогда $\overline{\Gamma}_i^n$ является простым $(1, \delta_2)$-расширителем и граничным $(\varepsilon_1, \delta_1)$-расширителем.*

Доказательство. Заметим, что граф $\overline{\Gamma}_i^n$ изоморфен графу Γ_{2n-i}^n, определеному в лемме 3.4.3. Теперь утверждение следует из следствия 3.4.4 и лемм 3.4.3, 3.4.4.

Теорема 3.4.3. *Пусть $n \to \infty$, для всех i положим $E_{3,i}^n = F(n, i)$, $t = \lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$, $\varkappa = n - \lfloor t/2 \rfloor$. Тогда множества $(E_{3,0}^n, E_{3,1}^n, \ldots, E_{3,t}^n)$ и $(\overline{E_{3,2n-t}^n, \ldots, E_{3,2n-1}^n, E_{3,2n}^n})$ являются $(2, \varkappa, 1, 2, t, t)$-унимодальными.*

Доказательство. Покажем сначала, что при $0 \leqslant i \leqslant t-1$ граф Γ_i^n, определенный в лемме 3.4.3 является полным $(2, \varkappa_i, 1, 1)$-расширителем при $\varkappa_i = n - \lfloor i/2 \rfloor$. Проверим выполнение условий (2.1.1) – (2.1.5). Выполнение условия (2.1.1) следует из того, что степень любой вершины $\widetilde{\beta} \in X$ не меньше $n - \lfloor i/2 \rfloor$. Степень любой вершины $\widetilde{\alpha} \in Z$ не больше $i + 1$, кроме того, из условия следует, что $n - \lfloor i/2 \rfloor \geqslant i + 1$, поэтому выполняются условия (2.1.2) при $p = 1$ и (2.1.4). Условие (2.1.3) выполнено при $q = 1$, поскольку для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in X$

$$\bigl|\tau_{t-1}(\widetilde{\alpha}) \cap \tau_{t-1}(\widetilde{\beta})\bigr| \leqslant 1.$$

Проверим выполнение условия (2.1.5), имеем при $0 \leqslant i \leqslant t-1$

$$N(n, i) < |E_3^n| = 3^n = 2^{n \log_2 3} \leqslant 2^{3(n - \lfloor i/2 \rfloor) - \log_2^2(n - \lfloor i/2 \rfloor)}.$$

Отсюда и из лемм 3.4.3, 3.4.4 следует, что граф Γ_i^n является полным $(2, n - \lfloor i/2 \rfloor, 1, 1)$-расширителем.

Положим $\varkappa = \lceil 2n/3 \rceil$, тогда $\varkappa_i \geqslant \varkappa$ при $0 \leqslant i < 2n/3$. Степень вершины $\widetilde{\beta} \in X = E_{3,i}^n$ в E_3^n не больше $n + i \leqslant \varkappa^2$. Таким образом, множество

$(E^n_{3,0}, E^n_{3,1}, \ldots, E^n_{3,t})$ является $(2, \varkappa, 1, 2, t, t)$-унимодальным. Поскольку для всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$ граф $\overline{\Gamma}^n_i$ изоморфен графу Γ^n_i, из леммы 3.4.5 следует, что множество $(\overline{E^n_{3,2n-t}, \ldots, E^n_{3,2n-1}, E^n_{3,2n}})$ является $(2, \varkappa, 1, 2, t, t)$-унимодальным.

Теорема доказана.

Приложение

Вычисление μ_3

Пусть $\widetilde{I}^n_m = (\widetilde{X}_m, \widetilde{f}_m)$, $I^n_m = (X_m, f_m)$ и $\overline{I}^n_m = (\overline{X}_m, \overline{f}_m)$ — функциональные пары, определенные в главе 2. Тогда $\mathscr{A}(I^n_m), \mathscr{A}(\overline{I}^n_m) \subseteq \mathscr{A}(\widetilde{I}^n_m)$. Положим $\mathscr{B}_= \mathscr{A}(I^n_m)$, $\mathscr{D}_m = \mathscr{A}(\overline{I}^n_m)$,

$$\alpha^{(r),\nu}_{m,j} = \alpha^{\nu}\big((\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D})^{(r)}_{[j]}\big)$$

и вычислим соответствующие суммы.

По определению $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{A}(\widetilde{I}^n_m)$, если $\partial(\{\widetilde{\alpha}\}) \cap \partial(\{\widetilde{\beta}\}) \neq \varnothing$. Поскольку $\mathscr{B}_m \cap \mathscr{D}_m = \varnothing$, то справедливо

$$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)_{[j]} = \mathscr{B}_{m[j]} \cup \mathscr{D}_{m[j]},$$

$$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)^{(2)}_{[2]} = \Big\{\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}\} \colon \{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\} \in \mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m,\ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{A}_2(\widetilde{I}^n_m)\Big\},$$

$$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)^{(2)}_{[3]} = \mathscr{E}_{m,1} \cup \mathscr{E}_{m,2} \cup \mathscr{E}_{m,3}, \quad \text{где}$$

$$\mathscr{E}_{m,1} = \Big\{\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}, \{\widetilde{\gamma}\}\} \colon \{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}, \{\widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m,\ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{A}_3(\widetilde{I}^n_m)\Big\},$$

$$\mathscr{E}_{m,2} = \Big\{\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\}\} \colon \{\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\} \in (\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)_{[2]},\ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{A}_3(\widetilde{I}^n_m)\Big\},$$

$$\mathscr{E}_{m,3} = \Big\{\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}\},\ \{\{\widetilde{\beta}\}, \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}\} \colon \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in (\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)_{[2]}\Big\},$$

$$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)^{(1,2)}_{[3]} = \mathscr{C}_{m,1} \cup \mathscr{C}_{m,2}, \quad \text{где}$$

$$\mathscr{C}_{m,1} = \Big\{\Big\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\{\widetilde{\beta}\}, \{\widetilde{\gamma}\}\}\Big\} \colon \{\{\widetilde{\beta}\}, \{\widetilde{\gamma}\}\} \in (\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)^{(2)}_{[2]}, \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{A}_3(\widetilde{I}^n_m)\Big\},$$

$$\mathscr{C}_{m,2} = \Big\{\Big\{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}\}\Big\}, \Big\{\{\widetilde{\beta}\}, \{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}\}\Big\} \colon \{\{\widetilde{\alpha}\}, \{\widetilde{\beta}\}\} \in (\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)^{(2)}_{[2]}\Big\}.$$

Из определения $f(A)$ для любого $A \in \mathscr{A}^{(r)}(\widetilde{I}^n_m)$ следует, что

$$\alpha^{(1),\nu}_{m,1} = \sum_{\{\widetilde{\alpha}\} \in \mathscr{B}_m} f^{\nu}(\{\widetilde{\alpha}\}) + \sum_{\{\widetilde{\alpha}\} \in \mathscr{D}_m} f^{\nu}(\{\widetilde{\alpha}\}),$$

$$\alpha^{(1),1}_{m,2} = \sum_{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{B}_{m[2]}} f(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}) + \sum_{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{D}_{m[2]}} f(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}),$$

$$\alpha^{(1),1}_{m,3} = \sum_{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{B}_{m[3]}} f(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\}) + \sum_{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{D}_{m[3]}} f(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\}),$$

$$\alpha^{(2),1}_{m,2} = \sum_{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{B}_{m[2]}} f(\{\widetilde{\alpha}\}) f(\{\widetilde{\beta}\}) + \sum_{\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{D}_{m[2]}} f(\{\widetilde{\alpha}\}) f(\{\widetilde{\beta}\}) + \sum_{\substack{\{\widetilde{\alpha}\} \in \mathscr{B}_m, \{\widetilde{\beta}\} \in \mathscr{D}_m, \\ \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{A}(\widetilde{I}^n_m)}} f(\{\widetilde{\alpha}\}) f(\{\widetilde{\beta}\}),$$

И, кроме того,

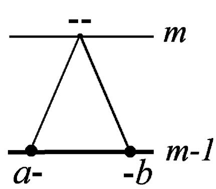
$$\alpha^{(2),1}_{m,[3]} = \sum_{\substack{\{\widetilde{\alpha}\},\{\widetilde{\beta}\},\{\widetilde{\gamma}\}\in(\mathcal{B}_m\cup\mathcal{D}_m),\\ \{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\}\in\mathcal{A}_3(\widetilde{I}^n_m)}} f(\{\widetilde{\alpha}\})f(\{\widetilde{\beta}\})f(\{\widetilde{\gamma}\}) + \sum_{\substack{\{\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\}\in(\mathcal{B}_m\cup\mathcal{D}_m)_{[2]},\\ \{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\}\in\mathcal{A}_3(\widetilde{I}^n_m)}} f(\{\widetilde{\alpha}\})f(\{\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\})+$$

$$+ \sum_{\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}\in(\mathcal{B}_m\cup\mathcal{D}_m)_{[2]}} \big(f(\{\widetilde{\alpha}\})+f(\{\widetilde{\beta}\})\big)f(\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}),$$

$$\alpha^{(1,2),1}_{m,[3]} = \sum_{\substack{\{\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\}\in(\mathcal{B}_m\cup\mathcal{D}_m)^{(2)}_{[2]},\\ \{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\}\in\mathcal{A}_3(\widetilde{I}^n_m)}} f(\{\widetilde{\alpha}\})f(\{\widetilde{\beta}\})f(\{\widetilde{\gamma}\})+$$

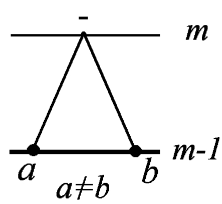
$$+ \sum_{\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}\in(\mathcal{B}_m\cup\mathcal{D}_m)^{(2)}_{[2]}} \big(f(\{\widetilde{\alpha}\})+f(\{\widetilde{\beta}\})\big)f(\{\widetilde{\alpha}\})f(\{\widetilde{\beta}\}).$$

На рис. п1−п13 изображены множества вершин, принадлежащие семейству $\mathcal{A}_3(\widetilde{I}^n_m)$. Каждое такое множество является 2-связным в графе $\widetilde{\Gamma}^n_m = (\widetilde{X}_m, \widetilde{Z}_m)$. Жирными точками изображены вершины, входящие в рассматриваемое множество, а простыми точками — вершины, принадлежащие



$|S^n_k|\binom{m}{2}k^2$

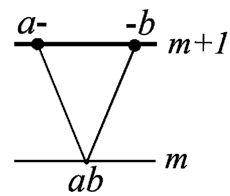
а



$|S^n_k|\binom{k}{2}m$

б

Рис.п1



$|S^n_k|\binom{n-m}{2}$

Рис.п2

множеству $\widetilde{Z}_m$. Вершины соединены отрезком, если в графе $G_{\widetilde{I}^n_m}$, порожденном функциональной парой $\widetilde{I}^n_m$, существует ребро, соединяющее их.

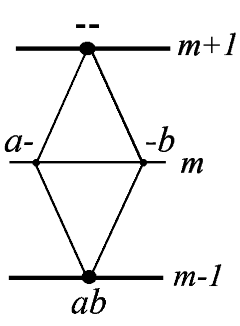
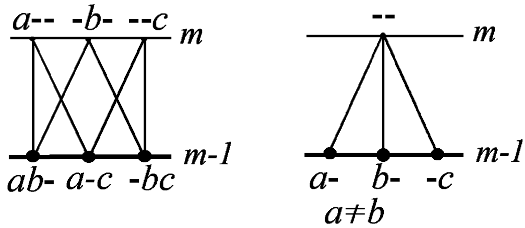


Рис. п3.
$|S^n_k|\dfrac{mk(n-m)}{2}$

Если две вершины образуют 2-связное множество, то наборы их координат отличаются в одной или двух позициях (см. рис. п1−п3). Если 2-связное множество состоит из трех вершин, то наборы их координат отличаются не более, чем в четырех позициях. Рядом с каждой вершиной выписаны координаты, в которых она отличается от остальных вершин множества, для удобства −1 заменена на −. Рядом с каждым рисунком выписано количество множеств с данной структурой, содержащихся в множестве $\widetilde{X}_m$. На рис. п1 изображены пары вершин $\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}\in\mathcal{D}_{m[2]}$. На рис. п3 изображены пары вершин $\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}\in\mathcal{B}_{m[2]}$. Для каждой из пар, изображенных на рис. п1, п2 справедливо равенство

$$\big|\partial(\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\})\big| = \big|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\big| + \big|\partial(\{\widetilde{\beta}\})\big| - 1,$$

Имеем $\left|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\right| = k(m+1)$ для всех $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{D}_m$, и $\left|\partial(\{\widetilde{\beta}\})\right| = n-m+1$ для



$|S_k^n|\binom{m}{2}\frac{(n-m)k^2}{3}$ $\qquad$ $|S_k^n|\binom{m}{2}k^2(k-1)$

а $\qquad$ *б*

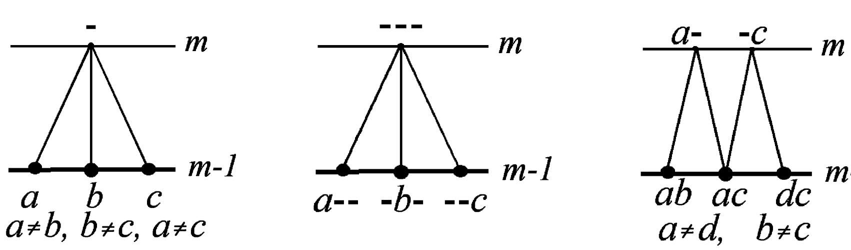
Рис.п4

всех $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{B}_m$. Следовательно, каждая пара вершин, изображенная на рис. п1, порождает семейства,

входящие в	и вносящие вклад	в	
$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)_{[2]}$	$2^{-2(n-m+1)+1}$	$\alpha^{(1),1}_{m,2}$,	
$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)^{(2)}_{[2]}$	$2^{-2(n-m+1)}$	$\alpha^{(2),1}_{m,2}$,	(1)
$\mathscr{E}_{m,3}$	$2 \cdot 2^{-3(n-m+1)+1}$	$\alpha^{(2),1}_{m,3}$,	
$\mathscr{C}_{m,2}$	$2 \cdot 2^{-3(n-m+1)}$	$\alpha^{(1,2),1}_{m,3}$.	

Рассуждения для пар вершин, изображенных на рис. п2, аналогичны. Пара вершин, изображенная на рис. п3, порождает семейства,

входящие в	и вносящие вклад	в	
$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)^{(2)}_{[2]}$	$2^{-(n-m+1)-k(m+1)}$	$\alpha^{(2),1}_{m,2}$,	(2)
$\mathscr{E}_{m,3}$	$2^{-2(n-m+1)-k(m+1)} + 2^{-(n-m+1)-2k(m+1)}$	$\alpha^{(1,2),1}_{m,3}$.	



$|S_k^n|m\binom{k}{3}$ $\qquad$ $|S_k^n|\binom{m}{3}k^3$ $\qquad$ $|S_k^n|\frac{mk(n-m)(k-1)^2}{2}$

а $\qquad$ *б* $\qquad$ *в*

Рис.п5

На рис. п4−п6 изображены тройки вершин $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{D}_{m[3]}$. Для каждой из троек, изображенных на рис. п4,*б*, п5, п6 справедливо равенство

$$\left|\partial(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\})\right| = \left|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\right| + \left|\partial(\{\widetilde{\beta}\})\right| - 2,$$

а для тройки, изображенной на рис. п4,*а* справедливо равенство

$$\left|\partial(\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\})\right| = \left|\partial(\{\widetilde{\alpha}\})\right| + \left|\partial(\{\widetilde{\beta}\})\right| - 3.$$

Тройка вершин, изображенная на рис. п4,*а*, порождает семейства,

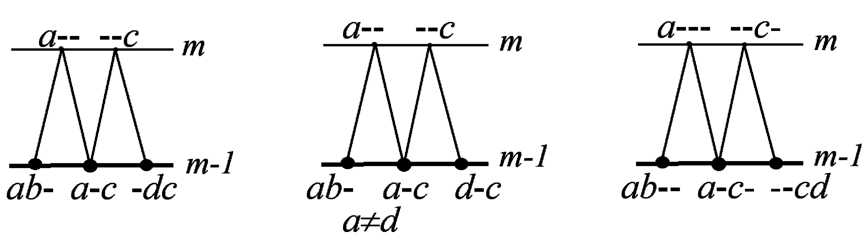
входящие в	и вносящие вклад	в	
$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)_{[3]}$	$2^{-3(n-m+1)+3}$	$\alpha_{m,3}^{(1),1}$,	
$\mathscr{E}_{m,1}$	$3 \cdot 2^{-3(n-m+1)+1}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	(3)
$\mathscr{E}_{m,2}$	$2^{-3(n-m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	
$\mathscr{C}_{m,1}$	$3 \cdot 2^{-3(n-m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(1,2),1}$,	

каждая тройка вершин, изображенная на рис. п4,*б*, п5, порождает семейства

входящие в	и вносящие вклад	в	
$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)_{[3]}$	$2^{-3(n-m+1)+2}$	$\alpha_{m,3}^{(1),1}$,	
$\mathscr{E}_{m,1}$	$3 \cdot 2^{-3(n-m+1)+1}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	(4)
$\mathscr{E}_{m,2}$	$2^{-3(n-m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	
$\mathscr{C}_{m,1}$	$3 \cdot 2^{-3(n-m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(1,2),1}$,	

а каждая тройка вершин, изображенная на рис. п5,*в*, п6, порождает семейства

входящие в	и вносящие вклад	в	
$(\mathscr{B}_m \cup \mathscr{D}_m)_{[3]}$	$2^{-3(n-m+1)+2}$	$\alpha_{m,3}^{(1),1}$,	
$\mathscr{E}_{m,1}$	$2 \cdot 2^{-3(n-m+1)+1}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	(5)
$\mathscr{E}_{m,2}$	$2^{-3(n-m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	
$\mathscr{C}_{m,1}$	$2 \cdot 2^{-3(n-m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(1,2),1}$.	



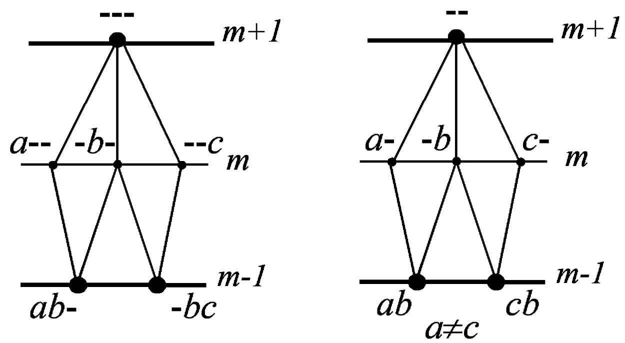
$|S_k^n|\binom{m}{2}(n-m)k^3$ $|S_k^n|\binom{m}{2}(n-m)2k^2(k-1)$ $|S_k^n|\binom{m}{3}(n-m)3k^3$

а б *в*

Рис.п6

На рис. п7 изображены тройки вершин $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\}$, где $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\} \in \mathscr{D}_{m[2]}$, $\{\widetilde{\gamma}\} \in \mathscr{B}_{m\{\widetilde{\alpha}\}} \cap \mathscr{B}_{m\{\widetilde{\beta}\}}$. Каждая такая тройка вершин порождает семейства,

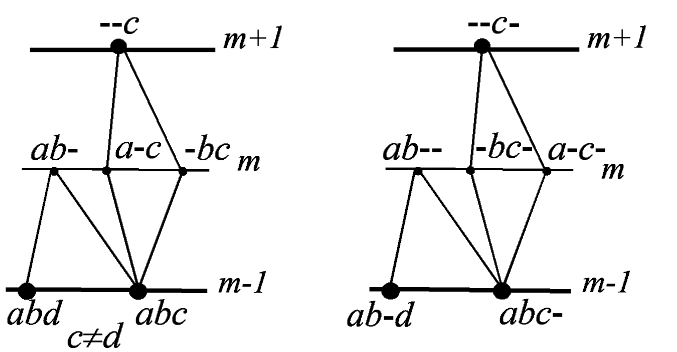
входящие в	и вносящие вклад	в	
$\mathscr{E}_{m,1}$	$2^{-2(n-m+1)-k(m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	
$\mathscr{E}_{m,2}$	$2^{-2(n-m+1)-k(m+1)+1}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	(6)
$\mathscr{C}_{m,1}$	$3 \cdot 2^{-2(n-m+1)-k(m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(1,2),1}$.	



$|S_k^n|\binom{m}{2}(n-m)k^2$ $\qquad$ $|S_k^n|m(n-m)\binom{k}{2}$

а $\qquad$ *б*

Рис.п7



$|S_k^n|\binom{n-m}{2}mk(k-1)$ $\qquad$ $|S_k^n|\binom{n-m}{2}\binom{m}{2}2k^2$

а $\qquad$ *б*

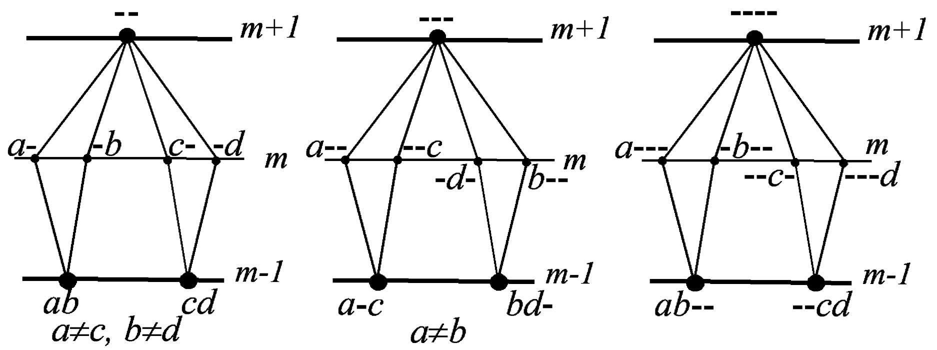
Рис.п8

На рис. п8 изображены тройки вершин $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$, где $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\} \in \mathscr{D}_{m[2]}$, $\{\tilde{\gamma}\} \in \mathscr{B}_{m\{\tilde{\alpha}\}} \backslash \mathscr{B}_{m\{\tilde{\beta}\}}$. Каждая такая тройка вершин порождает семейства,

входящие в	и вносящие вклад	в	
$\mathscr{E}_{m,1}$	$2^{-2(n-m+1)-k(m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	
$\mathscr{E}_{m,2}$	$2^{-2(n-m+1)-k(m+1)+1}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	(7)
$\mathscr{C}_{m,1}$	$2\cdot 2^{-2(n-m+1)-k(m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(1,2),1}$.	

На рис. п9 изображены тройки вершин $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}$, где $\{\tilde{\alpha}\}, \{\tilde{\beta}\} \in \mathscr{D}_m$, $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\} \notin \mathscr{D}_{m[2]}$, $\{\tilde{\gamma}\} \in \mathscr{B}_{m\{\tilde{\alpha}\}} \cap \mathscr{B}_{m\{\tilde{\beta}\}}$. Каждая такая тройка вершин порождает семейства,

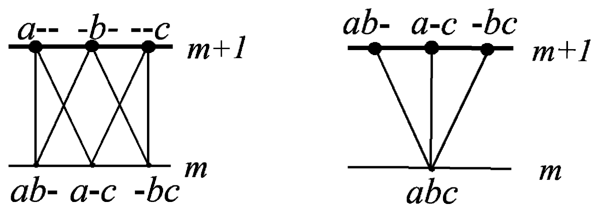
входящие в	и вносящие вклад	в	
$\mathscr{E}_{m,2}$	$2^{-2(n-m+1)-k(m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(2),1}$,	(8)
$\mathscr{C}_{m,1}$	$2\cdot 2^{-2(n-m+1)-k(m+1)}$	$\alpha_{m,3}^{(1,2),1}$.	



$|S_k^n|m(n-m)\binom{k}{2}\frac{k-1}{2}$ $|S_k^n|\binom{m}{2}(n-m)k^2(k-1)$ $|S_k^n|\binom{m}{3}\frac{3k^2(n-m)}{4}$

а *б* *в*

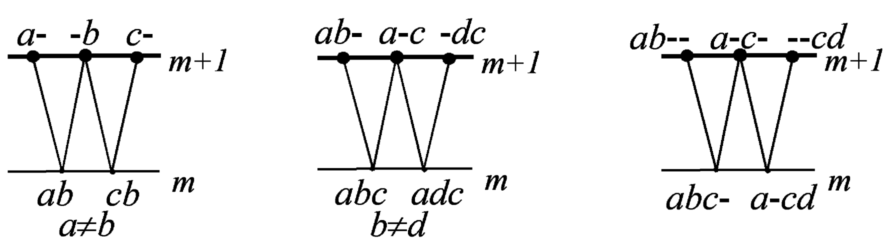
Рис.п9



$|S_k^n|\binom{n-m}{2}\frac{mk}{3}$ $|S_k^n|\binom{n-m}{3}$

а *б*

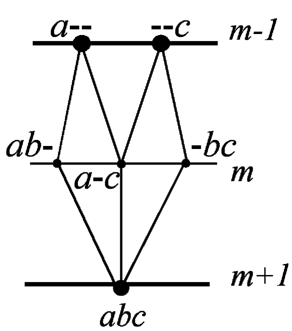
Рис.п10

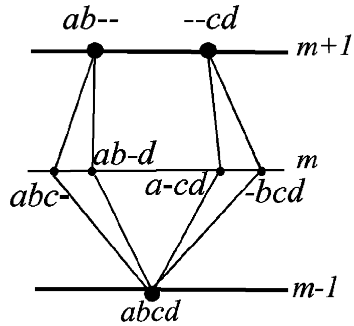


$|S_k^n|\binom{n-m}{2}(k-1)$ $|S_k^n|\binom{n-m}{3}\frac{3(k-1)}{2}$ $|S_k^n|\binom{n-m}{3}3mk$

а *б* *в*

Рис.п11

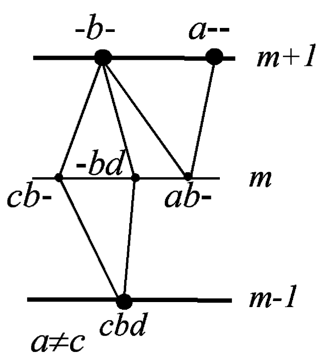


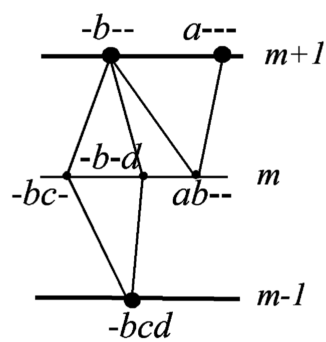


$|S_k^n|\binom{n-m}{2}mk$ $\qquad$ $|S_k^n|\binom{n-m}{3}\frac{3mk}{4}$

a $\qquad$ *б*

Рис.п12





$|S_k^n|m(n-m)\binom{k}{2}\frac{k-1}{2}$ $\qquad$ $|S_k^n|\binom{n-m}{2}\binom{m}{2}2k^2$

a $\qquad$ *б*

Рис.п13

Случаи, изображенные на рис. п10–п13, аналогичны рассмотренным выше. Из (1)–(8) следует, что

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{m,3} = \binom{n}{m} k^{n-m} \Bigg[& 2^{-k(m+1)} \frac{n-m}{(m+1)k} + 2^{-(n-m+1)} \frac{mk}{n-m+1} + \\
& + 2^{-2(n-m+1)} \left(\binom{mk}{2} - \frac{mk}{2(n-m+1)} \right) + \\
& + 2^{-2k(m+1)} \left(\binom{n-m}{2} - \frac{n-m}{2k(m+1)} \right) + \\
& + 2^{-(n-m+1)-k(m+1)} \frac{mk(n-m)}{2} + \\
& + 2^{-3(n-m+1)} \left(\frac{mk}{3(n-m+1)} - 2\binom{mk}{2} + \binom{m}{2} \frac{(n-m)k^2(6k+1)}{3} + \right. \\
& \left. + \binom{m}{3}(n-m)3k^3 + \frac{mk(n-m)(k-1)^2}{2} \right) + \\
& + 2^{-3k(m+1)} \left(\frac{n-m}{3k(m+1)} + \binom{n-m}{2} \frac{4mk+3k-9}{3} + \binom{n-m}{3} \frac{3mk+k-1}{2} \right) + \\
& + 2^{-2(n-m+1)-k(m+1)} \left(\frac{mk(n-m)}{2} + \binom{k}{2} \frac{m(n-m)(2mk-k-1)}{2} - \right. \\
& \left. - 2\binom{n-m}{2}\binom{mk}{2} + \binom{m}{3} \frac{3k^3(n-m)}{4} \right) + \\
& + 2^{-(n-m+1)-2k(m+1)} \left(\frac{mk(n-m)}{2} + \binom{n-m}{3} \frac{3mk}{4} - \right. \\
& \left. - 2\binom{n-m}{2} mk(m+2k-3) \right) \Bigg].
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А й г н е р М. Комбинаторная теория: Пер. с англ. — М.: Мир. — 1982.
2. А л е к с е е в В. Б. О числе монотонных k-значных функций // Проблемы кибернетики. Вып. 28. — М.: Наука, 1974. — С. 5–24.
3. Г а в р и л о в Г. П., С а п о ж е н к о А. А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. — М.: Наука, 1992.
4. Б е з р у к о в С. Л. Минимизация теней множеств полурешетки частичных отображений // Методы дискретного анализа в исследовании функциональных систем. Вып. 47. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1988. — С. 3–18.
5. К а т е р и н о ч к и н а Н. Н. Некоторые соотношения для подмножеств слоев n-мерной k-значной решетки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984.— Т. 24, № 5. — С. 782–786.
6. С а п о ж е н к о А. А. О числе связных подмножеств с заданной мощностью границы в двудольных графах // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Вып. 45. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1987. — С. 42–70.
7. С а п о ж е н к о А. А. О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 1. — С. 74–93.
8. С а п о ж е н к о А. А. О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 2. — С. 110–128.
9. С а п о ж е н к о А. А. О предельных распределениях случайных величин, порождаеных ограниченными последовательностями // Дискретный анализ, Труды Института математики СО АН СССР. — Новосибирск, 1994. — Т. 27. — С. 166–176.
10. С а п о ж е н к о А. А. Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 9. — М.: Наука, 2000. — С. 161–220.
11. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Основы математического анализа. — М.: Наука, 1968, т. 1, С. 99.
12. Ф е л л е р В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения — М.: Наука, 1967, т. 1.

13. Харари Ф. Теория графов / Пер. с англ. и предисл. В.П. Козырева. Под ред. Г.П. Гаврилова. Изд. 2–е. — Едиториал УРСС, 2003.
14. Clements G., Lindstrom B. A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Comb. Theory. 1968. — V. 7. — № 2. — P. 230–238.

Поступило в редакцию 24 V 2004