

М.П. Галанин, Е.Б. Савенков

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ
ЗАДАЧИ О СКОРОСТНОМ СКИН-СЛОЕ**

Москва, 2004

Аннотация

В работе представлены результаты применения метода конечных суперэлементов (МКСЭ) для задачи о скоростном скин-слое. Построена специальная слабая постановка задачи, аппроксимация которой методом Бубнова-Галеркина приводит к МКСЭ. Построена соответствующая конечномерная задача. На ее основе построена монотонизированная аппроксимация задачи с нелинейной искусственной диффузией. Представлены результаты численных расчетов.

M.P. Galanin, E.B. Savenkov

Finite Superelements Method for velocity skin-layer problem.

Abstract

In this paper we present some results on Finite Superelement Method (FSEM) application for velocity skin-layer problem. We introduce a variational equation which natural Bubnov-Galerkin approximation leads to FSEM. We also consider regularized FSEM scheme. To construct it we use nonlinear artificial diffusion. Some numerical results are considered too.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Слабая постановка задачи	5
4	МКСЭ	6
4.1	Описание метода	6
4.2	Сборка	11
4.3	Вычисление матриц жесткости СЭ	12
4.4	Монотонизация	12
4.5	Линейная монотонизация	15
4.6	Нелинейная монотонизация	17
4.7	Особенности реализации алгоритма	19
5	Результаты расчетов	20
5.1	Граничные и начальные условия	20
5.2	Результаты расчетов	21
	Список литературы	32

В данной работе представлены результаты исследования и применения МКСЭ для численного решения задачи о скоростном скин-слое. Эта задача возникает при математическом моделировании электродинамических ускорителей макротел типа «рельсотрон». Решение задачи имеет особенность типа пограничного слоя. Аккуратный расчет особенности представляет особый интерес, так как с ее наличием связана проблема «кризиса» контакта между рельсом и якорем. Эта проблема, в свою очередь, является одной из основных при конструировании и технической реализации подобных устройств. Более подробная информация о физической и математической постановке задачи приведена в [1].

Для решения задачи в данной работе используется МКСЭ. Впервые этот метод был предложен в работах Р.П. Федоренко и его коллег как метод решения задач, решения которых имеют локальные особенности, сосредоточенные в областях, размер которых мал по сравнению с размером всей расчетной области (см. [2] и ссылки там). В соответствии с МКСЭ расчетная область разбивается на некоторое количество подобластей – суперэлементов таким образом, чтобы особенности решения задачи были целиком сосредоточены внутри суперэлементов, а на границах суперэлементов решение являлось достаточно гладкой функцией. Каждый такой СЭ оснащается системой базисных функций, которые являются точными решениями рассматриваемой задачи. Решение задачи ищется как линейная оболочка построенной таким образом системы базисных функций. Такой подход позволяет, с одной стороны, использовать грубую, суперэлементную сетку, а с другой – учитывать все особенности решения задачи (за счет специальных базисных функций).

При построении аппроксимаций МКСЭ для данной задачи использовался подход, рассмотренный ранее в работах [3]-[5].

В работе рассмотрены различные варианты метода. Проведено его сравнение с обычным методом конечных элементов, а также рассмотрено

программной реализации метода.

Как показала практика, при непосредственном использовании МКСЭ приближенное решение имеет нефизические осцилляции, связанные с наличием в задаче преобладающего конвективного переноса. Эта проблема типична для задач такого типа. Для устранения осцилляций в работе использовалась нелинейная искусственная диффузия. Подобный алгоритм ранее применялся в [1] при монотонизации обычной КЭ схемы для данной задачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00461).

2 Постановка задачи

Рассмотрим постановку задачи о скоростном скин-слое в двумерном приближении. Требуется определить функцию $H = H(x, y, t)$, удовлетворяющую в двумерной области Ω уравнению

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \vec{v} \nabla H = \operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi\sigma} \nabla H - \vec{u} H \right) \quad (1)$$

и заданным начальным и граничным условиям.

Задача решается в двумерной области $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_R$, где Ω_R – область, занимаемая рельсом, Ω_A – область, занимаемая якорем (Рис. 1).

При этом

$$\vec{v}(x, t) = \vec{u}_a(t), \quad x \in \Omega_A \cup \Omega_R; \quad \vec{u}(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_A, \\ \vec{u}_a(t), & x \in \Omega_R \end{cases}.$$

Вектор скорости якоря направлен вдоль оси Ox ,

$$\vec{u}_a(t) = (u_a(t), 0),$$

где $u_a(t)$ в рассматриваемой двумерной постановке может считаться заданной функцией времени. Конкретный вид функции $u_a(t)$ определяется полной постановкой задачи, включающей в себя уравнения движения якоря.

1 рода, на оставшейся части границы Γ_1 заданы граничные условия 2 рода.

Вид расчетной области приведен на Рис. 1.

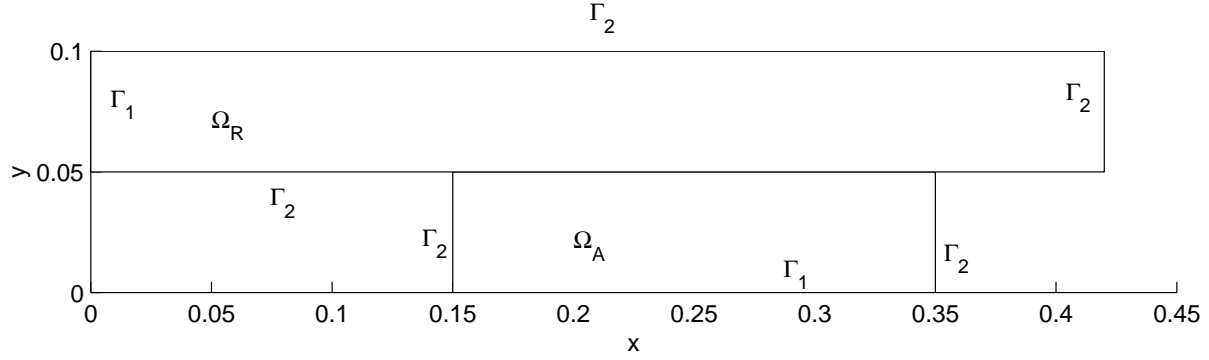


Рис. 1. Расчетная область.

3 Слабая постановка задачи

Рассмотрим слабую постановку задачи. Для простоты будем считать, что на всей границе области заданы однородные граничные условия 1-го рода. Пусть V – пространство достаточно гладких функций с областью определения Ω , $V_0 \subset V$ – подпространство функций, обращающихся в 0 на границе.

Умножив уравнение (1) на произвольную функцию $\psi \in V_0$ и проинтегрировав по Ω , получим:

$$\left(\frac{dH}{dt}, \psi \right) + c_1(-\vec{v}, H, \psi) + c_2(-\vec{u}, H, \psi) + d(H, \psi) = 0, \quad (2)$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$,

$$c_1(\vec{a}, u, v) = \int_{\Omega} \vec{a} \nabla uv \, d\Omega,$$

$$c_2(\vec{a}, u, v) = \int_{\Omega} \vec{a} u \nabla v \, d\Omega,$$

$$d(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi\sigma} \nabla u \nabla v \, d\Omega.$$

проксимацию уравнения (2) по времени. При этом на каждом временном слое получим следующую стационарную задачу:

$$\left(\frac{\hat{H} - H}{\tau}, \psi \right) + c_1(-\vec{v}, \hat{H}, \psi) + c_2(-\vec{u}, \hat{H}, \psi) + d(\hat{H}, \psi) = 0,$$

где τ – шаг по времени, \hat{H} – решение на следующем временном шаге, H – решения на текущем временном шаге. Это уравнение можно переписать в виде

$$c_1(-\vec{v}, \hat{H}, \psi) + c_2(-\vec{u}, \hat{H}, \psi) + d(\hat{H}, \psi) + \left(\lambda \hat{H}, \psi \right) = f(\psi), \quad (3)$$

где

$$f(\psi) = (\lambda H, \psi), \quad \lambda = \frac{1}{\tau}.$$

Именно эту задачу мы и будем на каждом временном слое решать методом конечных СЭ.

В дальнейшем для упрощения будем опускать «крышку» (значок $\hat{}$) и считать, что задача решается относительно функции H .

Задачу (3) также будем записывать в виде

$$a(H, \psi) = f(\psi), \quad \forall \psi \in V_0,$$

где

$$a(H, \psi) = c_1(-\vec{v}, H, \psi) + c_2(-\vec{u}, H, \psi) + d(H, \psi) + (\lambda H, \psi). \quad (4)$$

4 МКСЭ

4.1 Описание метода

В соответствии с МКСЭ расчетная область разбивается на некоторое количество подобластей – суперэлементов,

$$\Omega = \cup_k \Omega_k, \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset, \text{ если } k \neq l.$$

количество таких СЭ равно K , P_i ($i = \overline{1, N}$) – узлы этого разбиения (вершины СЭ), $\partial\Omega_k$ – граница суперэлемента Ω_k .

Далее на границах СЭ зададим набор граничных базисных функций

$$\varphi_i(x, y), \quad i = \overline{1, N} \quad (x, y) \in \cup\partial\Omega_k.$$

Будем использовать кусочно-линейные базисные функции, т.е. $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$, на ребра СЭ $\varphi_i(x, y)$ продолжены линейно. Подчеркнем, что базисные функции φ_i заданы только на границах СЭ.

В соответствии с МКСЭ решение ищем в виде линейной комбинации базисных функций $\Phi_i(x, y)$, $i = \overline{1, N}$, которые являются точными решениями рассматриваемого уравнения внутри каждого СЭ, а на границах СЭ совпадают с функциями φ_i , т.е. для каждого суперэлемента Ω_k и произвольного узла i выполнено

$$a_k(\Phi_i, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in V_0(\Omega_k), \quad \Phi_i|_{\partial\Omega_k} = \varphi_i|_{\partial\Omega_k}.$$

Здесь билинейные формы $a_k(\cdot, \cdot)$ – такие же, что и в (4), но интегрирование в них осуществляется по Ω_k , а не по всей области Ω .

Для учета ненулевой правой части введем функцию Φ_0 , которая в суперэlemente Ω_k является решением задачи

$$a_k(\Phi_0, w) = f_k(w), \quad \forall w \in V_0(\Omega_k), \quad \Phi_0|_{\partial\Omega_k} = 0.$$

Решение ищем в виде линейной комбинации построенных функций

$$H_h = \Phi_0 + \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i,$$

которая удовлетворяет исходному уравнению в каждом СЭ по отдельности.

Амплитуды суперэлементов c_i определяются из уравнений, формально совпадающих с условиями метода Галеркина-Бубнова при выборе в качестве базисных функций Φ_i :

$$a(H_h, \Phi_i) = f(\Phi_i), \quad \forall \Phi_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

личными.

Подчеркнем, что сходство записанного таким образом МКСЭ с методом Бубнова-Галеркина (Б.-Г.) лишь формальное. Точнее, совпадает лишь форма записи конечномерной задачи (5). Принципиальное отличие состоит в том, что в методе Б.-Г. (и проекционно-сеточных методах вообще) предполагается, что система базисных функций Φ_i достаточно «большая» в том смысле, что любой элемент пространства V (и решение задачи, в том числе) может быть «одинаково хорошо» приближен линейной комбинацией функций Φ_i . Это, в частности, позволяет свести оценку ошибки приближенного решения к оценке ошибки интерполяции решения системой базисных функций Φ_i . Именно таким образом обычно получают оценки ошибок и скорости сходимости проекционно-сеточных методов. В МКСЭ это не так. Аппроксимировать произвольный элемент пространства V системой построенных базисных функций Φ_i невозможно, т.к. они содержат априорную информацию о конкретной решаемой задаче. В отличие от метода Б.-Г. здесь базисные функции не задаются извне, а рассчитываются как решения уравнения, которое мы решаем. Задаются лишь базисные функции φ_i , определенные на границах СЭ. Если переписать задачу относительно только этих граничных базисных функций, то возможно рассматривать МКСЭ как проекционно-сеточный метод с точки зрения теории этих методов и использовать эту теорию для анализа сходимости, получения оценок ошибок приближенного решения и т.д. Отметим еще раз, что использовать эту теорию напрямую для МКСЭ, записанного в виде (5), нельзя.

Для того, чтобы записать задачу, используя лишь заданные на границах базисные функции φ_i , мы будем применять операторы Пуанкаре-Стеклова.

Представим билинейную форму $a(\cdot, \cdot)$ в виде

$$a(\cdot, \cdot) = \sum_{k=1}^K a_k(\cdot, \cdot),$$

ется только по суперэлементу Ω_k .

Рассмотрим одну такую форму для произвольного k . Тогда, используя формулу Грина, получим

$$a_k(H, w) = (AH, w)_k + b_k(H, w), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} AH &= \lambda H - \vec{v} \nabla H - \operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi\sigma} \nabla H - \vec{u} H \right), \\ b_k(H, w) &= \int_{\partial\Omega_k} q_n(H) w d\gamma, \\ q_n(H) &= \left(\frac{1}{4\pi\sigma} \nabla H - \vec{u} H \right) \cdot \vec{n}, \end{aligned}$$

$(\cdot, \cdot)_k$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega_k)$, \vec{n} – вектор внешней нормали к $\partial\Omega_k$.

Пусть теперь

$$H|_{\partial\Omega_k} = h. \quad (7)$$

Через $G_k h$ обозначим решение уравнения $AH = 0$ в области Ω_k с граничным условием (7). Оператор G_k , определенный таким образом, называют оператором Грина. Определим также оператор

$$P_k h = q_n(G_k h),$$

который называют оператором Пуанкаре-Стеклова (П.-С.) ([6]-[9]). Оператор П.-С. сопоставляет граничному условию первого рода эквивалентные ему граничные условия второго рода.

Теперь соотношение (6) можно переписать в виде:

$$a_k(G_k h, w) = \langle P_k h, w \rangle_{\partial\Omega_k},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega_k}$ – скалярное произведение в $L_2(\partial\Omega_k)$. Отметим, что правая часть этого выражения зависит только от значений своих аргументов на границе суперэлемента Ω_k .

Φ_i – решения исходной задачи с граничными условиями, определяемыми граничными функциями φ_i . Тогда получим следующую конечномерную задачу:

$$b(h_h, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad \forall \varphi_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} h_h &= \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i, \\ b(h_h, \varphi_i) &= \sum_{k=1}^K \langle P_k h_h, \varphi_i \rangle_{\partial \Omega_k}, \\ F(\varphi_i) &= - \sum_{k=1}^K \langle q_n(\Phi_0), \varphi_i \rangle_{\partial \Omega_k}. \end{aligned}$$

Задача (8) эквивалентна задаче (5), это просто другая форма ее записи. Системы линейных уравнений относительно вектора $c = \{c_i\}$ амплитуд СЭ, определяемые этими задачами, совпадают. Задача в форме (8) записана только относительно величин, определенных на границах СЭ. Такая форма записи позволяет доказать сходимость метода и получить оценки ошибок ([3]-[5]).

При программной реализации метода СЭ базисные функции рассчитываются приближенно. При их расчете в данном случае использовался обычный МКЭ с кусочно-линейными базисными функциями на треугольной сетке. В этом случае указанные задачи уже не эквивалентны, т.к. не выполняются условия применимости формулы Грина (для этого требуется существование вторых производных, которыми кусочно-линейная функция не обладает). Тем не менее, возможно использование любого из рассмотренных подходов. Подход (5) оказывается более предпочтительным, т.к. в этом случае не происходит накопления ошибок за счет численного дифференцирования приближенного решения при вычислении значений операторов Пуанкаре-Стеклова.

Так же, как и в обычном методе конечных элементов, при реализации МКСЭ удобно использовать алгоритм сборки глобальной матрицы жесткости. Опишем его коротко. Пусть Ω_k – некоторый суперэлемент, P_i , $i = \overline{1, n}$ – набор его узлов, n – количество узлов у данного суперэлемента. Пусть $I^{(k)} = (I_1^{(k)}, \dots, I_n^{(k)})$ – вектор длины n , задающий соответствие между локальными и глобальными номерами узлов, т.е. $I_i^{(k)}$ – глобальный номер узла с локальным номером i . Пусть $A^{(k)} = A_{n \times n}^{(k)}$ – матрица жесткости СЭ,

$$A_{ij}^{(k)} = a_k(\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = \overline{1, n},$$

где φ_i – базисная функция, соответствующая i -ому узлу СЭ, $A = A_{N \times N}$ – глобальная матрица жесткости задачи.

Алгоритм сборки глобальной матрицы жесткости выглядит следующим образом:

1. Присваиваем $A = 0$, далее, в цикле по номеру СЭ, $\forall k = \overline{1, K}$:
2. Вычисляем матрицу жесткости k -ого СЭ A_k , далее

$$A(I^{(k)}, I^{(k)}) := A(I^{(k)}, I^{(k)}) + A^{(k)}.$$

Здесь $A(I^{(k)}, I^{(k)})$ – подматрица матрицы A , состоящая из ее элементов, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами $I_i^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$. Другими словами, $\forall i, j = \overline{1, n}$

$$A_{I_i^{(k)}, I_j^{(k)}} := A_{I_i^{(k)}, I_j^{(k)}} + A_{i,j}^{(k)}.$$

Таким образом, задача вычисления полной матрицы жесткости сводится к вычислению матриц жесткости отдельных СЭ. Понятие матрицы жесткости суперэлемента понадобится нам в дальнейшем при рассмотрении алгоритма монотонизации МКСЭ.

Как уже было сказано выше, возможно вычисление матриц жесткости СЭ двумя способами: 1. с использованием операторов П.-С.; 2. путем непосредственного интегрирования базисных функций СЭ.

Первый способ более экономичен с точки зрения затрат памяти и времени вычислений, т.к. в каждый момент времени требуется хранить в памяти лишь одну базисную функцию. Для расчета коэффициентов матрицы жесткости требуется хранить лишь граничную сетку и вычисление коэффициентов матрицы жесткости сводится к интегрированию заданных на ней сеточных функций. Главный недостаток этого подхода – понижение точности рассчитываемых параметров, связанное с необходимостью численного дифференцирования сеточных функций при расчете значений операторов П.-С.

Второй подход требует большего количества памяти (для расчета матрицы жесткости СЭ требуется хранить все его базисные функции) и времени работы программы (интегрирование осуществляется по двумерной сетке, заданной в СЭ). С другой стороны, он алгоритмически проще и обладает большей точностью.

В результате разработки программы были опробованы оба варианта, в итоге предпочтение было отдано второму из них.

4.4 Монотонизация

В результате расчетов выяснилось, что непосредственное использование МКСЭ приводит к немонотонной (т.е. не удовлетворяющей принципу максимума) разностной схеме. В результате возникает необходимость монотонизации построенной схемы.

Рассмотрим отличия МКСЭ от обычных конечно-разностных или конечно-элементных методов, существенные для монотонизации МКСЭ.

Предположим, что мы решаем задачу с оператором A , который можно

$$A = D + C,$$

где D – оператор диффузионного переноса, C – оператор конвективного переноса. Аппроксимируя эту задачу методом конечных разностей или МКЭ, мы приходим к аппроксимации A_h оператора A , причем

$$A_h = D_h + C_h, \quad (9)$$

где D_h и C_h аппроксимируют операторы D и C . При этом разностный оператор D_h обычно удовлетворяет принципу максимума, а полный оператор A_h может ему не удовлетворять. Будем считать, что при отсутствии конвекции и некотором выбранном способе аппроксимации задачи принцип максимума выполняется, а его нарушение связано только с наличием в задаче конвективного слагаемого C .

Для построения монотонизированной схемы необходимо решить две задачи: первая – выбрать способ введения регуляризующего параметра (искусственной диффузии) в разностную схему, вторая – выбор численного значения этого параметра. В классической теории разностных схем или метода конечных элементов первая проблема решается более-менее формально, а именно, параметр вводится так, чтобы уменьшить «вес» конвективного слагаемого в (9), например

$$A_h = (1 + \sigma)D_h + C_h. \quad (10)$$

Другие примеры можно найти в работах, посвященных общей теории регуляризованных разностных схем ([10]). Основные же усилия направлены на решение второй задачи, т.е. выбор оптимального численного значения регуляризующего параметра, гарантирующего выполнение принципа максимума.

Обратим внимание, что в рассмотренном примере поправка к разностной схеме имеет вид

$$\sigma D_h,$$

причем D_h не зависит от параметра σ . Кроме того, D_h удовлетворяет (или не удовлетворяет) принципу максимума вне зависимости от того,

торе задачи (проще говоря, D_h никак не зависит от скорости конвективного переноса).

В МКСЭ ситуация иная. Используя СЭ базисные функции и аппроксимацию типа Бубнова-Галеркина, мы так же, как и раньше, приходим к аппроксимации A_h оператора A задачи. Формально A_h можно представить в виде суммы

$$A_h = D_h + C_h,$$

но, в отличие от предыдущего случая, операторы D_h и C_h уже не будут в общем случае аппроксимировать операторы D и C . Формально это связано с тем, что при вычислении D_h и C_h используются базисные функции, которые являются точным решением уравнения с оператором A . По-видимому, это связано с тем, что при аппроксимации МКСЭ мы фактически аппроксимируем соответствующий данной задаче оператор Пуанкаре-Стеклова, который ведет себя как «черный ящик» и описывает реакцию решения *полной* задачи на изменение граничных условий.

Есть еще одно отличие. В МКСЭ оператор D_h зависит от СЭ базисных функций, которые являются решением уравнения с полным оператором A , т.е. при их расчете учитывается и его конвективная составляющая. Тем самым оператор D_h опосредованно, через базисные функции, зависит от скорости конвективного переноса. Это приводит к тому, что D_h уже не будет в общем случае удовлетворять разностному принципу максимума и его нельзя использовать в качестве основы для построения регуляризирующей поправки. Это подтвердилось в ходе тестовых расчетов. В рассмотренном же ранее примере оператор D_h удовлетворяет разностному принципу максимума независимо от того, насколько сильно преобладает конвективное слагаемое.

Поэтому в МКСЭ прежде всего возникает проблема введения регуляризирующего параметра. Естественного способа представить A_h в виде суммы двух операторов, один из которых всегда (вне зависимости от скорости переноса) удовлетворяет разностному принципу максимума, обна-

представить A_h в виде

$$A_h \equiv M_h + (A_h - M_h),$$

где M_h удовлетворяет разностному принципу максимума во всех случаях, также не удалось. Это можно сделать разными способами, но ни один из них не привел к положительному результату. Даже если разностное решение задачи получалось монотонным, оно не имело ничего общего с решением дифференциальной задачи. Это связано, видимо, с тем, что регуляризованный оператор вида

$$\tilde{A}_h = (1 + \sigma)M_h + (A_h - M_h)$$

ни в каком смысле не аппроксимирует исходный оператор A , по крайней мере для тех значений параметра σ , которые гарантируют монотонность решения.

Единственным приемлемым способом введения параметра в схему оказалось введение этого параметра непосредственно в дифференциальную задачу. Далее осуществлялась ее аппроксимация с помощью МКСЭ. Искусственная диффузия учитывалась при расчете базисных функций СЭ, а регуляризованная схема имела вид (10), причем в выражении σD_h от σ зависел также и оператор D_h . Роль параметра σ здесь была двойной – с одной стороны, с его помощью увеличивался вес диффузионного слагаемого в разностной схеме, с другой стороны, он гарантировал выполнение принципа максимума для оператора D_h , несмотря на то, что D_h зависит от конвективного слагаемого задачи.

Такой подход оказался единственным эффективным.

4.5 Линейная монотонизация

Запишем задачу, которую мы решаем, формально в виде операторного уравнения

$$Au = f.$$

системе линейных алгебраических уравнений вида

$$A_h u_h = f_h,$$

где матрица A_h – матрица, аппроксимирующая оператор A , u_h – вектор приближенного решения, f_h – аппроксимация правой части. В дальнейшем будем говорить только о разностной задаче и опустим индекс h .

Представим A в виде

$$A = D + C,$$

где D и C – слагаемые, соответствующие диффузионной и конвективной части оператора задачи.

Соответственно, для матрицы жесткости одного СЭ получим представление

$$A^{(k)} = D^{(k)} + C^{(k)}.$$

Пусть $D_0^{(k)}$ – матрица жесткости k -ого СЭ, соответствующая аппроксимации оператора Лапласа.

Введем искусственную диффузию, постоянную в пределах каждого СЭ. Тогда для матриц жесткости СЭ получим выражение:

$$A_d^{(k)} = D^{(k)} + C^{(k)} + d_k D_0^{(k)},$$

где $d_k \geq 0$ – значение коэффициента искусственной диффузии в СЭ с номером k . В пределах одного СЭ величину d_k можно выбирать из следующих условий ([1]):

1. $d_k \rightarrow \min$;
2. $d_k \geq 0$;
3. Матрица жесткости СЭ $A_d^{(k)}$ удовлетворяет принципу максимума.

Эта задача является задачей минимизации линейной функции при заданных линейных ограничениях типа неравенств. В каждом конкретном случае (значениях коэффициентов дифференциального уравнения, геометрии области, способа ее разбиения на СЭ) значения d_k могут быть

го программирования в каждом СЭ.

Такой алгоритм позволяет определить минимальное значение коэффициента искусственной диффузии, гарантирующее выполнение принципа максимума.

Отметим также, что мы требуем выполнения принципа максимума отдельно для матрицы жесткости каждого СЭ. Это условие более сильное, чем требование выполнения принципа максимума для полной матрицы жесткости задачи. Однако такой подход более прост и алгоритмичен, т.к. позволяет определять коэффициент искусственной диффузии независимо в каждом СЭ.

4.6 Нелинейная монотонизация

В алгоритме нелинейной монотонизации коэффициент искусственной диффузии является некоторой функцией решения и его производных. Он принимает бóльшие значения там, где решение имеет бóльшие градиенты, и меньшие, там, где решение более гладкое.

Будем использовать подход, предложенный в [1].

А именно, будем считать, что в каждом СЭ коэффициент искусственной диффузии задается выражением

$$d^* = d(1 - \gamma),$$

где $\gamma \in [0, 1]$ – параметр, зависящий от решения. Случай $\gamma = 1$ соответствует отсутствию искусственной диффузии в данном СЭ, а $\gamma = 0$ – максимально возможному значению.

Рассмотрим произвольный СЭ. Для упрощения будем опускать индекс k .

Тогда для матриц жесткости СЭ получим:

$$A_{d^*} = D + C + d^* D_0 = A + d^* D_0.$$

Пусть теперь u_h – вектор решения, соответствующий рассматриваемому СЭ.

$$K = A_{d^*} u_h,$$

здесь K – вектор длины n . Этот вектор соответствует «части» полной СЛАУ, соответствующей рассматриваемому СЭ. Пусть K_i – его i -ый элемент.

Тогда

$$K_i = A_{d^*,i} u_h,$$

где $A_{d^*,i}$ – i -ая строка матрицы A_{d^*} . Вообще для произвольной матрицы M через M_i будем обозначать ее строку с номером i .

Предположим, что $A_{d,i} u_h \neq 0$. Тогда K_i можно записать в виде:

$$\begin{aligned} K_i = A_{d^*,i} u_h &= (A_i + d^* D_{0,i}) u_h = \\ &= (A_i u_h + d D_{0,i} u_h) - \gamma d D_{0,i} u_h = A_{d,i} u_h - \gamma d D_{0,i} u_h = \\ &= A_{d,i} u_h \left(1 - \gamma \frac{d D_{0,i} u_h}{A_{d,i} u_h} \right). \end{aligned}$$

Окончательно

$$K_i = A_{d,i} u_h \left(1 - \gamma \frac{d D_{0,i} u_h}{A_{d,i} u_h} \right).$$

При $\gamma = 0$ получим

$$K_i = A_{d,i} u_h,$$

т.е. схему с линейной искусственной диффузией.

При $\gamma = 1$ получим

$$K_i = A_i u_h,$$

т.е. схему без искусственной диффузии.

Пусть

$$R_i = \frac{d D_{0,i} u_h}{A_{d,i} u_h}.$$

Тогда

$$K_i = A_{d,i} u_h (1 - \gamma R_i).$$

Выберем максимальное γ , при котором

$$1 - \gamma R_i \geq 0. \tag{11}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & A_{d,i}u_h = 0, \\ 0, & R_i < 1, \\ 1/R_i, & R_i \geq 1. \end{cases}$$

Результирующее значение γ выберем минимальным по всем строкам:

$$\gamma = \min_i \gamma_i.$$

Это гарантирует выполнение неравенства (11) для всех возможных i .

4.7 Особенности реализации алгоритма

Введя нелинейную искусственную диффузию подобным образом, получим систему нелинейных уравнений

$$A(u_h)u_h = f.$$

Для ее решения в данной работе использовался итерационный метод вида

$$A(u_h^{(k-1)})u_h^{(k)} = f,$$

где $u_h^{(k)}$ – значение решения задачи на k -ой итерации. В качестве начального приближения выбиралось значение решения на предыдущем временном слое.

Отметим, что коэффициенты матрицы $A_h(u_h)$ являются недифференцируемыми функциями u_h .

Рассмотренный итерационный метод в некоторых случаях приводит к заикливанию, т.е. к ситуации, в которой норма приращения решения в ходе итераций остается практически неизменной и не стремится к нулю. Это связано с тем, что в некоторых СЭ значение нелинейной искусственной диффузии d^* циклически меняется от максимального до минимального значения. Это происходит из-за того, что параметр γ является дробно-линейной функцией решения, имеющей разрывы в интервале значений решения, характерного для данной задачи. При обнаружении

цесса, значение d^* в нем полагалось равным максимально возможному и далее в ходе итераций не изменялось. В худшем случае заикливание возникало примерно в 20% СЭ.

5 Результаты расчетов

5.1 Граничные и начальные условия

На левом торце рельса ($x = 0$) и нижнем торце якоря ($y = 0$) заданы естественные граничные условия 2-го рода

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{n}} = 0,$$

означающие отсутствие тангенциальных компонент вектора тока. В углу, образованном нижней частью рельса и левым торцом якоря, задано граничное условие 1-го рода

$$H = P(t),$$

$$P(t) = \frac{4\pi}{l_z} I(t), \quad I(t) = \min \left(A_{max}, \frac{A_{max} t}{\tau_{max}} \right),$$

на оставшейся части границы заданы однородные граничные условия 1-го рода

$$H = 0.$$

Скорость якоря рассчитывалась из уравнения движения якоря

$$m_a \dot{u}_a = F(t), \quad F(t) = 2 \frac{l_z l_x}{8\pi} P^2(t).$$

Здесь l_z – некоторая эффективная толщина якоря в направлении оси Oz , l_x – длина якоря в направлении оси Ox , m_a – масса якоря, $I(t)$ – полный ток, втекающий в устройство.

Конкретные численные значения параметров приведены в таблице 1.

При аппроксимации по времени использовался шаг $\tau = 0.1$. Далее результаты расчетов приведены для первого временного слоя, если не оговорено иное. Начальное условие было нулевым:

$$H|_{t=0} = 0.$$

0.21	0.375	0.25	0.2	0.001	40.0
------	-------	------	-----	-------	------

Таблица 1. Значения параметров.

5.2 Результаты расчетов

При расчетах использовалась СЭ сетка, приведенная на Рис. 2. Разбиение на СЭ осуществлялось так, чтобы особенность решения задачи была целиком сосредоточена внутри одного СЭ, а на его границах решение было бы достаточно гладкой функцией. За исключением одного особого, все СЭ имеют форму квадратов. Это необходимо для того, чтобы при отсутствии конвективного переноса выполнялся принцип максимума.

Все СЭ, за исключением особого, имеют по 4 узла, у особого СЭ 36 узлов. В целом расчетная СЭ сетка состоит из 273 СЭ и 343 узлов.

Для расчета базисных функций использовался обычный МКЭ с кусочно-линейными базисными функциями на треугольной сетке. Число узлов в треугольной сетке выбиралось порядка 500.

МКСЭ без использования искусственной диффузии

На Рис. 3 приведено решение задачи методом конечных СЭ без введения искусственной диффузии. В правой части рельса заметны немонотонности. Они достаточно малы, в худшем случае максимальный по модулю отрицательный минимум решения составляет от 0.5% до 1,5% равномерной нормы решения.

Для сравнения на Рис. 4 и Рис. 5 приведено решение задачи в случае, когда перенос отсутствует (т.е. якорь неподвижен) и перенос есть, но якорь движется со скоростью, в два раза меньшей, чем в исходной задаче (Рис. 3). В первом случае решение монотонно, во втором случае максимальный по модулю отрицательный минимум составляет примерно $10^{-5}\%$ от равномерной нормы решения ($-3.63 \cdot 10^{-7}$ при равномерной норме решения 4.2).

На серии рисунков Рис. 6-10 показано решение задачи для пяти по-

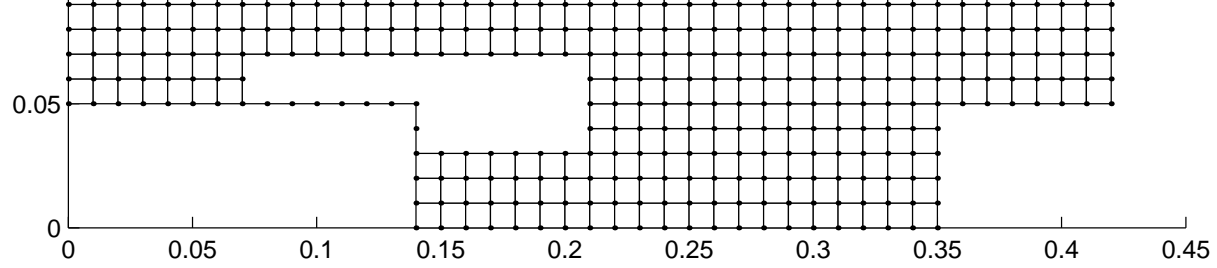


Рис. 2. Расчетная СЭ сетка.

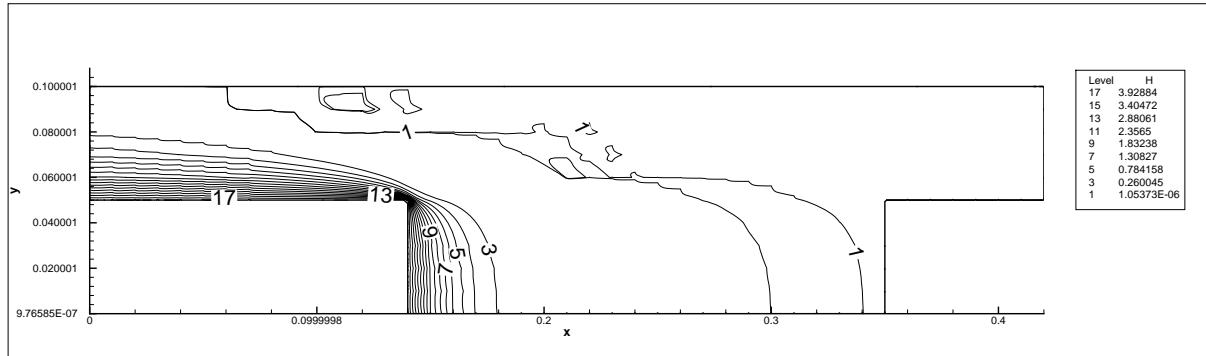


Рис. 3. МКСЭ, искусственная диффузия не используется.

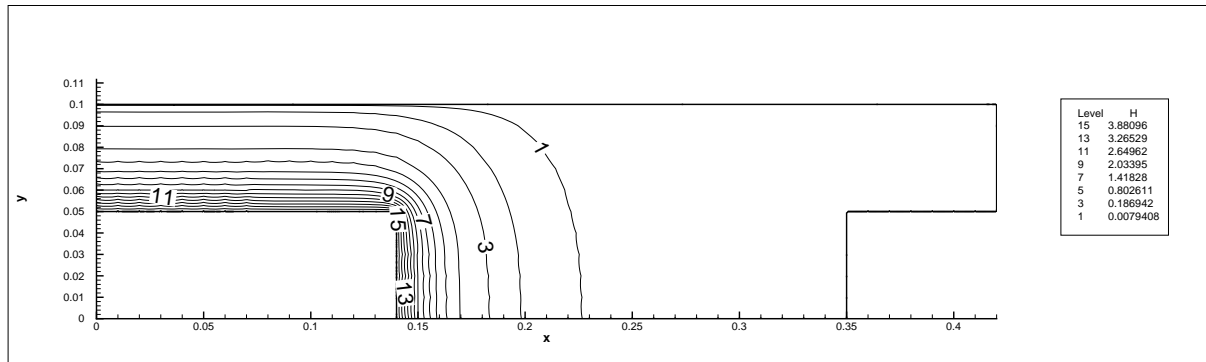


Рис. 4. МКСЭ, якорь неподвижен.

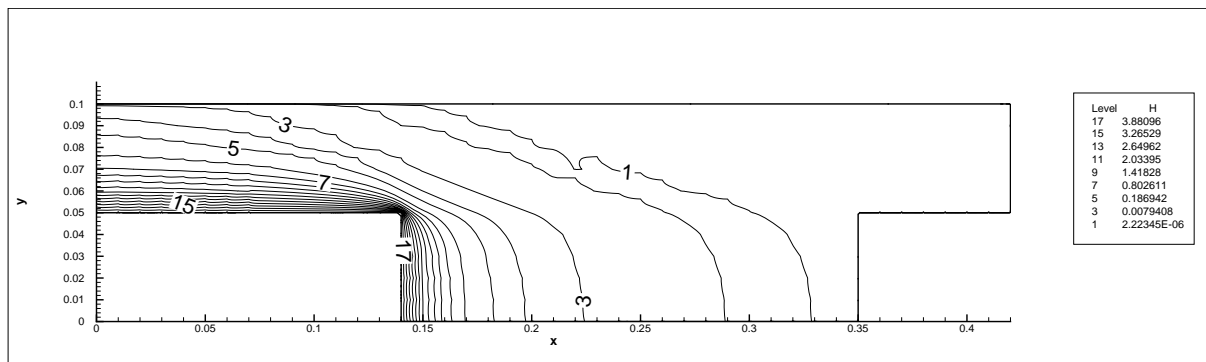


Рис. 5. МКСЭ, искусственная диффузия не используется, скорость якоря в два раза меньше по сравнению с Рис. 3.

время изменялось в интервале от $t = 0$ до $t = 0.5$. В таблице 2 приведены абсолютные и относительные значения максимальных по модулю отрицательных минимумов решения, характеризующих степень его немонотонности.

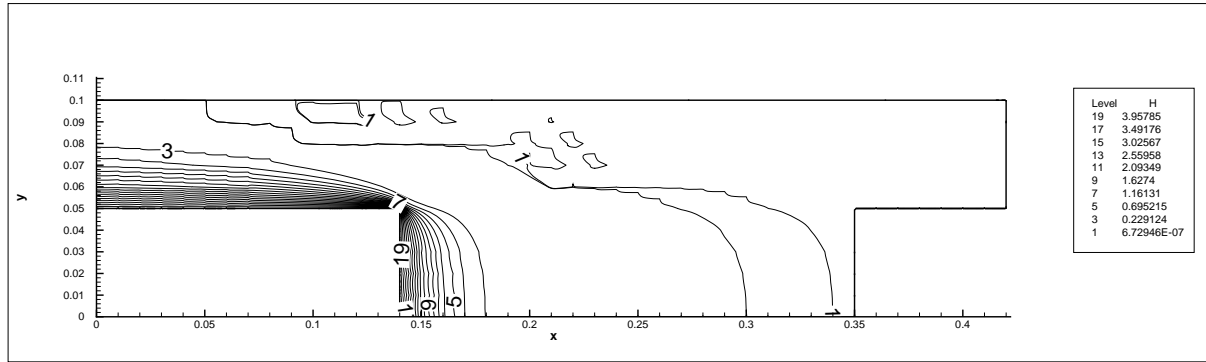


Рис. 6. МКСЭ, искусственная диффузия не используется, $N_t = 1$

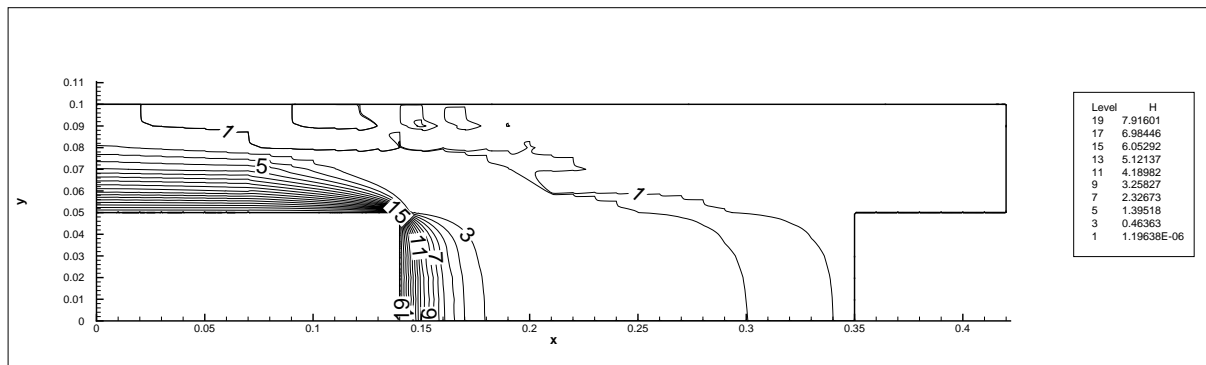


Рис. 7. МКСЭ, искусственная диффузия не используется, $N_t = 2$

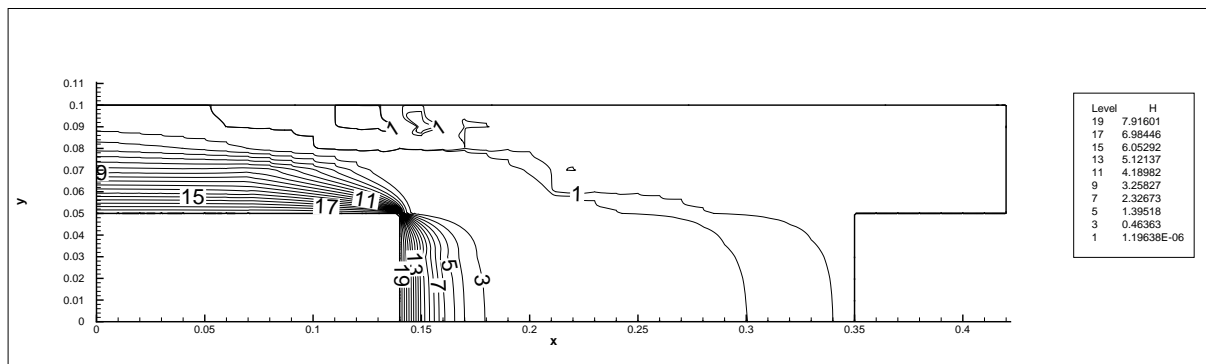


Рис. 8. МКСЭ, искусственная диффузия не используется, $N_t = 3$

На серии рисунков Рис. 11-15 показано решение задачи для пяти последовательных временных слоев $N_t = 1, \dots, 5$, но на этот раз с исполь-

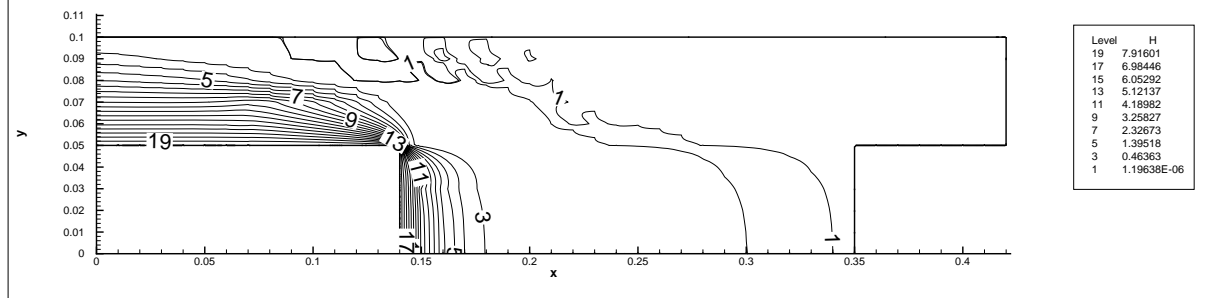


Рис. 9. МКСЭ, искусственная диффузия не используется, $N_t = 4$

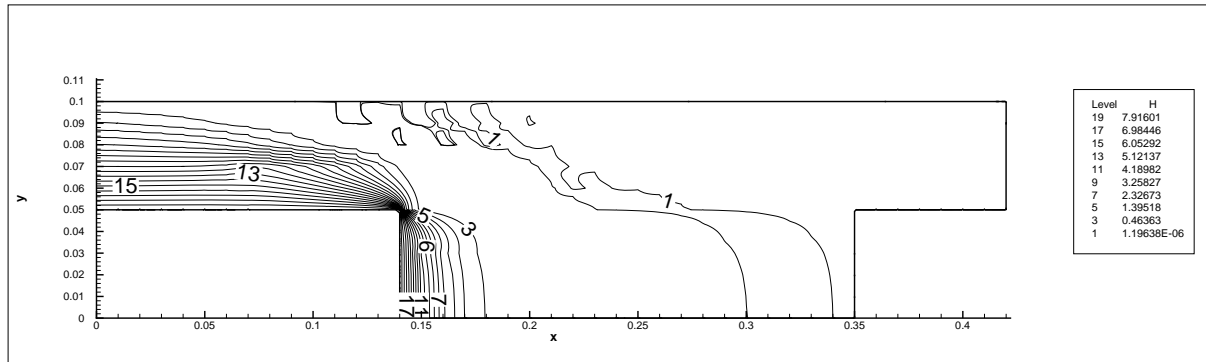


Рис. 10. МКСЭ, искусственная диффузия не используется, $N_t = 5$

зованием нелинейной искусственной диффузии. Шаг по времени и временные слои те же, что и в предыдущем случае.

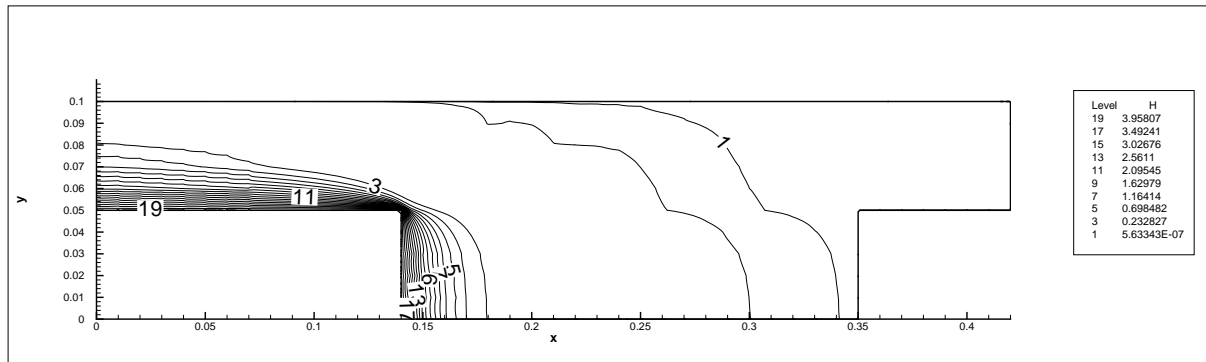


Рис. 11. МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия, $N_t = 1$

МКСЭ с использованием линейной искусственной диффузии

На Рис. 16 приведено численное решение задачи, полученное при использовании постоянной (по пространству) искусственной диффузии. Диффузия задавалась только в области, соответствующей рельсу. Ее значе-

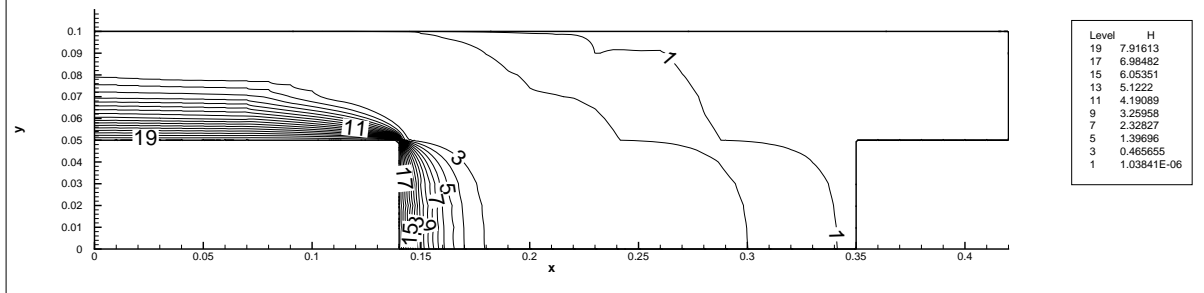


Рис. 12. МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия, $N_t = 2$

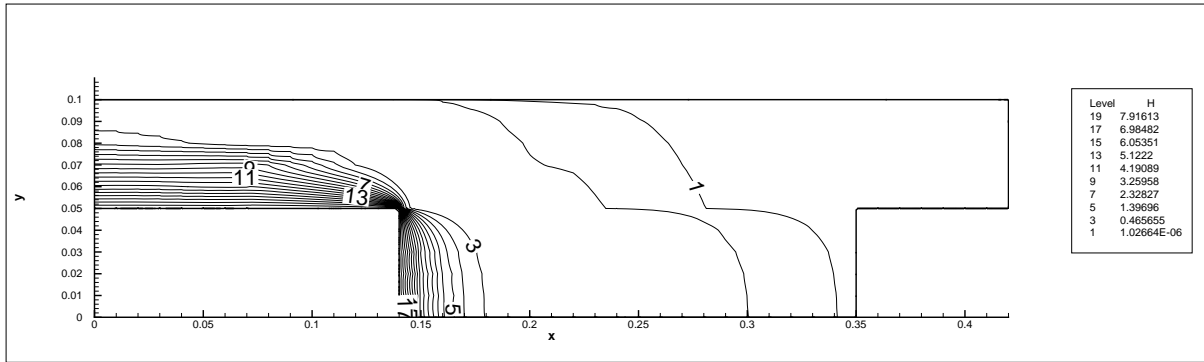


Рис. 13. МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия, $N_t = 3$

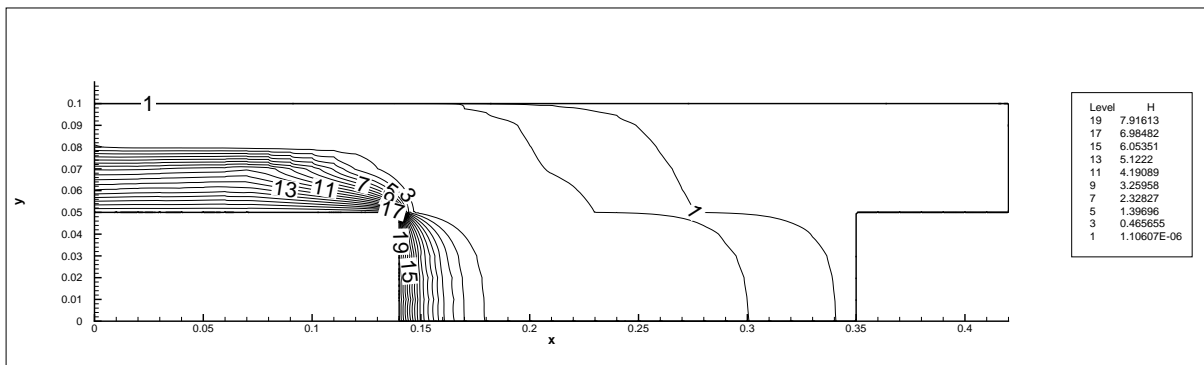


Рис. 14. МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия, $N_t = 4$

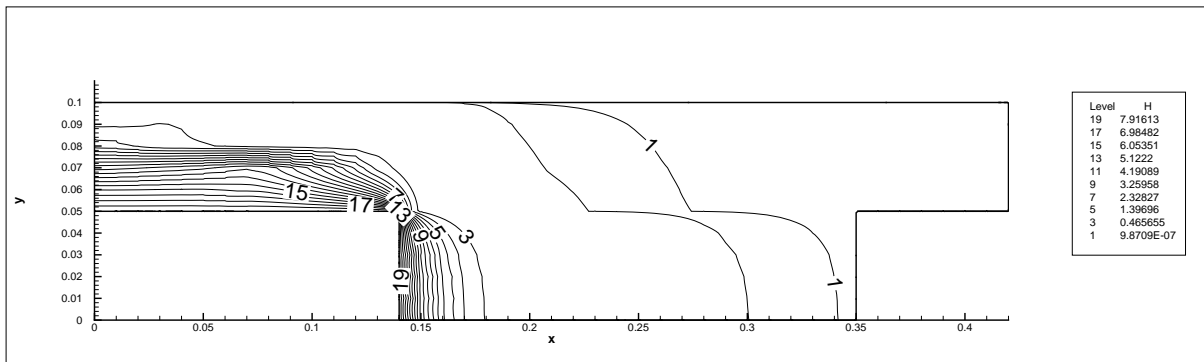


Рис. 15. МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия, $N_t = 5$

H_{min}	-0.003	-0.06	-0.05	-0.025	-0.002
H_{max}	4.19	8.381	8.381	8.381	8.381
$-H_{min}/H_{max} \cdot 100\%$	0.07%	0.70%	0.60%	0.30%	0.023%

Таблица 2.

ние выбиралось минимальным, но гарантирующим выполнение разностного принципа максимума. При этом использовался описанный выше алгоритм. Видно, что в рельсе решение сильно «размазано» по оси Oy , в якоре оно практически такое же, что и при отсутствии диффузии (Рис. 3). Отметим, что ширина скин-слоя вдоль оси Ox практически не изменилась по сравнению с предыдущим графиком.

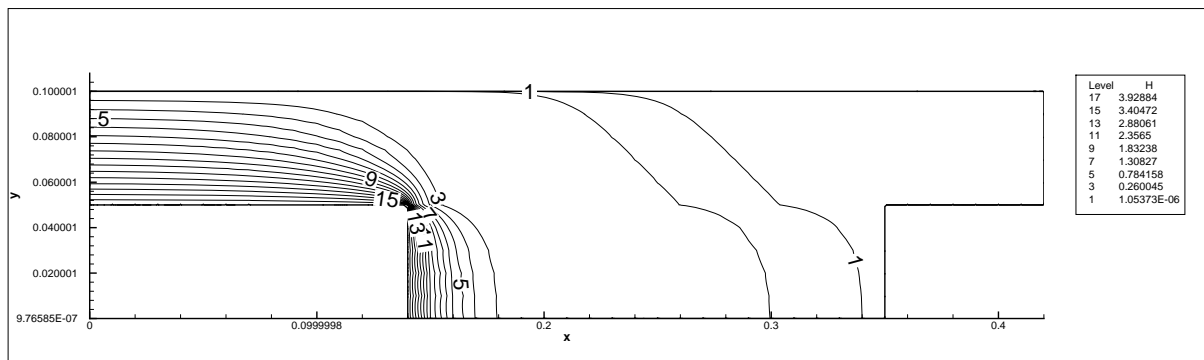


Рис. 16. МКСЭ, линейная искусственная диффузия.

МКСЭ с использованием нелинейной искусственной диффузии

На Рис. 17 показано решение задачи, полученное при введении нелинейной искусственной диффузии. В этом случае решение в рельсе заметно меньше «размазано» в направлении оси Oy и близко к приведенному на Рис. 3.

На Рис. 18 показано распределение нелинейной искусственной диффузии на последней итерации. На этом рисунке размеры маркеров прямо пропорциональны величине искусственной диффузии в данном СЭ. Центры маркеров отнесены к центрам СЭ. В «особом» СЭ диффузия всегда равна 0 и не меняется в ходе итераций. Видно, что искусственная диффу-

является немонотонным (Рис. 3).

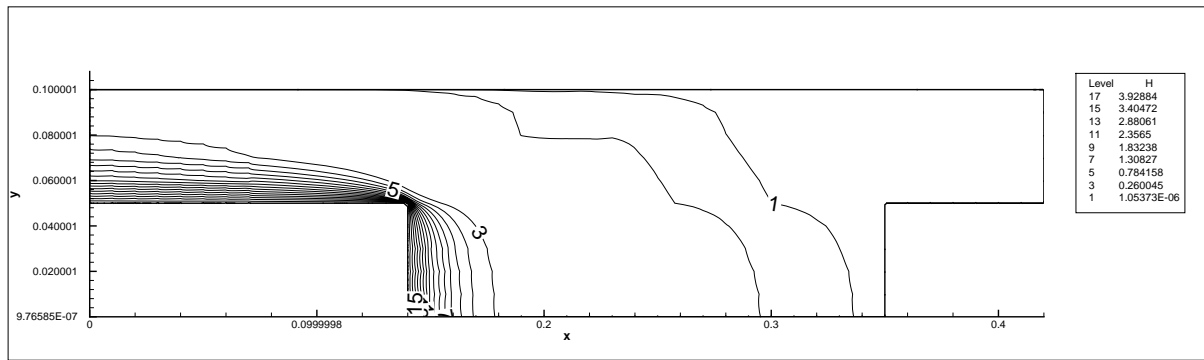


Рис. 17. МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия

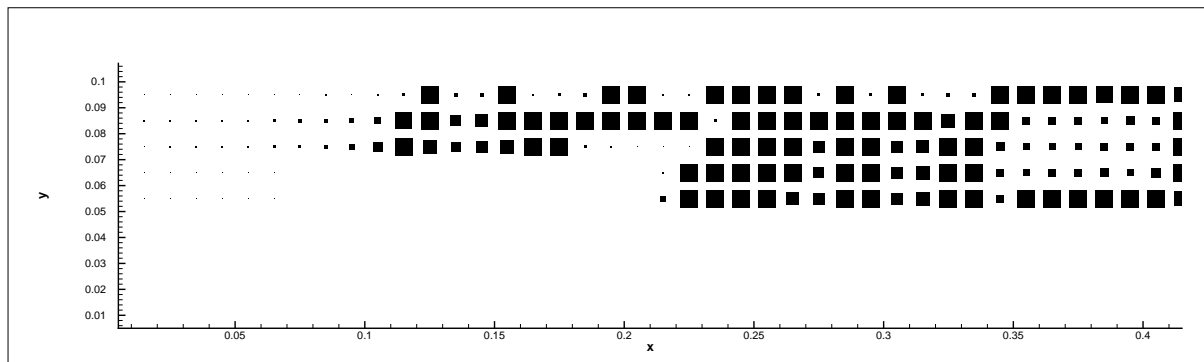


Рис. 18. Распределение нелинейной искусственной диффузии. Размеры маркеров прямо пропорциональны величине искусственной диффузии в данном СЭ.

МКЭ без использования искусственной диффузии

На Рис. 19 и Рис. 20 приведены (соответственно) КЭ сетка и КЭ решение той же самой задачи. Шаг КЭ сетки такой же, как и для СЭ сетки. КЭ и СЭ сетки отличаются лишь одним, «особым», СЭ, внутри которого и сосредоточена особенность решения задачи. КЭ решение сильно немонотонно, максимальный по модулю отрицательный минимум составляет примерно 15% от равномерной нормы решения. Таким образом, одно лишь использование «особого» СЭ приводит к уменьшению нефизических осцилляций более, чем на порядок.

На Рис. 21 приведено КЭ решение этой задачи с использованием нелинейной искусственной диффузии. Алгоритм введения искусственной диффузии остался прежним. На Рис. 22 показано результирующее распределение искусственной диффузии.

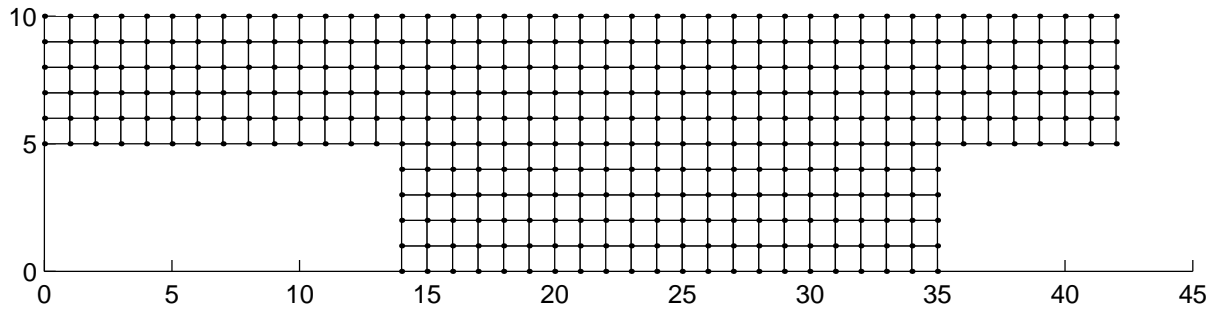


Рис. 19. Расчетная КЭ сетка

Для сравнения с предыдущими расчетами на Рис. 23, Рис. 24 и Рис. 25 приведено решение задачи с помощью МКЭ на более мелкой сетке. Шаг сетки в два раза меньше, чем на Рис. 19. На Рис. 23 показано решение задачи без введения искусственной диффузии, на Рис. 24 – с ее введением, на Рис. 25 изображено распределение искусственной диффузии на последнем шаге итераций.

Максимальный по модулю отрицательный минимум решения на Рис. 23 составляет 14% от равномерной нормы значения, т.е. практически такое же значение, как и для предыдущего варианта расчета на крупной сетке.

Совместное использование МКЭ и МКСЭ

В этом разделе приведены результаты расчетов рассматриваемой задачи при совместном использовании МКЭ и МКСЭ. При расчетах использовалась сетка, приведенная на Рис. 2. В отличие от ранее рассмотренного случая, для аппроксимации решения в «обычных», квадратных, СЭ использовались обычные билинейные базисные функции. Такой подход сочетает достоинства как МКЭ, так и МКСЭ. С одной стороны, он поз-

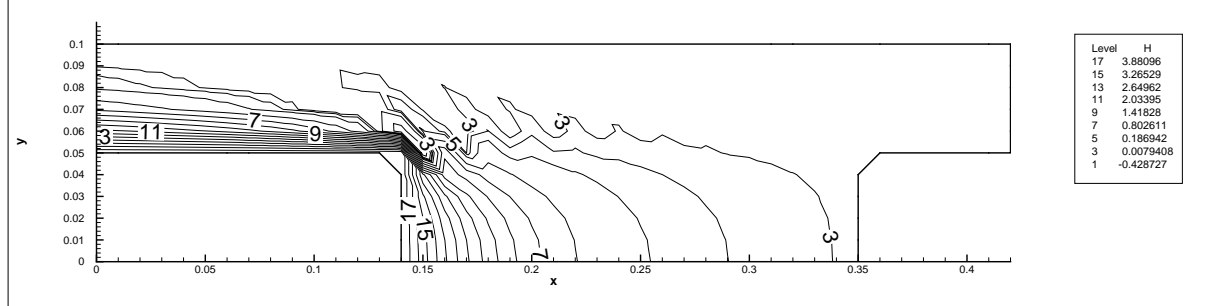


Рис. 20. МКЭ, искусственная диффузия не используется.

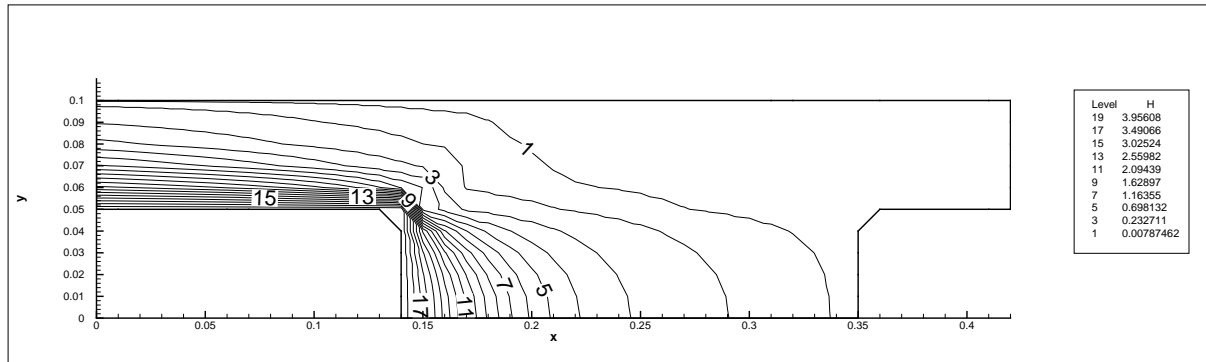


Рис. 21. МКЭ, нелинейная искусственная диффузия.

воляет хорошо разрешить особенность задачи (за счет использования «особого» СЭ), с другой стороны менее требователен к вычислительным ресурсам (т.к. необходимо рассчитывать всего один СЭ).

На Рис. 26 приведено решение задачи без использования нелинейной искусственной диффузии. Максимальный по модулю отрицательный минимум решения при этом составляет 0.20% от равномерной нормы решения. На Рис. 27 приведено решение задачи при использовании нелинейной искусственной диффузии. На Рис. 28 показано распределение искусственной диффузии в расчетной области. Полученное решение близко к полученному при использовании обычного МКСЭ (Рис. 17) и практически не отличается от него в окрестности особенности.

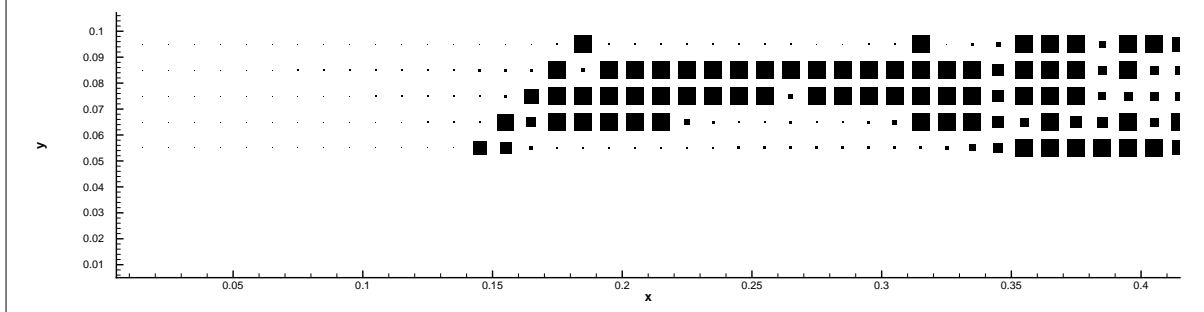


Рис. 22. МКЭ, распределение искусственной диффузии.

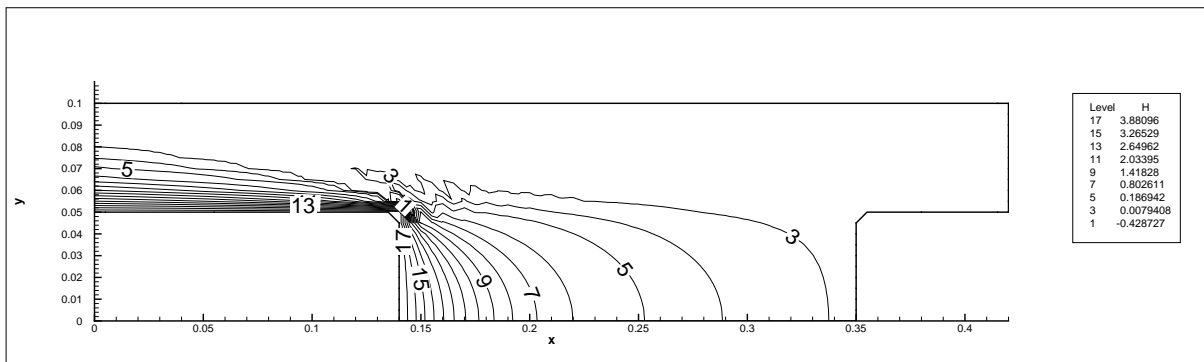


Рис. 23. МКЭ, искусственная диффузия не используется.

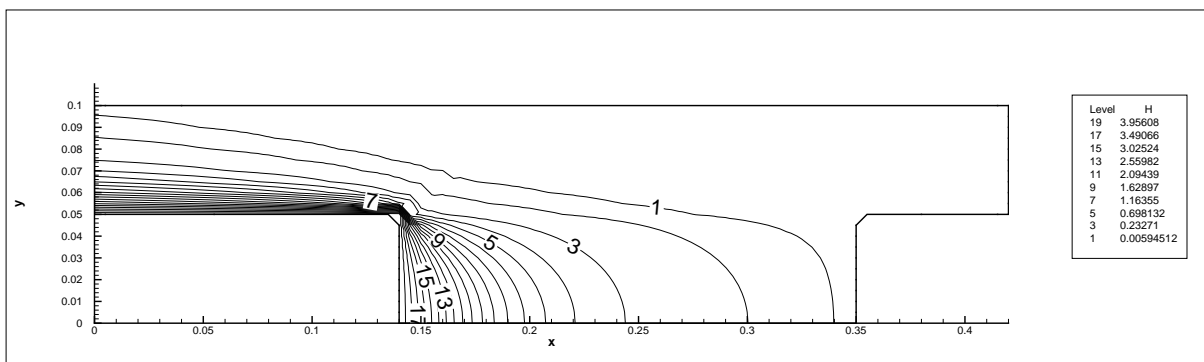


Рис. 24. МКЭ, нелинейная искусственная диффузия.

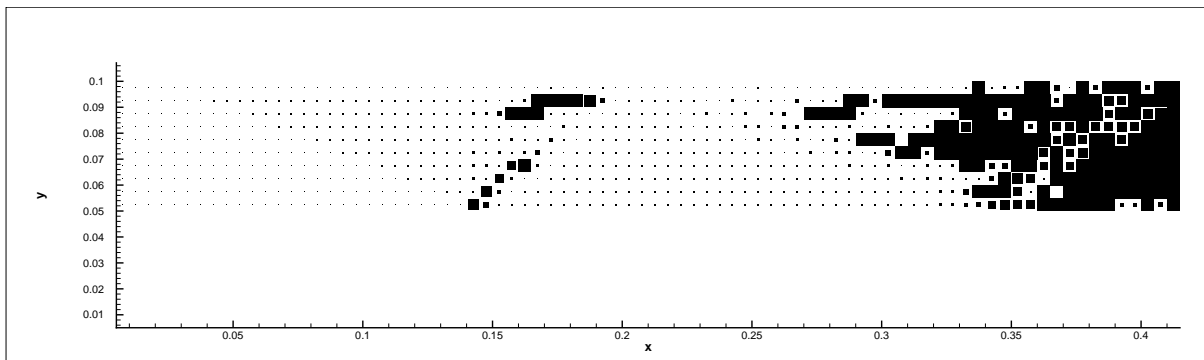


Рис. 25. МКЭ, распределение искусственной диффузии.

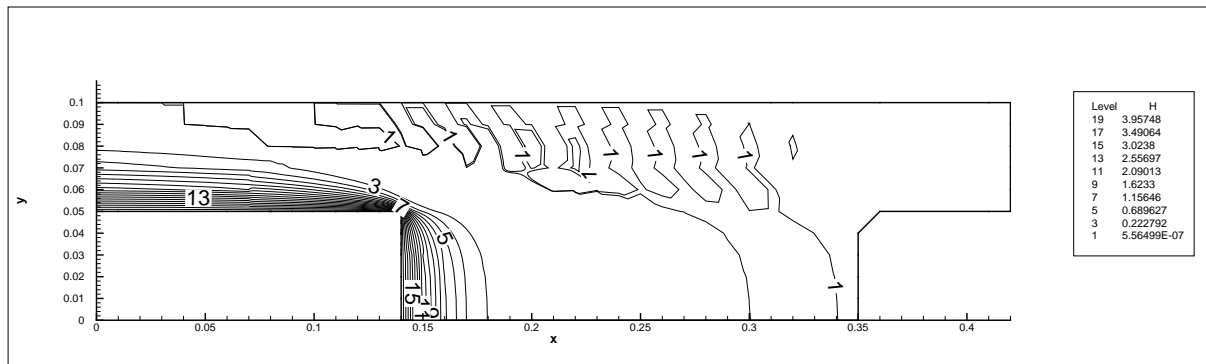


Рис. 26. МКЭ+МКСЭ, искусственная диффузия не используется.

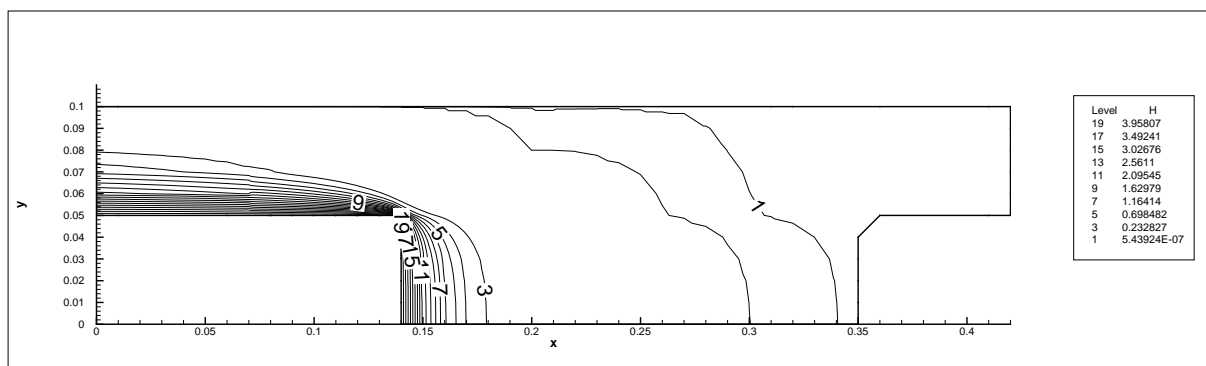


Рис. 27. МКЭ+МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия.

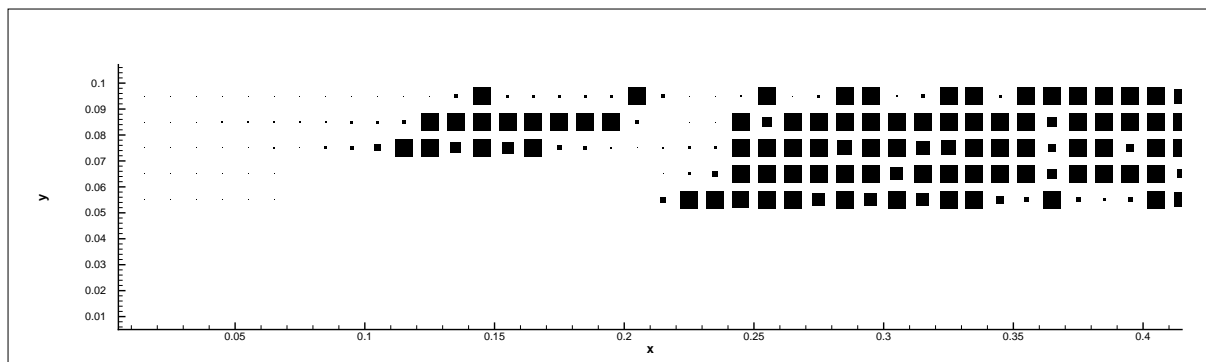


Рис. 28. МКЭ+МКСЭ, распределение искусственной диффузии.

Список литературы

- [1] *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование, М.:Наука. Физматлит, 1995, 320 с.
- [2] *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику, М.:Изд-во МФТИ, 1994, 528 с.
- [3] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* О связи метода конечных суперэлементов Федоренко и проекционно-сеточных методов, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 67, 2001 г.
- [4] *Galanin M., Savenkov E., Fedorenko* finite superelement method as special Galerkin approximation // *Mathematical Modelling and Analysis*, V.7, №1, pp. 41-50
- [5] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко // *ЖВМиМФ*, т.63, №5, с. 711-727
- [6] *Агошков В.И., Лебедев В.И.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // *Вычислительные процессы и системы*. Т.2. М.:Наука, 1985.
- [7] *Агошков В.И.* Методы разделения области в задачах математической физики // *Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задачах математической физики*. М.:ОВМ АН СССР, 1989.
- [8] *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. М.:ОВМ АН СССР, 1983.
- [9] *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.:Физматлит, 2000, 296 с.
- [10] *Самарский А.А.* Теория разностных схем, М.:Наука, 1977, 656 с.