Российская Академия Наук

Институт прикладной математики

им. М.В. Келдыша

А.Г. Тучин

Определение параметров движения КА по результатам измерений при наличии шума в динамической системе

Москва
2004

Аннотация

При решении задач определения параметров движения космических аппаратов (КА) часто возникает задача определения движения КА на фоне работы двигателей. В качестве примера можно привести следующие задачи: контроль участка выведения КА на орбиту искусственного спутника Земли, оперативная оценка исполнения импульсов и прогноза падения орбитального комплекса по измерениям наземных средств на фоне работы двигательной установки, определение параметров движения КА с электроракетной двигательной установкой. В работе рассмотрены алгоритмы решения указанных выше задач при различных характеристиках воздействующего шума. К модели такого типа привела задача определения параметров движения КА по измерениям псевдоскорости и псевдодальности спутниковых навигационных систем. Динамическая модель, описывающая поведение кинематических и служебных параметров приемника, состоит из уравнений динамики полета КА и уравнений авторегрессии, в которые входит возбуждающий белый шум.

A. Tuchin. Parameter determination of the space craft motion by results of measurements provided a noise is in dynamic system.

Abstract. By solving problems of parameter determination of the SC motion frequently arises a problem of determination of the SC motion upon a noise background of engine's work. As examples it is possible to present the following problems: controlling of the space vehicle launch phase into orbit of the Earth's artificial satellite, actual estimation of performance of impulses and forecast of a falling of an orbital complex on measurements of ground means with a noise of boosters working, determination of the SC motion parameters with an electro-rocket propulsion system. In this work algorithms of a solution of the mentioned above problems taking into account various performances of an influencing noise are considered. To the model of such kind a problem of the SC motion parameters determination on measurements of a pseudo-rates and pseudo-ranges of satellite navigational systems leads. The dynamic model describing a behavior of kinematical and service parameters consists of the equations of a SC flight dynamics and equations of an autoregression, into which the exciting white noise enters.

Введение

Задача определения параметров движения космического аппарата (КА) является одной из основных задач, решаемых в ходе управления его полетом [1-14]. При решении этой задачи часто возникает ситуация, в которой определение параметров движения КА надо выполнять на фоне работы двигателей. В качестве примера можно привести следующие задачи: контроль участка выведения КА на орбиту искусственного спутника Земли, оперативная оценка исполнения импульсов и прогноза падения орбитального комплекса по измерениям наземных средств на фоне работы двигательной установки, определение параметров движения КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ).

Определение параметров движения КА на участке выведения является важной частью навигационного обеспечения управления полётом [3]. Для контроля выведения используется сеть наземных измерительных пунктов, которые обеспечивают измерения дальности, азимута и угла места в различных комбинациях. Результатом контроля является вектор состояния и другие данные, позволяющие определить: находится ли реальная траектория в допустимой трубке от номинальной траектории. Кроме того, в результате контроля участка выведения, получаются самые первые данные об орбите выведения КА. В основе используемой модели движения ракеты-носителя лежит представление фактического движения КА как отклонения от номинальной траектории. Номинальная траектория в виде таблицы подаётся на вход задаче определения параметров траектории КА. Отклонение от этой траектории на ограниченном интервале времени предполагается равноускоренным. Остающиеся невязки рассматриваются как шумовая составляющая.

Импульсы, реализующие сход с орбиты орбитального комплекса (ОК) «Мир», имели такую большую длительность, что в зоне видимости комплекса не оставалось интервалов его пассивного движения. Для оперативной оценки исполнения импульсов и прогноза падения ОК «Мир», а также апостериорного анализа его движения на заключительном этапе полета, в ИПМ была разработана специальная методика [4]. Эта методика позволила определять по данным наземных радиотехнических измерений траекторию движения ОК на фоне работы его двигательной установки.

Полет КА с включенным ЭРДУ создает дополнительные проблемы при решении задач навигации и управления полетом. Фактическое ускорение, создаваемое ЭРДУ, отличается от модели этого ускорения, заложенного в расчеты. Имеются ошибки величины и ориентации вектора тяги ЭРДУ в пространстве [5].

Решение этих задач основано на применении моделей динамических систем, в которых помехи имеются не только в измерениях, но и влияют на поведение самого объекта. Такие модели исследованы, в основном в рамках линейных моделей, в общей теории систем [15-20]. Применение этих моделей и методов в задачах определения движения КА требует использования соответствующих нелинейных моделей и учета особенностей уравнений динамики и измеряемых функций.

К модели такого типа привела задача определения параметров движения КА по измерениям псевдоскорости и псевдодальности спутниковых навигационных систем. Задача определения параметров движения в такой постановке требует наряду с уточнением кинематических параметров движения КА уточнять служебные параметры приемника [21-23]. Эти служебные параметры включают: смещение шкалы времени приемника относительно шкалы времени космической системы (идеальной шкалы), уход частоты задающего генератора и сдвиг фазы генерации псевдошумовой последовательности. Случайные процессы, описывающие поведение служебных параметров во времени, представляются авторегрессиями. Динамическая модель, описывающая поведение кинематических и служебных параметров, состоит из уравнений динамики полета КА и уравнений авторегрессии, в которые входит возбуждающий белый шум. В функциональные зависимости измеряемых функций входят кинематические параметры движения КА и служебные параметры приемника.

При решении указанных выше задач применяются различные модели шума и соответственно используются различные методы и алгоритмы оценки вектора состояния. Могут применяться комбинированные методы.

В предположении, что шум близок по своим характеристикам к белому шуму, а количество аномальных измерений невелико, целесообразно применять алгоритм, который обеспечивает оценку вектора состояния и суммарные возмущения между измерениями. Этот алгоритм рассмотрен в первой главе.

Во второй главе приведен алгоритм оценки вектора состояния в случае отсутствия возмущений.

Если шум близок к постоянным систематическим воздействиям, целесообразно применять алгоритм, позволяющий оценивать средние значения приращений этих воздействий на мерном интервале. Алгоритм оценки вектора состояния и средних значений возмущений рассмотрен в главе 3.

В тех случаях, когда точность и состав измеряемых функций не позволяют оценить параметры шума, целесообразно применять метод мешающих параметров [1,2]. Если в качестве оцениваемого вектора состояния выбрать вектор состояния на конец мерной базы, то неучтенный шум будет приводить к увеличивающимся ошибкам модели по мере перемещения от конца мерной базы к ее началу. Суть метода мешающих параметров состоит в учете этой нарастающей ошибки модели в весовой матрице измерений. Алгоритм оценки вектора состояния с использованием метода мешающих параметров рассмотрен в главе 4. В этой главе рассмотрены варианты алгоритма для двух типов возмущений: белого шума и случайных величин, постоянных на всем интервале. Алгоритм оценки вектора состояния с использованием метода мешающих параметров целесообразно применять при решении задач оценки точности определения параметров движения КА. Этот алгоритм позволяет оценить воздействие шума при приближенных представлениях о его статистических характеристиках.

В главе 5 рассмотрен алгоритм оценки вектора состояния и возмущений дискретной динамической системы. Задача в такой постановке решается на каждом шаге итерационного процесса в алгоритме оценки вектора состояния и суммарных воздействий возмущений между измерениями. В качестве критерия качества оценки использована функция, содержащая квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчетного значения, а также квадраты взвешенных невязок измеренных и расчетных значений и взвешенных возмущений. Рассмотрены свойства этих оценок, включая рекуррентные соотношения между оценками, полученными по различным мерным базам, и рекуррентные соотношения для получения оценки вектора состояния и возмущения внутри мерной базы.

1. Алгоритм оценки вектора состояния и суммарных воздействий возмущений между измерениями

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, математическая модель которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = F\left(t,x\right) + B\left(t\right)\xi\left(t\right) \quad , \tag{1.1}$$

где

x	–	n-мерный вектор состояния;
$F\left(t,x\right)$	–	n-мерная гладкая вектор-функция;
$B\left(t\right)$	–	матрица порядка $n \times m$, элементы которой являются непрерывными функциями;
$\xi\left(t\right)$	–	m-мерный белый шум с нулевым математическим ожиданием и заданной матрицей интенсивности $Q\left(t\right)$ порядка $m \times m$.

Начальные условия для системы (1.1) задаются априорным вектором $\overline{x}_0$ и его ковариационной матрицей P_0.

В моменты времени $t_1, t_2, ..., t_N$ производятся измерения функций $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N$. Измеренное значение функции Ψ_i обозначим через $\left(\Psi_i\right)_{наб}$. Для каждого момента времени t_i справедливо

$$\left(\Psi_i\right)_{наб} = \Psi_i\left(t_i, x(\cdot)\right) + \eta_i \quad , \tag{1.2}$$

где

η_i – случайный вектор, имеющий нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу R_i.

Запись в качестве параметра $x(\cdot)$ функции Ψ_i означает, что функция Ψ_i зависит не от мгновенного значения вектора состояния, а от функции $x(t)$, которая является решением уравнения (1.1).

Рассмотрим сначала задачу в линейной постановке.

1.2. Линейный случай

В линейной постановке уравнение (1.1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x + B(t)\xi(t), \tag{1.3}$$

где

$A(t)$ – квадратная матрица порядка $n \times n$, элементы которой являются непрерывными функциями времени t.

Измеряемые функции $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_N$ в линейной постановке являются линейными функциями вектора состояния $x(t)$. В каждый момент времени t_i справедливо соотношение:

$$z_i = H_i(t_i) \cdot x(t_i) + \eta_i, \tag{1.4}$$

где

z_i – вектор параметров размерности r_i, измеряемых в момент времени t_i;

$H_i(t_i)$ – матрица размерности $r_i \times n$;

η_i – последовательность независимых случайных векторов, имеющих нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу R_i.

Зависимость между векторами состояния системы в дискретные моменты времени t_i, определяемая дифференциальным уравнением (1.3), может быть выражена при помощи его разностного аналога, определяемого соотношениями:

$$x(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i)\, x(t_i) + v(t_i). \tag{1.5}$$

Здесь $\Phi(t_{i+1}, t_i)$ – фундаментальная матрица, удовлетворяющая матричному уравнению

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_i) = A(t)\,\Phi(t, t_i), \tag{1.6}$$

при начальном условии $\Phi(t_i, t_i) = E$, где E — единичная матрица размерности n.

$\{v(t_i),\ i = 0,1,2,...,N\}$ – последовательность случайных векторов с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами Q_i, вычисляемыми по формуле:

$$Q_i = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)\, B(\tau)\, Q(\tau)\, B^T(\tau)\, \Phi^T(t_{i+1}, \tau)\, d\tau. \tag{1.7}$$

Случайный вектор $v(t_i)$, $i = 0,1,2,...,N$ связан с шумом $\xi(t)$ соотношением:

$$v(t_i) = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)\, B(\tau)\, \xi(\tau)\, d\tau. \tag{1.8}$$

Он может быть интерпретирован, как суммарное воздействие возмущений на интервале времени от t_i до t_{i+1}, т. е. между $i-$ым и $i+1-$ым измерениями. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &x_i = x(t_i),\ \Phi_i = \Phi(t_{i+1}, t_i), \\ &Q_i = Q(t_{i+1}, t_i),\ v_i = v(t_i) \end{aligned} \tag{1.9}$$

С учетом соотношения (1.4) и полученной системы разностных уравнений задача оценивания может далее рассматриваться в дискретной постановке. Требуется получить оценку вектора состояния x_i дискретной динамической системы, которая описывается следующим соотношением:

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + v_i,\quad i = 0,...,N,... \tag{1.10}$$

при априорно заданной оценке начального вектора состояния $\bar{x}_0$ и ковариационной матрице этой оценки P_0. Измеряемые величины z_i, $i = 1,...,N,...$ связаны с векторами состояния уравнениями:

$$z_i = H_i x_i + \eta_i,\quad i = 1,...,N,..., \tag{1.11}$$

где η_i — случайный вектор размерности r_i с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей R_i.

Построим оценку вектора состояния и суммарных возмущающих воздействий дискретной динамической системы (1.10, 1.11) по мерной базе, содержащей N измерений. Используем метод наименьших квадратов. Критерием качества оценки является квадратичная форма следующего вида:

$$J = \frac{1}{2}(\hat{x}_{0,N} - \bar{x}_0)^T P_0^{-1}(\hat{x}_{0,N} - \bar{x}_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(z_{i+1}-H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N})^T R_i^{-1}(z_{i+1}-H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N})+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\hat{v}_{i,N}^T Q_i^{-1}\hat{v}_{i,N}\ , \qquad (1.12)$$

где

$\hat{x}_{i,N}$ – оценка вектора состояния на момент t_i, $i=0,...,N$ с использованием N измерений : $z_1, z_2, ..., z_N$;

$\hat{v}_{i,N}$ – оценка вектора суммарных возмущений v_i при использовании N измерений: $z_1, z_2, ..., z_N$.

Квадратичная форма содержит члены трех типов:

– квадраты невязок измеренных и расчетных значений, отнесенные к априорно известным среднеквадратическим отклонениям ошибок измерений;
– квадраты суммарных возмущений на интервалах между измерениями, отнесенные к априорно известным средним значениям суммарных возмущений на тех же интервалах;
– квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчетного значения.

В разделе 5 показано, что оценки $\hat{x}_{N,N}$ и $\hat{x}_{N-1,N-1}$, т.е. оценки векторов состояния на момент последнего измерения, полученные по N и $N-1$ измерениям, связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{x}_{N,N}=\Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1}+P_{N,N}H_N^T R_N^{-1}\left[z_N-H_N\Phi_N\hat{x}_{N-1,N-1}\right], \qquad (1.13)$$

где матрица $P_{N,N}$ вычисляется по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}
&P_{1,0}=\Phi_0 P_0 \Phi_0^T+Q_0\ ,\\
&P_{1,1}=\left(P_{1,0}^{-1}+H_1^T R_1^{-1}H_1\right)^{-1},\\
&P_{2,1}=\Phi_1 P_{1,1}\Phi_1^T+Q_1\ ,\\
&P_{2,2}=\left(P_{2,1}^{-1}+H_2^T R_2^{-1}H_2\right)^{-1}\ ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P_{N,N-1}=\Phi_{N-1}P_{N-1,N-1}\Phi_{N-1}^T+Q_{N-1}\ ,\\
&P_{N,N}=\left(P_{N,N-1}^{-1}+H_N^T R_N^{-1}H_N\right)^{-1}\ .
\end{aligned} \qquad (1.14)$$

Оценки вектора состояния $\hat{x}_{i,N}$ и суммарного воздействия возмущений $\hat{v}_{i,N}$ на момент t_i вычисляются с использованием следующих рекуррентных соотношений:

$$\lambda_{N-1} = H_N^T R_N^{-1}\left[z_N - H_N \hat{x}_{N,N}\right]; \qquad (1.15)$$
$$\hat{v}_{N-1,N} = Q_{N-1}\lambda_{N-1};$$
$$\hat{x}_{N-1,N} = \Phi_N^{-1}\left[\hat{x}_{N,N} - \hat{v}_{N-1,N}\right];$$

$$\lambda_i = \Phi_{i+1}^T \lambda_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1}\left[z_{i+1} - H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right]; \qquad (1.16)$$
$$\hat{v}_{i,N} = Q_i\,\lambda_i;$$
$$\hat{x}_{i,N} = \Phi_i^{-1}\left[\hat{x}_{i+1,n} - v_{i,N}\right], \quad для \quad i = N-2,...,0 \quad .$$

Здесь $\lambda_{N-1,}\lambda_{N-2,}...,\lambda_0$ – вспомогательные векторы.

Рекуррентные соотношения (1.13, 1.14) называются уравнениями фильтра Калмана.

1.3. Нелинейный случай

Решение уравнения (1.1) на интервале $\left[t_0, t_N\right]$ будем аппроксимировать функциями вида:

$$x_A(t) = x_D(t) + x_P(t) \quad ,$$

где

$$\frac{dx_D}{dt} = F\left(t, x_D\right) \quad , \qquad (1.17)$$

$$x_P\left(t\right) = \Phi\left(t, t_N\right) x_P\left(t_N\right) - \int\limits_t^{t_N} \Phi\left(t,\tau\right) B\left(\tau\right) \xi\left(\tau\right) d\tau . \qquad (1.18)$$

Матричная функция $\Phi\left(t,\tau\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi\left(t,t_0\right)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{x = x_D(t)} \Phi\left(t, t_0\right) \qquad (1.19)$$

при начальных условиях $\Phi\left(t_0, t_0\right) = E$.

$x_P\left(t_N\right)$ – вектор, параметризующий семейство функций $x_P\left(t\right)$.

Покажем, что $x_A\left(t\right)$ действительно аппроксимирует решения системы (1.1). Действительно,

$$\frac{dx_A}{dt} = F\left(t, x_D\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_D(t)} \Phi\left(t, t_N\right) x_P\left(t_N\right) + B(t)\xi(t) - \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_D(t)} \int\limits_{t}^{t_N} \Phi\left(t, \tau\right) B(\tau)\xi(\tau) d\tau \ .$$

Группируя члены, содержащие $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_D(t)}$ и используя соотношение (1.18), получим:

$$\frac{dx_A}{dt} = F\left(t, x_D\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_D(t)} x_P\left(t\right) + B(t)\xi(t) \, .$$

Так как $F\left(t, x_A\right) = F\left(t, x_D + x_P\right) \approx F\left(t, x_D\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_D(t)} x_P\left(t\right)$, то $x_A\left(t\right)$ аппроксимирует решение уравнения (1.1).

Заметим, что $x_P\left(t\right)$ удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_P}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_D(t)} x_P + B(t)\xi(t) \quad . \tag{1.20}$$

Зависимость между векторами состояния $x_A\left(t_i\right)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, ..., t_N$ может быть выражена разностным уравнением

$$x_A\left(t_{i+1}\right) = x_D\left(t_{i+1}\right) + \Phi\left(t_{i+1}, t_i\right) x\left(t_i\right) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi\left(t_{i+1}, \tau\right) B(\tau)\xi(\tau) d\tau \quad . \tag{1.21}$$

Обозначим случайный вектор $\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi\left(t_{i+1}, \tau\right) B(\tau)\xi(\tau) d\tau$ как v_i. Этот случайный вектор имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу

$$Q_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi\left(t_{i+1},\tau\right) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) \Phi^T\left(t_{i+1},\tau\right) d\tau \quad . \tag{1.22}$$

Положим $x_P\left(t_N\right)=0$. Тогда вектор начальных условий $x_D\left(t_N\right)=x_A\left(t_N\right)=x\left(t_N\right)$ однозначно определяет значения вектор функции $x_A\left(t\right)$ в дискретных точках: $t_0,t_1,...,t_N$. Однако при вычислении значений функции $\Psi_i\left(t_i,x_A\left(\cdot\right)\right)$ нужно знать зависимость $x_A\left(t\right)$ в окрестности каждого момента времени t_i. Представим эту зависимость в виде:

$$x_A(t) = \begin{cases} x_D\left(t_i\right) + \Phi\left(t,t_i\right) x_A\left(t_i\right) + \upsilon_{i-1}, & i=1,...,N, \\ x_D\left(t_0\right) + \Phi\left(t,t_0\right) x_A\left(t_0\right), & i=0 \end{cases} \quad . \tag{1.23}$$

Таким образом, построена параметрическая зависимость $x_A\left(t,q\right)$, где $q-$вектор уточняемых параметров, состоящий из компонент векторов $x\left(t_N\right),v_0,...,v_{N-1}$.

Критерием качества оценки, как и в линейном случае, является функционал, содержащий квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчетного значения, а также квадраты взвешенных невязок измерений и взвешенных суммарных возмущений между измерениями. Этот функционал можно представить в виде:

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{1}{2}\left(\left(x_A\left(t_0,q\right)-\bar{x}_0\right)^T P_0^{-1}\left(x_A\left(t_0,q\right)-\bar{x}_0\right)\right)+ \\ & +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\Psi_i\right)_{наб}-\Psi_i\left(t_i,x_A\left(t,q\right)\right)\right)^T R_i^{-1}\left(\left(\Psi_i\right)_{наб}-\Psi_i\left(t_i,x_A\left(t,q\right)\right)\right)+ \\ & +\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} v_i^T Q_i^{-1} v_i \quad . \end{aligned} \tag{1.24}$$

Если минимум функционала (1.24) искать методом Ньютона, то поправки каждого шага итерации минимизируют квадратичную форму, полученную из (1.24) заменой нелинейных зависимостей линейными членами ряда Тейлора. Это означает, что на шаге итерации s решается задача оптимальной оценки состояния линейной системы (1.3,1.4). Матрицы $A^{(s)}\left(t\right)$ и $H_i^{(s)}\left(t\right),\ i=1,...,N$ этой системы вычисляются по следующим формулам:

$$A^{(s)}(t) = \frac{\partial F}{\partial x}_{\,|\, x = x_A\left(t, q^{(s-1)}\right)} ,$$

$$H_i^{(s)} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x}_{\,|\, x = x_A\left(t, q^{(s-1)}\right)} . \tag{1.25}$$

1.4. Проверка качества измерений с использованием приведенного среднеквадратического отклонения

Приведенным СКО случайного вектора ξ с математическим ожиданием E_ξ и ковариационной матрицей K_ξ будем называть величину:

$$S = \sqrt{\left(\xi - E_\xi\right)^T K_\xi^{-1}\left(\xi - E_\xi\right)}.$$

В одномерном случае эта величина равна $\frac{\left(\xi - E_\xi\right)}{\sqrt{D_\xi}}$, где D_ξ – дисперсия ξ. Так как для нормально распределенной случайной величины справедливо правило трех сигм, т. е. $\left|\xi - E_\xi\right| \le 3\sqrt{D_\xi}$ с вероятностью 0.997, то $S \le 3$ с той же вероятностью.

При оценке качества измерений под случайной величиной ξ будем понимать прогноз невязки измерения Δz_i, сделанный по оценке вектора состояния с использованием измерений $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$, т.е.:

$$\begin{aligned} \Delta z_i &= z_i - H_i \hat{x}_{i,i-1} \\ \hat{x}_{i,i-1} &= \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1} \quad . \end{aligned} \tag{1.26}$$

В качестве ковариационной матрицы невязок измерений $K_{\Delta z_i}$ будем использовать ее прогноз:

$$\begin{aligned} K_{\Delta z_i} &= H_i^T P_{i,i-1} H_i \\ P_{i,i-1} &= \Phi_{i-1}^T P_{i-1} \Phi_{i-1} + Q_{i-1} . \end{aligned} \tag{1.27}$$

Таким образом, при проверке качества измерения вычисляется величина $\sqrt{\Delta z_i^T K_{\Delta z_i}^{-1} \Delta z_i}$ и сравнивается с заданным пороговым значением. Если величина не превосходит пороговое значение, измерение используется для построения текущей оценки, в другом случае – не используется.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий определять аномальную компоненту вектора измерений. Если вектор невязок распределен по нормальному закону, условное распределение любой его компоненты, при фиксированных остальных, также является нормальным с дисперсией, равной соответствующему диагональному элементу ковариационной матрицы. Поэтому следует искать компоненты вектора невязок, которые более, чем в три раза превосходят квадратные корни из соответствующих диагональных элементов ковариационной матрицы.

2. Алгоритм оценки вектора состояния в случае, когда возмущений нет

Когда нет шума и не используется априорная информация, функция (1.12) примет вид:

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(z_{i+1}-H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right)^T R_i^{-1}\left(z_{i+1}-H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right) \quad . \tag{2.1}$$

Будем искать оценку вектора состояния на момент последнего измерения, которую обозначим как $\hat{x}_N$. Тогда $\hat{x}_{N,N}=\hat{x}_N$, а оценки векторов состояния $\hat{x}_{i,N}$ на моменты времени $t_i,\ i=1,...,N$ выражаются через $\hat{x}_N$ с использованием переходной матрицы:

$$\hat{x}_{i,N}=\Phi\left(t_i,t_N\right)\hat{x}_N . \tag{2.2}$$

После подстановки (2.2) в (2.1) и некоторых преобразований, получим:

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(H_i\Phi\left(t_i,t_N\right)\hat{x}_N-z_i\right)^T R_i^{-1}\left(H_i\Phi\left(t_i,t_N\right)\hat{x}_N-z_i\right) \quad . \tag{2.3}$$

Требуется найти $\hat{x}_N$ из условия минимума (2.3). Функция (2.3) является квадратичной формой метода наименьших квадратов. Оценка $\hat{x}_N$ находится из решения системы нормальных уравнений по формуле:

$$\hat{x}_N=\left(B^TWB\right)^{-1}B^TWvd \quad , \tag{2.4}$$

где

$$B=\begin{bmatrix} H_1\Phi\left(t_1,t_N\right) \\ H_2\Phi\left(t_2,t_N\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ H_N\Phi\left(t_N,t_N\right)\end{bmatrix},\quad d=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & R_N^{-1}\end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что

$$B^TW=\left[\Phi^T\left(t_1,t_N\right)H_1^TR_1^{-1},\Phi^T\left(t_2,t_N\right)H_2^TR_2^{-1},...,\Phi^T(t_N,t_N)H_N^TR_N^{-1}\right]. \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) целесообразно использовать при вычислениях, а именно:

$$\left(B^T WB\right) = \sum_{i=1}^{N} \Phi^T\left(t_i, t_N\right) H_i^T R_i^{-1} H_i \Phi\left(t_i, t_N\right)$$

$$B^T Wd = \sum_{i=1}^{N} \Phi^T\left(t_i, t_N\right) H_i^T R_i^{-1} z_i \quad . \tag{2.6}$$

В ходе обработки проводится селекция аномальных измерений. Разделение измерений производится с использованием заданного порогового значения по приведенному СКО. Измерения, приведенные СКО которых более заданного порога, отбрасываются, т.е. вычисление сумм (2.6) происходит только по тем значениям индекса i, для которых приведенные СКО измерений меньше заданного порога. С учетом этого, целесообразно вычислить и запомнить матрицы $H_i \Phi\left(t_i, t_N\right)$ на этапе подготовки к обработке. В ходе обработки вычисляется матрица $B^T WB$ и вектор столбец $B^T Wd$ по формулам (2.6). Далее получается оценка $\hat{x}_N$ по формулам (2.4). Ковариационной матрицей оценки $\hat{x}_N$ является матрица $P_{N,sq2} = \left(B^T WB\right)^{-1}$. На основе полученной оценки вычисляется множество невязок измерений и их ковариационных матриц

$$\Delta z_i = H_i \Phi\left(t_i, t_N\right) \hat{x}_N - z_i \,,$$

$$K_{\Delta z_i} = H_i^T \Phi\left(t_i, t_N\right) P_{N,sq2} \Phi\left(t_i, t_N\right) H_i \,, \quad i = 1, \ldots, N \quad . \tag{2.7}$$

Приведенное СКО вычисляется с использованием вектора невязок и ковариационной матрицы по тому же алгоритму, что и в п. 1.4. Если оценка $\hat{x}_N$ построена только по измерениям, приведенное СКО которых меньше заданного порога, то оценка считается достоверной. Если это не так, необходима селекция аномальных измерений. После селекции аномальных измерений, вновь происходит вычисление матрицы $B^T WB$ и вектора столбца $B^T Wd$ и процесс повторяется. При отбраковке аномальных измерений производится контроль на отношение исключенных к общему числу измерений. Если это отношение превосходит заданный порог, увеличивается пороговое значение приведенного СКО.

3. Алгоритм оценки вектора состояния и средних значений приращений возмущений

Пусть $\xi(t)$ в системе (1.3) представляет собой не белый шум, а некоторое постоянное воздействие, которое необходимо определить наряду с вектором состояния. В этом случае:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\xi \,, \tag{3.1}$$

где ξ – неизвестный m – мерный вектор.

Вектора состояния на моменты t_i и t_N связаны между собой соотношением:

$$x\left(t_N\right)=\Phi\left(t_N,t_i\right)x\left(t_i\right)+\int_{t_i}^{t_N}\Phi\left(t_N,s\right)B(s)\xi ds \quad . \tag{3.2}$$

После умножения (3.2) слева на матрицу $\Phi\left(t_i,t_N\right)$, получим:

$$\Phi\left(t_i,t_N\right)x(t_N)=x(t_i)+\int_{t_i}^{t_N}\Phi(t_i,s)B(s)\xi ds \quad . \tag{3.3}$$

Из (3.3) получим зависимость $x(t_i)$ от $x(t_N)$ и $\xi\left(t\right)$:

$$x(t_i)=\Phi(t_i,t_N)x(t_N)+\left[\int_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)ds\right]\xi \quad . \tag{3.4}$$

Рассмотрим расширенный вектор состояния $\begin{bmatrix} x(t_i) \\ \xi \end{bmatrix}$, состоящий из n компонент вектора x и m компонент вектора ξ. Тогда уравнение (3.4) перепишется в виде:

$$\begin{bmatrix} x(t_i) \\ \xi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Phi(t_i,t_N) & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & \int_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)ds \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t_N) \\ \xi \end{bmatrix} \quad , \tag{3.5}$$

где $0_{n\times m}$ и $0_{m\times n}$ – нулевые матрицы $n\times m$ и $m\times n$.

При получении оценки будем искать минимум функционала (2.1) такого же, как для случая отсутствия возмущений. Под искомым вектором оценки будем понимать расширенный вектор состояния, а под переходной матрицей — расширенную переходную матрицу

$$\begin{bmatrix} \Phi(t_i,t_N) & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & \int_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)ds \end{bmatrix} \quad . \tag{3.6}$$

Искомая оценка $\begin{bmatrix} \hat{x}_N \\ \xi \end{bmatrix}$ находится по формуле:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_N \\ \xi \end{bmatrix}=\left(B^TWB\right)^{-1}B^TWd \quad , \tag{3.7}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} H_1\Phi(t_i,t_N), & H_1\int\limits_{t_N}^{t_1}\Phi(t_1,s)B(s)ds \\ H_2\Phi(t_2,t_N), & H_2\int\limits_{t_N}^{t_2}\Phi(t_2,s)B(s)ds \\ ... & ... \\ H_N\Phi(t_N,t_N), & H_N\int\limits_{t_N}^{t_N}\Phi(t_N,s)B(s)ds \end{bmatrix},$$

$$d = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_N \end{bmatrix} \quad \mathrm{W} = \begin{bmatrix} \mathrm{R}_1^{-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & R_N^{-1} \end{bmatrix}.$$

Аналогом формулы (2.5) является соотношение:

$$B^T W =$$

$$\begin{bmatrix} \Phi^T(t_1,t_N)H_1^T R_1^{-1} & \Phi(t_2,t_N)H_2^T R_2^{-1} & ... & H_N^T R_N^{-1} \\ [\int\limits_{t_N}^{t_1}\Phi(t_1,s)B(s)ds]^T H_1^T R_1^{-1} & [\int\limits_{t_N}^{t_2}\Phi(t_2,s)B(s)ds]^T H_2^T R_2^{-1} & ... & 0_{m,1} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Матрица $B^T WB$ и вектор столбец $B^T Wd$ представляются аналогично (2.6) в виде:

$$B^T WB = \sum_{i=1}^{N}[\Phi(t_i,t_N)H_i^T R_i^{-1} H_i \Phi(t_i,t_N) +$$

$$+[\int\limits_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)ds]^T H_i^T R_i^{-1} H_i [\int\limits_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)ds]] \quad 3.9)$$

$$B^T Wd = \sum_{i=1}^{N}\left[\Phi^T(t_i,t_N) + [\int\limits_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)ds]^T\right] H_i^T R_i^{-1} z_i \quad .$$

Для эффективной работы алгоритма селекции аномальных измерений на этапе подготовки целесообразно вычислить и запомнить матрицы

$$M_{1,i} = H_i \Phi\left(t_i, t_N\right) \quad ,$$

$$M_{2,i} = H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi\left(t_i, s\right) B\left(s\right) ds \,, \quad i = 1, \ldots, N \quad . \qquad (3.10)$$

С использованием этих матриц соотношения (3.9) перепишутся в виде:

$$B^T W B = \sum_{i=1}^{N} M_{1,i}^T R_i^{-1} M_{2,i}$$

$$B^T W d = \sum_{i=1}^{N} \left[M_{1,i}^T + M_{2,i}^T \right] R_i^{-1} z_i \quad . \qquad (3.11)$$

При работе алгоритма селекции аномальных измерений и получения оценки методом наименьших квадратов суммы (3.11) вычисляются только по тем значениям индекса i, которым соответствуют измерения, удовлетворяющие заданным критериям.

Вычисление интегралов $\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) ds$ в соотношении (3.10) удобно проводить с использованием следующего рекуррентного соотношения:

$$\int_{t_N}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) B(s) ds = \Phi(t_{i+1}, t_i) \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s) B(s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, s) B(s) ds \quad . \qquad (3.12)$$

4. Алгоритм оценки вектора состояния с использованием метода мешающих параметров

Метод мешающих параметров [1,2] целесообразно применять, когда точность и состав измеряемых функций не позволяют оценить параметры шума. В качестве оцениваемого вектора состояния выбран вектор состояния на конец мерной базы. Неучтенный шум приводит к увеличению ошибок модели по мере перемещения от конца мерной базы к ее началу. Суть метода состоит в учете этой нарастающей ошибки модели в весовой матрице измерений. Рассмотрим варианты алгоритма для двух типов возмущений: белого шума (п.4.1.) и случайных величин, постоянных на всем интервале измерений (п.4.2.).

4.1. Мешающие параметры в форме белого шума

Поиск минимума функции (1.12) ведется по $n + N \cdot m$ уточняемым параметрам, состоящим из n – мерного вектора $\hat{x}_N$ и N векторов $\hat{V}_{i,N}$, имеющих размерность m. Чтобы избежать увеличения размерности решаемой задачи можно рассмотреть $\hat{V}_{i,N}$ как мешающие параметры. При таком рассмотрении следует уменьшать вес измерений по мере их удаления по времени от момента t_N. Для расчета весовой матрицы измерения i необходимо знать ковариационную матрицу вектора состояния на момент t_i при известной ковариационной матрице вектора состояния на момент t_N и заданных статистических характеристиках шума. В этом разделе будет рассмотрен случай, когда шум $\xi(t)$ в уравнении (1.3) представляет собой белый шум с постоянной матрицей интенсивности Q.

Пусть известен вектор состояния $\hat{x}_N$ на момент t_N. Тогда при сделанных ранее предположениях, вектор состояния $\hat{x}_i$ на момент t_i связан с $\hat{x}_N$ следующим соотношением:

$$\hat{x}_i = \Phi(t_i, t_N)\hat{x}_N + \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s)\xi(s)ds \quad . \tag{4.1}$$

Невязка i-го измерения Δz_i равна

$$\begin{aligned}\Delta z_i &= z_i - H_i\hat{x}_i = z_i - H_i\Phi(t_i, t_N)x_N - H_i\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s)\xi(s)ds = \\ &= \eta_i - H_i\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s)\xi(s)ds\end{aligned} \tag{4.2}$$

и содержит наряду с ошибкой измерения η_i вектор методической ошибки $H_i\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s)\xi(s)ds$. Это приводит к тому, что возникает корреляция между измерениями на моменты времени t_i и t_j. Найдем ковариационную матрицу методической ошибки $cov(i, j)$, соответствующую измерениям i и j. Не ограничивая общности, положим $t_i < t_j$. Тогда

$$\begin{aligned} &cov(i, j) = \\ &= M\left[H_i\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s_1)B(s_1)\xi(s_i)ds_1 \left[\int_{t_N}^{t_j} \Phi(t_j, s_2)B(s_2)\xi(s_2)ds_2\right]^T H_j^T \right] = \\ &= H_i\int_{t_N}^{t_i}\int_{t_N}^{t_j} \Phi(t_i, s_1)B(s_1)M\left[\xi(s_1)\xi^T(s_2)\right]B^T(s_2)\Phi^T(t_j, s_2)ds_1ds_2H_j^T \quad . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Так как $\xi(s)$ представляет собой m–мерный белый шум с матрицей интенсивности Q, справедливо соотношение:

$$M\left[\xi(s_1)\xi^T(s_2)\right]=\begin{cases}Q, \ если \ \ s_1=s_2\\ 0, \ если \ \ s_1\neq s_2\end{cases}.$$

Тогда

$$cov(i,j)=H_i\int_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)QB^T(s)\Phi^T(t_j,s)dsH_j^T \quad . \tag{4.4}$$

С учетом того, что $\Phi^T(t_j,s)=\Phi^T(t_i,s)\Phi^T(t_j,t_i)$, получим:

$$cov(i,j)=H_i\int_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)QB^T(s)\Phi^T(t_j,s)dsH_j^T \quad . \tag{4.5}$$

Обозначим

$$I_i=\int_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)QB^T(s)\Phi^T(t_i,s)ds \quad .$$

Тогда

$$cov(i,j)=H_iI_i\Phi^T(t_j,t_i)H_j^T \ \text{ и } \ cov(j,i)=H_j\Phi^T(t_j,t_i)I_iH_i^T \quad . \tag{4.6}$$

Для вычисления интеграла I_i целесообразно использовать рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} I_{i+1}&=\int_{t_N}^{t_{i+1}}\Phi(t_{i+1},s)B(s)QB^T(s)\Phi^T(t_{i+1},s)ds=\\ &=\Phi(t_{i+1},t_i)\int_{t_N}^{t_i}\Phi(t_i,s)B(s)QB^T(s)\Phi^T(t_i,s)ds\Phi^T(t_{i+1},t_i)+\\ &+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Phi(t_{i+1},s)B(s)QB^T(s)\Phi^T(t_{i+1},s)ds=\\ &=\Phi(t_{i+1},t_i)I_i\Phi^T(t_{i+1},t_i)+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Phi(t_{i+1},s)B(s)QB^T(s)\Phi^T(t_{i+1},s)ds. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Используя соотношения (4.6) и (4.7), построим ковариационную матрицу измерений K в виде следующей блочной матрицы:

$$K = \begin{bmatrix} cov(1,1)+R_1 & cov(1,2) & ... & cov(1,N) \\ cov(2,1) & cov(2,2)+R_2 & ... & cov(2,N) \\ . & . & . & . \\ cov(N,1) & cov(N,2) & & cov(N,N)+R_N \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

В случае коррелированных измерений для нахождения оценки $\hat{x}_N$ минимизируется функция, представляющая собой квадратичную форму:

$$(d - B\tilde{x}_N)^T K^{-1}(d - B\tilde{x}_N)\,. \tag{4.9}$$

Вектор столбец d и матрица B вычисляются так же, как и в (2.4). Оценка находится по следующей формуле:

$$\tilde{x}_N = (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T K^{-1} d\,, \tag{4.10}$$

а ее ковариационная матрица $K_{\hat{x}}$ равна $(B^T K^{-1} B)^{-1}$.

4.2. Мешающие параметры в форме случайных величин, постоянных на всем интервале

Рассмотрим теперь случай, когда $\xi(t)$ в уравнении (1.3) представляет собой не белый шум, а случайный вектор ξ, постоянный на всем интервале. Обозначим ковариационную матрицу этого вектора как Q. Оценка вектора состояния $\hat{x}_i$ на момент t_i связана с оценкой вектора состояния на момент последнего измерения $\hat{x}_N$ следующим соотношением:

$$\hat{x}_i = \Phi(t_i, t_N)\hat{x}_N + \left[\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s)ds\right]\xi \quad . \tag{4.11}$$

Ковариационная матрица методической ошибки, соответствующая измерениям на моменты t_i и t_j, в этом случае будет равна

$$cov(i, j) = H_i \int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_i, s)B(s)ds \cdot Q \left[\int_{t_N}^{t_i} \Phi(t_j, s)B(s)ds\right]^T H_j^T\,. \tag{4.12}$$

Ковариационная матрица измерений K представляется формулой (4.8), в которой под блоком $cov(i, j)$ понимаются матрицы, вычисленные по формуле (4.12).

Оценка вектора состояния и ковариационная матрица этой оценки находятся по формуле (4.10).

Следует отметить, что рассмотренный случай имеет значение для получения оценок и моделирования, так как если возмущения, вносимые вектором ξ, приводят к невязкам Δz_i, $i = 1,...,N$, которые сопоставимы с точностью измерений, то для оценки вектора состояния и возмущений можно использовать методику, изложенную в п. 3.

5. Оценка вектора состояния и возмущений дискретной динамической системы и свойства этих оценок

Алгоритм оценки вектора состояния и возмущения дискретной динамической системы используется на каждом шаге итерационного процесса оценки вектора состояния и суммарных воздействий возмущений между измерениями непрерывной динамической системы (п.1.). Оценка строится на основе критерия качества, который содержит квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния и его расчетного значения, а так же квадраты взвешенных невязок измерений и взвешенных возмущений.

Рассмотрим задачу оценки $n-$мерного вектора состояния x_i на моменты времени $i = 0,1,...,N,...$ дискретной динамической системы:

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + \Gamma_i w_i , \quad i = 0,1,...,N,... \quad ,$$

где

Φ_i – невырожденная матрица $n \times n$;

w_i – $k-$мерный вектор, описывающий шум, действующий на систему;

Γ_i – $k \times n$ матрица.

Канал измерений описывается соотношением:

$$z_i = H_i x_i + \upsilon_i , \quad i = 1,...,N,... \quad ,$$

где

z_i – $m-$мерный вектор измеряемых величин;

H_i – $m \times n$ матрица, описывающая связь измеренного значения с вектором состояния;

υ_i – $m-$мерный вектор, описывающий шум измерительного канала.

Обозначим оценку вектора состояния на момент i по N измерениям $z_1, z_2,..., z_N$, как $\hat{x}_{i,N}$, а оценку вектора шума, действующего на систему в этот же момент, как $\hat{w}_{i,N}$.

Рассмотрим свойства оценок $\hat{x}_{0,N}, \hat{x}_{1,N},..., \hat{x}_{N,N}, \hat{w}_{0,N},..., \hat{w}_{N-1,N}$, полученных в результате минимизации функции:

$$J\left(\hat{x}_{0,N},\hat{x}_{1,N},...,\hat{x}_{N,N},\hat{w}_{0,N},...,\hat{w}_{N-1,N}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\hat{x}_{0,N}-\overline{x}\right)^{T}P_{0}^{-1}\left(\hat{x}_{0,N}-\overline{x}\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[\left(z_{i+1}-H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right)^{T}R_{i+1}^{-1}\left(z_{i+1}-H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right)+\hat{w}_{i,N}^{T}Q_{i}^{-1}\hat{w}_{i,N}\right],$$

где

$\overline{x}$	–	априорно заданный вектор состояния на начальный момент;
P_0	–	положительно определенная $n\times n$ – матрица;
R_i, $i=1,..,N$	–	положительно определенные $m\times m$ – матрицы;
Q_i , $i=0,..,N-1$	–	положительно определенные $k\times k$ – матрицы.

Свойство 1. Оценки $\hat{x}_{N,N}$ и $\hat{x}_{N-1,N-1}$ связаны рекуррентным соотношением:

$$\hat{x}_{N,N}=\Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1}+P_{N,N}H_{N}^{T}R_{N}^{-1}\left[z_{N}-H_{N}\Phi_{N}\hat{x}_{N-1,N-1}\right],$$

где матрица $P_{N,N}$ вычисляется по следующим рекуррентным формулам:

$$P_{1,0}=\Phi_{0}P_{0}\Phi_{0}^{T}+\Gamma_{0}Q_{0}\Gamma_{0}^{T} \quad ,$$
$$P_{1,1}=\left(P_{1,0}^{-1}+H_{1}^{T}R_{1}^{-1}H_{1}\right)^{-1} \quad ,$$
$$P_{2,1}=\Phi_{1}P_{1,1}\Phi_{1}^{T}+\Gamma_{1}Q_{1}\Gamma_{1}^{T} \quad ,$$
$$P_{2,2}=\left(P_{2,1}^{-1}+H_{2}^{T}R_{2}^{-1}H_{2}\right)^{-1} \quad ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$P_{N,N-1}=\Phi_{N-1}P_{N-1,N-1}\Phi_{N-1}^{T}+\Gamma_{N-1}Q_{N-1}\Gamma_{N-1}^{T} \quad ,$$
$$P_{N,N}=\left(P_{N,N-1}^{-1}+H_{N}^{T}R_{N}^{-1}H_{N}\right)^{-1} \quad .$$

Свойство 1 показывает, что известное рекуррентное соотношение между оценками $\hat{x}_{N,N}$ и $\hat{x}_{N-1,N-1}$ является следствием формы минимизируемого функционала. Для случая, когда нет шума в динамической системе, доказательство существенно упрощается. Такие доказательства приведены в [2] и [17]. Идеи доказательства для случая с шумом приведены в [19].

Свойство 2. Оценки векторов состояния $\hat{x}_{i,N}$ и возмущающих воздействий $\hat{w}_{i,N}$ на моменты времени $i=0,...,N-1$ связаны с оценкой $\hat{x}_{N,N}$ следующими рекуррентными формулами:

$$\lambda_{N-1} = H_N^T R_N^{-1}\left[z_N - H_N \hat{x}_{N,N}\right],$$

$$\hat{x}_{N-1,N} = \Phi_{N-1}^{-1}\left[\hat{x}_{N,N} - \Gamma_{N-1} Q_{N-1} \Gamma_{N-1}^T \lambda_{N-1}\right],$$

$$\hat{w}_{N-1,N} = Q_{N-1}\Gamma_{N-1}^T \lambda_{N-1},$$

$$\lambda_i = \Phi_{i+1}^T \lambda_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1}\left[z_{i+1} - H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right],$$

$$\hat{x}_{i,N} = \Phi_{i+1}^{-1}\left[\hat{x}_{i+1,N} - \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T \lambda_i\right],$$

$$\hat{w}_{i,N} = Q_i \Gamma_i^N \lambda_i \quad \text{для} \quad i = N-2,...,0.$$

Свойство 2 показывает, как вычисляется оценка вектора состояния $\hat{x}_{i,N}$ на середину мерной базы при наличии N измерений. На практике эту оценку часто путают с оценкой $\hat{x}_{i,i}$.

Свойство 3. Обозначим как $\tilde{x}_0$ невязку между истинным и априорно заданным векторами на начальный момент. Если $\tilde{x}_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_N, w_0, ..., w_{N-1}$ интерпретировать как некоррелированные между собой случайные векторы с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами: $P_0, R_1, ..., R_N, Q_0, ..., Q_{N-1}$, то $P_{N,N}$ является ковариационной матрицей оценки $\hat{x}_{N,N}$.

Свойство 3 фактически показывает, при каких условиях рекуррентное соотношение, связывающее оценки $\hat{x}_{N,N}$ и $\hat{x}_{N-1,N-1}$, становится уравнением фильтра Калмана.

Свойства 1-3 следуют из лемм 1-6 сформулированных и доказанных ниже.

Лемма 1. Пусть заданы:

$\bar{x}$	–	вектор размерности n;
$\bar{w}$	–	вектор размерности k;
P_0	–	положительно определенная $n\times n$ матрица;
z_i	–	векторы размерности m, $i=1,...,N$;
R_i	–	положительно определенные $m\times m$ матрицы, $i=1,...,N$;
Φ_i	–	$n\times n$ матрицы, $i=0,...,N-1$;
Γ_i	–	$n\times k$ матрицы, $i=0,...,N-1$;
Q_i	–	положительно определенные $k\times k$ матрицы, $i=0,...,N-1$;

H_i – $m \times n$ матрицы, $i = 1,...,N$.

Тогда значения переменных $\hat{x}_{0,N}, \hat{x}_{1,N}, ..., \hat{x}_{N,N}, \hat{w}_{0,N}, ..., \hat{w}_{N-1,N}$, для которых достигается минимум функции:

$$J\left(\hat{x}_{0,N}, \hat{x}_{1,N}, ..., \hat{x}_{N,N}, \hat{w}_{0,N}, ..., \hat{w}_{N-1,N}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\hat{x}_{0,N} - \bar{x}\right)^T P_0^{-1}\left(\hat{x}_{0,N} - \bar{x}\right) + \tag{5.1}$$
$$+\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left[\left(z_{i+1} - H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right)^T R_{i+1}^{-1}\left(z_{i+1} - H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right) + \hat{w}_{i,N}^T Q_i^{-1}\hat{w}_{i,N}\right],$$

при ограничениях:

$$\hat{x}_{i+1,N} = \Phi_i \hat{x}_{i,N} + \Gamma_i \hat{w}_{i,N}\ , \quad i = 0,1,...,N-1 \tag{5.2}$$

удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_{0,N} = P_0 \Phi_0^T \lambda_0 + \bar{x} \quad ,\\
&\hat{x}_{i+1,N} = \Phi_i \hat{x}_{i,N} + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T \lambda_i \quad ,\\
&\hat{w}_{i,N} = Q_i \Gamma_i^T \lambda_i \quad ,\\
&\lambda_i = \Phi_{i+1}^T \lambda_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1}\left[z_{i+1} - H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right] \ \text{ для } \ i = 0,...,N-1,\\
&\lambda_N = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Доказательство. Для получения необходимых условий экстремума функции (5.1) при ограничениях (5.2) воспользуемся правилом множителей Лагранжа. Введем векторные множители размерности n : $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{N-1}$ и функцию

$$\tilde{J} = J + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i^T \left(\hat{x}_{i+1,N} - \Phi_i \hat{x}_{i,N} - \Gamma_i \hat{w}_{i,N}\right) \quad . \tag{5.4}$$

Сначала вычислим строки частных производных: $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{0,N}}$, $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{w}_{0,N}}$ и $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_0}$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{0,N}}\right)^T = P_0^{-1}\left(\hat{x}_{0,N} - \bar{x}\right) - \Phi_0^T \lambda_0 \quad ,\\
&\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{w}_{0,N}}\right)^T = Q_0^{-1}\hat{w}_{0,N} - \Gamma_0^T \lambda_0\ ,\\
&\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_0}\right)^T = \hat{x}_{1,N} - \Phi_0 \hat{x}_{0,N} - \Gamma_0 \hat{w}_{0,N} \quad .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Вычислим строки частных производных: $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{i,N}}$, $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{w}_{i,N}}$ и $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_i}$ при $i=1,...,N-1$:

$$\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{i,N}}\right)^T = H_i^T R_i^{-1}\left(z_i - H_i \hat{x}_{i,N}\right) + \lambda_{i-1} - \Phi_i^T \lambda_i \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{w}_{i,N}}\right)^T = Q_i^{-1}\hat{w}_{i,N} - \Gamma_i^T \lambda_i \ , \tag{5.6}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda_i}\right)^T = \hat{x}_{i+1,N} - \Phi_i \hat{x}_{i,N} - \Gamma_i \hat{w}_{i,N} \quad .$$

Наконец, вычислим строку частных производных $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{N,N}}$:

$$\left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \hat{x}_{N,N}}\right)^T = H_N^T R_N^{-1}\left(z_N - H_N \hat{x}_{N,N}\right) + \lambda_{N-1} \quad . \tag{5.7}$$

Получим систему уравнений, приравнивая нулю строки частных производных:

$$P_0^{-1}\left(\hat{x}_{0,N} - \bar{x}\right) - \Phi_0^T \lambda_0 = 0 \quad ,$$

$$Q_0^{-1}\hat{w}_{0,N} - \Gamma_0^T \lambda_0 = 0 \ , \tag{5.8}$$

$$\hat{x}_{1,N} - \Phi_0 \hat{x}_{0,N} - \Gamma_0 \hat{w}_{0,N} = 0 \quad .$$

$$H_i^T R_i^{-1}\left(z_i - H_i \hat{x}_{i,N}\right) + \lambda_{i-1} - \Phi_i^T \lambda_i = 0 \quad ,$$

$$Q_i^{-1}\hat{w}_{i,N} - \Gamma_i^T \lambda_i = 0 \quad , \tag{5.9}$$

$$\hat{x}_{i+1,N} - \Phi_i \hat{x}_{i,N} - \Gamma_i \hat{w}_{i,N} = 0 \quad \text{для } i=1,...,N-1 \quad .$$

$$H_N^T R_N^{-1}\left(z_N - H_N \hat{x}_{N,N}\right) + \lambda_{N-1} = 0 \quad . \tag{5.10}$$

Из первого уравнения системы (5.8) получим:

$$\hat{x}_{0,N} = \bar{x} + P_0 \Phi_0^T \lambda_0 \ . \tag{5.11}$$

Из второго уравнения системы (5.8) следует, что:

$$\hat{w}_{0,N} = Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0 \quad . \tag{5.12}$$

После подстановки (5.12) в третье уравнение (5.8), получим:

$$\hat{x}_{1,N} = \Phi_0 \hat{x}_{0,N} + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0 \quad . \tag{5.13}$$

Преобразуем теперь систему (5.9). Из второго уравнения получим:

$$\hat{w}_{i,N} = Q_i \Gamma_i^T \lambda_i \quad . \tag{5.14}$$

После подстановки (5.14) в третье уравнение системы (5.9) получим:

$$\hat{x}_{i+1,N} = \Phi_i \hat{x}_{i,N} + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T \lambda_i \quad . \tag{5.15}$$

Введем дополнительную переменную λ_N и свяжем ее уравнением $\lambda_N = 0$. Это позволяет объединить уравнения (5.9) и (5.10):

$$\lambda_i = \Phi_i^T \lambda_{i+1} - H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} \left(z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1,\mathrm{N}} \right), \quad i = 1,\dots N-1 \quad . \tag{5.16}$$

Соединяя (5.11), (5.13), (5.15), (5.12), (5.14) и (5.16), получим искомую систему уравнений (5.3). Лемма доказана.

Введем обозначения матриц, которые потребуются при дальнейшем изложении:

$$\begin{aligned}
&P_{1,0} = \Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T \quad , \\
&P_{1,1} = \left(P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1 \right)^{-1} \quad , \\
&P_{2,1} = \Phi_1 P_{1,1} \Phi_1^T + \Gamma_1 Q_1 \Gamma_1^T \quad , \\
&P_{2,2} = \left(P_{2,1}^{-1} + H_2^T R_2^{-1} H_2 \right)^{-1} \quad , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&P_{N,N-1} = \Phi_{N-1} P_{N-1,N-1} \Phi_{N-1}^T + \Gamma_{N-1} Q_{N-1} \Gamma_{N-1}^T \quad , \\
&P_{N,N} = \left(P_{N,N-1}^{-1} + H_N^T R_N^{-1} H_N \right)^{-1} \quad .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Заметим, что матрицы $P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{N,N-1}, P_{N,N}$ будут положительно определены, если матрица P_0 – положительно определена, так как операции добавления неотрицательно определенной матрицы и обращения матрицы сохраняют положительную определенность.

Лемма 2. При $N = 1$:

$$\hat{x}_{1,1} = \Phi_0 \bar{x} + P_{1,1} H_1^T R_1^{-1} \left[z_1 - H_1 \Phi_0 \bar{x} \right] \quad ,$$

$$\hat{w}_{0,1} = Q_0 \Gamma_0^T H_1^T R_1^{-1} \left[z_1 - H_1 \hat{x}_{1,1} \right] \quad .$$

Доказательство. Из системы уравнений (5.3) следует:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_{0,1} = P_0 \Phi_0^T \lambda_0 + \bar{x} \quad , \\
&\hat{x}_{1,1} = \Phi_0 \hat{x}_{0,1} + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0 \quad , \\
&\hat{w}_{0,1} = Q_0 \Gamma_0^T \lambda_0 \quad , \\
&\lambda_0 = H_1^T R_1^{-1} \left[z_1 - H_1 \hat{x}_{1,1} \right] \quad .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Получим уравнение для $\hat{x}_{1,1}$, подставив выражения для λ_0 и $\hat{x}_{0,1}$ во второе уравнение системы (5.18):

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1,1} &= \Phi_0\bar{x} + \left(\Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T\right)\lambda_0 = \\ &= \Phi_0\bar{x} + \left(\Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T\right) H_1^T R_1^{-1}\left[z_1 - H_1\hat{x}_{1,1}\right] \quad .\end{aligned} \tag{5.19}$$

Использовав обозначение для матрицы $P_{1,0}$ из (5.17), запишем уравнение (5.19) в виде:

$$\hat{x}_{1,1} = P_{1,0}H_1^T R_1^{-1} z_1 - P_{1,0}H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,1} + \Phi_0\bar{x} \quad . \tag{5.20}$$

Разрешив (5.20) относительно $\hat{x}_{1,1}$, получим:

$$\hat{x}_{1,1} = \left[E + P_{1,0}H_1^T R_1^{-1} H_1\right]^{-1}\left[P_{1,0}H_1^T R_1^{-1} z_1 + \Phi_0\bar{x}\right] \quad , \tag{5.21}$$

так как

$$\begin{aligned}&\left[E + P_{1,0}H_1^T R_1^{-1} H_1\right]^{-1} = \left[P_{1,0}\left(P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1\right)\right]^{-1} = \\ &= \left(P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1\right)^{-1} P_{1,0}^{-1} \quad .\end{aligned}$$

Использовав представление $P_{1,1}$ через $P_{1,0}$, преобразуем (5.21) :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1,1} &= P_{1,1}P_{1,0}^{-1}\left[P_{1,0}H_1^T R_1^{-1} z_1 + \Phi_0\bar{x}\right] = \\ &= P_{1,1}H_1^T R_1^{-1} z_1 + P_{1,1}P_{1,0}^{-1}\Phi_0\bar{x} - P_{1,1}H_1^T R_1^{-1} H_1\Phi_0\bar{x} + P_{1,1}H_1^T R_1^{-1} H_1\Phi_0\bar{x} = \\ &= P_{1,1}\left[P_{1,0}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1\right]\Phi_0\bar{x} + P_{1,1}H_1^T R_1^{-1}\left[z_1 - H_1\Phi_0\bar{x}\right] = \\ &= \Phi_0\bar{x} + P_{1,1}H_1^T R_1^{-1}\left[z_1 - H_1\Phi_0\bar{x}\right] \quad .\end{aligned} \tag{5.22}$$

Выражение для $\hat{w}_{0,1}$ получается подстановкой соотношения для λ_0 (последнее уравнение (5.18)) в предпоследнее уравнение (5.18). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть для всех $1 < j < N$ справедливо:

$$\hat{x}_{j,j} = \Phi_{j-1}\hat{x}_{j-1,j-1} + P_{j,j}H_j^T R_j^{-1}\left[z_j - H_j\Phi_{j-1}\hat{x}_{j-1,j-1}\right] \quad ,$$

тогда из системы уравнений (5.3) следует, что:

$$\hat{x}_{i,N} = \hat{x}_{i,i} + P_{i,i}\Phi_i^T\lambda_i \,, \quad i = 1,\ldots,N-1 \quad . \tag{5.23}$$

Доказательство. Используем индукцию по i. Сначала докажем, что (5.23) справедливо для $i = 1$. Преобразуем выражения для $\hat{x}_{1,N}$ и λ_0 системы (5.3):

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1,N} &= \Phi_0\hat{x}_{0,N} + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T\lambda_0 = \Phi_0\left(\bar{x} + P_0\Phi_0^T\lambda_0\right) + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T\lambda_0 = \\ &= \Phi_0\bar{x} + \left(\Phi_0 P_0 \Phi_0^T + \Gamma_0 Q_0 \Gamma_0^T\right)\lambda_0 = \Phi_0\bar{x} + P_{1,0}\lambda_0 \quad ,\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\lambda_0 = \Phi_1^T \lambda_1 + H_1^T R_1^{-1}\left[z_1 - H_1 \hat{x}_{1,N} \right] = \\ = \Phi_1^T \lambda_1 - H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,N} + H_1^T R_1^{-1} z_1 \quad . \tag{5.25}$$

Получим выражение для $H_1^T R_1^{-1} z_1$, использовав лемму 2:

$$\hat{x}_{1,1} = \Phi_0 \bar{x} + P_{1,1} H_1^T R_1^{-1}\left[z_1 - H_1 \Phi_0 \bar{x} \right] \quad ,$$

$$H_1^T R_1^{-1} z_1 = P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,1}^{-1} \Phi_0 \bar{x} + H_1^T R_1^{-1} H_1 \Phi_0 \bar{x} =$$

$$= P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - \left(P_{1,1}^{-1} - H_1^T R_1^{-1} H_1 \right) \Phi_0 \bar{x} = P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,0}^{-1} \Phi_0 \bar{x} \quad .$$

После подстановки полученного выражения для $H_1^{\mathrm{T}} R_1^{-1} z_1$ в (5.25), получим:

$$\lambda_0 = \Phi_1^T \lambda_1 - H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,\mathrm{N}} + P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,0}^{-1} \Phi_0 \bar{x} \quad . \tag{5.26}$$

Подставляя (5.26) в (5.24), получим уравнение для $\hat{x}_{1,N}$:

$$\hat{x}_{1,N} = \Phi_0 \bar{x} + P_{1,0}\left(\Phi_1^T \lambda_1 - H_1^T R_1^{-1} H_1 \hat{x}_{1,N} + P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} - P_{1,0}^{-1} \Phi_0 \bar{x} \right) \quad .$$

После преобразований получим:

$$\left(E + P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} H_1 \right) \hat{x}_{1,N} = P_{1,0} \Phi_1^T \lambda_1 + P_{1,0} P_{1,1}^{-1} \hat{x}_{1,1} \quad .$$

Так как $E + P_{1,0} H_1^T R_1^{-1} H_1 = P_{1,0} P_{1,1}^{-1}$, $\quad \hat{x}_{1,N} = P_{1,1} \Phi_1^T \lambda_1 + \hat{x}_{1,1}$.

Следовательно, для $i = 1$ равенство выполняется.

Предположим, что равенство (5.23) выполняется для $i-1$, и докажем, что равенство выполняется для i. Используя предположение индукции, преобразуем выражение для $\hat{x}_{i,N}$ системы (5.3) :

$$\hat{x}_{i,N} = \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,N} + \Gamma_{i-1} Q_{i-1} \Gamma_{i-1}^T \lambda_{i-1} = \Phi_{i-1}\left(\hat{x}_{i-1,i-1} + P_{i-1,i-1} \Phi_{i-1}^T \lambda_{i-1} \right) + \Gamma_{i-1} Q_{i-1} \Gamma_{i-1}^T \lambda_{i-1} = \\ = \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + \left(\Phi_{i-1} P_{i-1,i-1} \Phi_{i-1}^T + \Gamma_{i-1} Q_{i-1} \Gamma_{i-1}^T \right) \lambda_{i-1} = \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + P_{i,i-1} \lambda_{i-1} \quad . \tag{5.27}$$

Из системы (5.3) имеем выражение для λ_{i-1}:

$$\lambda_{i-1} = \Phi_i^T \lambda_i + H_i^T R_i^{-1} z_i - H_i^T R_i^{-1} H_i \hat{x}_{i,N} \quad . \tag{5.28}$$

Используя предположение леммы, выразим $H_i^T R_i^{-1} z_i$ через $\hat{x}_{i,i}$ и $\hat{x}_{i-1,i-1}$:

$$H_i^T R_i^{-1} z_i = P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - P_{i,i}^{-1} \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} = \\ = P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - \left(P_{i,i}^{-1} - H_i^T R_i^{-1} H_i \right) \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} = P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - P_{i,i-1}^{-1} \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} \quad . \tag{5.29}$$

После подстановки (5.28) и (5.29) в (5.27), получим :

$$\hat{x}_{i,N} = \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} + P_{i,i-1}\left(\Phi_i^T \lambda_i + P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} - P_{i,i-1}^{-1} \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1,i-1} - H_i^T R_i^{-1} H_i \right) \hat{x}_{i,N} \quad .$$

После преобразований имеем:

$$\left(E + P_{i,i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i \right) \hat{x}_{i,N} = P_{i,i-1} \Phi_i^T \lambda_i + P_{i,i-1} P_{i,i}^{-1} \hat{x}_{i,i} \quad ,$$

откуда следует:

$$\hat{x}_{i,N} = \hat{x}_{i,i} + P_{i,i} \Phi_i^T \lambda_i \quad .$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Векторы $\hat{x}_{N-1,N-1}$ и $\hat{x}_{N,N}$ связаны соотношением:

$$\hat{x}_{N,N} = \Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N}H_N^T R_N^{-1}\left[z_N - H_N\Phi_N\hat{x}_{N-1,N-1}\right] \quad . \tag{5.30}$$

Доказательство. Используем индукцию по N. Справедливость равенства (5.30) для $N=1$ доказана в лемме 2. Предположим, что для всех $i \le N-1$ равенство (5.30) выполняется. Тогда по лемме 3:

$$\hat{x}_{N-1,N} = \hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N-1,N-1}\Phi_{N-1}^T\lambda_{N-1} \quad . \tag{5.31}$$

Уравнение для $\hat{x}_{N,N}$ системы (5.3) имеет вид:

$$\hat{x}_{N,N} = \Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N} + \Gamma_{N-1}Q_{N-1}\Gamma_{N-1}^T\lambda_{N-1} \quad .$$

После подстановки в него (5.31) получим:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{N,N} &= \Phi\hat{x}_{N-1,N-1} + \left(\Phi_{N-1}P_{N-1,N-1}\Phi_{N-1}^T + \Gamma_{N-1}Q_{N-1}\Gamma_{N-1}^T\right)\lambda_{N-1} = \\ &= \Phi\hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1}\lambda_{N-1} \quad .\end{aligned} \tag{5.32}$$

Получим уравнение для $\hat{x}_{N,N}$, подставив в (5.32) выражение для λ_{N-1} из системы (5.3):

$$\hat{x}_{N,N} = \Phi\hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1}H_N^T R_N^{-1}\left[z_N - H_N\hat{x}_{N,N}\right] \quad . \tag{5.33}$$

Разрешая (5.33) относительно $\hat{x}_{N,N}$, получим:

$$\left[E + P_{N,N-1}H_N^T R_N^{-1}H_N\right]\hat{x}_{N,N} = \Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1}H_N^T R_N^{-1}z_N \quad .$$

Так как в соответствии с (5.17) $P_{N,N}^{-1} = \left(P_{N,N-1}^{-1} + H_N^T R_N^{-1}H_N\right)$, решение уравнения (5.33) имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{N,N} &= P_{N,N}P_{N,N-1}^{-1}\left[\Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N-1}H_N^T R_N^{-1}z_N\right] = \\ &= \left(E - P_{N,N}H_N^T R_N^{-1}H_N\right)\Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N}H_N^T R_N^{-1}z_N = \\ &= \Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1} + P_{N,N}H_N^T R_N^{-1}\left[z_N - H_N\Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1}\right] \quad .\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Векторы $\hat{x}_{i,N}$ и $\hat{w}_{i,N}$, $i = 0,...,N-1$ связаны с $\hat{x}_{N,N}$ следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned}&\lambda_i = \Phi_{i+1}^T\lambda_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1}\left[z_{i+1} - H_{i+1}\hat{x}_{i+1,N}\right] \quad , \\ &\hat{x}_{i,N} = \Phi_{i+1}^{-1}\left[\hat{x}_{i+1,N} - \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T\lambda_i\right] \quad , \\ &\hat{w}_{i,N} = Q_i\Gamma_i^T\lambda_i \quad \text{для} \quad i = 0,...,N-1 \quad , \\ &\lambda_N = 0 \quad .\end{aligned}$$

Доказательство следует из системы (5.3).

Обозначим истинное значение x при $i=0$ как x_0, а разность между $\bar{x}$ и x_0 как $\tilde{x}_0$.

Лемма 6. Если $\tilde{x}_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_N, w_0, ..., w_{N-1}$ – попарно некоррелированные случайные векторы такие, что:

$$M\left[\tilde{x}_0\tilde{x}_0^T\right]=P_0, \quad M\left[\upsilon_1\upsilon_1^T\right]=R_1, \quad \dots, \quad M\left[\upsilon_N\upsilon_N^T\right]=R_N \quad ,$$

$$M\left[w_0w_0^T\right]=Q_0, \quad \dots, \quad M\left[w_{N-1}w_{N-1}^T\right]=Q_{N-1} \quad , \text{ то:}$$

$$M\left[\left(x_N-\hat{x}_{N,N}\right)\left(x_N-\hat{x}_{N,N}\right)^T\right]=P_{N,N} \quad . \tag{5.34}$$

Доказательство. Обозначим невязку между истинным значением x_N и оценкой $\hat{x}_{N,N}$ как $\tilde{x}_{N,N}$. Истинные значения x_N и x_{N-1} связаны между собой соотношением:

$$x_N=\Phi_{N-1}x_{N-1}+\Gamma_{N-1}w_{N-1} \quad , \tag{5.35}$$

а вектор измеренных значений z_N связан с этими векторами соотношением:

$$z_N=H_Nx_N+\upsilon_N=H_N\Phi_{N-1}x_{N-1}+H_N\Gamma_{N-1}w_{N-1}+\upsilon_N \quad . \tag{5.36}$$

Обозначим матрицу $K_N=P_{N,N}H_N^TR_N^{-1}$. Вычитая из (5.35) равенство, связывающее оценки $\hat{x}_{N,N}$ и $\hat{x}_{N,N}$ получим:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_{N,N}=\Phi_{N-1}x_{N-1}+\Gamma_{N-1}w_{N-1}-\Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1}-P_{N,N}H_N^TR_N^{-1}\cdot\\
&\cdot\left[H_N\Phi_{N-1}x_{N-1}+H_N\Gamma_{N-1}w_{N-1}+\upsilon_N-H_N\Phi_{N-1}\hat{x}_{N-1,N-1}\right]=\\
&=\Phi_{N-1}\tilde{x}_{N-1,N-1}+\Gamma_{N-1}w_{N-1}-K_N\left[H_N\Phi_{N-1}\tilde{x}_{N-1,N-1}+H_N\Gamma_{N-1}w_{N-1}+\upsilon_N\right]=\\
&=\left(\Phi_{N-1}-K_NH_N\Phi_{N-1}\right)\tilde{x}_{N-1,N-1}+\left(\Gamma_{N-1}-K_NH_N\Gamma_{N-1}\right)w_{N-1}-K_N\upsilon_N \quad .
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Докажем (5.34), использовав индукцию по N. Докажем сначала (5.34) для $N=1$. При $N=1$ соотношение (5.37) примет вид:

$$\tilde{x}_{1,1}=\left(\Phi_0-K_1H_1\Phi_0\right)\tilde{x}_{0,0}+\left(\Gamma_0-K_1H_1\Gamma_0\right)w_0-K_1\upsilon_1 \quad . \tag{5.38}$$

Так как по условию $M\left[\tilde{x}_{0,0}\tilde{x}_{0,0}^T\right]=P_0$ и $\tilde{x}_{0,0}, w_0$ и υ_1 – некоррелированы, то:

$$\begin{aligned}
&M\left[\tilde{x}_{1,1}\tilde{x}_{1,1}^T\right]=\left(\Phi_0-K_1H_1\Phi_0\right)P_0\left(\Phi_0-K_1H_1\Phi_0\right)^T+\\
&+\left(\Gamma_0-K_1H_1\Gamma_0\right)Q_0\left(\Gamma_0-K_1H_1\Gamma_0\right)^T+K_1R_1K_1^T=\\
&=\left(E-K_1H_1\right)\left(\Phi_0P_0\Phi_0^T+\Gamma_0Q_0\Gamma_0^T\right)\left(E-K_1H_1\right)^T+K_1R_1K_1^T=\\
&=\left(E-K_1H_1\right)P_{1,0}\left(E-K_1H_1^T\right)^T+K_1R_1K_1^T \quad .
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Рассмотрим:

$$E-K_1H_1=E-P_{1,1}H_1^TR_1^{-1}H_1=P_{1,1}\left(P_{1,1}^{-1}-H_1^TR_1^{-1}H_1\right)=P_{1,1}P_{1,0}^{-1} \quad . \qquad (5.40)$$

Подставляя (5.40) в (5.39), получим:

$$M\left[\tilde{x}_{1,1}\tilde{x}_{1,1}^T\right]=P_{1,1}P_{1,0}^{-1}P_{1,0}P_{1,0}^{-1}P_{1,1}+P_{1,1}H_1^TR_1^{-1}R_1R_1H_1P_{1,1}=$$
$$=P_{1,1}\left[P_{1,0}^{-1}+H_1^TR_1H_1\right]P_{1,1}=P_{1,1} \quad .$$

Для $N=1$ утверждение доказано. Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для $N-1$, т.е. $M\left[\tilde{x}_{N-1,N-1}\tilde{x}_{N-1,N-1}^T\right]=P_{N-1,N-1}$. Оценка $\hat{x}_{N-1,N-1}$ получена при использовании случайных векторов $\overline{x},\upsilon_1,...,\upsilon_{N-1},w_0,...,w_{N-2}$, которые не коррелированны со случайными векторами υ_N и w_{N-1}. Поэтому невязка $\tilde{x}_{N-1,N-1}$ не коррелированна со случайными векторами υ_N и w_{N-1}. Используя это и соотношение (5.37), вычислим:

$$M\left[\tilde{x}_{N,N}\tilde{x}_{N,N}^T\right]=\left(\Phi_{N-1}-K_NH_N\Phi_{N-1}\right)P_{N-1,N-1}\left(\Phi_{N-1}-K_NH_N\Phi_{N-1}\right)^T+$$
$$+\left(\Gamma_{N-1}-K_NH_N\Gamma_{N-1}\right)Q_{N-1}\left(\Gamma_{N-1}-K_NH_N\Gamma_{N-1}\right)^T+K_NR_NK_N^T=$$
$$=\left(E-K_NH_N\right)\left(\Phi_{N-1}P_{N-1,N-1}\Phi_{N-1}^T+\Gamma_{N-1}Q_{N-1}\Gamma_{N-1}^T\right)\left(E-K_NH_N\right)^T+K_NR_NK_N^T=$$
$$=P_{N,N}P_{N,N-1}^{-1}P_{N,N-1}P_{N,N-1}^{-1}P_{N,N}+P_{N,N}H_N^TR_N^{-1}R_NR_N^{-1}H_NP_{N,N}=P_{N,N} \quad .$$

Лемма доказана.

Список литературы

1. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космич. исслед. 1963. Вып. 1. Т. 1.
2. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.
3. Akim E.L., Stepaniants V.A., Tuchin A.G. Tracking of the launch-vehicle during the insertion to Earth orbit // RBCM – J. of the Braz. Soc. Mecanical Sciences Vol. XXI – Special Issue – 1999, pp. 387-399.
4. Баллистико-навигационное обеспечение заключительного этапа полета орбитальной станции «МИР» (БЦ ИПМ). Отчет Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, инв. № 5-01-02, 2001.
5. Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М. и др. Баллистика, навигация и управление полетом космического аппарата в проекте “Фобос —Грунт” // Теория и системы управления. 2002. № 5.
6. Akim E.L., Stepaniants V.A., Tuchin A.G. “INTERBALL-1” and “INTERBALL-2” spacecrafts orbit determination tacking into account non-modeled small accelerations // Inrenational Symposium Space Dynamics, 26-30 june, 2000, Biarritz, France.

7. Nazarenko A.I. Determination and prediction of satellite motion at the end of the lifetime // Proc. International Workshop on Salyt-7/Kosmos-1685 Reentry, ESOC, Darmstadt, 1991.
8. Брандин В.Н., Разоренков Г.П. Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
9. Решетнев М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А. и др. Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.: Машиностроение, 1988.
10. Иванов Н.М., Поляков В.С. Наведение автоматических межпланетных станций. М.: Машиностроение, 1987.
11. Квашнин А.Г., Тучин А.Г. Построение вычислительной схемы алгоритма оценивания параметров динамической системы // Автоматизация проектирования, информатика. 1993. Вып. 4.
12. Квашнин А.Г., Тучин А.Г. Априорная гарантированная оценка точности определения параметров динамической системы. Препринт № 104. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1991.
13. Квашнин А.Г., Тучин А.Г. Синтез вычислительной схемы алгоритма оценивания параметров динамической системы. Препринт № 26. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1991.
14. Аким Э.Л., Горохова А.А., Степаньянц В.А., Тучин А. Г. Контроль траектории выведения по данным траекторных измерений. Препринт № 10. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1999.
15. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1967.
16. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
17. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
18. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.
19. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966.
20. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
21. E.L. Akim E.L, D.A. Tuchin A.D. GPS errors statistical analysis for ground receiver measurement // The Proceedings of the 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, 16-20 June, Moscow, Russia, M.: Keldysh Institute of Applied Mathematics, KIA Systems, 2003.
22. Тучин Д.А. Кодовые измерения псевдодальности системы GPS. Модель ошибок и априорная оценка точности определения вектора состояния. Препринт № 30. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.
23. Э.Л. Аким Э.Л., Тучин Д.А. Апостериорная оценка точности определения вектора состояния земного наблюдателя по измерениям дальности и скорости системы космической навигации GPS. Препринт № 36. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2001.