М.Б.Гавриков, М.С.Михайлова.

Установившиеся течения двухкомпонентной вязкой и несжимаемой плазмы в цилиндрической трубе и цилиндрическом слое.

Аннотация.

В работе найдены установившиеся течения полностью ионизованной несжимаемой вязкой электропроводной и квазинейтральной плазмы в цилиндрической трубе и слое между двумя коаксиальными цилиндрами, Полученные решения обобщают известные из гидродинамики течения Пуазейля и Куэтта. Показано, что взаимодействие электронов и ионов ведет к появлению трёх критических значений полного тока, при переходе через которые происходит перестройка эпюры гидродинамической скорости, что приводит к появлению пристеночных течений и встречных потоков плазмы в трубе. В частности, параметры установившегося течения кардинально меняются при изменении полярности электродов. Вычислены критические значения полного тока, сила трения электронов и ионов о стенку трубы. Показано, что определяющим параметром течения является безразмерная комбинация $\mathrm{G} = \chi^{-1}\rho r_0 \mu_\Sigma^{1/2}(\mu_+\mu_-\sigma)^{-1/2}$ ($\sigma,\ \rho$ – электропроводность и плотность плазмы, r_0 – радиус трубы, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\chi = m_+/e_+ + m_-/e_-$, $\mu_\pm$, $m_\pm$, $e_\pm$ – вязкости, массы и заряды плазменных компонент).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00063).

M.B.Gavrikov, M.S.Mikhailova.

The steady – state flow of two – component quasineutral plasma in cylindrical channels.

Abstract.

In this work steady – state flows of hydrodynamic plasma in cylindrical channel and in channel bounded by two coaxial surfaces are obtained. The plasma in channels is taken to be viscous electrically noncompressible two – component and quasineutral. The flows obtained are similar to famous Poiseuille's and Couette's flows. Modifications of hydrodynamic velocity's profile, is shown, are due to ion – electron's interaction when total current goes through three critical values. It leads to wall – adjacent flow and countermotion. As result, stead – state plasma flow's parameters depend on the sign of total current. Critical values of total current and ion's and electron's wall viscous friction are calculated.

<u>Введение</u>. В работе рассматривается влияние взаимодействия электронов и ионов на установившееся течение плазмы в бесконечной цилиндрической трубе круглого сечения и в цилиндрическом слое (пространстве между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами). Плазма считается гидродинамической несжимаемой вязкой квазинейтральной и электропроводной, течения – цилиндрически симметричными. Найденные решения являются аналогами известных из гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости течений *Пуазейля* и *Куэтта*.

Характер установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости по круглой бесконечной трубе в предположении цилиндрической симметрии всех параметров течения за исключением давления был исследован *Пуазейлем* (*J.L.M.Poiseuille,* 1840г.), который получил формулу для распределения скорости $v_z(r)$ по радиусу r (ось z направлена вдоль трубы, $r_0 > 0$ – радиус трубы):

$$v_z(r) = v_{\Gamma\mathrm{D}}(r) = \frac{1}{4\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\cdot(r^2 - r_0^2) \;\;,\quad 0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{r}_0 \quad ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \equiv \mathrm{const} \;\;,\quad p(r,z) = z\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \;\;, \tag{1}$$

где μ – коэффициент вязкости жидкости, p – давление, и считалось $v_r = 0$, $v_\varphi = 0$.

В случае вязкой несжимаемой электропроводной МГД – плазмы в предположении цилиндрической симметрии всех параметров течения за исключением давления характер установившегося течения в бесконечной круглой трубе радиуса $r_0 > 0$ мало чем отличается от гидродинамического случая,

$$v_z(r) = v_{\mathrm{M\Gamma D}}(r) = \frac{1}{4\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\cdot(r^2 - r_0^2) \qquad ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \equiv \mathrm{const} \;\;,\quad p(r,z) = z\cdot\frac{\partial p}{\partial z} - \pi j_z^2 c^{-2} r^2 \;\;,$$

$$\mathrm{H}_\varphi = 2\pi j_z c^{-1} r \;\;,\quad \mathrm{H}_z \equiv \mathrm{const} \qquad , \tag{2}$$

$$\mathrm{E}_r = v_z(r)\mathrm{H}_\varphi(r)\cdot c^{-1} \quad ,\qquad \mathrm{E}_z = j_z/\sigma \equiv \mathrm{const} \quad ,$$

$$0 \le r \le r_0 \qquad ,$$

где σ – проводимость плазмы, μ – коэффициент гидродинамической вязкости, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ – напряженности магнитного и электрического полей, $\mathbf{j}$ – плотность тока в плазме. При этом $v_r = v_\varphi = 0, \quad j_r = j_\varphi = 0, \quad \mathrm{H}_r = 0, \quad \mathrm{E}_\varphi = 0$. Как следует из формулы (2), на гидродинамику плазмы в трубе наличие электромагнитного поля и тока никак не влияет: профиль $v_z(r)$ такой же, что и в чисто гидродинамическом случае (1). Этот результат неправдоподобен и объясняется лишь грубостью МГД – модели плазмы. Естественно предположить, что в присутствии токов и электромагнитного поля профиль скорости плазмы в трубе начнет деформироваться. Кроме того, из граничных условий “прилипания” на стенке $r = r_0$ трубы следует равенство $j_z(r_0) = 0$, которое при $j_z \neq 0$ несовместно с решением (2). Последнее противоречие выражает один из дефектов МГД – теории: в ней нарушается привычная связь плотности тока с гидродинамическими скоростями электронов и ионов. Характер ожидаемой деформации профиля $v_z(r)$ может быть прояснен учетом взаимодействия электронов и ионов (которое игнорируется МГД – моделью), что и является одной из целей настоящей работы.

Как показано в работе, профиль скорости $v_z(r)$ определяется полным током J, протекающим через трубу. При этом под $\mathbf{v}$ надо понимать скорость центров масс единичных объемов плазмы $\mathbf{v} = \mathbf{U} = (\rho_+\mathbf{v}_+ + \rho_-\mathbf{v}_-)/\rho$, где $\mathbf{v}_\pm$, $\rho_\pm$ – скорости и плотности плазменных компонент, $\rho = \rho_+ + \rho_-$. Пусть движение электрон – ионной плазмы вызвано постоянным перепадом $\dfrac{\partial p_\Sigma}{\partial z} > 0$ суммарного давления $p_\Sigma = p_+ + p_-$. Тогда, как показано ниже (см. § 7), существуют три критические значения полного тока, $0 < \mathrm{J}_1^* < \mathrm{J}_2^* < \mathrm{J}_3^*$, качественно определяющие профиль $\mathrm{U}_z(r)$. Если $\mathrm{J} \le \mathrm{J}_1^*$, то профиль $\mathrm{U}_z(r) < 0$ колоколообразный и расположен выше $(\mathrm{J} > 0)$ или ниже $(\mathrm{J} < 0)$ (магнито) гидродинамической параболы

$$\mathrm{v}_{\text{ГД}}(r) = \mathrm{v}_{\text{МГД}}(r) = \frac{1}{4\mu_\Sigma} \cdot \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot (r^2 - r_0^2) \qquad ,$$

где $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$ – суммарная вязкость плазмы. Если $\mathrm{J}_1^* < \mathrm{J}$, то возникает пристеночная область, в которой плазма течет против перепада давления (а в остальной части трубы она, как и положено, течет вдоль антиградиента давления $(-\dfrac{\partial p_\Sigma}{\partial z})$). С ростом J эта область расширяется и при $\mathrm{J} = \mathrm{J}_2^*$ захватывает всю трубу. Таким образом, при $\mathrm{J} > \mathrm{J}_2^*$ всюду $\mathrm{U}_z(r) > 0$ (за исключением, конечно, стенки трубы, где $\mathrm{U}_z(r_0) = 0$). Иными словами, плазма течет не туда, куда толкает ее гидродинамическое давление, а в противоположную сторону. Однако профиль $\mathrm{U}_z(r)$ не колоколообразный, а имеет впадину в окрестности оси трубы $r = 0$. Эта впадина исчезает с дальнейшим ростом полного тока J и при $\mathrm{J} \ge \mathrm{J}_3^*$ профиль $\mathrm{U}_z(r)$ снова становиться колоколообразным, однако теперь колокол профиля обращен в сторону градиента давления $\dfrac{\partial p_z}{\partial z}$ (а не антиградиента, как было при токах $\mathrm{J} < \mathrm{J}_1^*$). В работе получены следующие явные формулы для профиля $\mathrm{U}_z(r)$ и критических токов J_1^*, J_2^*, J_3^* :

$$U_z(r) = v_{\text{МГД}}(r) - \frac{\mathrm{J}\,A_*}{\pi} \cdot \frac{\mathrm{I}_0(\mathrm{G}) - \mathrm{I}_0(\mathrm{G}\,r/r_0)}{\mathrm{G}\mathrm{I}_0(\mathrm{G}) - 2\mathrm{I}_1(\mathrm{G})} \quad , \quad 0 \le r \le r_0 \quad ,$$

$$J_1^* = A^* I(G) G^{-1} I_1(G)^{-1} \quad , \qquad J_2^* = A^* I(G) \cdot 2^{-1} \cdot [I_0(G) - 1]^{-1} \quad ,$$
$$J_3^* = 2A^* I(G)/G^2 \quad , \qquad I(G) = 2^{-1} G I_0(G) - I_1(G) \quad ,$$

где величины A^* , A_* вычисляются по формулам:

$$A_* = \mu_* \chi \mu_\Sigma^{-1/2} (\mu_+ \mu_- \sigma)^{-1/2} r_0^{-1} \quad , \qquad A^* = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot \pi r_0^3 |\mu_*|^{-1} (\mu_+ \mu_- \sigma / \mu_\Sigma)^{1/2} \quad ,$$
$$\chi = \chi_+ + \chi_- \quad , \qquad \chi_\pm = m_\pm / e_\pm \quad , \qquad \mu_* = \chi_- \mu_+ - \chi_+ \mu_- \quad ,$$

а $m_\pm$, $e_\pm$ – массы и заряды плазменных компонент, σ – проводимость плазмы, $I_0(x)$, $I_1(x)$ – функции Бесселя мнимого аргумента индексов 0 и 1 соответственно. Наконец, G – безразмерный параметр, равный:

$$G = \frac{\rho r_0}{\chi} \left(\frac{\mu_\Sigma}{\mu_+ \mu_- \sigma}\right)^{1/2} = \frac{2\rho r_0}{\chi c} \left(\frac{\pi \mu_\Sigma \mu_m}{\mu_+ \mu_-}\right)^{1/2} \quad ,$$

где ρ – постоянная плотность плазмы в трубе, $\mu_m = c^2 (4\pi\sigma)^{-1}$ – коэффициент магнитной вязкости.

Скорость центров масс $\mathbf{U}$ является усредненной характеристикой течения. Более точную информацию дают скорости компонент плазмы $\mathbf{v}_\pm$. Профили $v_z^+(r)$, $v_z^-(r)$ тоже полностью определяются полным током J, но деформируются при изменении J принципиально различным образом. В зависимости от знака J один из профилей для всех токов выбранного знака остается колоколообразным и располагается ниже (магнито) гидродинамической параболы $v_{ГД}(r) = v_{МГД}(r)$, а другой лежит выше $v_{МГД}(r)$ и меняется с изменением J точно так же как и профиль $U_z(r)$ выше. Соответственные критические значения тока, однако, отличаются от J_1^*, J_2^*, J_3^* , они найдены в работе, равно как и выражения для $v_z^+(r)$, $v_z^-(r)$ (см.§ 5). При изменении знака тока J на противоположный профили $v_z^+(r)$, $v_z^-(r)$ в описанном сценарии меняются ролями, так что в итоге имеются два набора критических значений полного тока J. Это приводит к еще более важному выводу: *течение плазмы в трубе реагирует на изменение полярности электронов, обусловливающее направление тока.*

Существование установившегося цилиндрически симметричного течения плазмы по трубе возможно только при определенных значениях электрического и магнитного полей в вакууме, вне трубы. Пусть стенка занимает область $r_0 \le r \le r_0 + h$ (h – толщина стенки), а вакуум – область $r \ge r_0 + h$. Как показано в работе (§ 7), в вакууме поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ должны удовлетворять условиям:

$$H_r = 0 \ , \quad E_r = E_\varphi = 0 \ , \quad E_z \equiv E_z^0 \ , \quad H_z \equiv H_z^0 \ , \quad H_\varphi = C_0 / r \quad ,$$

где E_z^0, H_z^0 , C_0 –константы. Константа C_0 связана с полным током, протекающим по трубе и стенке формулой:

$$C_0 = \frac{2 J_{tot}}{c}$$

Таким образом, выбор константы C_0 равносилен выбору полного тока J_{tot}. Константы J_{tot}, H_z^0 выбираются произвольно, а E_z^0 вычисляется по формуле:

$$\mathrm{E}_z^0 = [\frac{\mathrm{J}_{tot}}{2\pi\sigma \mathrm{I}_*} - \frac{\chi}{\rho\mu_\Sigma}(\mu_+ \frac{\partial p_-}{\partial z} - \mu_- \frac{\partial p_+}{\partial z})] \cdot [1 + \frac{\sigma_0 h(h+2r_0)}{2\sigma \mathrm{I}_*}]^{-1} \quad ,$$

$$\mathrm{I}_* = r_0^2 [G\,\mathrm{I}_0(G)/2 - \mathrm{I}_1(G)] \cdot G^{-1}\,\mathrm{I}_0(G)^{-1} \quad , \qquad (3)$$

где стенка считается проводником с конечной проводимостью $\sigma_0 \geq 0$. При этом полный ток J, протекающий только по трубе и определяющий профили $\mathrm{U_z}(r)$, $\mathrm{v_z^+}(r)$, $\mathrm{v_z^-}(r)$, равен:

$$\mathrm{J} = [\mathrm{J_{tot}} + \pi\sigma_0 h(h+2r_0) \cdot \frac{\chi}{\rho\mu_\Sigma} \cdot (\mu_+ \frac{\partial p_-}{\partial z} - \mu_- \frac{\partial p_-}{\partial z})] \cdot [1 + \frac{\sigma_0 h(h+2r_0)}{2\sigma \mathrm{I}_*}]^{-1} \quad .$$

В частности, полный ток, протекающий по стенке равен $\mathrm{J}_{tot} - \mathrm{J}$. При $\sigma_0 \to 0$ стенка становится изолятором, и мы имеем $\mathrm{J}_{tot} = \mathrm{J}$, $\mathrm{E_z^0}$ не зависит от толщины стенки h. Взглянем теперь на течение плазмы по цилиндрической трубе с другой точки зрения.

Взаимодействие электронов и ионов и закон Ома. Для металлических проводников известен *закон Ома*, связывающий плотность тока $\mathbf{j}$ с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ *линейной* зависимостью:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \ ,$$

где σ – проводимость металлического проводника. Если проводник – цилиндр (проволока) круглого сечения с радиусом $r_0 > 0$ и однородное поле $\mathbf{E}$ направлено по оси цилиндра (которую примем за ось OZ), то для полного тока $\mathrm{J} = \pi r_0^2 \mathrm{j}_z$ получим:

$$\mathrm{J} = \pi r_0^2 \sigma \mathrm{E_z} \quad . \qquad (4)$$

Таким образом, равенство (4) выражает закон Ома в случае цилиндрического металлического проводника.

Заменим теперь металлический проводник на плазму: плазма течет по цилиндрической трубе круглого сечения радиуса $r_0 > 0$ под действием однородного электрического поля $\mathbf{E}$, направленного по оси цилиндра, и постоянного перепада по оси z гидродинамического давления плазмы. Как теперь связан полный ток J с электрическим полем E_z ? Для несжимаемой вязкой МГД – плазмы с проводимостью σ, как следует из формул (2), закон Ома совпадает с законом (4) для металлических проводников. Если учесть взаимодействие плазменных компонент (§1), то, как вытекает из формул (3) для случая $\sigma_0 = 0$, закон Ома принимает вид:

$$\mathrm{J} = \pi r_0^2 \sigma_* \{\mathrm{E_z} + \frac{\chi}{\rho\mu_\Sigma} \cdot (\mu_+ \frac{\partial p_-}{\partial z} - \mu_- \frac{\partial p_+}{\partial z})\} \qquad (5)$$

$$\sigma_* = \sigma[1 - \frac{2\mathrm{I_1(G)}}{\mathrm{GI_0(G)}}] \ .$$

Закон Ома (5) естественно сопоставить с законом Ома (4) для металлических проводников и МГД – плазмы в случае $\frac{\partial p_\pm}{\partial z} \equiv 0$. При $\sigma \to 0$ (плохо проводящая плазма) имеем $\mathrm{G} \to +\infty$, откуда $\sigma_* \sim \sigma$ и значит закон Ома (5) переходит в закон Ома (4). При $\sigma \to +\infty$ (хорошо проводящая плазма) имеем $\mathrm{G} \to 0$, откуда

$$\sigma_* \to \frac{\sigma \mathrm{G}^2}{8} = \frac{r_0^2 \rho}{8\chi^2} \cdot \frac{\mu_\Sigma}{\mu_+ \mu_-} = \sigma_{\text{эФФ}}$$

Итак, *наличие гидродинамической вязкости у плазменных компонент приводит к электрическому сопротивлению даже идеальной* $\sigma \to +\infty$ *плазмы*. Таким образом, при $\sigma \to +\infty$ законы Ома (4) и (5) кардинально различаются: при $\sigma = +\infty$ закон Ома (4) равносилен равенству $\mathrm{E_z} \equiv 0$, а закон Ома (5) – равенству $\mathrm{J} = \pi r_0^2 \sigma_{\text{эФФ.}} \mathrm{E_z}$. Наличие конечной эффективной проводимости $\sigma_{\text{эФФ.}}$ у бесконечно проводящей плазмы согласуется со здравым смыслом: электроны и ионы идеальной, но вязкой плазмы “цепляются” за стенки трубы и тем самым тормозят течение плазмы, не давая току J расти до бесконечности. Из закона Ома (5) вытекает еще один важный вывод: перепад гидродинамического давления по оси трубы вызывает дополнительный “гидродинамический” электрический ток в трубе $\pi r_0^2 \sigma_* \mathrm{E_{\Gamma D}}$, где добавочное “гидродинамическое” электрическое поле равно :

$$\mathrm{E_{\Gamma D}} = \frac{\chi}{\rho \mu_\Sigma} \cdot \left(\mu_+ \frac{\partial p_-}{\partial z} - \mu_- \frac{\partial p_+}{\partial z}\right).$$

Итак, электрон – ионное взаимодействие ответственно за появление в законе Ома добавочного электрического поля $\mathrm{E_{\Gamma D}}$ и нелинейный характер зависимости коэффициента пропорциональности σ_* от проводимости плазмы σ. Причем даже при $\sigma \to 0$ закон Ома (5) не переходит в закон Ома (4) для несжимаемой МГД – плазмы, поскольку остается добавка $\mathrm{E_{\Gamma D}}$.

В работе вычислены важные характеристики установившегося течения: расход плазмы (количество вещества плазмы, протекающее в единицу времени через сечение трубы) Q и силы трения электронов и ионов о стенку трубы $\mathrm{F_\pm}$. Показано, что Q линейно зависит от полного тока J:

$$\mathrm{Q} = -\frac{1}{\mu_\Sigma} \cdot \left[\frac{\pi \rho r_0^4}{8} \cdot \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} + \mu_* \mathrm{J}\right].$$

В частности, при значении полного тока

$$\mathrm{J} = -\frac{\pi \rho r_0^4}{8\mu_*} \cdot \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \quad ,$$

расход плазмы равен 0, а при $\mathrm{J} = 0$ для расхода получится то же выражение, что и в гидродинамическом случае.

Суммарная сила трения $\mathrm{F_+ + F_-} = \frac{r_0}{2} \cdot \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}$ такая же как и в гидродинамическом случае, но соотношение $\mathrm{F_+ / F_-}$ может быть любым, исключая лишь случай $\mathrm{F_+} = -\mathrm{F_-}$. Это следует из явных выражений для $\mathrm{F_\pm}$, полученных в работе:

$$\mathrm{F_\pm} = \frac{r_0}{2\mu_\Sigma} \cdot \left\{\mu_\pm \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \mp \frac{\chi \mu_+ \mu_-}{\pi \rho r_0^2 \mathrm{I_*}} \cdot \frac{G \mathrm{I_1}(G)}{\mathrm{I_0}(G)} \cdot \mathrm{J}\right\},$$

где выражение для $\mathrm{I_*}$ указано выше.

Укажем на одно из возможных практических применений полученных результатов.

Экспериментальное получение величин $\sigma,\ \mu_+,\ \mu_-$. Изложенная выше теория позволяет выдвинуть следующую идею экспериментального определения вязкостей плазменных компонент и ее электропроводности. Рассмотрим цилиндрическую трубу фиксированного круглого сечения $r_0 > 0$, заполненную плазмой с плотностью $\rho > 0$. Создадим фиксированный перепад давления $\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}$ по оси трубы. Допустим, для каждого полного тока J, проходящего через трубу, возможно экспериментально построить эпюру средних скоростей $\mathrm{U_z}(r)$ плазмы в трубе. Меняя ток J от 0 до достаточно больших значений, экспериментально зафиксируем критические токи $\mathrm{J}_1^*,\ \mathrm{J}_2^*,\ \mathrm{J}_3^*$, когда происходит перестройка профиля $\mathrm{U_z}(r)$. Тогда из формул для критических токов:

$$\frac{\mathrm{J}_3^*}{\mathrm{J}_1^*} = \frac{2\mathrm{I}_1(\mathrm{G})}{\mathrm{G}} \quad .$$

Правая часть этого равенства – монотонно возрастающая функция, а $\mathrm{J}_3^*/\mathrm{J}_1^*$ – известная величина, полученная экспериментально. Поэтому, численно решая полученное выше уравнение, находим величину G. Снова рассмотрим плазму в трубе, находящуюся в заданном электрическом поле E_z при нулевом перепаде давления. Измеряя протекающий по плазме полный ток J, простым вычислением из закона Ома (5) находим проводимость плазмы:

$$\sigma = \frac{\mathrm{J}}{\pi \mathrm{r}_0^2 \mathrm{E_z}} \cdot [1 - \frac{2\mathrm{I}_1(\mathrm{G})}{\mathrm{G}\mathrm{I}_0(\mathrm{G})}]^{-1} \quad ,$$

ибо величины r_0, G нам известны. Зная $\mathrm{J}_1^*,\ \sigma,\ \mathrm{G}$, получим для $\mu_+,\ \mu_-$:

$$\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+\mu_-} = \frac{\mathrm{G}^2\chi^2}{\rho^2 r^2}\cdot\sigma = \alpha$$

$$\left|\chi_-\mu_+ - \chi_+\mu_-\right| = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\pi r_0^3 \left(\frac{\mu_+\mu_-\sigma}{\mu_+ + \mu_-}\right)^{1/2}\cdot(\mathrm{A}^*)^{-1} = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\pi r_0^3\frac{\mathrm{G}\chi}{\rho r_0}\cdot\frac{\mathrm{I}(\mathrm{G})}{\mathrm{G}\mathrm{I}_1(\mathrm{G})}\cdot\frac{1}{\mathrm{J}_1^*} = \beta \quad .$$

Из этой системы с двумя неизвестными $\mu_+,\ \mu_-$ ($\alpha,\ \beta > 0$ – известные величины) ищутся коэффициенты вязкости:

$$\mu_+ = \{1 + \frac{\chi_-}{\chi_+} - \frac{\alpha\beta}{\chi_+} + [(1 + \frac{\chi_-}{\chi_+} - \frac{\alpha\beta}{\chi_+})^2 + \frac{4\alpha\beta\chi_-}{\chi_+^2}]^{1/2}\}(\frac{2\alpha\chi_-}{\chi_+})^{-1}$$

$$\mu_- = \frac{\beta}{\chi_+} + \frac{\chi_-}{\chi_+}\mu_+ \quad .$$

Если экспериментально легче фиксировать эпюры электронных или ионных скоростей, то аналогичный способ нахождения $\sigma,\ \mu_+,\ \mu_-$, можно указать, базируясь на критических значениях тока $\mathrm{J}_1^\pm,\ \mathrm{J}_2^\pm,\ \mathrm{J}_3^\pm$ (см. §5).

§1. Уравнения гидродинамики двухкомпонентной несжимаемой плазмы.

МГД – теория не учитывает взаимодействия электронов и ионов. В квазинейтральном потоке вязкой электропроводной несжимаемой плазмы это взаимодействие полностью учитывается системой [1]:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{U} = 0 \quad ,\\
&\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho^{-1}\operatorname{Div}\pi = \rho^{-1}\operatorname{Div}P - (4\pi c\rho)^{-1}[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H}] \quad ,\\
&\chi_+\chi_-(4\pi\rho)^{-1}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2\chi_+\chi_-(4\pi\rho)^{-1}\operatorname{rotrot}\mathbf{E} + \mathbf{E} =\\
&= \sigma^{-1}\mathbf{j} - c^{-1}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}] + \rho^{-1}\operatorname{Div}\mathrm{W} + (\chi_- - \chi_+)\cdot(4\pi c\rho)^{-1}\cdot[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H}] \quad ,\\
&c^{-1}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \quad ,\\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\rho \equiv \mathrm{const}$ – плотность плазмы,

$$\mathbf{j} = c(4\pi)^{-1}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} - (4\pi)^{-1}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}\big|_{t=0} = 0 \quad .$$

Выражения для тензоров π , P, W имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\pi = \pi^{(h)} + \pi^{(p)} + \pi^{(H)} \quad , \qquad P = \Pi_*^{(\mathrm{H})} + \Pi^{(\mathrm{U})} \quad ,\\
&W = (\chi_- - \chi_+)\cdot(\pi^{(p)} + \pi^{(\mathrm{H})}) + (\chi_- p_+ - \chi_+ p_-)\mathrm{E}_3 + \chi_-\chi_+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\mathbf{j}) - \Pi_*^{(\mathrm{U})} - \Pi^{(\mathrm{H})} \quad .
\end{aligned} \tag{7}$$

Входящие в эти выражения тензоры $\pi^{(p)}$, $\pi^{(h)}$, $\pi^{(\mathrm{H})}$ вычисляются по формулам:

$$\pi^{(h)} = \rho\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} + p_\Sigma\mathrm{E}_3 \quad , \qquad \pi^{(p)} = \frac{\mathrm{H}^2}{8\pi}\mathrm{E}_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi} \quad , \qquad \pi^{(\mathrm{H})} = \chi_+\chi_-\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\big/\rho \quad , \tag{8}$$

где $p_\pm$ давления плазменных компонент, $p_\Sigma = p_+ + p_-$ – суммарное давление, $\chi_\pm = m_\pm / e_\pm$. А тензоры $\Pi^{(\mathrm{H})}$, $\Pi^{(\mathrm{U})}$, $\Pi_*^{(\mathrm{H})}$, $\Pi_*^{(\mathrm{U})}$ выражаются через тензоры деформаций $\operatorname{def}\mathbf{U}$, $\operatorname{def}\mathbf{j}$ по формулам:

$$\Pi^{(\mathrm{U})} = 2\mu_\Sigma\operatorname{def}\mathbf{U}, \quad \Pi_*^{(\mathrm{U})} = 2\mu_*\operatorname{def}\mathbf{U}, \quad \Pi^{(\mathrm{H})} = \frac{2\mu^*}{\rho}\operatorname{def}\mathbf{j}, \quad \Pi_*^{(\mathrm{H})} = \frac{2\mu_*}{\rho}\operatorname{def}\mathbf{j} \tag{9}$$

где $\mu_\pm$ – гидродинамические вязкости компонент плазмы, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$ – суммарная вязкость и

$$\mu_* = \chi_-\mu_+ - \chi_+\mu_- \ , \quad \mu^* = \chi_-^2\mu_+ + \chi_+^2\mu_- \quad .$$

Система (6)÷(9) состоит из 11 скалярных уравнений и позволяет в принципе найти 11 скалярных неизвестных функций – компоненты полей $\mathbf{U}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и давления p_+, p_- . После этого гидродинамические скорости электронов и ионов, $\mathbf{v}_-$, $\mathbf{v}_+$, вычисляются по формулам:

$$\mathbf{v}_+ = \mathbf{U} + \frac{\chi_-}{\rho}\mathbf{j} \quad , \qquad \mathbf{v}_- = \mathbf{U} - \frac{\chi_+}{\rho}\mathbf{j} \quad . \tag{10}$$

Уравнения для температур $\mathrm{T}_\pm$ электронов и ионов см. в [1].

§2. Постановка задачи о течении плазмы в цилиндрической трубе.

Рассмотрим установившееся $(\partial/\partial t = 0)$ течение вязкой электропроводной квазинейтральной полностью ионизованной несжимаемой двухкомпонентной и гидродинамической плазмы по цилиндрической трубе радиуса $r_0 > 0$. Это течение, согласно формулам (6), подчиняется системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{U} = 0,\\
&\operatorname{Div}\pi = \operatorname{Div}P,\\
&\mathbf{E} + c^2\chi_+\chi_-(4\pi\rho)^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{j} - c^{-1}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}] + \rho^{-1}\operatorname{Div}\mathrm{W},\\
&\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0,\\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = 0,\\
&\operatorname{div}\mathbf{H} = 0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $\mathbf{j} = c(4\pi)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H},\ \ \rho = \mathrm{const}$, а выражения для тензоров $\pi,\ P,\ \mathrm{W}$ описаны в §1. Пусть ось симметрии трубы совпадает с осью OZ. Ищем решение системы (11) вида:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(r),\quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(r),\quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(r),\quad \mathrm{p}_\pm = \mathrm{p}_\pm(r,z)\,.$$

Поставленную задачу дополним краевыми условиями:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}&\mathrm{U}_\varphi(r_0) = \mathrm{U}_z(r_0) = 0,\\ &\mathrm{j}_\varphi(r_0) = \mathrm{j}_z(r_0) = 0\end{aligned}\right\} - \text{условия “прилипания”},\\
&\mathrm{H}_\varphi(r_0) = \mathrm{H}_0\,,\quad \mathrm{H}_z(r_0) = \mathrm{H}^0\ ,
\end{aligned}\right.
\tag{12}
$$

где H_0, H^0 – заданные значения. Кроме того, считаем что все функции не имеют особенностей по оси трубы $r = 0$ и

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{U}_\varphi(0) = 0,\ \ \mathrm{j}_\varphi(0) = 0,\ \ \mathrm{H}_\varphi(0) = 0\ ,\\
&\mathrm{U}_z'(0) = 0,\ \ \mathrm{j}_z'(0) = 0,\ \ \mathrm{H}_z'(0) = 0,\ \ \mathrm{p}_\pm'(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В силу условий (13) уравнения $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{U} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ равносильны равенствам $\mathrm{E}_r = 0$, $\mathrm{U}_r = 0$, $\mathrm{H}_r = 0$, $\mathrm{E}_\varphi = 0$, $\mathrm{E}_z \equiv \mathrm{E}_0 = \mathrm{const}$. Как станет ясно ниже, константы H_0, H^0 выбираются произвольно, а константа E_0 однозначно вычисляется по H_0, H^0 . Таким образом, нахождению подлежат только функции:

$$\mathrm{H}_\varphi(r),\ \mathrm{H}_z(r),\ \mathrm{U}_\varphi(r),\ \mathrm{U}_z(r),\ \mathrm{p}_+(r,z),\ \mathrm{p}_-(r,z)\ ,$$

$$0 \le r \le r_0,\ \ z \in \Re\ ,$$

где $\Re$ – совокупность всех действительных чисел.

Ниже проводимость плазмы σ и вязкости компонент $\mu_\pm$ считаются постоянными.

§3. Решение задачи об установившемся течении плазмы в цилиндрической трубе.

Несложно проверить, что φ, z – уравнения основной системы

$\mathrm{Div}\,\pi = \mathrm{Div}\,P, \quad \mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{j} - c^{-1}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}] + \rho^{-1}\,\mathrm{Div}\,W$ дают:

$$\mu_\Sigma \mathrm{L}_1(\mathrm{D})\mathrm{U}_\varphi + \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_1(\mathrm{D})\,\mathrm{j}_\varphi = 0\ ,$$

$$\mu_\Sigma \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{U}_z + \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\,\mathrm{j}_z = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\ ,$$

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_z - \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{U}_z - \rho^{-2}\mu^* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\,\mathrm{j}_z = \mathrm{E}_0^*\ , \qquad (14)$$

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_\varphi - \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_1(\mathrm{D})\mathrm{U}_\varphi - \rho^{-2}\mu^* \mathrm{L}_1(\mathrm{D})\,\mathrm{j}_\varphi = 0\ ,$$

где $\mathrm{L}_1(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^2 + \mathrm{D}/r - 1/r^2$, $\mathrm{L}_2(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^2 + \mathrm{D}/r$, $\mathrm{D} = d/dr$ – дифференциальные операторы, $\mathrm{E}_0^* = \mathrm{E}_0 + \rho^{-1}(\chi_+ \frac{\partial p_-}{\partial z} - \chi_- \frac{\partial p_+}{\partial z})$,

$$\mathrm{j}_r = 0, \qquad \mathrm{j}_\varphi = -\frac{c}{4\pi}\cdot\frac{d\,\mathrm{H}_z}{dr}, \qquad \mathrm{j}_z = \frac{c}{4\pi r}\cdot\frac{dr\,\mathrm{H}_\varphi}{dr}.$$

При этом r – уравнения основной системы дают возможность найти давления $\mathrm{p}_\pm(r,z)$. Из них следует, что

$$\mathrm{p}_\pm(r,z) = \mathrm{A}_\pm\, z + \varphi_\pm(r)\,,$$

где константы $\mathrm{A}_\pm$ должны задаваться, а функции $\varphi_\pm(r)$ ищутся (см. ниже). В частности $\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} = \mathrm{A}_+ + \mathrm{A}_- = \mathrm{const}$. С учетом этого система (14) позволяет найти функции U_φ, j_φ, U_z, j_z. Очевидно, система (14) распадается на две подсистемы, из одной находятся U_φ, j_φ , а из другой – U_z, j_z. Ниже, в §4, будет показано, что $\mathrm{U}_\varphi = 0$, $\mathrm{j}_\varphi = 0$. А для нахождения $\mathrm{U}_z(r)$, $\mathrm{j}_z(r)$ имеем систему:

$$\mu_\Sigma \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{U}_z + \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\,\mathrm{j}_z = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\ ,$$

$$\sigma^{-1}\,\mathrm{j}_z - \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{U}_z - \rho^{-2}\mu^* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\,\mathrm{j}_z = \mathrm{E}_0^*\ . \qquad (15)$$

Проще всего ее решить так. Если $\mathrm{u} = \mu_\Sigma \mathrm{U}_z + \rho^{-1}\mu_*\,\mathrm{j}_z$, то из первого уравнения системы (15) следует $\mathrm{L}_2(\mathrm{D})(\mathrm{u}) = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}$. Общее решение этого линейного неоднородного уравнения легко находится:

$$\mathrm{u}(r) = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\frac{r^2}{4} + \mathrm{C}_1 \ln r + \mathrm{C}_2\,, \qquad \mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}_2 \in \Re\ .$$

Поэтому

$$\mu_\Sigma \mathrm{U}_z(r) + \rho^{-1}\mu_* j_z(r) = \mathrm{u}(r) = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\frac{r^2}{4} + \mathrm{C}_1 \ln r + \mathrm{C}_2\,.$$

Выражая отсюда U_z через j_z и подставляя полученное выражение во второе уравнение системы (15), получим следующее дифференциальное уравнение относительно j_z :

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{D})j_z - a^2 j_z = -\sigma a^2(\mathrm{E}_0^* + \frac{\mu_*}{\rho\mu_\Sigma}\cdot\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}),$$

где $a^2 = \mu_\Sigma \rho^2(\mu_+\mu_-\chi^2\sigma)^{-1}$. Делая в последнем уравнении замену независимой переменной $s = ar$, получаем для нахождения $j_z(s)$ неоднородное модифицированное уравнение Бесселя 0-го индекса:

$$\frac{d^2 j_z}{ds^2} + \frac{1}{s}\cdot\frac{dj_z}{ds} - j_z = -\mathrm{R} \qquad (16),$$

где константа R связана с константой E_0^* условием:

$$\mathrm{R} = \sigma(\mathrm{E}_0^* + \frac{\mu_*}{\rho\mu_\Sigma}\cdot\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}).$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид:

$$j_z(s) = \alpha_1 \mathrm{I}_0(s) + \alpha_2 \mathrm{K}_0(s) + \mathrm{R}, \qquad \alpha_1,\ \alpha_2 \in \Re,$$

где $\mathrm{I}_0(s)$, $\mathrm{K}_0(s)$ – функция Бесселя мнимого аргумента 0-го индекса ($\mathrm{K}_0(s)$ – функция Макдональда) [2], откуда:

$$j_z(r) = \alpha_1 \mathrm{I}_0(ar) + \alpha_2 \mathrm{K}_0(ar) + \mathrm{R}.$$

Граничные условия (12), (13) дают $j_z'(0) = 0$, $j_z(r_0) = 0$, поэтому $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -\mathrm{R}/\mathrm{I}_0(ar)$. Отсюда:

$$j_z(r) = \mathrm{R}[1 - \frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}], \qquad 0 \le r \le r_0.$$

Выясним физический смысл константы R. Полный ток через трубу равен:

$$\mathrm{J} = \int_0^{r_0} 2\pi r j_z(r)dr = 2\pi\,\mathrm{R}\mathrm{I}_*,$$

где

$$\mathrm{I}_* = \int_0^{r_0} \{1 - \frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}]rdr > 0.$$

Отсюда $\mathrm{R} = \mathrm{J}(2\pi \mathrm{I}_*)^{-1}$ и окончательно имеем:

$$j_z(r) = \frac{\mathrm{J}}{2\pi\,\mathrm{I}_*}[1 - \frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}], \qquad 0 \le r \le r_0.$$

Теперь находим $\mathrm{U}_z(r)$:

$$\mathrm{U}_z(r) = \mu_\Sigma^{-1}[\mathrm{C}_1 \ln r + \mathrm{C}_2 + \frac{r^2}{4}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}] - \frac{\mu_*}{\rho\mu_\Sigma} j_z(r).$$

Из граничных условий (12), (13) получим $\mathrm{U}_z'(0) = 0$, $\mathrm{U}_z(r_0) = 0$, откуда $\mathrm{C}_1 = 0$, $\mathrm{C}_2 = -(r_0^2/4)\cdot\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}$, поэтому окончательно имеем:

$$\mathrm{U}_z(r) = (4\mu_\Sigma)^{-1}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}(r^2 - r_0^2) - \frac{\mu_*}{\rho\mu_\Sigma} j_z(r), \qquad 0 \le r \le r_0.$$

Теперь из соотношений (10) находим $v_z^\pm(r)$. Итоговые формулы для $z-$ компонент скоростей и плотности тока таковы:

$$j_z(r)=\frac{\mathrm{J}}{2\pi \mathrm{I}_*}[1-\frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}]$$

$$v_z^+(r)=(4\mu_\Sigma)^{-1}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}(r^2-r_0^2)+\frac{\chi\mu_-}{\rho\mu_\Sigma}j_z(r)$$

$$v_z^-(r)=(4\mu_\Sigma)^{-1}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}(r^2-r_0^2)-\frac{\chi\mu_+}{\rho\mu_\Sigma}j_z(r) \qquad (17)$$

$$a^2=\frac{\mu_\Sigma\rho^2}{\mu_+\mu_-\sigma\chi^2}\ , \qquad \mathrm{I}_*=\int_0^{r_0}[1-\frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}]rdr\ ,$$

$$0\le r\le r_0\ ,$$

где r_0 – радиус трубы, J – полный ток через трубу. Константа J связана с константой E_0 формулой:

$$\mathrm{J}=2\pi\sigma \mathrm{I}_*(\mathrm{E}_0^*+\frac{\mu_*}{\rho\mu_\Sigma}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z})=2\pi\sigma \mathrm{I}_*[\mathrm{E}_0+\frac{\chi}{\rho\mu_\Sigma}(\mu_+\frac{\partial p_-}{\partial z}-\mu_-\frac{\partial p_+}{\partial z})] \qquad (18)$$

Обсудим эти формулы позже (см. §5), а сейчас найдем остальные параметры течения. Как отмечалось, $j_\varphi=0$, $\mathrm{U}_\varphi=0$. Но из $j_\varphi=0$ следует $\mathrm{H}_z(r)\equiv\mathrm{const}=\mathrm{H}^0$ – заданное значение H_z на стенке трубы $r=r_0$. Для $\mathrm{H}_\varphi(r)$ имеем:

$$\mathrm{H}_\varphi(r)=\frac{4\pi}{cr}\int_0^r j_z(r)rdr=\frac{2\mathrm{J}}{cr\mathrm{I}_*}\int_0^r[1-\frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}]rdr=\frac{\mathrm{J}}{c\mathrm{I}_*}[r-\frac{2\mathrm{I}_1(ar)}{a\mathrm{I}_0(ar_0)}]\ , \qquad 0\le r\le r_0\,,$$

где $\mathrm{I}_1(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента индекса 1 и при интегрировании использовано известное [2] тождество $(x\mathrm{I}_1(x))'=x\mathrm{I}_0(x)$. Аналогично устанавливается формула для I_* (см.§5):

$$\mathrm{I}_*=\frac{r_0^2}{2}-\frac{r_0\mathrm{I}_1(ar_0)}{a\mathrm{I}_0(ar_0)}\ . \qquad (19)$$

Кроме того, $\mathrm{E_z}(r)\equiv\mathrm{E}_0$, где E_0 выражается через J по формуле (18). В свою очередь константа J связана очевидным образом с граничным условием H_0 для $\mathrm{H}_\varphi(r)$ на стенке $r=r_0$:

$$\mathrm{J}=\int_0^{r_0}2\pi rj_z(r)dr=\frac{c}{2}\int_0^{r_0}(\frac{dr\mathrm{H}_\varphi}{dr})dr=\frac{cr_0\mathrm{H}_\varphi(r_0)}{2}=\frac{cr_0\mathrm{H}_0}{2}\ .$$

Наконец, функции $\varphi_\pm(r)$, определяющие давление констант, ищутся из уравнений:

$$(\mathrm{Div}\,\pi)_r=(\mathrm{Div}\,P)_r$$

$$\mathrm{E_r}=\sigma^{-1}j_r-c^{-1}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}]_r+\rho^{-1}(\mathrm{Div}\,W)_r\ .$$

Они дают систему линейных уравнений относительно φ_+', φ_-' :

$$\varphi_+'+\varphi_-'=-\frac{d}{dr}(\frac{\mathrm{H}_\varphi^2}{8\pi})-\frac{\mathrm{H}_\varphi^2}{4\pi r}$$

$$\chi_-\varphi_+'-\chi_+\varphi_-'=-c^{-1}\rho\mathrm{U_z}(r)\mathrm{H}_\varphi(r)+(\chi_+-\chi_-)[\frac{d}{dr}(\frac{\mathrm{H}_\varphi^2}{8\pi})+\frac{\mathrm{H}_\varphi^2}{4\pi r}]\,.$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_{\pm}' = \mp\frac{\rho}{c\chi}\mathrm{U_z H_\varphi} - \frac{\chi_{\mp}}{\chi}[\frac{d}{dr}(\frac{\mathrm{H}_\varphi^2}{8\pi}) + \frac{\mathrm{H}_\varphi^2}{4\pi r}] \ .$$

Поэтому функции $\varphi_{\pm}(r)$, а значит и давления $p_{\pm}(r,z)$ определяются однозначно с точностью до константы.

Итак, задача об установившемся течении плазмы в трубе полностью решена.

§ 4. Выводы соотношения $\mathbf{j}_\varphi = 0$, $\mathbf{U}_\varphi = 0$.

Из системы (14) для j_φ, U_φ имеем следующие уравнения:

$$\mu_\Sigma \mathrm{L_1(D)U_\varphi} + \frac{\mu_*}{\rho}\mathrm{L_1(D)}j_\varphi = 0$$

$$\sigma^{-1}j_\varphi - \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L_1(D)U_\varphi} - \rho^{-2}\mu^* \mathrm{L_1(D)}j_\varphi = 0 \tag{20}$$

Покажем, что эта система имеет только нулевое решение, удовлетворяющее поставленным выше граничными условиями (12), (13). Функция

$$\mathrm{V}(r) = \mu_\Sigma \mathrm{U}_\varphi(r) + \frac{\mu_*}{\rho}j_\varphi(r)$$

удовлетворяет уравнению $\mathrm{L_1(D)V} = 0$ с граничными условиями $\mathrm{V}(r_0) = 0$, $\mathrm{V}(0) = 0$. Но

$$\mathrm{L_1(D)V} = \frac{d^2\mathrm{V}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dr} - \frac{\mathrm{V}}{r^2} = 0$$

есть уравнение Эйлера. Заменой независимой переменной $\tau = \ln r$ оно приводится к виду:

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{d\tau^2} - \mathrm{V} = 0 \ .$$

Откуда:

$$\mathrm{V}(r) = \mathrm{C}_1 e^{\tau} + \mathrm{C}_2 e^{-\tau}, \qquad \mathrm{V}(r) = \mathrm{C}_1 r + \frac{\mathrm{C}_2}{r}, \qquad \mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}_2 \in \Re \ .$$

Из граничных условий следует $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 = 0$ и значит $\mathrm{V}(r) \equiv 0$. Поэтому $\mathrm{U}_\varphi = -(\mu_\Sigma\rho)^{-1}\mu_* j_\varphi$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы (20), получим:

$$\frac{d^2 j_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dj_\varphi}{dr} - \frac{j_\varphi}{r^2} - a^2 j_\varphi = 0 \ , \qquad j_\varphi(0) = j_\varphi(r_0) = 0 \ .$$

Последнее уравнение заменой $s = ar$ сводится к модифицированному уравнению Бесселя индекса 1:

$$\frac{d^2 j_\varphi}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dj_\varphi}{ds} - (1 + \frac{1}{s^2})j_\varphi = 0 \ , \qquad j_\varphi(0) = j_\varphi(ar_0) = 0 \ .$$

Откуда $j_\varphi(s) = \alpha_1 \mathrm{I}_1(s) + \alpha_2 \mathrm{K}_2(s)$, где $\mathrm{I}_1(s)$, $\mathrm{K}_1(s)$ – функции Бесселя мнимого аргумента индекса 1. Из граничных условий немедленно следует $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Значит $j_\varphi(s)\equiv 0$, откуда $j_\varphi(r)\equiv 0$ и значит $\mathrm{U}_\varphi(r)\equiv 0$, что и требовалось установить.

§ 5. Анализ картины течения электронов и ионов в трубе.

Если ток в трубе отсутствует ($\mathrm{J}=0$), то профили электронной и ионной скоростей совпадают между собой и с параболическим профилем $v_{\text{МГD}}(r)=(4\mu_\Sigma)^{-1}(\partial p_\Sigma/\partial z)(r^2-r_0^2)$. При появлении тока профили $v_z^+(r),\ v_z^-(r)$ деформируются, причем неодинаково. Пусть $\mathrm{J}>0$. Тогда профиль электронной скорости $v_z^-(r)$, оставаясь колоколообразным, лежит ниже параболического профиля $v_{\text{МГD}}(r)$. С ростом он все более вытягивается и заостряется. Профиль же ионной скорости $v_z^+(r)$ лежит выше параболы $v_{\text{МГD}}(r)$ и поначалу с ростом J затупляется, оставаясь колоколообразным при этом. Сплющивание профиля $v_z^+(r)$ приводит в конце концов к новому явлению: для достаточно большого тока $(\mathrm{J}>\mathrm{J}_1)$ появляется пристеночная область, в которой ионы двигаются в противоположную по отношению к электронам сторону, а профиль ионной скорости теряет колоколообразную форму. Эта область постепенно расширяется, и в итоге (при $\mathrm{J}>\mathrm{J}_2$) захватывает всю трубу. С этого момента электроны и ионы по всей трубе двигаются в разные стороны. Наконец, для еще больших токов ($\mathrm{J}\ge \mathrm{J}_3$) профиль ионной скорости опять становится колоколообразным, однако колоколы профилей электронной и ионной скоростей обращены теперь в разные стороны. Критические токи $0<\mathrm{J}_1<\mathrm{J}_2<\mathrm{J}_3$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{J}_1=\mathrm{A}[G\mathrm{I}_0(G)-2\mathrm{I}_1(G)]/[2G\mathrm{I}_1(G)]\ ,\\
&\mathrm{J}_2=\mathrm{A}[G\mathrm{I}_0(G)-2\mathrm{I}_1(G)]/[4(\mathrm{I}_0(G)-1)]\ ,\\
&\mathrm{J}_3=\mathrm{A}[G\mathrm{I}_0(G)-2\mathrm{I}_1(G)]/G^2\ ,
\end{aligned}\tag{21}$$

где

$$\mathrm{A}=\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\pi r_0^3\cdot\left(\frac{\sigma\mu_+}{\mu_\Sigma\mu_-}\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{G}=ar_0=\frac{\rho r_0}{\chi}\cdot\left(\frac{\mu_\Sigma}{\mu_+\mu_-\sigma}\right)^{1/2}=\frac{2\rho r_0}{\chi c}\cdot\left(\frac{\pi\mu_\Sigma\mu_m}{\mu_+\mu_-}\right)^{1/2}\ .$$

Вторая величина это, очевидно, безразмерный параметр.

<u>*Обоснование формул (21).*</u> Описанный выше сценарий целиком основан на формулах (17). Если $\mathrm{J}>0,$ то из (17) следует, что при $0<r<r_0$ справедливы неравенства $dv_z^-/dr>0,\ \ v_z^-<0$ и значит электронная скорость имеет колоколообразный профиль, лежащий ниже параболы $v_{\text{МГD}}(r)$. Вершина колокола профиля лежит в точке

$$v_z^-(0)=-(4\mu_\Sigma)^{-1}\cdot\left\{\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}r_0^2+\frac{2\chi\mu_+\mathrm{J}}{\pi\rho\mathrm{I}_*}\cdot[1-\mathrm{I}_0(ar_0)^{-1}]\right\}\ ,$$

которая с ростом J стремится к $-\infty$.

Поведение ионной скорости $v_z^+(r)$ зависит от величины тока J. Из (17), учитывая равенство $\mathrm{I}_0^{/}(x)=\mathrm{I}_1(x)$, $x\in\mathfrak{R}$, получим:

$$\frac{dv_z^+}{dr}=\frac{r}{2\mu_\Sigma}\cdot\frac{\partial p_z}{\partial z}-\frac{a\chi\mu_-}{2\pi\rho\mu_\Sigma \mathrm{I}_*}\cdot\frac{\mathrm{I}_1(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}\cdot \mathrm{J}\,,\quad 0\le r\le r_0 \tag{22}$$

Будет ли производная (22) обращаться в 0 на отрезке $[0,\ r_0]$?

Напомним [2], функция $\mathrm{I}_1(x)$ монотонно возрастает и выпукла вниз на $[0,\ +\infty)$, $\mathrm{I}_1(0)=0$, $\mathrm{I}_1(x)\sim x/2$, $x\to 0$. Но из выпуклости вниз $\mathrm{I}_1(x)$ следует, что график $\mathrm{I}_1(x)$, $x>0$ лежит выше прямой $y=kx$ при $k\le 1/2$. При $k>1/2$ прямая $y=kx$ пересекает график $\mathrm{I}_1(x)$, $x>0$ ровно в одной точке $x=x(k)$, причем при $0<x<x(k)$ график $\mathrm{I}_1(x)$ лежит ниже прямой $y=kx$, а при $x(k)<x$ – выше. Из этого анализа и формулы (22) теперь вытекает неравенство $dv_z^+/dr<0$ для всех $0<r<r_0$ при

$$(2\mu_\Sigma)^{-1}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}<\frac{a^2\chi\mu_-}{4\pi\rho\mu_\Sigma \mathrm{I}_*}\cdot\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}_0(ar_0)} \tag{23}$$

и неравенство $dv_z^+/dr>0$ для всех $0<r<r_0$ при

$$(2\mu_\Sigma)^{-1}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot r_0>\frac{a\chi\mu_-}{2\pi\rho\mu_\Sigma \mathrm{I}_*}\cdot\frac{\mathrm{J}\mathrm{I}_1(ar_0)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}\quad . \tag{24}$$

Случай, когда неравенства (23) и (24) обращаются в равенства, дают значения двух критических токов J_3 и J_1 соответственно. При $\mathrm{J}<\mathrm{J}_1$ и $\mathrm{J}_3<\mathrm{J}$ профиль $v_z^+(r)$ колоколообразный, но в первом случае колокол профиля повернут вниз ($v_z^+(r)<0$ для всех $0\le r<r_0$), а во втором случае – вверх ($v_z^+(r)>0$ для всех $0\le r<r_0$).

При $\mathrm{J}_1<\mathrm{J}<\mathrm{J}_3$ производная dz_z^+/dr имеет ровно один нуль на интервале $(0,\ r_0)$ в некоторой точке $r_*=r_*(\mathrm{J})$. Поскольку $v_z^+(r_0)=0$, то $v_z^+(r_*)>0$. Поэтому пока

$$v_z^+(0)<0 \tag{25}$$

функция $v_z^+(r)$ имеет ровно один нуль на интервале $(0,\ \mathrm{r}_0)$ в некоторой точке $r^*=r^*(\mathrm{J})$, причем $r^*\in\ (0,\ r_*)$. Случай, когда неравенство (25) обращается в точное равенство, дает еще одно критическое значение тока J_2, а неравенство (25) равносильно неравенствам $\mathrm{J}_1<\mathrm{J}<\mathrm{J}_2$. Для таких J в пристеночной области $r^*<r<r_0$ имеем $v_z^+(r)>0$ и значит электроны и ионы в этой области двигаются в разные стороны; при $0<r<r^*$ наоборот $v_z^+(r)<0$ и значит здесь электроны и ионы двигаются в одну сторону. Дальнейший анализ очевиден.

Вычислим значение I_*. Снова воспользуемся известным равенством $(x\mathrm{I}_1(x))'=x\mathrm{I}_0(x)$. Тогда:

$$\mathrm{I}_*=\int_0^{r_0}[1-\frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}]rdr=\frac{1}{a^2}\int_0^{ar_0}[1-\frac{\mathrm{I}_0(s)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}]sds=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{ar_0}sds-\frac{1}{a^2\,\mathrm{I}_0(ar_0)}\cdot\int_0^{ar_0}(s\,\mathrm{I}_1(s))'ds=\frac{r_0}{a}[\frac{ar_0}{2}\mathrm{I}_0(ar_0)-\mathrm{I}_1(ar_0)]/\mathrm{I}_0(ar_0)\,.$$

В частности для комбинации $\mathrm{I}_*\mathrm{I}_0(ar_0)$ получаем выражение :

$$\mathrm{I}_*\mathrm{I}_0(ar_0) = \frac{r_0^2}{\mathrm{G}}[\frac{\mathrm{G}}{2}\mathrm{I}_0(\mathrm{G}) - \mathrm{I}_1(\mathrm{G})] \ ,$$

где G – безразмерный параметр из формул (21). Поэтому критические значения тока полностью выражаются через бесселевы функции $\mathrm{I}_0(x)$, $\mathrm{I}_1(x)$, и мы приходим к выражениям (21).

Соотношения критических токов и полярность электродов. Легко вычисляются отношения критических значений полного тока, зависящие только от параметра G. Из формул (21) выводим:

$$\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_1} = \frac{2\mathrm{I}_1(\mathrm{G})}{\mathrm{G}} \ , \qquad \frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_2} = \frac{4(\mathrm{I}_0(\mathrm{G})-1)}{\mathrm{G}^2} \ , \qquad \frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}_1} = \frac{\mathrm{G}\mathrm{I}_1(\mathrm{G})}{2(\mathrm{I}_0(\mathrm{G})-1)} \ .$$

При $\mathrm{G} \ll 1$ все эти отношения близки к 1 и значит токи J_1, J_2, J_3 близки друг к другу и к общему критическому значению тока $\mathrm{AG}/8$, поскольку $\mathrm{J}_1(\mathrm{G}) \sim \mathrm{J}_2(\mathrm{G}) \sim \mathrm{J}_3(\mathrm{G}) \sim \mathrm{AG}/8$ при $\mathrm{G} \to 0$. В этом случае при увеличении полного тока J мы практически сразу попадаем в ситуацию, когда электроны и ионы по всей трубе двигаются в разные стороны.

При $\mathrm{G} \gg 1$ из известной [2] асимптотики $\mathrm{I}_0(x) \sim \mathrm{I}_1(x) \sim (2\pi x)^{-1/2} \exp x$, $x \to +\infty$ следуют соотношения при $\mathrm{G} \to +\infty$:

$$\frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_1} \sim \frac{2\exp\mathrm{G}}{(2\pi)^{1/2}\mathrm{G}^{3/2}}, \qquad \frac{\mathrm{J}_3}{\mathrm{J}_2} \sim \frac{4\exp\mathrm{G}}{(2\pi)^{1/2}\mathrm{G}^{5/2}}, \qquad \frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}_1} \sim \frac{\mathrm{G}}{2}, \qquad \mathrm{J}_1 \to \mathrm{A}/2 \ ,$$

Где A – параметр из формул (21). Поэтому в этом случае $\mathrm{J}_3/\mathrm{J}_1 \gg 1$, $\mathrm{J}_3/\mathrm{J}_2 \gg 1$, $\mathrm{J}_2/\mathrm{J}_1 \gg 1$, а

$$\mathrm{J}_1 \cong \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot \frac{\pi r_0^3}{2} \cdot (\frac{\sigma}{\mu_\Sigma})^{1/2} \cdot (\frac{\mu_+}{\mu_-})^{1/2} \ , \qquad \mathrm{G} \gg 1 \ .$$

При изменении направления тока J (т.е. $\mathrm{J} < 0$) профили $v_z^+(r)$, $v_z^-(r)$ меняются ролями. Теперь $v_z^+(r) < 0$ для всех $0 \le r < r_0$ и профиль ионного тока колоколообразный и всегда лежит ниже параболы $\mathrm{v}_{\text{МГД}}(r)$. Профиль же $v_z^-(r)$ с ростом $|\mathrm{J}|$ претерпевает изменения, описанные выше. Абсолютные величины критических значений тока J получаются из формул (21) заменой $\mu_- \leftrightarrow \mu_+$. В частности,

$$\mathrm{J}_\mathrm{k}^+ / \left|\mathrm{J}_\mathrm{k}^-\right| = \frac{\mu_+}{\mu_-}, \qquad \mathrm{k} = 1,\ 2,\ 3 \ ,$$

где верхний индекс “+” отвечает случаю $\mathrm{J} > 0$ (выше J_k^+ обозначались просто J_k), а верхний индекс “–“ – случаю $\mathrm{J} < 0$. В частности, для электрон – ионной плазмы $\mu_+/\mu_- \gg 1$ (ибо $\mu_+/\mu_- \sim (m_+/m_-)^{1/2}$, см. [3]) и значит $\mathrm{J}_\mathrm{k}^+ \gg \left|\mathrm{J}_\mathrm{k}^-\right|$, $k = 1,\ 2,\ 3$. Отсюда вытекает важный вывод: *изменение полярности электронов приводит к изменению картины течения плазмы*. Допустим, например, $\left|\mathrm{J}_3^-\right| < \mathrm{J}_1^+$. Это неравенство равносильно такому:

$$\frac{2\mathrm{I}_1(\mathrm{G})}{\mathrm{G}} < \frac{\mu_+}{\mu_-} \ ,$$

которое выполнено для всех $0 < \mathrm{G} < \mathrm{G}_*$, где G_* – единственный положительный корень уравнения $2\mathrm{I}_1(\mathrm{G})/\mathrm{G} = \mu_+ / \mu_-$. Если теперь $\left|\mathrm{J}_3^-\right| < |\mathrm{J}| < \mathrm{J}_1^+$, то при изменении направления тока J (т.е. изменении полярности электродов) картина распределения ионного и электронного токов по сечению трубы совершенно меняется: профили электронного и ионного токов колоколообразные, но при $\mathrm{J} > 0$ они направлены в одну сторону, а при $\mathrm{J} < 0$ – в разные. Разумеется, в зависимости от взаимного расположения величин J_k^+, $k = 1,\ 2,\ 3$ и $\left|\mathrm{J}_s^-\right|$, $\mathrm{s} = 1,\ 2,\ 3$ число возможных ситуаций значительно возрастает.

§ 6. Некоторые физические характеристики течения плазмы в трубе.

Вычислим расход плазмы (т.е. количество вещества плазмы, проходящее в единицу времени через сечение трубы) и силы трения электронов и ионов о стенку трубы.

1). *Расход плазмы* Q, очевидно равен:

$$Q = \rho_+ \int_0^{r_0} 2\pi r v_z^+(r)dr + \rho_- \int_0^{r_0} 2\pi r v_z^-(r)dr = \rho \int_0^{r_0} 2\pi r\, \mathrm{U}_z(r)dr =$$

$$= 2\pi\rho\left[(4\mu_\Sigma)^{-1} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \int_0^{r_0} (r^2 - r_0^2) r dr - \frac{\mu_*}{\rho\mu_\Sigma} \cdot \frac{J}{2\pi I_*} \int_0^{r_0} \left[1 - \frac{I_0(ar)}{I_0(ar_0)} \right] r dr \right] =$$

$$= 2\pi\rho\left[(4\mu_\Sigma)^{-1} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot \left(\frac{r_0^4}{4} - \frac{r_0^4}{2} \right) - \frac{\mu_*}{\rho\mu_\Sigma} \cdot \frac{J}{2\pi} \right] = -\mu_\Sigma^{-1} \left[\frac{\pi\rho r_0^4}{8} \cdot \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} + \mu_* J \right],$$

где была использована формула для $U_z(r)$ из §3 и определение величины I_*.
Итак, расход плазмы Q линейно зависит от полного тока J .При $J = 0$ для Q получается известное из гидродинамики выражение. При значении полного тока

$$J = J_* = -\frac{\pi\rho r_0^4}{8\mu_*} \cdot \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}$$

расход плазмы равен 0, т.е. масса электронов, проходящих в единицу времени через сечение трубы в одну сторону уравновешивается массой ионов, протекающих в единицу времени через сечение трубы в другую сторону. Заметим, что $J_* > J_2$.

2). *Силы трения* электронов и ионов о стенку трубы равны:

$$\mathbf{F}_\pm = \Pi_\pm \mathbf{e}_r\big|_{r=r_0}$$

где $\Pi_\pm = 2\mu_\pm def\ \mathbf{v}_\pm$, $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор, имеющий в цилиндрических координатах компоненты (1,0,0). Из выражений (10) следует, что

$$\mathrm{F}_r^\pm = \mathrm{F}_\varphi^\pm = 0 \quad \text{и}$$

$$\mathrm{F}_z^\pm = \mu_\pm \left.\frac{dv_z^\pm}{dr}\right|_{r=r_0} = \frac{\partial p_z}{\partial z} \cdot \frac{\mu_\pm r_0}{2\mu_\Sigma} \mp \frac{a\chi\mu_+\mu_-}{2\pi\rho\mu_\Sigma \mathrm{I}_*} \cdot \frac{\mathrm{J}\,\mathrm{I}_1(ar_0)}{\mathrm{I}_0(ar_0)} \quad .$$

Отсюда получается выражение для силы трения всей плазмы о стенку трубы:

$$\mathrm{F}_z = \mathrm{F}_z^+ + \mathrm{F}_z^- = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot \frac{r_0}{2} \quad ,$$

совпадающее с известным выражением для силы трения в газодинамике. Соотношение для трения $\mathrm{F}_z^+ / \mathrm{F}_z^-$ может быть любым в зависимости от величины полного тока J: исключается лишь случай $\mathrm{F}_z^+ = -\mathrm{F}_z^-$. Например при $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1^+$ имеем $\mathrm{F}_z^+ = 0$, и о стенку трутся только электроны, а при $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1^-$ наоборот $\mathrm{F}_z^- = 0$, и о стенку трутся только ионы. При

$$J = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot \frac{(\mu_+ - \mu_-)\pi\rho\, r_0^4}{2\chi\mu_+\mu_-} \cdot \frac{[\mathrm{G}\,\mathrm{I}_0(\mathrm{G}) - 2\mathrm{I}_1(\mathrm{G})]}{2\mathrm{G}^2\,\mathrm{I}_1(\mathrm{G})}$$

силы трения электронов и ионов равны: $\mathrm{F}_z^+ = \mathrm{F}_z^- = \dfrac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot r_0 / 4$.

§ 7. Профиль средней скорости $\mathrm{U}_z(r)$.

Анализ профиля $\mathrm{U}_z(r)$ вполне аналогичен рассмотрению профилей $v_z^+(r),\ v_z^-(r)$. Имеем, согласно (17):

$$\mathrm{U}_z(r) = (4\mu_\Sigma)^{-1} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}(r^2 - r_0^2) - \frac{\mu_*\,\mathrm{J}}{2\pi\rho\mu_\Sigma\,\mathrm{I}_*} \cdot [1 - \frac{\mathrm{I}_0(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}],$$

где $\mu_* = \chi_-\mu_+ - \chi_+\mu_-$. Для электрон – ионной плазмы $\mu_+/\mu_- \sim (m_+/m_-)^{1/2}$ и $\mu_* < 0$. Для электрон – позитронной плазмы возможны и значения $\mu_* = 0, \quad \mu_* > 0$. Для определенности будем полагать $\mu_* < 0$. Из выражения для производной

$$\frac{d\,\mathrm{U}_z}{dr} = (2\mu_\Sigma)^{-1} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \cdot r + \frac{a\mu_*\,\mathrm{J}}{2\pi\rho\mu_\Sigma\,\mathrm{I}_*} \cdot \frac{\mathrm{I}_1(ar)}{\mathrm{I}_0(ar_0)}$$

дословно повторяя рассуждения § 5 при анализе профиля $v_z^+(r)$, заключаем, что есть три критических значения тока $0 < \mathrm{J}_1^* < \mathrm{J}_2^* < \mathrm{J}_3^*$, определяющих различные типы профилей $\mathrm{U}_z(r)$. Явные выражения для критических токов и анализ типов профилей $\mathrm{U}_z(r)$ приведен во *Введении*.

§ 8. Заключительные замечания.

1. *Граничные условия.* Существование установившегося цилиндрически симметричного течения плазмы по трубе возможно только при определенных значениях электрического и магнитного полей в вакууме, вне трубы. Пусть стенка занимает область $r_0 \le r \le r_0 + h$ ($h > 0$ – толщина стенки), а вакуум – область $r \ge r_0 + h$. Тогда проведенное в § 3 исследование надо дополнить решением уравнений электродинамики в стенке и вакууме и затем “склеить” полученные решения между собой и с найденными полями в плазме ($0 \le r \le r_0$) на граничных цилиндрических поверхностях $r = r_0$ и $r = r_0 + h$ по непрерывности. При этом предполагается, что стенка незаряженная и отсутствуют поверхностные токи и заряды. Кроме того, надо ввести в рассмотрение векторы **D** и **B** – электрической и магнитной индукции, для

которых в плазме и вакууме постулируются соотношения $\mathbf{D}=\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mathbf{H}$, а в стенке – $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$, где $\varepsilon_0>0$, $\mu_0>0$ – заданные константы (электрическая и магнитная проницаемости материала стенки). Стационарные уравнения Максвелла в вакууме имеют вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0\ ,$$

а в проводящей стенке с конечной проводимостью $\sigma_0\ge 0$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}(\varepsilon_0\mathbf{E})=0,\quad \operatorname{div}(\mu_0\mathbf{H})=0,\quad \sigma_0\mathbf{E}=\mathbf{j}\ .$$

На поверхностях $r=r_0$, $r=r_0+h$ раздела двух сред (плазма – стенка, стенка – вакуум) условия “склейки” имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_{2\varphi}=\mathrm{H}_{1\varphi},\quad \mathrm{H}_{2z}=\mathrm{H}_{1z},\quad \mathrm{B}_{2r}=\mathrm{B}_{1r}\\ &\mathrm{E}_{2\varphi}=\mathrm{E}_{1\varphi},\quad \mathrm{E}_{2z}=\mathrm{E}_{1z},\quad \mathrm{D}_{2r}=\mathrm{D}_{1r}\ ,\end{aligned}\qquad (*)$$

где индексы 1 и 2 относятся к значениям полей D, B, E, H на поверхностях раздела $r=r_0$, $r=r_0+h$, получаемых предельным переходом соответственно изнутри (индекс 1) и извне поверхностей. Решая указанные уравнения в вакууме и стенке (в предположении цилиндрической симметрии всех функций) и склеивая решения по формулам (*), приходим к результатам, сформулированным во Введении.

2. *Течение между двумя соосными цилиндрами,* Пусть плазма занимает пространство между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов $0<r_0<r_1$, равномерно вращающихся против часовой стрелки вокруг общей оси (которую примем за ось OZ) с угловыми скоростями ω_0, ω_1. соответственно. Рассмотрим установившееся $(\partial/\partial t=0)$ течение плазмы, считая что все параметры течения, кроме давлений, зависят только от r, а $p_\pm=p_\pm(r,z)$. Такое течение является решением системы (11) вида:

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}(r),\quad \mathbf{E}=\mathbf{E}(r),\quad \mathbf{U}=\mathbf{U}(r),\quad p_\pm=p_\pm(r,z),$$
$$r_0\le r\le r_1\ ,\qquad -\infty<z<+\infty\ .$$

На границах отрезка $[r_0,\ r_1]$ для скоростей $\mathbf{v}_\pm$ ставятся граничные условия “непротекания” и ”прилипания” , которые для $\mathbf{U}$, $\mathbf{j}$ дают:

$$\mathrm{U}_\varphi(r_i)=\omega_i r_i,\quad \mathrm{U}_r(r_i)=\mathrm{U}_z(r_i)=0,\quad \mathbf{j}(r_i)=0,\quad i=0,\,1.$$

Тогда из (11) следует $\mathrm{U}_r\equiv 0$ и в физически интересном случае $\mathrm{H}_r\equiv 0$ для нахождения j_φ, U_φ получим краевую задачу:

$$\begin{cases}\mu_\Sigma\,\mathrm{L}_1(\mathrm{D})\mathrm{U}_\varphi+\rho^{-1}\mu_*\,\mathrm{L}_1(\mathrm{D})j_\varphi=0\\ \rho^{-1}\mu_*\,\mathrm{L}_1(\mathrm{D})\mathrm{U}_\varphi+\rho^{-2}\mu^*\,\mathrm{L}_1(\mathrm{D})j_\varphi-\sigma^{-1}j_\varphi=-D_0/r\end{cases}$$
$$j_\varphi(r_0)=j_\varphi(r_1)=0,\quad \mathrm{U}_\varphi(r_0)=\omega_0 r_0,\quad \mathrm{U}_\varphi(r_1)=\omega_1 r_1,\qquad (\mathrm{I})$$

а для нахождения j_z, U_z имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \mu_\Sigma \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{U}_z + \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{j}_z = \dfrac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \\ \rho^{-1}\mu_* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{U}_z + \rho^{-2}\mu^* \mathrm{L}_2(\mathrm{D})\mathrm{j}_z - \sigma^{-1} j_z = -\mathrm{E}^* \end{cases}$$

$$j_z(r_0) = j_z(r_1) = 0\,, \quad \mathrm{U}_z(r_0) = \mathrm{U}_z(r_1) = 0. \tag{II}$$

Здесь

$$\mathrm{E}_\varphi = D_0 / r\,, \quad D_0 \equiv \mathrm{const}\,, \quad \mathrm{E}^* = (\mathrm{E}_z + \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial z}(\chi_+ p_- - \varphi_- p_+))\,, \quad \mathrm{E}_z \equiv \mathrm{const}\,.$$

Решение краевых задач (I) и (II) ищется по схеме §3. В результате приходим к следующим явным выражениям:

$$\mathrm{j}_\varphi(r) = \mathrm{D}_0\,\sigma\left\{\frac{1}{r} - \frac{\mathrm{I}_1(ar)[r_0^{-1}\mathrm{K}_1(ar_1) - r_1^{-1}\mathrm{K}_1(ar_0)] + \mathrm{K}_1(ar)[r_1^{-1}\mathrm{I}_1(ar_0) - r_0^{-1}\mathrm{I}_1(ar_1)]}{r_0^{-1} \qquad \mathrm{I}_1(ar_0)\mathrm{K}_1(ar_1) - \mathrm{I}_1(ar_1)\mathrm{K}_1(ar_0)}\right\}\,,$$

$$\mathrm{U}_\varphi(r) = -\mu_\Sigma^{-1}\rho^{-1}\mu_*\,\mathrm{j}_\varphi(r) + r\cdot\frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{r_0^2 r_1^2(\omega_0 - \omega_1)}{r_1^2 - r_0^2}\,,$$

$$\mathrm{j}_z(r) = R\left\{1 - \frac{\mathrm{I}_0(ar)[\mathrm{K}_0(ar_1) - \mathrm{K}_0(ar_0)] + \mathrm{K}_0(ar)[\mathrm{I}_0(ar_0) - \mathrm{I}_0(ar_1)]}{\mathrm{I}_0(ar_0)\mathrm{K}_0(ar_1) - \mathrm{I}_0(ar_1)\mathrm{K}_0(ar_0)} - \right\}\,,$$

$$\mathrm{U}_z(r) = -\mu_\Sigma^{-1}\rho^{-1}\mu_*\,\mathrm{j}_z(r) + (4\mu_\Sigma \ln\frac{r_1}{r_0})^{-1}\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\{r^2\ln\frac{r_1}{r_0} - [r_0^2\ln\frac{r_1}{r} + r_1^2\ln\frac{r}{r_0}]\}\,,$$

где как и в §3:

$$a = \frac{\rho}{\chi}\left(\frac{\mu_\Sigma}{\mu_+\mu_-\sigma}\right)^{1/2}\,, \qquad \mathrm{R} = \sigma[\mathrm{E}_z + \frac{\chi}{\mu_\Sigma\rho}(\mu_+\frac{\partial p_-}{\partial z} - \mu_-\frac{\partial p_+}{\partial z})]\,.$$

Кроме того, $\mathrm{I}_0(x)$, $\mathrm{I}_1(x)$ – функции Бесселя мнимого аргумента индексов 0 и 1 соответственно, $\mathrm{K}_0(x)$, $\mathrm{K}_1(x)$ – функции Макдональда индексов 0 и 1. Отсюда для скоростей плазменных компонент получим:

$$\mathrm{v}_\varphi^\pm(r) = \pm\frac{\chi\mu_\mp}{\mu_\Sigma\rho}\mathrm{j}_\varphi(r) + r\cdot\frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{r_0^2 r_1^2(\omega_0 - \omega_1)}{r_1^2 - r_0^2}\,,$$

$$\mathrm{v}_z^\pm(r) = \pm\frac{\chi\mu_\mp}{\mu_\Sigma\rho}\mathrm{j}_z(r) + (4\mu_\Sigma\ln\frac{r_1}{r_0})^{-1}\cdot\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\left\{r^2\ln\frac{r_1}{r_0} - [r_0^2\ln\frac{r_1}{r} + r_1^2\ln\frac{r}{r_0}]\right\}\,.$$

Если азимутальное электрическое поле отсутствует, $D_0 = 0$, то азимутальные движения электронов и ионов совпадают с известным из гидродинамики *течением Куэтта.*

Исходя из полученных формул нетрудно вычислить силу сопротивления вращению цилиндра, рассмотреть случай малого зазора между цилиндрами (теория плазменной смазки). Интересен случай, когда внутренний цилиндр – материальное тело (проводящее или диэлектрик), а также случай, когда внешний цилиндр имеет бесконечный радиус (задача о движении снаряда в ионосфере; при этом несложно учесть в полученных выше формулах допущение о движении внутреннего и внешнего цилиндров с постоянными скоростями вдоль оси $0Z$, а именно, если внутренний цилиндр двигается с постоянной вертикальной скоростью U_0, а внешний – U_1, то в формулах для

$U_z(r)$, $v_z^{\pm}(r)$ появится добавка $(\mu_\Sigma \ln\frac{r_1}{r_0})^{-1}[U_1\ln\frac{r}{r_0} + U_0\ln\frac{r_1}{r}]$, все остальные формулы остаются без изменения). Что касается давлений, то как и в §3 они имеют вид $p_\pm(r,z) = \varphi_\pm(r) + A_\pm z$, где константы $A_\pm$ задаются, а функции $\varphi_\pm(r)$ ищутся по той же схеме, что и выше. Наконец, представляет значительный интерес анализ зависимости эпюр скоростей $U_z(r)$, $U_\varphi(r)$, $v_z^{\pm}(r)$, $v_\varphi^{\pm}(r)$ от параметров течения.

3. *Некоторые предельные переходы.* Рассмотрим два предельных перехода.

А) *Гидродинамический предел*, J→0. Тогда согласно формулам (17), равномерно на $[0,\, r_0]$ имеют место сходимости

$$U_z(r),\;\; v_z^{+}(r),\;\; v_z^{-}(r) \Rightarrow v_{\text{МГD}}(r) = v_{\text{ГD}}(r), \quad j_z(r) \Rightarrow 0,\;\; H_\varphi(r) \Rightarrow 0\;.$$

И мы приходим к установившемуся течению вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в постоянном и однородном продольном электрическом и магнитном поле, не взаимодействующим с веществом.

Б) *МГД – предел, $\rho \to +\infty$*. Тогда $G \to +\infty$ и значит $I_0(G) \sim I_1(G) \sim (2\pi G)^{-1/2} \exp G$. Поэтому из формул (17) следует $I_* \to r_0^2/2$. Поскольку при $G \to +\infty$, $0 \le r < r_0$ имеет место эквивалентность $I_0(Gr/r_0)/I_0(G) \sim (r/r_0)^{-1/2} \exp[G(r/r_0 - 1)]$, то из формул (17) вытекает $j_z(r) \to J/(\pi r_0^2)$ при $0 \le r < r_0$ и $j_z(r_0) \equiv 0$. Итак, при $G \to +\infty$ $j_z(r)$ поточечно сходится к разрывной функции. Из выражения для $H_\varphi(r)$ следует, что при $G \to +\infty$ функция $H_\varphi(r)$ на $[0,\, r_0]$ поточечно сходится к $\frac{2J}{c r_0^2} r$.

Наконец, очевидно, $v_z^{\pm}(r)$, $U_z(r) \Rightarrow v_{\text{МГD}}(r)$ равномерно на $[0,\, r_0]$. Итак, предельные значения всех параметров течения при $G \to +\infty$ – это в точности МГД – решение задачи об установившемся течении вязкой несжимаемой МГД – плазмы в трубе (см. Введение).

4. *Упрощенные формулы.* Как уже говорилось, при $G \ll 1$ три критические значения тока J примерно совпадают между собой. В этом случае из (17) вытекают следующие упрощенные формулы для профилей скорости:

$$U_z(r) = (4\mu_\Sigma)^{-1}(r^2 - r_0^2)\left[\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} + \frac{8J}{\pi}\cdot\frac{\mu_*}{\rho r_0^4}\right] \quad ,$$

$$v_z^{\pm}(r) = (4\mu_\Sigma)^{-1}(r^2 - r_0^2)\left[\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \mp \frac{8J}{\pi}\cdot\frac{\chi\mu_\mp}{\rho r_0^4}\right] \quad .$$

В частности, при $G \ll 1$ существуют единственные критические значения полного тока J, при прохождении через которые происходит перестройка профилей скоростей v_z^{+}, v_z^{-}, U_z :

$$J^{+}_{\text{кр.}} = \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\frac{\pi\rho r_0^4}{8\chi\mu_-}, \qquad J^{-}_{\text{кр.}} = -\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\frac{\pi\rho r_0^4}{8\chi\mu_+}, \qquad J_{\text{кр.}} = -\frac{\partial p_\Sigma}{\partial z}\cdot\frac{\pi\rho r_0^4}{8\mu_*}\;.$$

§ 9. Благодарности.

Авторы выражают благодарность К.В.Брушлинскому, А.Н.Козлову, В.В.Савельеву, В.С.Рябенькому за участие в обсуждении различных вопросов, относящихся к двухкомпонентной плазмодинамике.

Авторы также признательны Российскому Фонду Фундаментальных Исследований за финансовую поддержку этой работы.

Литература.

[1] М.Б.Гавриков, М.С.Михайлова "Установившееся течение двухкомпонентной квазинейтральной плазмы в плоском канале". Препринт ИПМ N 54 2003г..
[2] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их применения. М. ГИТТЛ, 1953г. с.148.
[3] Брагинский С.И. В сб. "Вопросы теории плазмы" . Под ред. М.А.Леонтовича. Вып.1 М.: Госатомиздат, 1963, с.183.
[4] Тамм И.Е. Основы теории электричества, М. "Наука" , 1966г.