

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
им. М. В. Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А. Е. Луцкий, А. С. Черногузов

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ
НА ПАРАМЕТРЫ СВЕРХЗВУКОВОГО
ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА

Москва, 2003

УДК.519.6

А.Е. Луцкий, А.С. Черногузов

Email: lutsky@kiam.ru, alexch@kiam.ru

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА

Ключевые слова: разностная схема, нестационарное уравнение газовой динамики, криволинейная сетка, явная схема, обобщенная схема Годунова, вязкость.

(Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований - код проекта 00-01-00907 и 03-01-00249)

АННОТАЦИЯ

Представлен алгоритм расчета ламинарного обтекания тел сложной формы. Используются многоблочные сетки. Решение полной системы уравнений Навье-Стокса получается методом установления по времени. Аппроксимация членов без вязкости осуществляется с помощью обобщенной разностной схемы С.К. Годунова повышенного порядка аппроксимации. Члены с вязкостью аппроксимируются центральными разностями. Представлены результаты расчетов сверхзвукового обтекания профиля при различных углах атаки. Показано влияние вязкости на структуру течения.

A.E. Lutsky, A.S. Chernoguzov

THE INFLUENCE OF VISCOSITY TO THE PARAMETERS OF SUPERSONIC FLOW OVER THE WING SECTION

ABSTRACT

The algorithm for numerical simulation of laminar flows over complex shaped bodies is presented. Block structured grids are used. The time-stepping procedure is used to find steady-state solution of the full Navier-Stokes equations. To achieve higher accuracy of Godunov scheme the piecewise linear distributions of flow variables for the inviscid terms are used, the central differences for approximation of viscous terms are used. The numerical results for the supersonic flow over the wing section under several angles of incidence values is presented. The influence of viscosity value for these results is shown.

Оглавление

Введение	3
Алгоритм численного интегрирования двумерных нестационарных полных уравнений Навье-Стокса	4
Результаты расчетов	6
Заключение	8
Литература	19

Введение

Хорошо известно, что при расчете обтекания летательных аппаратов и элементов их конструкций возникают особенности, связанные с вязкостью среды, приводящей в ряде случаев к существенной перестройке решения (см., например, [1]). Эффекты вязкости играют особенно большую роль вблизи поверхности тела (пограничный слой) и на подветренной стороне тела, где может образоваться отрывное течение. Целью данной работы является изучение влияния вязкости на примере 2D сверхзвукового обтекания профиля крыла. Используется алгоритм расчета двумерных нестационарных течений в рамках полных ламинарных уравнений Навье-Стокса. Аппроксимация членов без вязкости осуществляется с помощью обобщенной разностной схемы С.К. Годунова [2] с кусочно-линейным представлением газодинамических функций, члены с вязкостью аппроксимируются центральными разностями.

С целью исследования точности используемого алгоритма и отработки технологии решения задач обтекания современных летательных аппаратов сложной формы были выполнены расчеты обтекания клина в канале с неподвижными верхней и нижней стенками.

Представлены зависимости аэродинамических характеристик профиля от угла атаки, распределение газодинамических величин на поверхности

профиля и в области течения. Показано влияние вязкости путем сравнения расчетов, полученных интегрированием уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

Алгоритм численного интегрирования двумерных нестационарных полных уравнений Навье-Стокса

Алгоритм для расчета обтекания тел сложной формы основан на математической модели нестационарных полных уравнений Навье-Стокса для вязкого газа. Стационарное решение (если таковое существует) получается методом установления по времени.

Для расчета 2D течений вязкого газа используются многоблочные сетки. В каждом блоке вводится своя система криволинейных координат [3]:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq kt, 0 \leq \eta \leq lt; \Delta\xi = \Delta\eta = 1$$

Ламинарные нестационарные 2D уравнения Навье-Стокса записываются в этих координатах в виде [4, стр.132-133]:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + \vec{f}_\xi + \vec{g}_\eta &= 0 & f &= f^i + f^v, & g &= g^i + g^v \\ u &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} & f^i &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U^\xi \\ \rho u U^\xi + p \xi_x \\ \rho v U^\xi + p \xi_y \\ (e + p)U^\xi \end{pmatrix} & g^i &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U^\eta \\ \rho u U^\eta + p \eta_x \\ \rho v U^\eta + p \eta_y \\ (e + p)U^\eta \end{pmatrix} \\ f^v &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ (u \tau_{xx} + v \tau_{xy}) \xi_x + (u \tau_{xy} + v \tau_{yy}) \xi_y - q_\xi \end{pmatrix} \\ g^v &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \\ (u \tau_{xx} + v \tau_{xy}) \eta_x + (u \tau_{xy} + v \tau_{yy}) \eta_y - q_\eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Здесь с индексом i представлены потоки с невязкими членами, с индексом v - потоки с вязкими членами. В плоскости (ξ, η) в каждом блоке записывается явная разностная схема:

$$\frac{u_{kl}^{n+1} - u_{kl}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{f}_{k+\frac{1}{2}} - \vec{f}_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + \frac{\vec{g}_{l+\frac{1}{2}} - \vec{g}_{l-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} = 0$$

$$k = 1, \dots, (kt - 1), \quad l = 1, \dots, (lt - 1)$$

Использование явной схемы упрощает распараллеливание алгоритма и расчет границ между блоками.

При построении разностной схемы на каждом шаге по времени рассматривается пространственная ячейка, у которой 4 вершины расположены в гиперплоскости $t = t_0$ и 4 вершины лежат в гиперплоскости $t = t_1 = t_0 + dt$. Такая ячейка ограничена шестью двумерными гранями. Две грани (далее их будем называть верхним и нижним основанием) расположены в гиперплоскости $t = const$. У остальных четырех граней (их будем называть боковыми) две вершины лежат в одной гиперплоскости ($t = t_0$) и две - в другой ($t = t_1$).

Газодинамические величины на нижнем основании ($t = t_0$) известны. Величины на верхнем основании подлежат определению. Чтобы найти их необходимо определить газодинамические функции на боковых гранях ячейки. Для этого при расчете членов без вязкости производится расчет распада разрыва между двумя потоками, разделенными рассматриваемой гранью, а члены с вязкостью находим через центральные разности. При таком подходе порядок аппроксимации разностной схемы определяется способом восполнения поля газодинамических величин по известным значениям в центрах ячеек сетки.

Члены без вязкости (т.е. часть, отвечающая уравнениям Эйлера) аппроксимируются с помощью обобщенной схемы С.К.Годунова с кусочно-линейным представлением функций. Это позволяет рассчитывать течения с большими градиентами газодинамических величин.

Рассмотрим, например, расчет невязкого потока на боковой грани $k + \frac{1}{2}$. Требуется найти величины R, U, V, P - плотность, компоненты скорости, давление, по которым будет определен поток через это ребро: $\vec{f}_{k+\frac{1}{2}}^i$. Сначала вычисляются приращения газодинамических величин в ячейках, прилегающих к границе. Для обеспечения квазимонотонности разностной схемы используется ограничитель типа *minmod*:

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{sign}(a) \neq \text{sign}(b) \\ \min(|a|, |b|) \cdot s, & \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = s \end{cases}$$

$$\Delta^k \vec{u}_{k,l} = \vec{u}_{k+1,l} - \vec{u}_{k,l} \quad D\vec{u}_k = \text{minmod}(\Delta^\xi \vec{u}_k, \Delta^\xi \vec{u}_{k-1})$$

$$\vec{u}_{k+\frac{1}{2}}^- = \vec{u}_{k,l} + \frac{1}{2} D\vec{u}_k \quad \vec{u}_{k+\frac{1}{2}}^+ = \vec{u}_{k+1,l} - \frac{1}{2} D\vec{u}_{k+1}$$

$$u_t^\pm = u_{k+\frac{1}{2}}^\pm t_x + v_{k+\frac{1}{2}}^\pm t_y \quad u_n^\pm = u_{k+\frac{1}{2}}^\pm n_x + v_{k+\frac{1}{2}}^\pm n_y,$$

Здесь $u = (\rho, u, v, p)^T$. Далее решается задача Римана с начальными данными: $(\rho^\pm, u_n^\pm, p^\pm)$, т.е. на этом этапе учитываются только нормальные

составляющие скорости. В результате получаются величины: R, U_n, P . Касательные составляющие скорости на границе ячейки определяются затем следующим образом:

$$U_t = \begin{cases} u_t^-, \omega_0 \geq 0 \\ u_t^+, \omega_0 \leq 0 \end{cases}$$

Здесь ω_0 - угловой коэффициент контактного разрыва. Аналогично находятся R, U, V, P на левой $(k - \frac{1}{2})$, верхней $(l + \frac{1}{2})$ и нижней $(l - \frac{1}{2})$ гранях ячейки.

Члены с вязкостью аппроксимируются центральными разностями. Например, производные по ξ, η аппроксимируются на правой грани $f_{k+\frac{1}{2}}^v$ следующим образом:

$$(\varphi_\xi)_{k+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_{k+1,l} - \varphi_{k,l}}{\Delta\xi} \quad (\varphi_\eta)_{k+\frac{1}{2}} = \frac{(\varphi_{k+1,l+1} + \varphi_{k,l+1}) - (\varphi_{k+1,l-1} + \varphi_{k,l-1})}{4\Delta\eta}$$

где φ - члены, входящие в выражение для вязкого потока. Аналогично находится значения на левой, верхней и нижней гранях ячейки.

Результаты расчетов

С целью оценки точности алгоритма и адекватности математической модели были проведены расчеты сверхзвукового обтекания при $M=2.1$ канала, в котором на нижней стенке расположен клин с углом наклона 10° (рис. 1а). В таблице 1 представлено сравнение результатов расчета течения Эйлера с точным решением, для сравнения взяты газодинамические величины из двух точек (рис. 1а,1б): точка А - начало клина, точка В - конец клина.

Основной целью работы было исследование сверхзвукового обтекания профиля, заданного формулой $y = \pm 2\bar{c} \cdot \bar{x} \cdot (1 - \bar{x}) \cdot b_0$, где $\bar{c} = \frac{c}{b_0} = 0.03$, c -максимальная толщина профиля, $b_0 = 0.526\text{м}$ - длина профиля. Расчеты выполнены для числа Маха $M=3$ и числа Рейнольдса $Re = 0.8 \cdot 10^6$ под углами атаки $0, 14$ и 20 градусов, как без учета вязких членов (в рамках уравнений Эйлера), так и с их учетом (уравнения Навье-Стокса).

Для расчета область течения разбивалась на 6 блоков. На поверхности профиля ставилось условие прилипания и постоянной температуры 275К в случае вязкого течения, и условие непротекания в случае невязкого течения. На входной границе задавался невозмущенный поток. На выходной границе газодинамические величины экстраполировались с нулевым порядком. В качестве начальных данных во всей области задавался невозмущенный поток. Область с профилем и фрагмент сетки на задней части профиля изображены на рис.2а,2б.

В результате расчета получены значения газодинамических величин в множестве точек, расположенных между поверхностью профиля и внешней границей счетной области. На рис.3а,3б,3в представлен график горизонтальной компоненты скорости за задней кромкой профиля по вертикали, на котором показаны различия в случаях применения на поверхности условия прилипания для вязкого течения и условие непротекания для невязкого течения: в случае вязкого течения у поверхности тела скорость резко понижается, а в случае невязкого течения скорость у поверхности тела практически не меняется. На рис.4а,4б,4в,4г,4д изображена зависимость $Cp(x)$ на профиле для вариантов $\alpha = 0^\circ, 14^\circ, 20^\circ$ с учетом и без учета вязких членов. Поверхность профиля задавалась двадцатью отрезками, поэтому можно заметить ступеньки на всех графиках $Cp(x)$ для случая течения Эйлера. В расчете вязкого течения эти ступеньки сглаживаются.

Для варианта $\alpha = 0^\circ$ параметры потока над профилем совпадают с параметрами потока под профилем. При увеличении угла атаки на верхней стороне носика профиля заметно повышение давления. При расчете уравнений Навье-Стокса поток должен тормозиться на носовой части профиля, это наглядно показано на рис.5. На задней части профиля при $\alpha = 14^\circ$ и 20° видно повышение давления на верхней стороне и понижение давления на нижней стороне профиля в случае вязкого течения по сравнению с невязким течением. Эта особенность связана с наличием вихревой зоны на задней части профиля с верхней стороны.

На нижней части профиля горизонтальная компонента скорости не меняет знак (рис.3в), на верхней части профиля она меняет знак около задней кромки профиля (рис.6б,6в), что говорит о наличии вихревой зоны в этой области. Параметры возникающих вихрей представлены в табл.2. На рис.7а,7б,7в,7г подробно показаны вихревые зоны для случаев $\alpha = 14^\circ$ и 20° для вязкого и невязкого течений. При $\alpha = 14^\circ$ есть один вихрь (рис.7а) и послевихревая зона, в которой горизонтальная компонента скорости меняет знак (см. рис.3а). При $\alpha = 20^\circ$ можно увидеть два прилегающих друг к другу разнонаправленных вихря (рис.7в). В случае невязкого течения при $\alpha = 14^\circ$ и $\alpha = 20^\circ$ вихри отсутствуют (рис.7б,7г). В табл.2 и на рис.7а,7в показано, что при увеличении угла атаки вихревая зона смещается ближе к носовой части профиля. При $\alpha = 0^\circ$ вихревая зона отсутствует, горизонтальная компонента скорости не меняет знака, что показано на рис.3в.

В таблице 3 приведены интегральные характеристики расчетов: значения подъемной силы и силы сопротивления, действующие на профиль для разных углов атаки. Коэффициенты получены в системе координат, связанной с вектором скорости входного потока.

Для оценки точности определения силы сопротивления был проведен

расчет обтекания плоской пластины таким же потоком, как для профиля с $\alpha = 0^\circ$. Значение полученной силы сопротивления сравнивалось с аналитическим значением по формуле [6]:

$$F = 2 \int_0^L \tau_w dx = 1.328 \sqrt{\mu \rho L U_\infty^3}$$

$$\text{где } \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.332 \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}}.$$

Различие составило 4 процента.

Для $\alpha = 0^\circ$ значение C_y должно быть равно 0, а отклонение от нуля следует интерпретировать как погрешность расчета. В таблице 4 эти коэффициенты разделены на полученные от сил давления и от сил вязкости. Можно заметить, что в случае $\alpha = 0^\circ$ давление дает меньший вклад, а для $\alpha = 14^\circ$ и $\alpha = 20^\circ$ дает больший вклад в силу сопротивления, чем вязкие члены. В таблице 3 показано, что влияние вязкости в случае $\alpha = 0^\circ$ на порядок увеличивает силу сопротивления, действующую на профиль, при $\alpha = 14^\circ$ незначительно увеличивает силу сопротивления. Следует заметить, что при $\alpha = 20^\circ$ влияние вязкости уменьшает силу сопротивления.

Таким образом, влияние вязкости на аэродинамические коэффициенты проявляется двумя способами. Во-первых, вязкость приводит к существенной перестройке решения. Поэтому меняется сила, обусловленная действием давления по нормали к профилю. Во-вторых, появляется касательная составляющая силы, обусловленная действием вязких членов.

Заключение

Полученные результаты демонстрируют работоспособность и точность (на примере обтекания клина в канале) представленного алгоритма. Показано влияние сил вязкости на примере расчета обтекания профиля.

Ряд вопросов требует дальнейших исследований математических моделей и доработки алгоритмов. В полученных расчетах не было зафиксировано возникновения зоны турбулентного потока, вследствие этого не рассматривался вопрос об использовании моделей турбулентной вязкости вблизи поверхности тела. Самостоятельной задачей является дальнейшее усовершенствование алгоритмов построения сеток для расчетов обтекания тел сложной формы, а также адаптация алгоритма для проведения расчета на многопроцессорных вычислительных машинах.

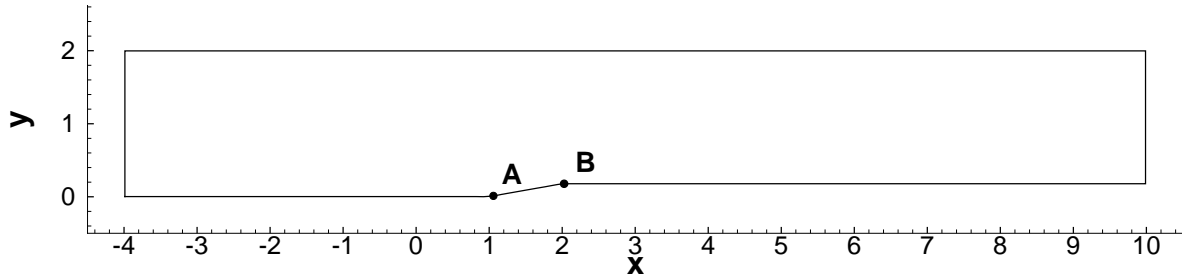


Рис. 1а Область с клином

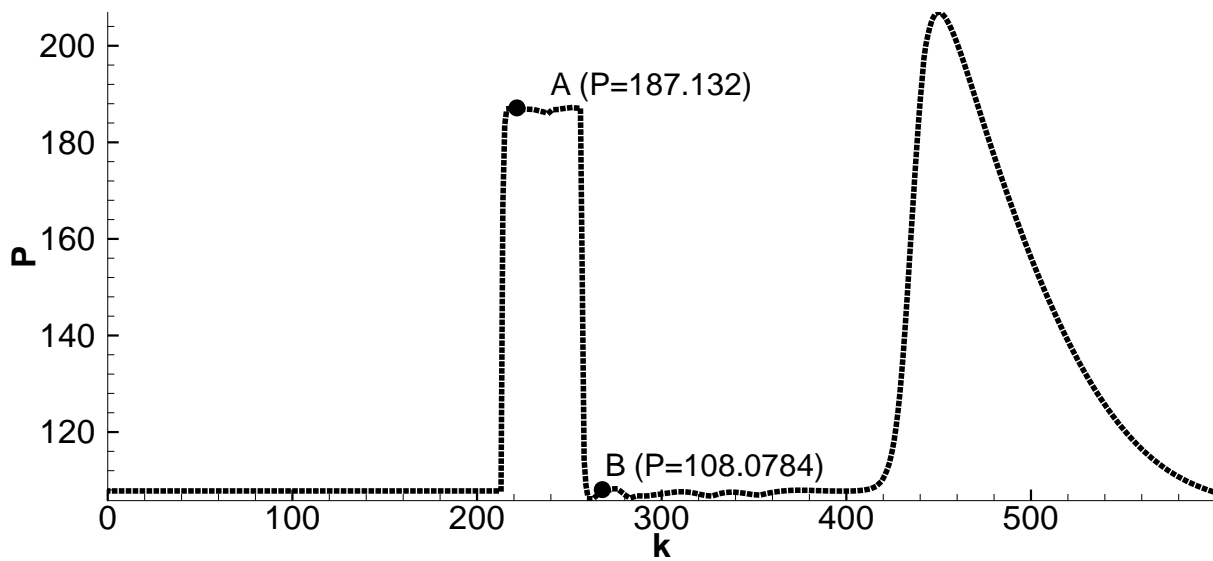
Рис. 1б $P(k)$ на нижней стороне канала А-начало клина, В-конец клина k - номер ячейки

Таблица 1. Сравнение газодинамических величин в двух точках в задаче об обтекании клина: расчет и точное решение

	ρ	u	v	P
Расчет, на клине	0.00197643	604.309	106.567	186.576
Точное решение, на клине	2.01552E-03	617.0250	108.7981	187.1320
Расчет, за клином	0.00130543	680.016	0.0777872	106.972
Точное решение, за клином	1.36174E-03	697.7833	2.07956E-05	108.0784

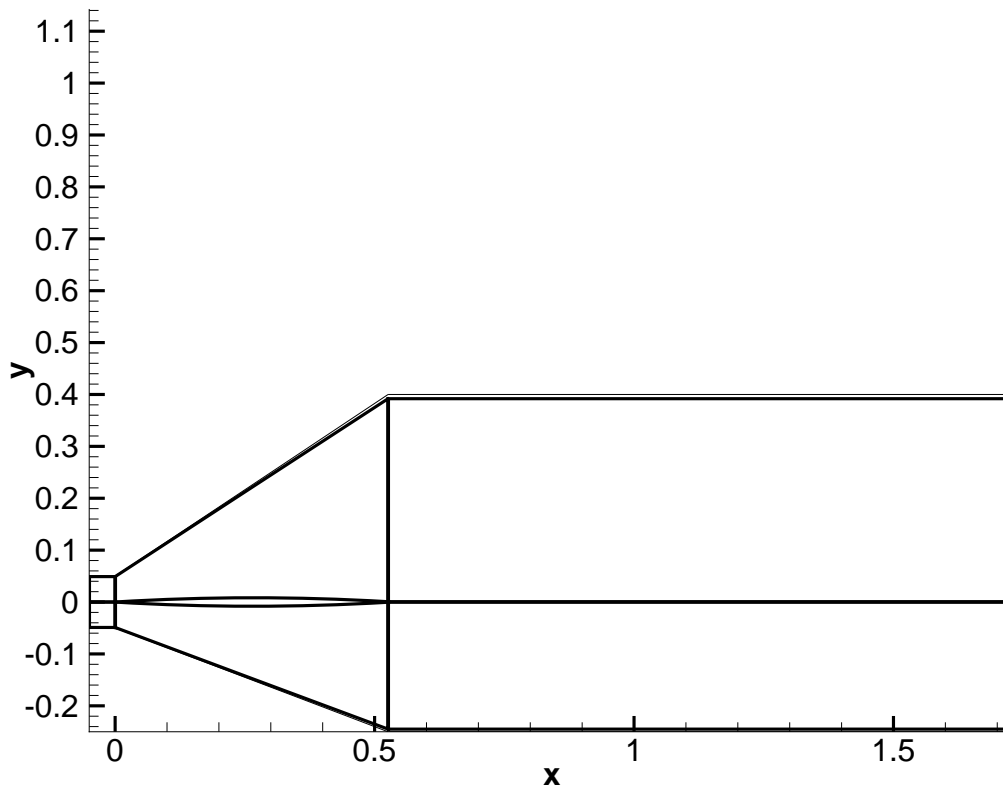


Рис. 2а Область с профилем

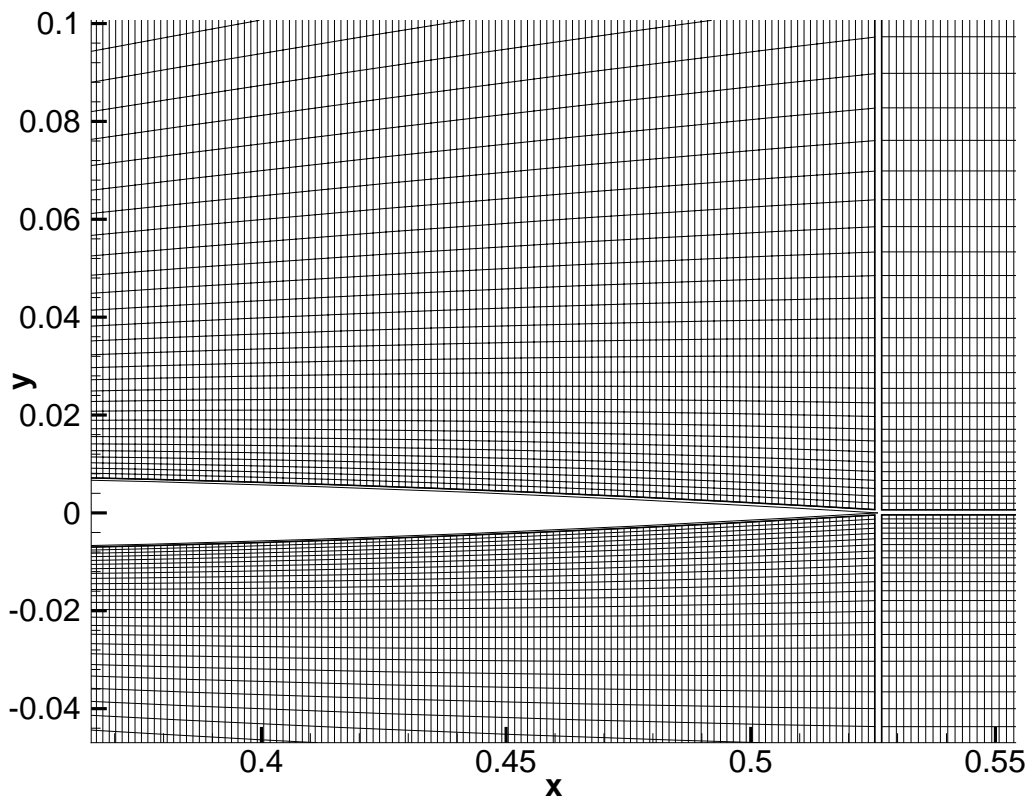


Рис. 2б Сетка на задней части профиля

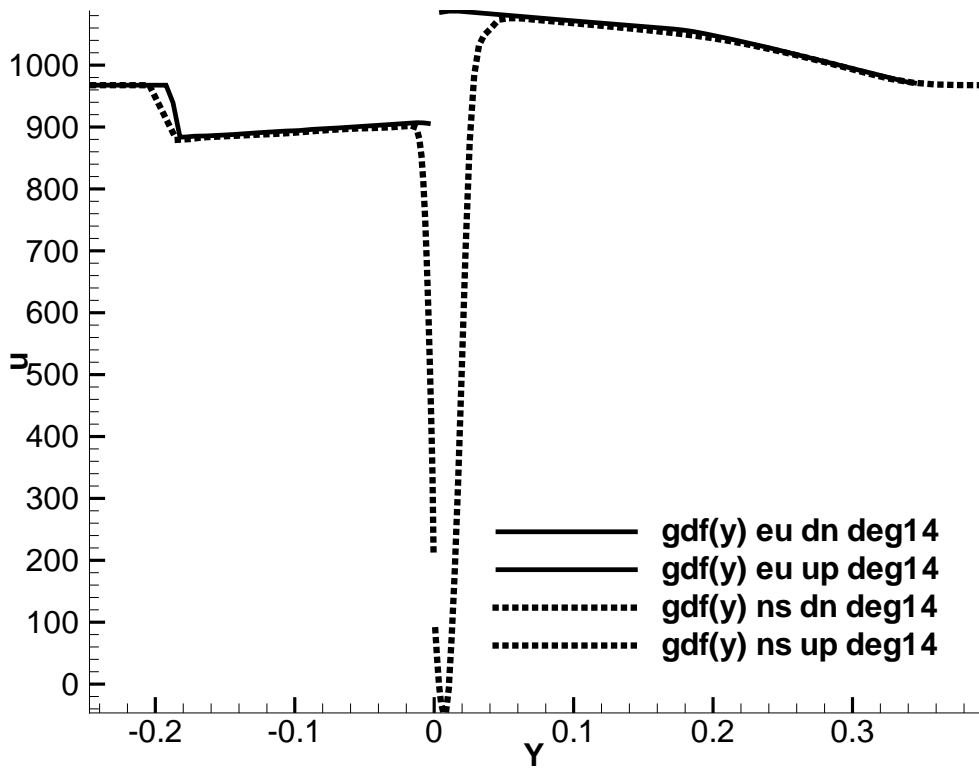


Рис. 3а Зависимость $u(y)$ на задней части профиля $a = 14^\circ$

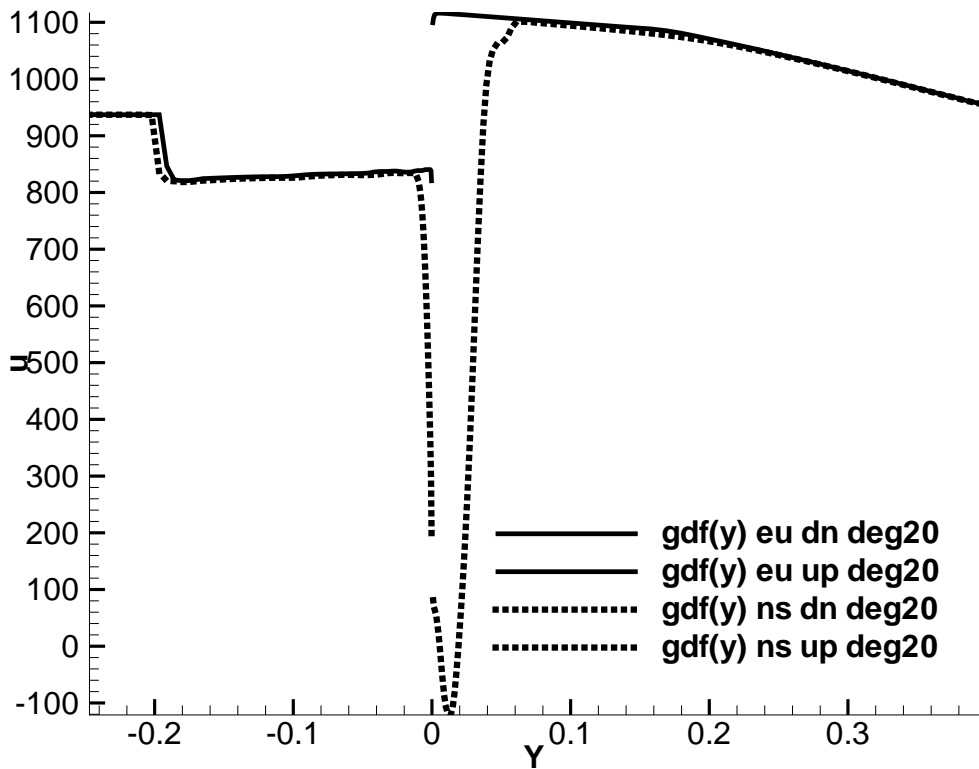


Рис. 3б Зависимость $u(y)$ на задней части профиля $a = 20^\circ$

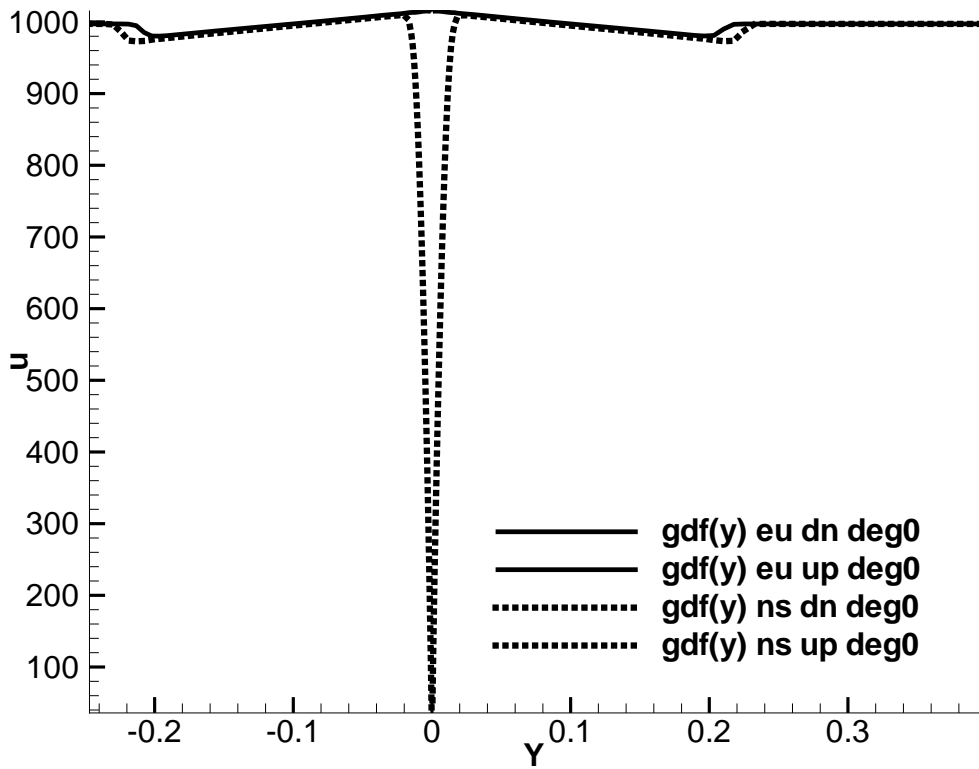


Рис. 3в Зависимость $u(y)$ на задней части профиля $a = 0^\circ$

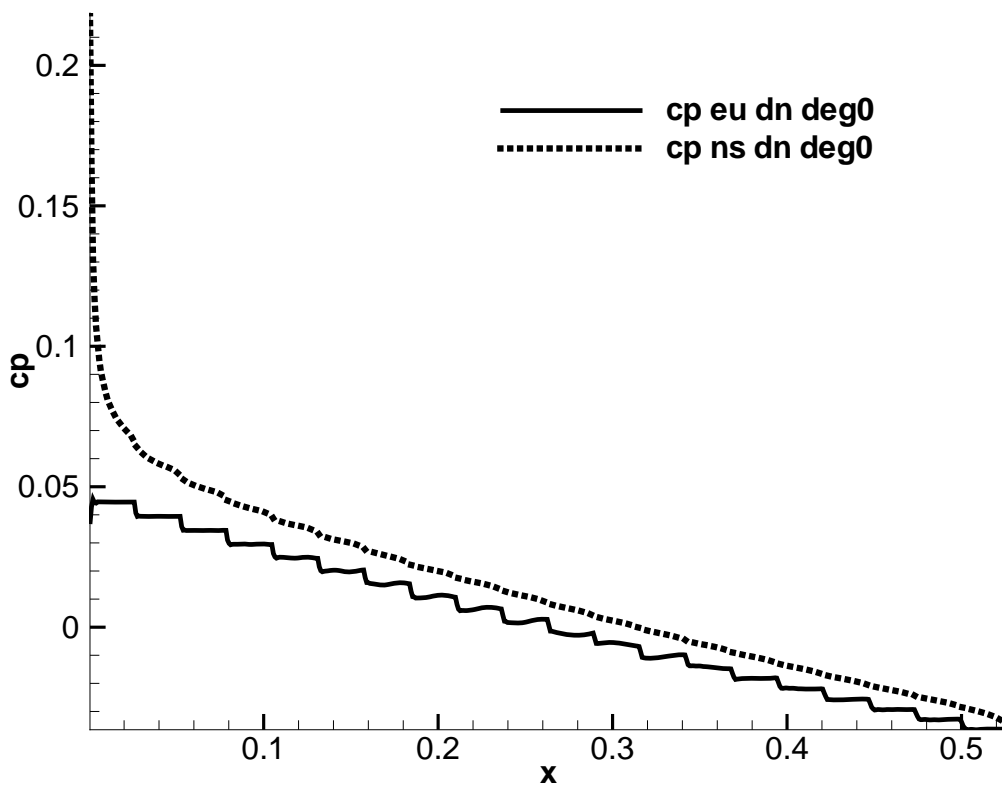
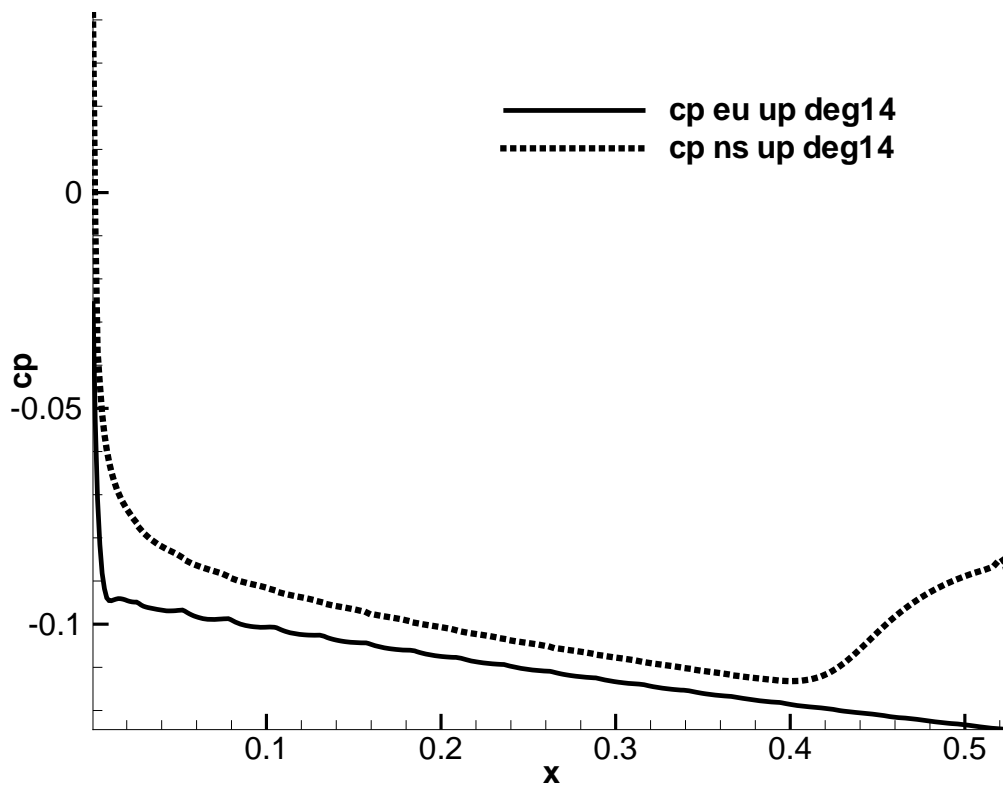
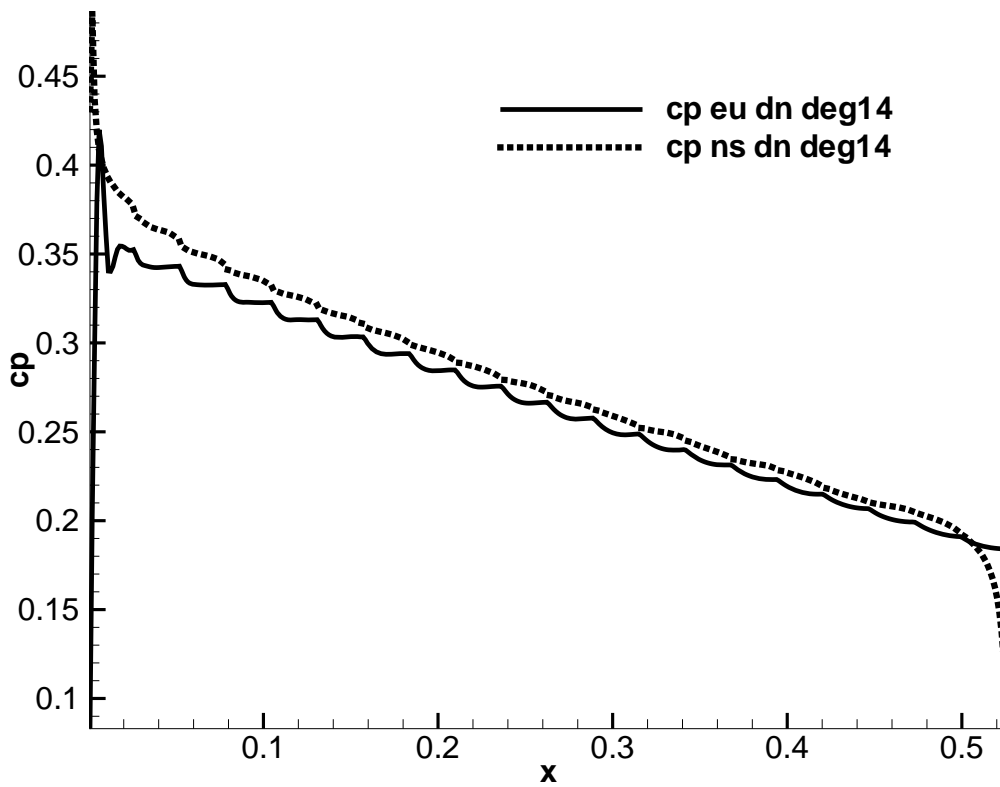


Рис. 4а $cp(x)$ на верхней и нижней стороне профиля при $a = 0^\circ$
(совпадают)

Рис. 4б $cp(x)$ на верхней стороне профиля $a = 14^\circ$ Рис. 4в $cp(x)$ на нижней стороне профиля $a = 14^\circ$

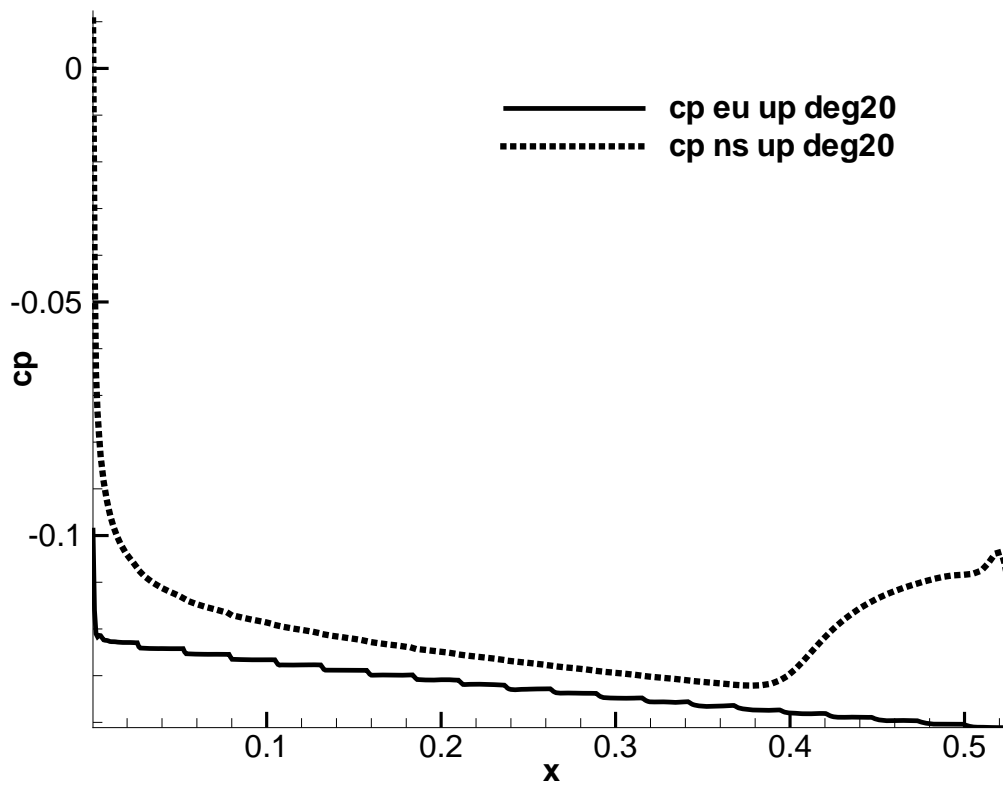


Рис. 4г $cp(x)$ на верхней стороне профиля $a = 20^\circ$

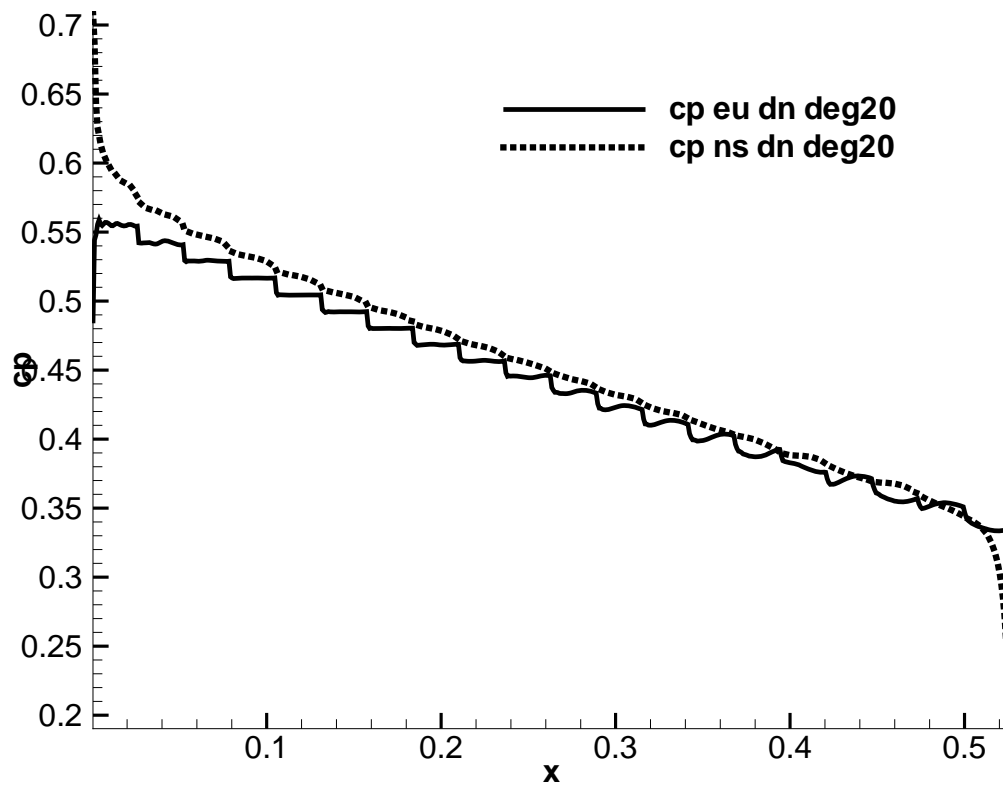
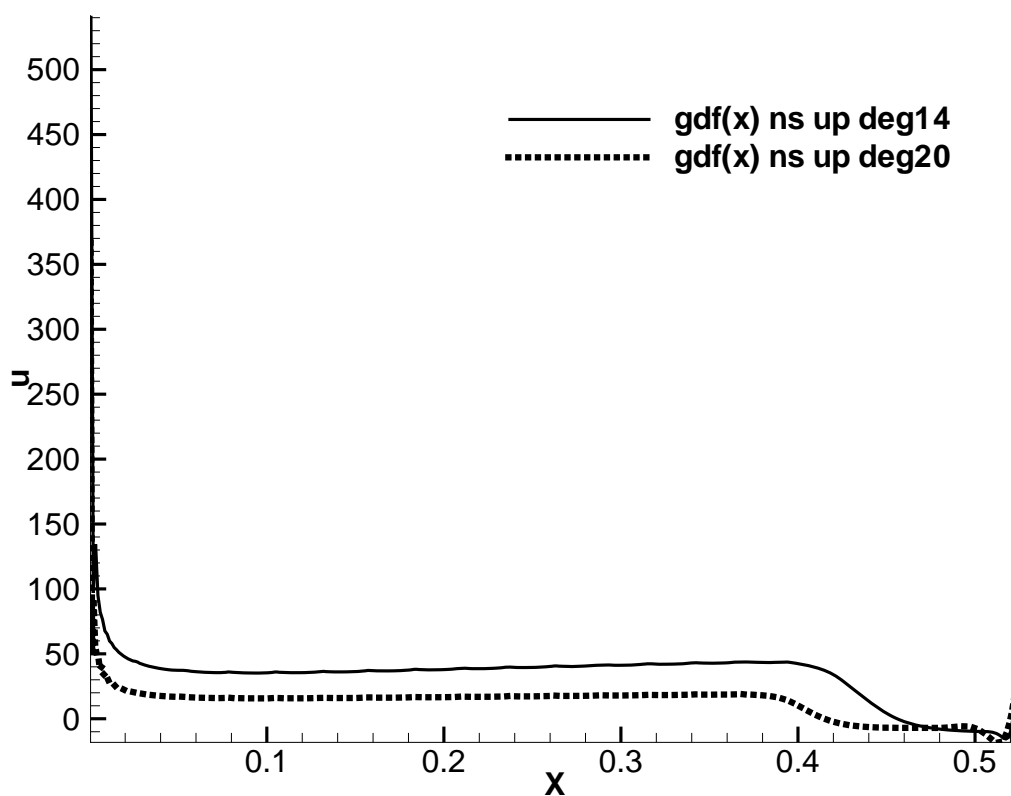
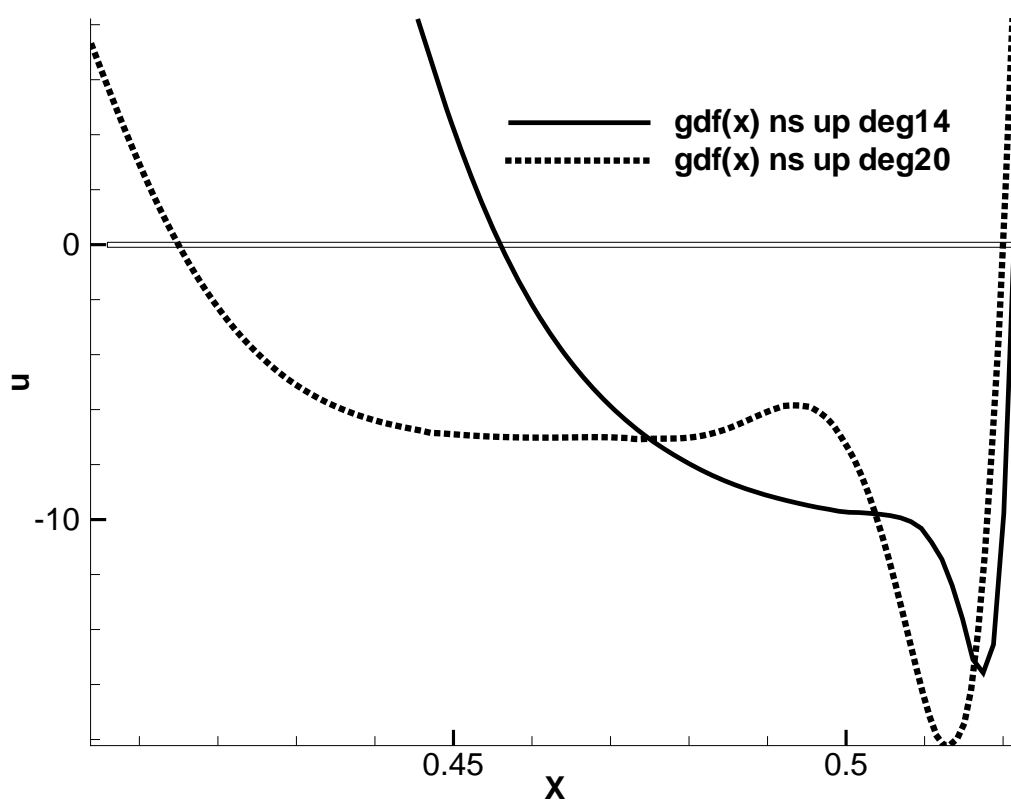


Рис. 4д $cp(x)$ на нижней стороне профиля $a = 20^\circ$

Рис. 6б Зависимость $u(x)$ на верхней стороне профиляРис. 6в Зависимость $u(x)$ на верхней стороне профиля ближе к задней части

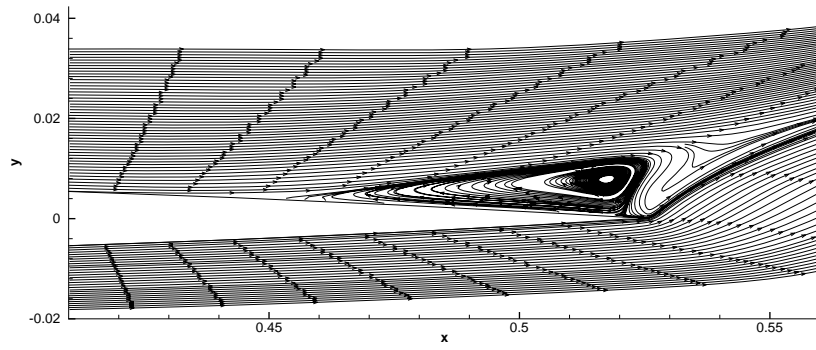


Рис. 7а

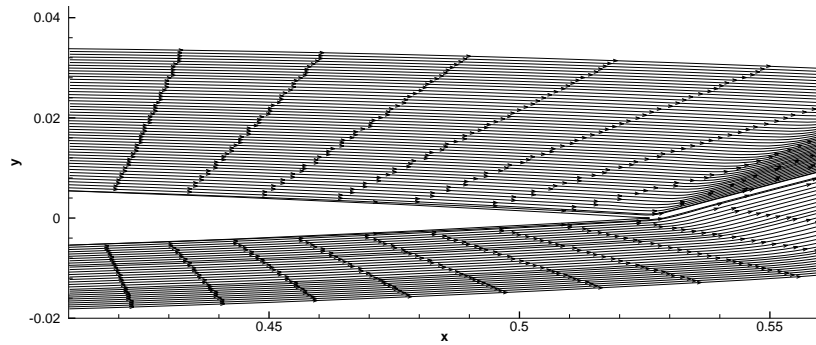


Рис. 7б

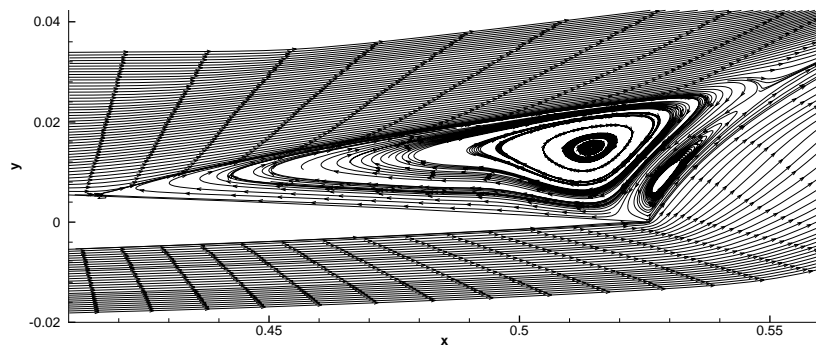


Рис. 7в

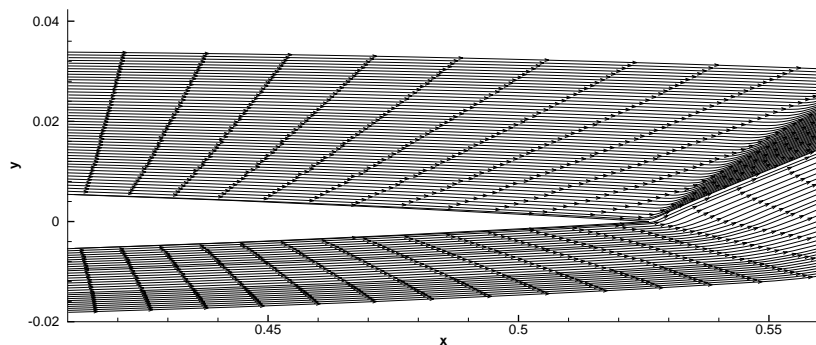


Рис. 7г

Рис. 7а,7б,7в,7г Вихревые зоны $\alpha = 14^\circ$ (а,б) и $\alpha = 20^\circ$ (в,г) вязкое (а,в) и невязкое (б,г) течения

Таблица 2. Параметры вихревых зон

	$\alpha = 14^\circ$	$\alpha = 20^\circ$
1-я точка отрыва (x)	0.455967927	0.41489868
2-я точка отрыва (x)	0.521382513	0.51998007
Парам. 1-го вихря(x,y)		
левая точка	(0.459904,0.004339)	(0.418094,0.0060578)
правая нижняя точка	(0.520179,0.00117029)	(0.519265,0.0009583)
правая верхняя точка	(0.525445,0.0113555)	(0.546701,0.0275758)
Центр	(0.517486,0.00046486)	(0.514449,0.014892)
Парам. 2-го вихря(x,y)		
левая точка	(см. левая ниж.т.)	(0.519851,0.0004641)
левая(14)/правая(20)ниж.т.	(0.520632,0.00077533)	(0.525944,0.0002502)
левая(14)/правая(20)верх.т.	(0.525448,0.0112472)	(0.547289,0.025287)
верхняя граница (y)	0.0147603	(см. макс.верх.точка)
Центр	незамкнутый	(0.528496,0.008396)

Таблица 3. Коэффициенты сопротивления и подъемной силы

Расчет	C_x	C_y
0 град.невязкий	0.00091661	-0.00001712
0 град.вязкий	0.00802998	0.00001311
14 град.невязкий	0.04694873	0.18152694
14 град.вязкий	0.05258232	0.17946468
20 град.невязкий	0.09954894	0.26962351
20 град.вязкий	0.08364341	0.22445954
Пластина(расч.)	0.00628324	5.598667e-9
Пластина(теор.)	0.00651672	0

Таблица 4. Коэффициенты сопротивления и подъемной силы от давления и вязких членов

Расчет	C_x	C_y	C_x^{vis}	C_y^{vis}
0 град.невязкий	9.16608e-4	-1.71249e-5		
0 град.вязкий	0.00110779	1.47399e-5	0.00692219	-1.62781e-6
14 град.невязкий	0.04694873	0.18152694		
14 град.вязкий	0.04644336	0.18093237	0.00613895	-.001467692
20 град.невязкий	0.09954894	0.26962351		
20 град.вязкий	0.08345438	0.22526151	0.00018903	-0.00080197
Пластина	0.000004	0	0.0062832	0
Пласт.(теор.)	0	0	0.0065167	0

C_x и C_y – коэффициенты, полученные от давления.

C_x^{vis} и C_y^{vis} – коэффициенты, полученные от вязких членов.

Литература

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. "Гидродинамика", М.: Наука, 1986
- [2] С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов "Численное решение многомерных задач газовой динамики", М.: Наука, 1976
- [3] Флетчер К. "Вычислительные методы в динамике жидкостей": Т.2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991
- [4] Гильманов А.Н. "Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики", М.: Наука. Физматлит, 2000
- [5] М.Д.Бродецкий, А.В.Забродин, А.Е.Луцкий, А.М.Харитонов, А.М.Шевченко "Численное и экспериментальное моделирование сверхзвукового течения на подветренной стороне треугольного крыла", 2002 г. Журнал "Аэромеханика и газовая динамика" №1 январь-март 2002
- [6] Лойцянский Л.Г. "Механика жидкости и газа" М.: Дрофа, 2003