

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В. Келдыша

В.А. Сарычев, С.А. Мирер,
А.А. Дегтярев, Е.К. Дуарте

**Исследование положений равновесия спутника,
подверженного действию гравитационного и
аэродинамического моментов**

Москва - 2004

В.А. Сарычев, С.А. Мирер, А.А. Дегтярев, Е.К. Дуарте. **Исследование равновесий спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов.** Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2004, 29 страниц, 13 рисунков, библиография: 32 наименования.

Исследована динамика спутника, движущегося в центральном ньютоновом силовом поле на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. В частном случае, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции спутника, определены все положения равновесия. Для каждой равновесной ориентации получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости в удобном для анализа виде. Подробно исследована эволюция областей выполнения условий устойчивости для каждого из положений равновесия в зависимости от параметров задачи. Определены все бифуркационные значения параметров, при которых происходит качественная смена формы областей устойчивости.

Ключевые слова: спутник, аэродинамический момент, положения равновесия, условия устойчивости, точки бифуркации.

V.A. Sarychev, S.A. Mirer, A.A. Degtyarev, E.K. Duarte. **Investigation of equilibria of the satellite subjected to action of the gravitational and aerodynamic moments.** Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2004, 29 Pages, 13 Figures, 32 References.

The dynamics of the satellite moving in a central Newtonian force field in a circular orbit under action of the gravitational and aerodynamic moments is investigated. In specific case, when the center of pressure of aerodynamic forces is located on one of the principal central axes of inertia of the satellite, all equilibrium orientations are determined. Necessary and sufficient conditions of stability are obtained for each equilibrium orientation. Evolution of domains where stability conditions take place is investigated in detail depending on parameters of a problem. All bifurcational values of parameters corresponding to qualitative change of domains of stability are determined.

Key words: gyrostat, aerodynamic moment, equilibria, conditions of stability, bifurcational points.

1. Введение

Одним из важных направлений развития космической техники является создание систем ориентации искусственных спутников Земли. В зависимости от поставленных задач ориентация спутника может быть осуществлена с использованием активных или пассивных методов. При разработке пассивных систем ориентации можно использовать свойства гравитационного и магнитного полей, эффект сопротивления атмосферы и давления солнечного излучения, гироскопические свойства вращающихся тел и др. Важное свойство пассивных систем ориентации спутников заключается в том, что эти системы могут функционировать продолжительное время без расходования энергии или рабочего тела.

На круговых или слабоэллиптических орбитах в диапазоне высот от 250 км до 500 км для ориентации оси симметрии спутника по набегающему потоку воздуха, направление которого мало отличается от направления касательной к орбите, можно использовать аэродинамический момент. Если спутник аэродинамически устойчив, то при нарушении нормальной ориентации возникает восстанавливающий аэродинамический момент по тангажу и рысканию, стремящийся совместить продольную ось спутника с вектором набегающего потока.

Существует значительное число работ, посвященных исследованию динамики спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. Идея использования аэродинамического момента для ориентации спутника и простейшие результаты исследования были приведены в работах [1-5]. Более глубокие исследования влияния аэродинамического момента на движение спутника около центра масс проведены в [6-9]. Положительные и отрицательные эффекты воздействия сопротивления атмосферы на динамические характеристики гравитационной системы ориентации спутник-стабилизатор проанализированы в [10, 11].

Первая успешная реализация аэродинамической системы ориентации была осуществлена советскими учеными на спутниках Космос-149 (1967 г.) и Космос-320 (1970 г.). Система ориентации состоит из аэродинамического стабилизатора и гиродемпфера. Аэродинамический стабилизатор выполнен из тонкой жести в виде боковой поверхности усеченного конуса и установлен на четырех длинных (4-6 м) полых стержнях, соединенных с корпусом спутника (рис. 1). Аэродинамический стабилизатор приводит к появлению восстанавливающих аэродинамических моментов по тангажу и рысканию,

стремящихся совместить продольную ось спутника с направлением набегающего потока воздуха. Гиродемпфер (два двухстепенных интегрирующих гироскопа, установленные по схеме V-рыскание) обеспечивает демпфирование собственных колебаний спутника и появление восстанавливающих гироскопических моментов по рысканию и крену. Основные проблемы динамики спутника с аэродинамической системой ориентации были исследованы в [12-17].

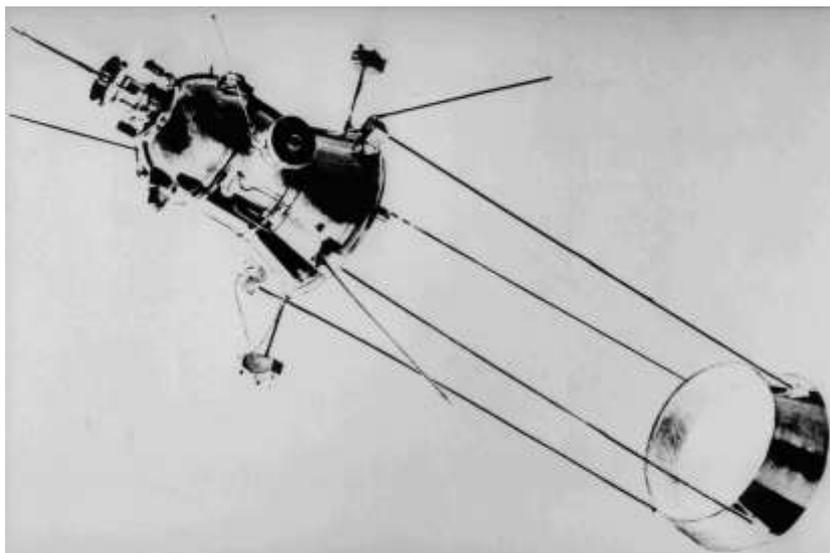


Рис.1

Еще один пример использования аэродинамического момента для ориентации спутников – разработанный американскими учеными малый спутник PAMS (проект GAMES) [18-20]. Демпфирование собственных колебаний этого спутника реализовано с помощью магнитных гистерезисных стержней. Спутник был запущен на орбиту с борта Space Shuttle в мае 1996 г.

Значительный цикл работ посвящен исследованию влияния аэродинамического момента на динамику движения находящихся в режиме гравитационной ориентации орбитальных станций Салют-6 и Салют-7, обладающих большими солнечными батареями [21-25].

В работах [26, 27] проведен анализ влияния неконсервативной компоненты аэродинамического момента на устойчивость положений равновесия спутника. Более подробно и глубоко эта задача рассмотрена в [28] применительно к исследованию вращательного движения орбитальной станции Салют-7 под действием гравитационного, аэродинамического и диссипативного моментов. Проведено оригинальное численно-аналитическое исследование, позволяющее объяснить основные характеристики самопроизвольно

устанавливающегося режима гравитационной ориентации орбитальной станции Салют-7.

В работе [29] исследовано движение спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. В случае, когда центр давления расположен на главной центральной оси инерции спутника, определены все положения равновесия в орбитальной системе координат и получены достаточные условия их устойчивости.

Настоящая статья является продолжением работы [29]. Основное внимание уделено исследованию устойчивости положений равновесия спутника. Полученные в [29] достаточные условия устойчивости упрощены и записаны в удобном для анализа виде. Рассмотрены необходимые условия устойчивости, когда характеристическое уравнение для линеаризованных в окрестности положения равновесия уравнений движения спутника имеет лишь мнимые корни. В решаемой задаче доказано наличие симметрии, позволяющей ограничиться исследованием устойчивости лишь трех из шести групп положений равновесия. Результаты численно-аналитического исследования представлены в виде серии графиков, где в плоскости двух безразмерных инерционных параметров при различных значениях безразмерного аэродинамического параметра приведены области выполнения как достаточных, так и необходимых условий устойчивости положений равновесия спутника.

2. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о вращательном движении на круговой орбите спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. Введем две правые декартовы системы координат с началом в центре масс O спутника.

$OX_1X_2X_3$ - орбитальная система координат. Ось OX_3 направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось OX_1 направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O .

$Ox_1x_2x_3$ - связанная со спутником система координат; Ox_i ($i = 1, 2, 3$) суть главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной системы координат углами α, β, γ с последовательностью поворотов 2-3-1 [30]. Первый поворот системы координат $OX_1X_2X_3$

осуществляется на угол α в плоскости OX_1X_3 (вокруг оси OX_2), второй поворот – на угол β в плоскости OX_1X_2 (вокруг оси OX_3), третий поворот – на угол γ в плоскости OX_2X_3 (вокруг оси OX_1). Тогда направляющие косинусы осей Ox_i в орбитальной системе координат $a_{ij} = \cos(X_i, x_j)$ задаются выражениями

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha \cos \beta, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ a_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, & a_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta, \\ a_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, & a_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{21} &= \sin \beta, & a_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

а уравнения движения спутника относительно его центра масс записываются в виде [29]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(h_2a_{13} - h_3a_{12}) &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(h_3a_{11} - h_1a_{13}) &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(h_1a_{12} - h_2a_{11}) &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + \omega_0a_{21}, \\ q &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma = \bar{q} + \omega_0a_{22}, \\ r &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma = \bar{r} + \omega_0a_{23}. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (2), (3)

$$h_1 = -\frac{Qa}{\omega_0^2}, \quad h_2 = -\frac{Qb}{\omega_0^2}, \quad h_3 = -\frac{Qc}{\omega_0^2},$$

A, B, C - главные центральные моменты инерции спутника; p, q, r - проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Ox_i ; ω_0 - угловая скорость движения центра масс спутника на круговой орбите; Q - действующая на спутник сила сопротивления; a, b, c - координаты центра давления спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Для системы уравнений (2), (3) справедлив обобщенный интеграл энергии

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A - C)a_{31}^2 + (B - C)a_{32}^2] + \\ + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B - A)a_{21}^2 + (B - C)a_{23}^2] - \omega_0^2(h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) = const. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Положения равновесия спутника

Положив в (2) и (3) $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$ ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ - постоянные величины), получим уравнения

$$\begin{aligned} (C - B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - h_2a_{13} + h_3a_{12} &= 0, \\ (A - C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{11} + h_1a_{13} &= 0, \\ (B - A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} + h_2a_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Вместо системы (5) удобнее использовать эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} &= 0, \\ 3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33} &= 0, \\ (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - h_1a_{21} - h_2a_{22} - h_3a_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (1) систему (6) можно трактовать как систему трех уравнений с неизвестными $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Другой способ замыкания уравнений (6) заключается в добавлении условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее будем исследовать положения равновесия гиростата, используя системы (6) и (7).

Как показано в [29], при $A \neq B \neq C$ систему уравнений (6), (7) можно разрешить относительно $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. В результате получим

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3(I_3 - A)a_{31}/F, & a_{12} &= 3(I_3 - B)a_{32}/F, & a_{13} &= 3(I_3 - C)a_{33}/F, \\ a_{21} &= 3(B - C)a_{32}a_{33}/F, & a_{22} &= 3(C - A)a_{33}a_{31}/F, & a_{23} &= 3(A - B)a_{31}a_{32}/F. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $F = h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}$, $I_3 = Aa_{31}^2 + Ba_{32}^2 + Ca_{33}^2$, а направляющие косинусы a_{31}, a_{32}, a_{33} определяются уравнениями

$$\begin{aligned} 9[(B - C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C - A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A - B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] &= (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33})^2, \\ 3(B - C)(C - A)(A - B)a_{31}a_{32}a_{33} - [h_1(B - C)a_{32}a_{33} + & \\ + h_2(C - A)a_{33}a_{31} + h_3(A - B)a_{31}a_{32}] & (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) = 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

После решения системы (9) формулы (8) позволяют определить оставшиеся шесть направляющих косинусов. Отметим, что решения (8) существуют лишь в том случае, когда из трех направляющих косинусов a_{31} , a_{32} , a_{33} никакие два одновременно не обращаются в нуль. Случаи $a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{32} = a_{33} = 0$, $a_{33} = a_{31} = 0$ для предлагаемого метода решения задачи являются особыми и их следует рассматривать непосредственно обращаясь к системе уравнений (6)-(7).

Используя идеи работы [31], можно показать, что после введения новых неизвестных $x_1 = a_{31}/a_{33}$, $y_1 = a_{32}/a_{33}$ первые два уравнения системы (9) с использованием понятия результата сводятся к одному алгебраическому уравнению 12-го порядка (например, относительно x_1) с действительными коэффициентами. Число его действительных корней четно и не превышает 12. Подставляя значение действительного корня x_1 алгебраического уравнения в первые два уравнения системы (9), найдем совпадающий корень y_1 этих уравнений. Для каждого решения x_1 , y_1 из последнего уравнения системы (9) можно определить два значения a_{33} , а затем и соответствующие им величины a_{31} и a_{32} . Таким образом, каждому действительному корню алгебраического уравнения соответствуют два набора значений a_{31} , a_{32} , a_{33} , которые в силу (8), однозначно определяют остальные направляющие косинусы a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} . Из приведенных соображений следует, что спутник на круговой орбите, находящийся под действием гравитационного и аэродинамического моментов, может иметь не более 24 положений равновесия.

Далее, как и в [29], будем рассматривать частный случай, когда центр давления расположен на оси Ox_1 ($h_1 \neq 0$, $h_2 = h_3 = 0$). Тогда система (9) после перехода к безразмерным параметрам $\theta_B = B/A$, $\theta_C = C/A$, $H_1 = h_1/A$ принимает вид

$$\begin{aligned} 9[(\theta_B - \theta_C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (\theta_C - 1)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (1 - \theta_B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] &= H_1^2 a_{31}^2, \\ (\theta_B - \theta_C)[H_1^2 - 3(1 - \theta_B)(\theta_C - 1)] a_{31} a_{32} a_{33} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением положительных H_1 , поскольку случай $H_1 < 0$ сводится к случаю $H_1 > 0$ заменой направления осей Ox_i связанной системы координат на противоположные.

Из второго уравнения системы (10) следует

$$H_1^2 = 3(1 - \theta_B)(\theta_C - 1) \quad (11)$$

или

$$a_{31}a_{32}a_{33} = 0. \quad (12)$$

Можно показать, что при выполнении условия (11) системе (10) удовлетворяют 8 однопараметрических семейств решений. Свойства этих решений подробно исследованы в [29].

Пусть теперь $H_1^2 \neq 3(1 - \theta_B)(\theta_C - 1)$. Тогда второе уравнение (10) примет вид (12). В результате поочередного рассмотрения случаев $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 0$ получаем следующие группы изолированных решений (приведены лишь отличные от нуля направляющие косинусы) [29]:

$$a_{11} = a_{22}a_{33}, \quad a_{22} = \pm 1, \quad a_{33} = \pm 1; \quad (13)$$

$$a_{11} = -a_{23}a_{32}, \quad a_{23} = \pm 1, \quad a_{32} = \pm 1; \quad (14)$$

$$a_{11} = -x, \quad a_{13} = -a_{22}a_{31}, \quad a_{22} = \pm 1, \quad a_{31} = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad a_{33} = -xa_{22}; \quad (15)$$

$$a_{11} = -y, \quad a_{12} = a_{23}a_{31}, \quad a_{23} = \pm 1, \quad a_{31} = \pm \sqrt{1 - y^2}, \quad a_{32} = ya_{23}; \quad (16)$$

$$a_{11} = 3y, \quad a_{12} = \pm \sqrt{1 - 9y^2}, \quad a_{21} = -a_{12}a_{33}, \quad a_{22} = 3ya_{33}, \quad a_{33} = \pm 1; \quad (17)$$

$$a_{11} = 3x, \quad a_{13} = \pm \sqrt{1 - 9x^2}, \quad a_{21} = a_{13}a_{32}, \quad a_{23} = -3xa_{32}, \quad a_{32} = \pm 1. \quad (18)$$

Здесь $x = H_1/3(1 - \theta_C)$, $y = H_1/3(1 - \theta_B)$. Отметим, что каждая группа (13)-(18) состоит из четырех решений, соответствующих одному из четырех вариантов выбора знаков + и -.

Решения (13) и (14) существуют при любых значениях параметров рассматриваемой задачи, решения (15) – при $x^2 \leq 1$, решения (16) – при $y^2 \leq 1$, решения (17) – при $9y^2 \leq 1$, решения (18) – при $9x^2 \leq 1$. Условия существования решений (13)-(18) выделяют в плоскости (x^2, y^2) 9 областей с фиксированным числом положений равновесия в каждой области (рис. 2). Разумеется, при $H_1 = 0$ ($x = y = 0$) решения (13) – (18) совпадают с известными 24 равновесными ориентациями спутника – твердого тела в орбитальной системе координат на круговой орбите.

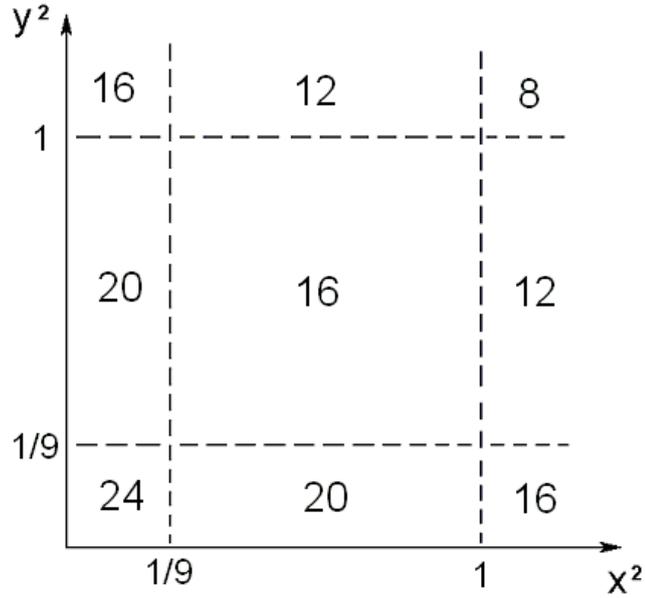


Рис. 2

Следует обратить внимание на то, что решения (13), (15) и (17) переходят соответственно в решения (14), (16) и (18), если другим способом определить связанную систему координат. А именно, введем вместо $Ox_1x_2x_3$ систему координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$, получающуюся из $Ox_1x_2x_3$ поворотом вокруг оси Ox_1 на угол $\pi/2$. Ясно, что оси $O\tilde{x}_i$ по-прежнему являются главными центральными осями инерции спутника-гиростата, но их порядок и направления отличаются от Ox_i . Фактически переход от осей Ox_i к осям $O\tilde{x}_i$ эквивалентен замене $\theta_B \rightarrow \theta_C$, $\theta_C \rightarrow \theta_B$ (при этом, как следствие, $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$).

Рассмотрим, например, решение (15). В системе координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ оно принимает вид

$$\|\tilde{a}_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & 0 \end{vmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{12} = a_{13} = -a_{22}a_{31} = \tilde{a}_{23}\tilde{a}_{31}, & \quad \tilde{a}_{11} = a_{11} = -x, & \quad \tilde{a}_{23} = -a_{22} = \pm 1, \\ \tilde{a}_{31} = a_{31} = \pm\sqrt{1-x^2}, & \quad \tilde{a}_{32} = a_{33} = -xa_{22} = x\tilde{a}_{23}. \end{aligned}$$

Полученные выражения с учетом того, что $x \rightarrow y$, действительно совпадают с (16).

Таким образом, можно ограничиться анализом устойчивости решений (13), (15) и (17), а соответствующие области для решений (14), (16) и (18) будут симметричны им относительно прямой $\theta_B = \theta_C$.

Что касается геометрического смысла полученных решений, то для четырех решений (13) одноименные оси орбитальной и связанной систем координат параллельны или антипараллельны друг другу. При этом ось Ox_1 направлена по вектору линейной скорости (оси OX_1), если $\bar{a}_{11} = 1$, и противоположно направлена, если $\bar{a}_{11} = -1$.

Решения (15) и (17) могут быть получены из (13) путем поворота вокруг оси OX_2 и OX_3 на углы α_0 или β_0 соответственно, причем значения углов поворота определяются соотношениями $\cos^2 \alpha_0 = x^2 = H_1^2 / 9(1 - \theta_C)^2$, $\cos^2 \beta_0 = 9y^2 = H_1^2 / (1 - \theta_B)^2$.

4. Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Для получения достаточных условий устойчивости положений равновесия (13) – (18) можно воспользоваться интегралом энергии (4). Вводя замену переменных

$$\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \bar{\beta}, \quad \gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma}, \quad (19)$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ - малые отклонения от положения равновесия спутника $\alpha = \alpha_0 = const$, $\beta = \beta_0 = const$, $\gamma = \gamma_0 = const$, удовлетворяющего системе уравнений (5). Тогда интеграл энергии может быть представлен в виде [29]

$$\begin{aligned} \bar{p}^2 + \theta_B \bar{q}^2 + \theta_C \bar{r}^2 + \omega_0^2 (A_{\alpha\alpha} \bar{\alpha}^2 + A_{\beta\beta} \bar{\beta}^2 + A_{\gamma\gamma} \bar{\gamma}^2 + \\ + 2A_{\alpha\beta} \bar{\alpha} \bar{\beta} + 2A_{\beta\gamma} \bar{\beta} \bar{\gamma} + 2A_{\gamma\alpha} \bar{\gamma} \bar{\alpha}) + \Sigma = const, \end{aligned} \quad (20)$$

где символом Σ обозначены члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$,

$$A_{\alpha\alpha} = 3[(1 - \theta_C)(\bar{a}_{11}^2 - \bar{a}_{31}^2) + (\theta_B - \theta_C)(\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{32}^2)] + H_1 \bar{a}_{11},$$

$$\begin{aligned} A_{\beta\beta} = [(\theta_B - 1) - (\theta_B - \theta_C) \sin^2 \gamma_0] (1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \cos 2\beta_0 - \\ - \frac{3}{4} (\theta_B - \theta_C) \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \sin 2\gamma_0 + H_1 \bar{a}_{11}, \end{aligned}$$

$$A_{\gamma\gamma} = -3(\theta_B - \theta_C) [(\bar{a}_{22}^2 - \bar{a}_{23}^2) - 3(\bar{a}_{32}^2 - \bar{a}_{33}^2)],$$

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{3}{2}(1-\theta_C)\sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0 + 3(\theta_B - \theta_C)(\bar{a}_{32} \cos \alpha_0 - \bar{a}_{12} \sin \alpha_0)\bar{a}_{22} - \\ - H_1 \sin \alpha_0 \sin \beta_0,$$

$$A_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}(\theta_B - \theta_C)\sin 2\beta_0 \sin 2\gamma_0 - 3(1-\theta_C)(\bar{a}_{33} \cos \gamma_0 - \bar{a}_{32} \sin \gamma_0)\bar{a}_{31},$$

$$A_{\gamma\alpha} = -3(\theta_B - \theta_C)(\bar{a}_{12}\bar{a}_{33} + \bar{a}_{13}\bar{a}_{32});$$

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0).$$

Из теоремы Ляпунова следует, что решение $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$ устойчиво, если квадратичная форма

$$A_{\alpha\alpha}\bar{\alpha}^2 + A_{\beta\beta}\bar{\beta}^2 + A_{\gamma\gamma}\bar{\gamma}^2 + 2A_{\alpha\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta} + 2A_{\beta\gamma}\bar{\beta}\bar{\gamma} + 2A_{\gamma\alpha}\bar{\gamma}\bar{\alpha}$$

является определенно-положительной. Опуская промежуточные выкладки, достаточные условия устойчивости для каждой из шести групп решений (13)-(18) и условия их существования запишем в следующем, более простом, чем в [29], виде:

для решений (13)

$$3(1-\theta_C) + H_1\bar{a}_{11} > 0, \quad (\theta_B - 1) + H_1\bar{a}_{11} > 0, \quad \theta_B - \theta_C > 0; \quad (21)$$

для решений (15), которые существуют при $H_1^2 \leq 9(\theta_C - 1)^2$,

$$\theta_C - 1 > 0, \quad \theta_B - \theta_C > 0, \quad H_1^2 < 12 \frac{(\theta_B - 1)(\theta_C - 1)^2}{\theta_B - \theta_C}; \quad (22)$$

для решений (17), которые существуют при $H_1^2 \leq (\theta_B - 1)^2$,

$$1 - \theta_B > 0, \quad \theta_B - \theta_C > 0. \quad (23)$$

При замене $\theta_B \rightarrow \theta_C, \theta_C \rightarrow \theta_B$ условия (21) для решений (13) переходят в условия для решений (14), условия (22) для решений (15) переходят в условия для решений (16), а условия (23) для решений (17) - в условия для решений (18). Заметим, что последнее неравенство (22) может быть отброшено, поскольку при выполнении первых двух неравенств (22) и условия существования решения $9(\theta_C - 1)^2 \geq H_1^2$ оно всегда удовлетворяется. В самом деле,

$$12 \frac{(\theta_B - 1)(\theta_C - 1)^2}{\theta_B - \theta_C} = 9(\theta_C - 1)^2 \frac{4\theta_B - 4}{3(\theta_B - \theta_C)} = \\ = 9(\theta_C - 1)^2 + 9(\theta_C - 1)^2 \frac{(\theta_B - 1) + 3(\theta_C - 1)}{3(\theta_B - \theta_C)} > 9(\theta_C - 1)^2 \geq H_1^2.$$

Напомним также, что при исследовании областей, где выполняются условия устойчивости положений равновесия спутника, необходимо учитывать условия физической реализуемости тела, т.е. «неравенства треугольника»

$$\theta_B + 1 \geq \theta_C, \theta_B + \theta_C \geq 1, 1 + \theta_C \geq \theta_B. \quad (24)$$

Рассмотрим эволюцию областей выполнения достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника в плоскости (θ_B, θ_C) при изменении величины безразмерного параметра H_1 . За формирование областей устойчивости в общем случае отвечают восемь прямых. Для удобства изложения присвоим каждой прямой свой индекс

$$\begin{array}{ll} 1. & \theta_B = 1 - H_1, & 5. & \theta_C = 1 - H_1, \\ 2. & \theta_B = 1 - H_1/3, & 6. & \theta_C = 1 - H_1/3, \\ 3. & \theta_B = 1 + H_1/3, & 7. & \theta_C = 1 + H_1/3, \\ 4. & \theta_B = 1 + H_1, & 8. & \theta_C = 1 + H_1. \end{array} \quad (25)$$

Если $H_1 = 0$, то получаем спутник, на который действует только гравитационный момент; при этом решения (13)-(18) устойчивы в областях, показанных на рис. 3 (здесь и далее на рисунках горизонтальная и вертикальная оси отвечают безразмерным моментам инерции θ_B и θ_C соответственно). Вся область допустимых θ_B, θ_C разбивается прямыми $\theta_B = 1, \theta_C = 1, \theta_B = \theta_C$ на 6 областей, в каждой из которых выполняются достаточные условия устойчивости только одной группы решений (на рисунке области обозначены номерами соответствующих решений).

При $H_1 > 0$ характер границ областей изменяется. Границы областей устойчивости теперь определяются прямыми (24). Кроме того, для решений (13) и (14) имеет место следующая особенность: области выполнения достаточных условий устойчивости решений, отвечающих $\bar{a}_{11} = 1$ и $\bar{a}_{11} = -1$, не совпадают. На рис. 4 в областях, обозначенных (13) и (14), условия выполняются для $\bar{a}_{11} = \pm 1$, а в областях, обозначенных $(13)_+$ или $(14)_+$, условия выполняются только в случае $\bar{a}_{11} = 1$.

С ростом H_1 взаимное расположение границ разбиения изменяется, а при двух бифуркационных значениях H_1 ($1/2$ и $3/4$) картина разбиения претерпевает качественные изменения (рис. 5-6). При первом бифуркационном

значении $H_1 = 1/2$ исчезают области (17) и (18), а при втором бифуркационном значении $H_2 = 3/4$ исчезают области (13) и (14).

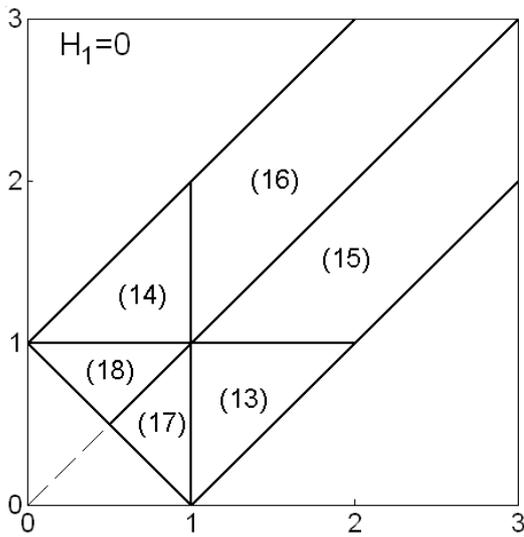


Рис. 3

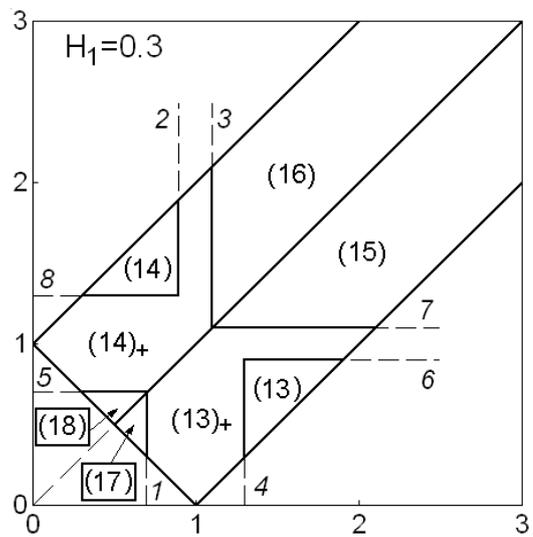


Рис. 4

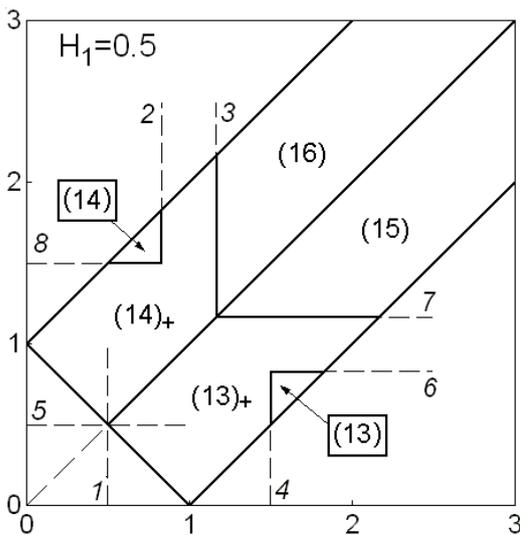


Рис. 5

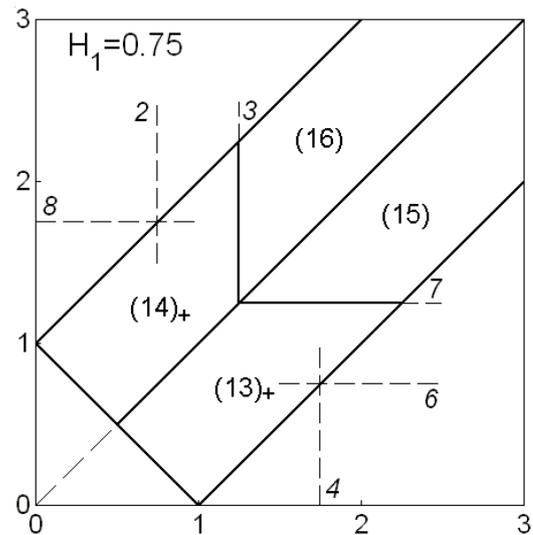


Рис. 6

5. Необходимые условия устойчивости

Для исследования необходимых условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата линеаризуем систему уравнений (2)-(3) в окрестности решения $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$. После достаточно утомительных преобразований линеаризованная система уравнений движения принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \theta_B \ddot{\bar{\alpha}} \bar{a}_{22} + 2(1 - \theta_C) \dot{\bar{\alpha}} \bar{a}_{21} \bar{a}_{23} + [3(1 - \theta_C)(\bar{a}_{11} \bar{a}_{33} + \bar{a}_{13} \bar{a}_{31}) + H_1 \bar{a}_{33}] \bar{\alpha} + \theta_B \ddot{\bar{\beta}} \sin \gamma_0 - \\ & - (\theta_B + \theta_C - 1) \dot{\bar{\beta}} \sin \beta_0 \cos \gamma_0 - \left\{ (1 - \theta_C) [(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \cos 2\beta_0 \sin \gamma_0 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \cos \gamma_0] + H_1 \bar{a}_{23} \cos \alpha_0 \right\} \bar{\beta} + \\ & + (\theta_B - \theta_C + 1) \dot{\bar{\gamma}} \bar{a}_{23} - [(1 - \theta_C)(\bar{a}_{21} \bar{a}_{22} - 3\bar{a}_{31} \bar{a}_{32}) + H_1 \bar{a}_{12}] \bar{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \theta_C \ddot{\bar{\alpha}} \bar{a}_{23} + 2(\theta_B - 1) \dot{\bar{\alpha}} \bar{a}_{21} \bar{a}_{22} + [3(\theta_B - 1)(\bar{a}_{11} \bar{a}_{32} + \bar{a}_{12} \bar{a}_{31}) - H_1 \bar{a}_{32}] \bar{\alpha} + \theta_C \ddot{\bar{\beta}} \cos \gamma_0 + \\ & + (\theta_B + \theta_C - 1) \dot{\bar{\beta}} \sin \beta_0 \sin \gamma_0 + \left\{ (\theta_B - 1) [(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \cos 2\beta_0 \cos \gamma_0 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \sin \gamma_0] + H_1 \bar{a}_{22} \cos \alpha_0 \right\} \bar{\beta} + \tag{26} \\ & + (\theta_B - \theta_C - 1) \dot{\bar{\gamma}} \bar{a}_{22} + [(\theta_B - 1)(\bar{a}_{21} \bar{a}_{23} - 3\bar{a}_{31} \bar{a}_{33}) - H_1 \bar{a}_{13}] \bar{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\bar{\alpha}} \bar{a}_{21} - 2(\theta_B - \theta_C) \dot{\bar{\alpha}} \bar{a}_{22} \bar{a}_{23} - 3(\theta_B - \theta_C)(\bar{a}_{12} \bar{a}_{33} + \bar{a}_{13} \bar{a}_{32}) \bar{\alpha} + \\ & + [1 - (\theta_B - \theta_C) \cos 2\gamma_0] \cos \beta_0 \dot{\bar{\beta}} - \\ & - (\theta_B - \theta_C) \left[(1 + 3 \sin^2 \alpha_0) \sin \beta_0 \sin 2\gamma_0 - \frac{3}{2} \sin 2\alpha_0 \cos 2\gamma_0 \right] \cos \beta_0 \bar{\beta} + \\ & + \ddot{\bar{\gamma}} + (\theta_B - \theta_C) [(\bar{a}_{22}^2 - \bar{a}_{23}^2) - 3(\bar{a}_{32}^2 - \bar{a}_{33}^2)] \bar{\gamma} = 0. \end{aligned}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$.

Перейдем к рассмотрению конкретных положений равновесия спутника. Для решений (13) с учетом выражений (1) для направляющих косинусов имеем $\sin \alpha_0 = 0$, $\sin \beta_0 = 0$, $\sin \gamma_0 = 0$ и линеаризованные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} & \theta_B \ddot{\bar{\alpha}} + \bar{a}_1 \bar{\alpha} = 0, \\ & \theta_C \ddot{\bar{\beta}} + b_2 \bar{\beta} + (b_1 - 1) \dot{\bar{\gamma}} \cos \beta_0 = 0, \tag{27} \\ & \ddot{\bar{\gamma}} + 4b_1 \bar{\gamma} + (1 - b_1) \dot{\bar{\beta}} \cos \beta_0 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \bar{a}_1 = 3(1 - \theta_C) + H_1 \bar{a}_{11}, \quad b_1 = \theta_B - \theta_C, \quad b_2 = \theta_B - 1 + H_1 \bar{a}_{11}, \\ & \cos \beta_0 = \pm 1, \quad \bar{a}_{11} = \pm 1. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы (27)

$$(\theta_B \lambda^2 + \bar{a}_1)(\theta_C \lambda^4 + a_1 \lambda^2 + a_2) = 0$$

распадается на квадратное и биквадратное уравнения. Здесь введены обозначения

$$a_1 = b_2 + 4\theta_C b_1 + (1 - b_1)^2, \quad a_2 = 4b_1 b_2.$$

Поскольку необходимым условием устойчивости является отсутствие корней характеристического уравнения с положительными действительными частями, то в случае, когда в уравнении присутствуют только четные степени λ , надо потребовать, чтобы все корни были чисто мнимыми. Другими словами, λ^2 должно быть вещественным и отрицательным. Таким образом, приходим к условиям

$$\bar{a}_1 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad D_2 = a_1^2 - 4\theta_C a_2 > 0. \quad (28)$$

Разумеется, наряду с (28) должны выполняться и неравенства треугольника (24).

Обратим внимание на то, что неравенство $a_1 > 0$ не может обращаться в равенство на границе области выполнения необходимых условий устойчивости (28), поскольку при $a_1 = 0$ из условия $D_2 > 0$ следует $a_2 < 0$, что противоречит (28).

Условие $a_2 > 0$ выполняется либо при $b_1 > 0, b_2 > 0$, либо при $b_1 < 0, b_2 < 0$. В первом случае выполняются все достаточные условия устойчивости (21). Очевидно, при этом выполняются также и все необходимые условия (28), т.е. $a_1 > 0$ и $D_2 > 0$. Таким образом, приходим к области, в которой выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости решений (13), уже полученной в предыдущем разделе.

Пусть теперь $b_1 < 0, b_2 < 0$. Тогда достаточные условия нарушаются, а необходимые условия принимают вид

$$\bar{a}_1 > 0, \quad a_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \theta_B < \theta_C, \quad \theta_B < 1 - H_1 \bar{a}_{11}. \quad (29)$$

Причем, из системы (24) можно исключить третье неравенство, так как при $\theta_B < \theta_C$ оно автоматически выполняется.

На границе области обращается в равенство по крайней мере одно из неравенств (29). При этом равенство $a_1 = 0$ возможно только, если одновременно $a_2 = 0$ и $D_2 = 0$. Таким образом, область может быть ограничена

прямыми $\bar{a}_1 = 0$, $\theta_C = 1 \pm \theta_B$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ и кривой $D_2 = 0$. Пример такой области и образующих ее границ приведен на рис. 7 ($\bar{a}_{11} = 1$). Область, где выполнены необходимые и достаточные условия устойчивости, выделена светло-серым цветом, область, где выполнены только необходимые условия устойчивости, выделена темно-серым цветом. Отметим, что кривая $D_2 = 0$ пересекает, а точнее, касается прямой $b_2 = 0$ в точке P_1 , через которую проходит также и кривая $a_1 = 0$. Прямые $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$ пересекаются в точке P_2 , где $\theta_B = \theta_C = 1 - H_1 \bar{a}_{11}$. Далее проанализируем отдельно случаи $\bar{a}_{22} = 1$ и $\bar{a}_{22} = -1$.

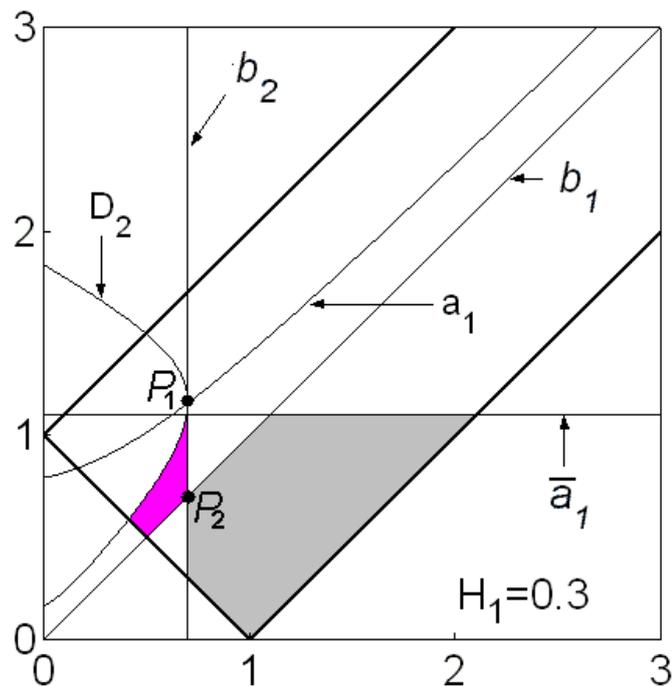


Рис. 7

Если $\bar{a}_{22} = 1$, то качественная смена формы области имеет место при таких значениях H_1 , когда точка P_1 оказывается на прямой $\theta_C = 1 + H_1/3$ и на пересечении прямых $\theta_B = \theta_C - 1$ и $\theta_B = 1 - \theta_C$, либо когда точка P_2 оказывается на прямой $\theta_B = 1 - \theta_C$. Отсюда следует существование бифуркационных значений $H_1 = 3/8$, $H_1 = 1/2$ и $H_1 = 1$. При последнем значении безразмерного параметра H_1 область выполнения необходимых условий устойчивости вырождается в точку и при $H_1 > 1$ перестает существовать. Эволюцию формы

области иллюстрирует рис. 8, на котором показаны области выполнения необходимых условий устойчивости решений (13) в случае $\bar{a}_{11} = 1$.

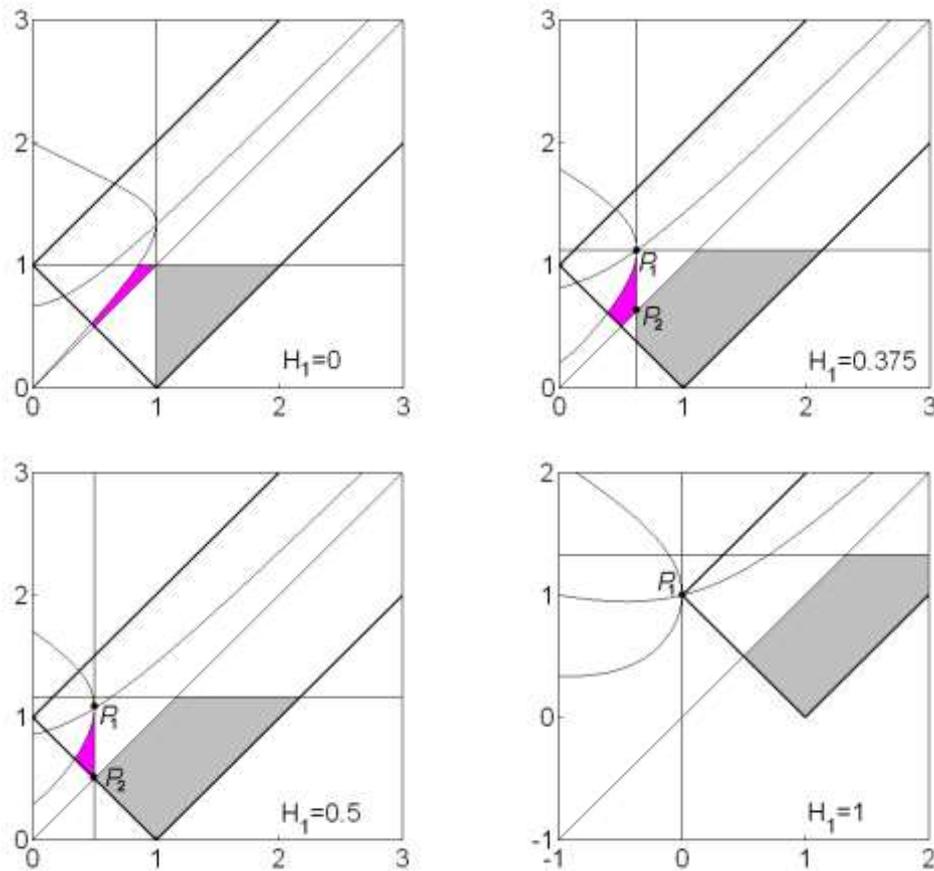


Рис. 8

Пусть теперь $\bar{a}_{11} = -1$. Область выполнения необходимых условий устойчивости, ограниченная прямыми $\theta_B = \theta_C$, $\theta_B + \theta_C = 1$, $\bar{a}_1 = 0$ и кривой $D_2 = 0$, с ростом параметра H_1 уменьшается вследствие сближения кривой $D_2 = 0$ и прямой $\theta_B = \theta_C$. Кроме того, смещается точка P_3 пересечения $D_2 = 0$ и $b_1 = 0$, в которой одновременно имеет место $a_1 = 0$. Качественная смена формы области происходит при $H_1 = 1/2$ и при $H_1 = 3/4$.

При $H_1 = 1/2$ точка P_3 ложится на границу рабочей области $\theta_B + \theta_C = 1$ и с этого момента область необходимых условий устойчивости ограничивается только линиями $\theta_B = \theta_C$, $\bar{a}_1 = 0$ и $D_2 = 0$. При $H_1 = 3/4$ точка P_3 оказывается на прямой $\bar{a}_1 = 0$. В результате область необходимых условий устойчивости вырождается в точку и перестает существовать. Напомним, что при этом же значении H_1 вырождается в точку и перестает существовать также и область

достаточных условий устойчивости. Таким образом, при $H_1 > 3/4$ для решений (13) при $\bar{a}_{11} = -1$ не существует областей, где выполняются необходимые и (или) достаточные условия устойчивости. На рис. 9 показаны соответствующие примеры областей для решений (13) в случае $\bar{a}_{11} = -1$.

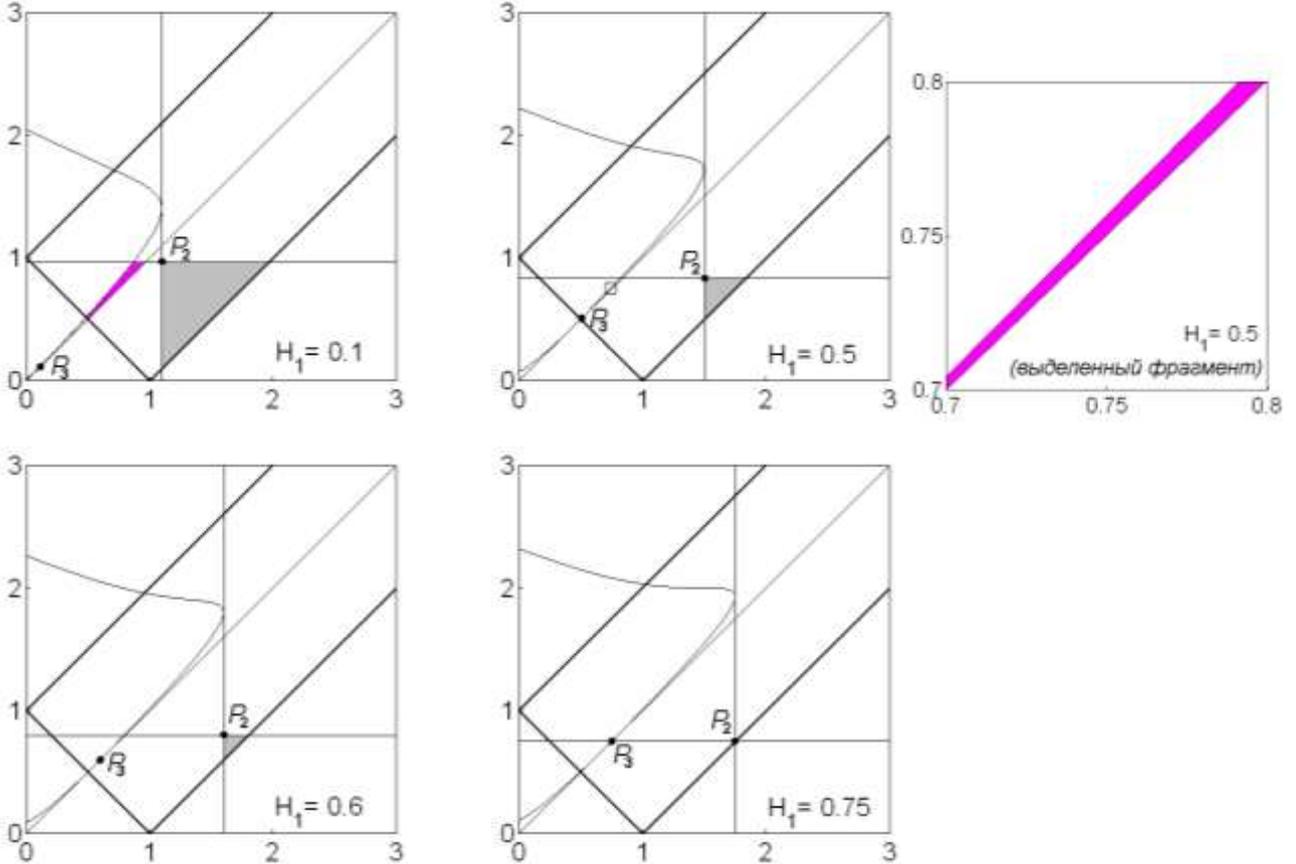


Рис. 9

Перейдем к решениям (15), для которых $\sin \beta_0 = 0$, $\sin \gamma_0 = 0$, $\cos^2 \alpha_0 = x^2 = H_1^2 / 9(1 - \theta_C)^2$. В результате система (26) приводится к виду

$$\begin{aligned} \theta_B \ddot{\bar{\alpha}} + \bar{a}_1 \bar{\alpha} &= 0, \\ \theta_C \ddot{\bar{\beta}} + [4(\theta_B - 1) - 3b_1 \cos^2 \alpha_0] \bar{\beta} + (b_1 - 1) \dot{\bar{\gamma}} \cos \beta_0 + 3b_1 x \bar{a}_{31} \bar{\gamma} \cos \beta_0 &= 0, \\ \ddot{\bar{\gamma}} \cos \beta_0 + b_1 (1 + 3 \cos^2 \alpha_0) \bar{\gamma} \cos \beta_0 + (1 - b_1) \dot{\bar{\beta}} + 3b_1 x \bar{a}_{31} \bar{\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\bar{a}_1 = 3(1 - \theta_C) \sin^2 \alpha_0, \quad b_1 = \theta_B - \theta_C, \quad a_{31} = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos \beta_0 = \pm 1.$$

Характеристическое уравнение системы (30)

$$(\theta_B \lambda^2 + \bar{a}_1)(\theta_C \lambda^4 + a_1 \lambda^2 + a_2) = 0$$

распадается на квадратное и биквадратное уравнения. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= 3b_1(\theta_C - 1)\cos^2 \alpha_0 + b_1\theta_C + 4(\theta_B - 1) + (1 - b_1)^2, \\ a_2 &= 4b_1b_2, \quad b_2 = \theta_B - 1 + 3(\theta_C - 1)\cos^2 \alpha_0. \end{aligned}$$

Необходимые условия устойчивости имеют вид (28). Кроме того, дополнительно следует удовлетворить условие существования решений (15), т.е. $x^2 < 1$. Легко показать, что неравенство $a_1 > 0$ не может обращаться в равенство на границе области выполнения необходимых условий устойчивости. Из вида \bar{a}_1 следует, что равенство $\bar{a}_1 = 0$ имеет место на прямых $c_{1,2} = \theta_C - 1 \mp H_1/3 = 0$ и $c_3 = \theta_C - 1 = 0$, причем последнюю прямую можно исключить, поскольку решения (15) не существуют, если $1 - H_1/3 < \theta_C < 1 + H_1/3$, а первые две прямые являются границами области существования решений (15).

Условие $a_2 > 0$ выполняется либо при $b_1 > 0, b_2 > 0$, либо при $b_1 < 0, b_2 < 0$. В первом случае выполняются все достаточные условия устойчивости (22). Очевидно, при этом выполняются также и все необходимые условия (28), т.е. $a_1 > 0$ и $D_2 > 0$. Таким образом, приходим к области, в которой выполняются необходимые и достаточные условия устойчивости решений (15), уже полученной в предыдущем разделе.

Пусть теперь $b_1 < 0, b_2 < 0$. Тогда достаточные условия нарушаются, а необходимые условия принимают вид

$$\bar{a}_1 > 0, \quad a_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \theta_B < \theta_C, \quad \theta_B < 1 - 3(\theta_C - 1)\cos^2 \alpha_0. \quad (31)$$

Отметим, что из системы (24) можно исключить третье неравенство, так как при $\theta_B < \theta_C$ оно автоматически выполняется. Пример области в плоскости (θ_B, θ_C) , где выполняются необходимые условия устойчивости, представлен на рис. 10. Область выделена темно-серым цветом и ограничена кривыми $b_2 = 0, D_2 = 0, \theta_C = \theta_B + 1$ и прямой $c_1 = 0$. Здесь же выделена светло-серым цветом область выполнения необходимых и достаточных условий устойчивости, которая ограничена прямыми $\theta_C = \theta_B - 1, b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

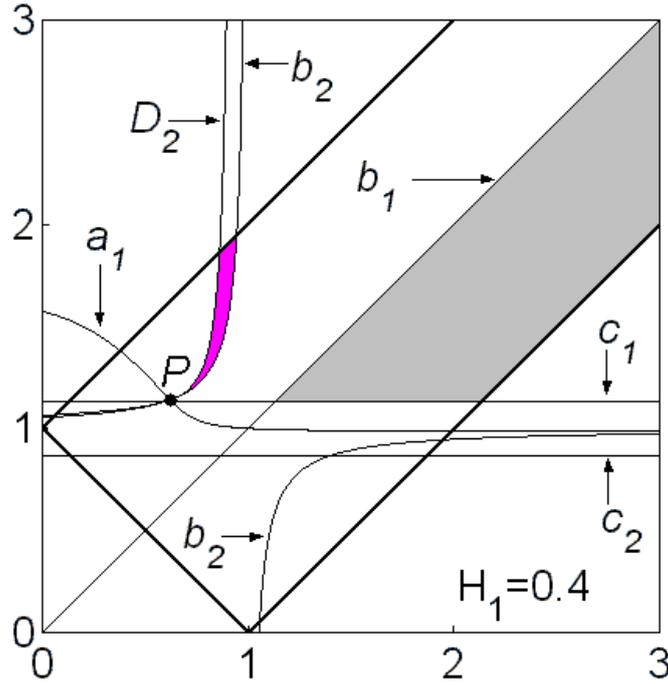


Рис. 10

Кривые D_2 , b_2 и a_1 пересекаются в общей точке P (точнее, кривая a_1 проходит через точку касания кривых D_2 и b_2). При малых значениях параметра H_1 точка P лежит между прямыми c_1 и c_2 .

Первое бифуркационное значение $H_1 = 3/8$ имеет место, когда P ложится на прямую c_1 . При $H_1 = \sqrt{3}/2$ точка P оказывается на границе рабочей области $\theta_C - \theta_B = 1$. В результате область выполнения необходимых условий устойчивости вырождается в точку и при $H_1 > \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ перестает существовать. На рис. 11 показаны соответствующие примеры областей выполнения необходимых условий устойчивости решений (15).

Наконец, рассмотрим решения (17), для которых $\sin \alpha_0 = 0$, $\sin \gamma_0 = 0$, $\cos^2 \beta_0 = 9y^2 = H_1^2 / (1 - \theta_B)^2$. В этом случае характеристическое уравнение системы (25) приводится к виду

$$a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_3 = 0, \quad (32)$$

где

$$a_0 = \theta_B \theta_C,$$

$$a_1 = [\theta_B \theta_C + (1 - \theta_C)(1 - \theta_B + 3\theta_C) + 3\theta_B \theta_C (\theta_B - \theta_C)] - (1 - \theta_B)(1 + \theta_B^2 - \theta_B - 2\theta_C - \theta_B \theta_C) \cos^2 \beta_0,$$

$$a_2 = [4(1-\theta_B)(1-\theta_C) + 3(\theta_B - \theta_C)(1 - 3\theta_C^2 - \theta_B + 2\theta_C + 2\theta_B\theta_C)] + \\ + (1-\theta_B)[4\theta_C - (\theta_B - \theta_C)(5 + 2\theta_B - 12\theta_C)]\cos^2 \beta_0 - \\ - 3(1-\theta_B)^2(\theta_B - \theta_C)\cos^4 \beta_0,$$

$$a_3 = 4(1-\theta_B)(\theta_B - \theta_C)[3(1-\theta_C) + (1-\theta_B)\cos^2 \beta_0]\sin^2 \beta_0.$$

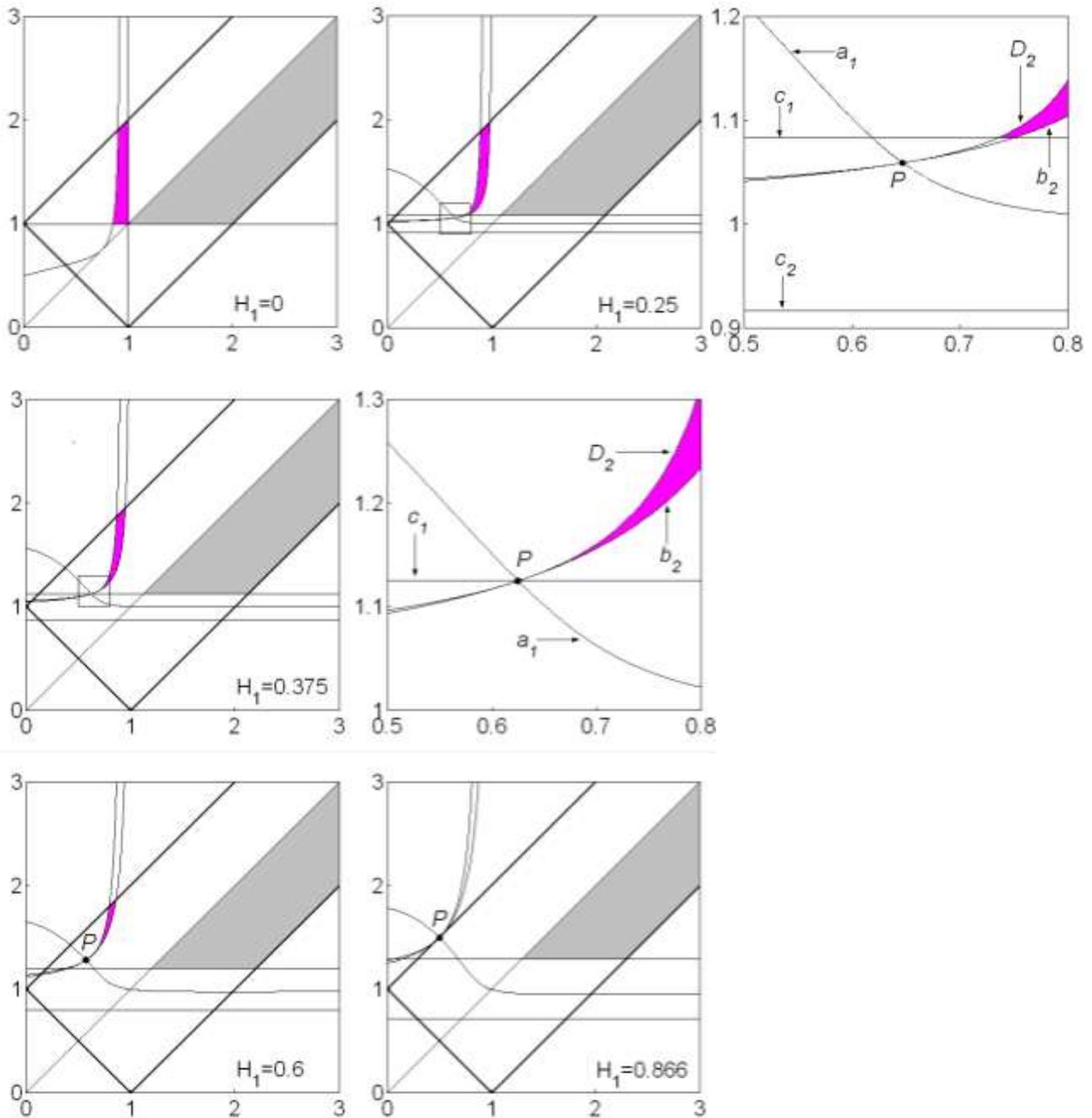


Рис.11

Необходимые условия устойчивости - условия чистой мнимости корней уравнения (32) - представляют собой систему неравенств [32]

$$\begin{aligned}
 a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad D_2 = a_1^2 - 3a_0a_2 > 0, \\
 D_3 = a_1^2a_2 - 4a_0a_2^2 + 3a_0a_1a_3 > 0, \\
 D_4 = a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_0^2a_3^2 > 0.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Как и в предыдущих случаях, наряду с (33) должны выполняться неравенства треугольника (24). Кроме того, дополнительно следует удовлетворить условие существования решений (17), т.е. $y^2 < 1/9$.

Легко показать, что на границе области (33) равенство $a_1 = 0$ возможно только в точках, где одновременно $a_2 = a_3 = 0$ и $D_2 = D_3 = D_4 = 0$. Аналогично, равенство $a_2 = 0$ возможно, если $a_3 = 0$ и $D_3 = D_4 = 0$. Более того, численные исследования показали, что границами области (33) могут быть только линии, на которых $a_3 = 0$ или $D_4 = 0$.

Из вида a_3 следует, что равенство $a_3 = 0$ имеет место на прямых $b_{1,2} = \theta_B - 1 \mp H_1$, $b_3 = \theta_B - \theta_C = 0$ и на гиперболе $b_4 = 3y^2(1 - \theta_B) + 1 - \theta_C$. Прямую $b_5 = 1 - \theta_B = 0$ ($\theta_B = 1$) можно сразу исключить из рассмотрения, поскольку решения (17) не существуют, если $1 - H_1 < \theta_B < 1 + H_1$. Пример области в плоскости (θ_B, θ_C) , где выполняются необходимые условия устойчивости, представлен на рис. 12. Область выделена темно-серым цветом и ограничена прямыми $b_4 = 0$, $\theta_C = \theta_B - 1$ и кривой $D_4 = 0$. Здесь же выделена светло-серым цветом область выполнения необходимых и достаточных условий устойчивости, которая ограничена прямыми $\theta_C = 1 - \theta_B$, $b_2 = 0$ и $b_3 = 0$. Кривые D_4 , a_2 и прямые b_1 и b_4 пересекаются в общей точке P_1 . Этот факт легко устанавливается исходя из уравнения этих кривых. Кроме того, можно найти координаты этой точки, как функции параметра H_1 : $P_1 = (1 + H_1, 1 - H_1/3)$.

Эволюция областей при изменении H_1 показана на рис. 13. Рис. 13.1 соответствует случаю, когда аэродинамический момент отсутствует ($H_1 = 0$). При $H_1 \neq 0$ прямая $\theta_B = 1$ расщепляется на две прямые $\theta_B = 1 \pm H_1$ ($b_{1,2} = 0$). Полоса $1 - H_1 < \theta_B < 1 + H_1$, в которой решения (17) не существуют, с ростом H_1 расширяется, и при $H_1 = 0.5$ точка P_2 выходит на границу рабочей области $\theta_C = 1 - \theta_B$. При этом область выполнения необходимых и достаточных условий устойчивости вырождается в точку (рис. 13.3) и при $H_1 > 0.5$ перестает существовать.

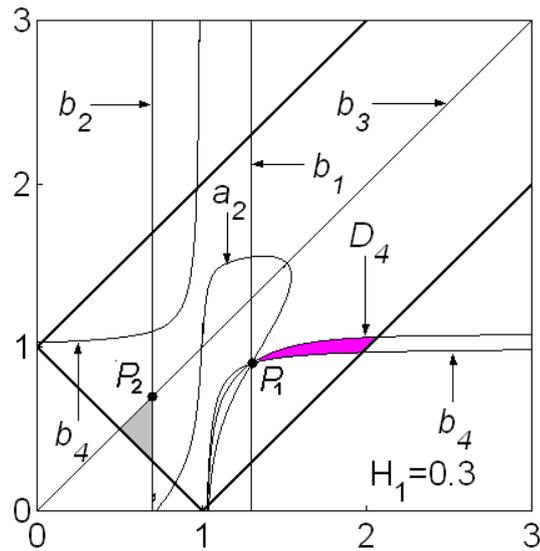


Рис.12

Область необходимых условий устойчивости с ростом H_1 также сокращается и при $H_1 = 3/4$, когда P_1 выходит на границу рабочей области $\theta_C = \theta_B - 1$, вырождается в точку (рис. 13.4). При $H_1 > 3/4$ необходимые условия устойчивости не выполняются ни в одной точке рабочей области.

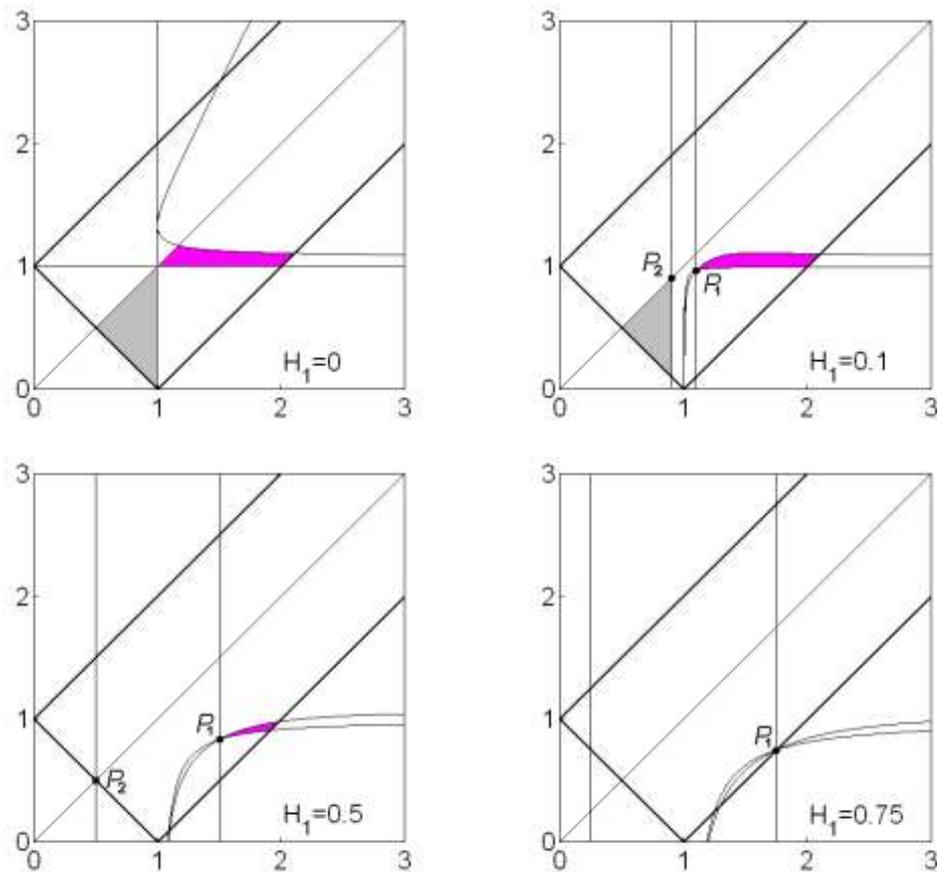


Рис.13

6. Заключение

В настоящей работе проведено исследование движения спутника относительно центра масс под действием гравитационного и аэродинамического моментов на круговой орбите. Основное внимание уделено определению положений равновесия спутника в орбитальной системе координат и анализу их устойчивости. В общем случае ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$) предложен численный метод определения всех положений равновесия спутника. При $h_1 \neq 0, h_2 = 0, h_3 = 0$ представлены в явном виде выражения для направляющих косинусов в зависимости от параметров θ_B, θ_C, H_1 для шести групп (13)-(18) положений равновесия. Доказано, что группы решений (13), (15), (17) переходят соответственно в группы решений (14), (16), (18) при замене $\theta_B \rightarrow \theta_C, \theta_C \rightarrow \theta_B$. С использованием теоремы Ляпунова получены в виде простых неравенств достаточные условия устойчивости положений равновесия. В заключительной части работы численно-аналитическим методом подробно исследована эволюция областей, где выполняются необходимые условия устойчивости, в плоскости параметров (θ_B, θ_C) при различных значениях параметра H_1 . Определены все бифуркационные значения H_1 , при которых происходит качественное изменение вида областей устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00652) и Португальского Фонда по науке и технике.

Литература

1. R.E. Roberson. Attitude control of a satellite – an outline of the problems, *7th International Astronautical Congress*, 1957, Barcelona, Spain (Proceedings, 1958, pp. 317-339).
2. D.B. DeBra. The effect of aerodynamic forces on satellite attitude, *Journal of Astronautical Sci.*, 1959, Vol. 6, No. 3, pp. 40-45.
3. J.K. Wall. The feasibility of aerodynamic attitude stabilization of a satellite vehicle, *American Rocket Soc. Preprints*, 1959, No. 787.
4. D.M. Schrello. Aerodynamic influences on satellite librations, *ARS Journal*, 1961, Vol. 31, No. 3, pp. 442-444.
5. D.M. Schrello. Dynamic stability of aerodynamically responsive satellites, *Journal of Aerospace Sci.*, 1962, Vol. 29, No. 10, pp. 1145–1155, 1163.
6. В.В. Белецкий. Движение искусственного спутника относительно центра масс, М., «Наука», 1965.
7. L. Meirovitch, F.B. Wallace, Jr. On the effect of aerodynamic and gravitational torques on the attitude stability of satellites, *AIAA Journal*, 1966, Vol. 4, No. 12, pp. 2196–2202.
8. V.J. Modi, S.K. Shrivastava. On the limiting regular stability and periodic solutions of a gravity oriented system in the presence of the atmosphere, *C.A.S.I. Transactions*, 1972, Vol. 5, No. 1, pp. 5-10.
9. В.А. Сарычев, М.Ю. Овчинников. Динамика спутника с пассивной аэродинамической системой ориентации, *Космические исследования*, 1994, т. 32, № 6, с. 561-575.
10. В.А. Сарычев. Влияние сопротивления атмосферы на систему гравитационной стабилизации искусственных спутников Земли, *Космические исследования*, 1964, т. 2, № 1, с. 23-32.
11. V.A. Sarychev. Dynamics of a satellite gravitational stabilization system with consideration of atmosphere resistance, *11th International Congress on Applied Mechanics*, 1964, Munich, FRG (Proceedings, Springer-Verlag, 1965, pp. 429-435).
12. V.A. Sarychev. Aerodynamic stabilization system of the satellite, *Proceedings of the International Conference on Attitude Changes and Stabilization of satellites*, 1968, pp. 177-183, Paris, France.

13. В.А. Сарычев. Условия устойчивости системы гравитационной стабилизации спутника с гиродемпфированием, *Astronautica Acta*, 1969, Vol. 14, № 4, pp. 299-310.
14. В.А. Сарычев, Ю.А. Садов. Анализ динамики спутника с гироаэродинамической системой ориентации, Сборник «Космическая стрела. Оптические исследования атмосферы», М., «Наука», 1974, с. 71-88.
15. В.И. Драновский, В.Н. Зигунов, Н.Г. Новоселова, Л.В. Соколов. Математическая нелинейная модель гироаэродинамической системы ориентации, Сборник «Космическая стрела. Оптические исследования атмосферы», М., «Наука», 1974, с. 47-54.
16. В.А. Сарычев. Вопросы ориентации искусственных спутников, *Итоги науки и техники. Серия «Исследование космического пространства»*, ВИНТИ, т. 11, 1978.
17. В.А. Сарычев, С.А. Мирер, В.А. Златоустов. Оптимальные параметры аэрогироскопической системы ориентации спутников, *Космические исследования*, 1984, т. 22, № 3, с. 369-380.
18. L. Pacini, D. Skillman. A passive aerodynamically stabilized satellite for low Earth orbit, *AAS Paper 95-173*, Feb. 1995, pp. 625-630.
19. R.R. Kumar, D.D. Mazanek, M.L. Heck. Simulation and Shuttle Hitchhiker validation of passive satellite aerostabilization, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1995, Vol. 32, No. 5, pp. 806-811.
20. R.R. Kumar, D.D. Mazanek, M.L. Heck. Parametric and classical resonance in passive satellite aerostabilization, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1996, Vol. 33, No. 2, pp. 228-234.
21. V. A. Sarychev, V. V. Sazonov. Gravity gradient stabilization of large space stations, *Acta Astronautica*, 1981, Vol. 8, No. 5-6, pp. 549-573.
22. В.А. Сарычев, В.В. Сазонов. Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника, *Космические исследования*, 1982, т. 20, № 5, с. 659-673.
23. V.A. Sarychev, V.V. Sazonov. Gravity gradient stabilization of the Salyut - Souz orbital complex, *Acta Astronautica*, 1984, Vol. 11, No. 7-8, pp. 435-447.
24. Г.М. Гречко, В.А. Сарычев, В.П. Легостаев, В.В. Сазонов, И.Н. Гансвинд. Гравитационная ориентация орбитального комплекса

- «Салют-6»-«Союз», *Космические исследования*, 1985, т. 23, № 5, с. 659-675.
25. V.A. Sarychev, V.P. Legostaev, V.V. Sazonov, M.Yu. Belyaev, I.N. Gansvind, T.N. Tyun. The passive attitude motion of the orbital stations Salyut-6 and Salyut-7, *Acta Astronautica*, 1987, Vol. 15, No. 9, pp. 635-640.
 26. G.S. Nurre. Effects of aerodynamic torques on an asymmetric, gravity stabilized satellite, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1968, Vol. 5, No. 9, pp.1046-1050.
 27. M.A. Frik. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques, *AIAA Journal*, 1970, Vol. 8, No. 10, pp. 1780-1785.
 28. В.В. Сазонов. О механизме потери устойчивости в гравитационно-ориентированном спутнике, *Космические исследования*, 1989, т. 27, № 6, с. 836-848.
 29. V.A. Sarychev, S.A. Mirer. Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2000, Vol 76, No. 1, pp. 55-68.
 30. T.R. Kane, P.W. Likins, D.A. Levinson. *Spacecraft Dynamics*, 1983, McGraw-Hill.
 31. В.А. Сарычев, С.А. Гутник. К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата, *Космические исследования*, 1984, т. 22, № 3, с. 323-326.
 32. А.М. Кац. К вопросу о критерии аperiodической устойчивости, *Прикладная математика и механика*, 1951, т. 15, № 1, с. 120.