

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российская академия наук

Н.А. Зайцев, И.Л. Софронов

Метод расчета некоторых низкочастотных
электромагнитных задач
в цилиндрической геометрии

Препринт № за 2004 год

Москва, 2004

Н.А. Зайцев, И.Л. Софронов. **Метод расчета некоторых низкочастотных электромагнитных задач в цилиндрической геометрии**

Аннотация. Предложен численный метод расчета гармонического электромагнитного поля в металлической трубе при наличии вращательной симметрии. Особенностью задачи является удаленность источника поля от области интереса и необходимость нахождения решений для разных положений источника вдоль оси. Метод основан на прямом решении системы разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальную задачу конечными разностями второго порядка. На торцах цилиндрической расчетной области применяются точные разностные граничные условия, причем неоднородные, если источник находится за пределами этой области.

N. Zaitsev and Ivan Sofronov. **Method of calculating low-frequency electromagnetic problems in cylindrical geometry**

Abstract. A numerical method of calculating harmonic electromagnetic field in the metallic pipe with rotational symmetry is proposed. The problem can have source located sufficiently far from the domain of interest, as well as multiple positions of the source along the axis. The method is based on the direct solution of discrete equations approximating differential problem by second order finite-differences. Exact non-local difference boundary conditions are used on faces, which are inhomogeneous if the source is outside the domain of interest.

Введение

Цель настоящей работы состоит в разработке метода расчета гармонического электромагнитного поля в цилиндрической (r,z) -геометрии. Основные особенности рассматриваемого класса задач состоят в следующем:

1. Задача ставится в неограниченной области (протяженная металлическая труба), хотя область, где необходимо знать решение, ограничена (окрестность небольшой части трубы);
2. При одной и той же геометрии ищутся решения для разных правых частей (положение источника меняется по z);
3. Источник может быть достаточно удален от области, где необходимо знать решение;
4. Магнитная проницаемость и электрическая проводимость могут испытывать разрывы (например, переход металл-воздух);
5. Численное решение должно обеспечивать достаточную точность как вдали так и вблизи от разрывов (например, для вычисления вторых производных от решения), и аппроксимацию на разрывах;
6. Алгоритм решения должен быть достаточно быстр и надежен, поскольку он необходим также и для последующего построения метода решения обратных задач (определение свойств материалов и геометрии по известному электромагнитному полю).

В работе предлагается описание метода, который, по мнению авторов, вполне отвечает указанным требованиям. Приводятся результаты численного тестирования алгоритма, реализующего данный метод.

Отметим основные особенности предложенного метода:

1. Задача сводится к решению скалярного эллиптического уравнения для угловой компоненты электрического поля;
2. Дискретизация проводится конечными разностями на неравномерной регулярной сетке;
3. На торцах цилиндрической расчетной области применяются точные разностные граничные условия, причем неоднородные, если источник находится за пределами этой области;
4. Система разностных уравнений решается прямым методом с машинной точностью с использованием матричной прогонки;
5. Число операций, необходимое для решения L задач на сетке из M узлов по радиусу и N узлов по оси оценивается как $O\left((NM^2(M+L))\right)$.

Структура работы следующая. В первом параграфе формулируется постановка задачи. Во втором параграфе описывается дискретизация. Третий параграф посвящен построению нелокальных граничных условий на торцах. В четвертом параграфе описан метод решения системы разностных уравнений. Пятый параграф содержит результаты тестирования алгоритма.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 04-01-00567 и при поддержке гранта RM0-1298, CRDF. Авторы благодарны также А.В. Мясникову за помощь в разработке алгоритма.

1 Формулировка задачи

Рассмотрим задачу расчета электромагнитного поля в (r,z) -координатах вблизи стенки трубы. Стенка трубы может иметь круговые дефекты (канавки), которые – для простоты – являются прямоугольными в плоскости (r,z) . Источники (катушка), возбуждающие электромагнитное поле, также круговые, причем с осью, совпадающей с осью трубы. Общий вид (r,z) геометрии задачи представлен на Рис. 1-1, где ось системы координат схематично показана слева, штриховкой обозначена стенка трубы с двумя канавками, буквой S обозначен точечный источник (виток). Приведена также прямоугольная сетка, используемая для дискретизации.

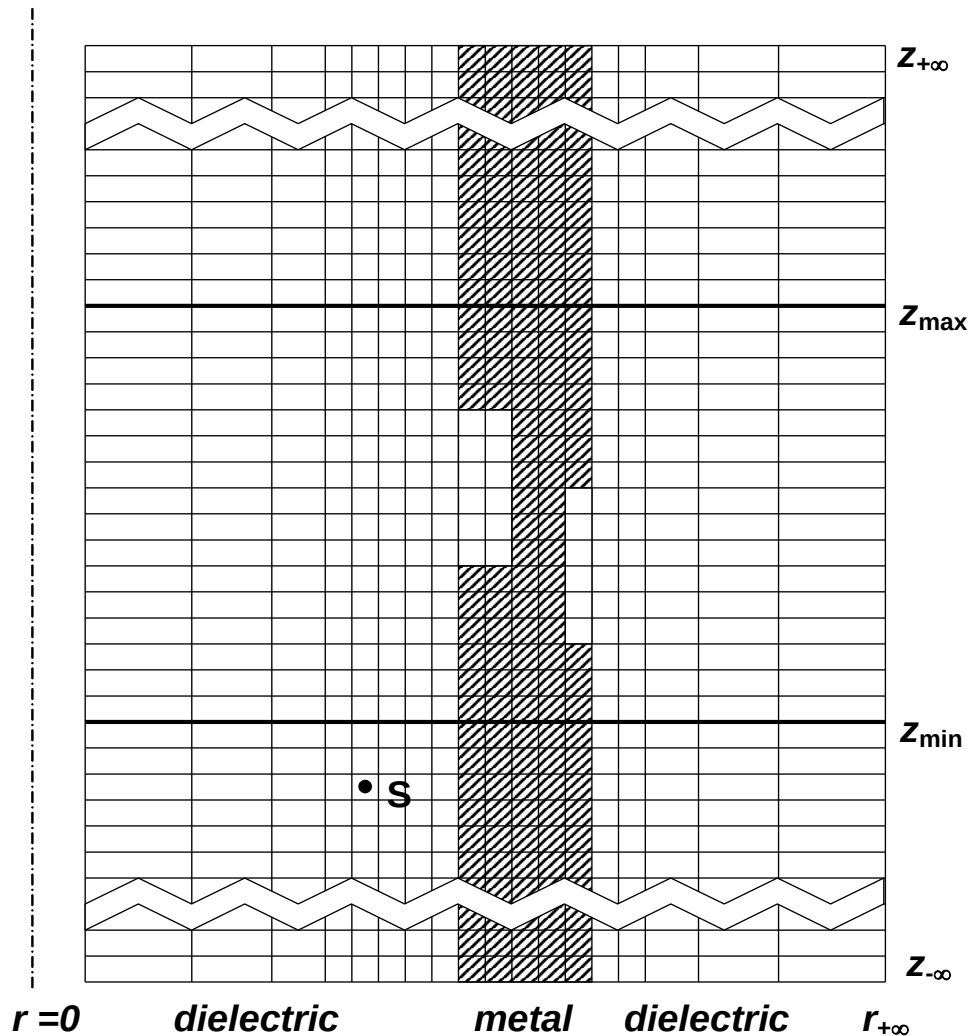


Рис. 1-1: Геометрия задачи

Система уравнений Максвелла для гармонических по времени решений $(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{H}e^{-i\omega t})$ с частотой ω имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \hat{\sigma} \mathbf{E} &= \mathbf{J}^S; \quad \hat{\sigma} = \sigma - i\omega\epsilon; \\ \text{rot } \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} &= 0; \end{aligned}$$

где $\mathbf{J}^S$ – плотность тока источника, удовлетворяющая условию $\text{div } \mathbf{J}^S = 0$; μ, σ, ε – независимые от времени параметры среды. С учетом вращательной симметрии задачи уравнения сводятся к одному скалярному уравнению второго порядка для угловой компоненты электрического поля $u \equiv E^\theta$:

Equation Section 0(1)
$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{i\omega r \mu} \frac{\partial ru}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{i\omega \mu} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - (\sigma - i\omega \varepsilon) u = J^S$$

где J^S – заданная угловая компонента плотности тока.

Толщина провода возбуждающего витка обычно много меньше размера расчетной ячейки. Поэтому мы будем рассматривать элементарную задачу с *точечным* источником тока, т.е. рассматривать правую часть вида $J^S \delta(r - r_S) \delta(z - z_S)$, где (r_S, z_S) – координаты точечного источника, δ – функция Дирака. Если же возбуждающая обмотка имеет площадь, покрывающую несколько ячеек некоторой расчетной сетки, то, очевидно, решение можно найти путем суммирования решений соответствующих элементарных задач.

Для невысоких частот обычно используют *квазистационарное приближение*, см. [1], полагая $\varepsilon = 0$. Тогда основное уравнение принимает вид:

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial ru}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + i\omega \sigma u = -i\omega J^S \delta(r - r_S) \delta(z - z_S).$$

Исходная задача рассматривается в неограниченной области, причем решение убывает на бесконечности. Поэтому мы ставим граничное условие $u = 0$ на границах прямоугольника $z = z_{-\infty}$, $z = z_{+\infty}$ и $r = r_{+\infty}$, расположенных достаточно далеко от области, в которой нам необходимо знать решение. Эта область определяется неравенством $z_{\min} < z < z_{\max}$, где $z_{\min} \gg z_{-\infty}$, $z_{\max} \ll z_{+\infty}$, и находится внутри трубы. Кроме того, естественное условие $u = 0$ ставится на оси $r = 0$.

Важной особенностью постановки задачи является то, что необходимо вычислить решения группы задач, различающихся положением источника (точнее – коротких отрезков, составленных из точечных источников), пробегающим вдоль протяженного отрезка с фиксированной координатой $r = r_S$. Иными словами мы приходим к необходимости решения набора элементарных задач с разными значениями координаты z точечного источника S вдоль некоторого отрезка.

2 Разностная схема

Разобьем всю большую область $\{r \in [0, r_{+\infty}], z \in [z_{-\infty}, z_{+\infty}]\}$ на прямоугольные ячейки, см. Рис. 1-1, имеющих размер $h_{m+1/2}^r \times h_{j+1/2}^z$ и введем сеточные координаты:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, \quad r_{1+1/2} = r_1 + h_1^r/2, \quad r_{m+1/2} = r_{m-1/2} + h_m^r, \\ r_m &= (r_{m+1/2} + r_{m-1/2})/2, \quad m = 2, \dots, M, \\ z_{j_{\min}-1/2} &= z_{\min}, \quad z_{j+1/2} = z_{j-1/2} + h_j^z, \quad z_{j_{\max}+1/2} = z_{\max}, \\ z_j &= (z_{j+1/2} + z_{j-1/2})/2, \quad j = j_{-\infty}, \dots, j_{+\infty}. \end{aligned}$$

Шаги двойственной сетки $h_{m+1/2}^r$ и $h_{j+1/2}^z$ определяются как расстояния между центрами ячеек, поэтому

$$h_{m+1/2}^r = (h_{m+1}^r + h_m^r)/2, \quad h_{j+1/2}^z = (h_{j+1}^z + h_j^z)/2.$$

Согласно этим определениям, границы ячеек соответствуют полуцелым точкам $(r_{m+1/2}, z_{j+1/2})$.

Неизвестная функция u представляется сеточной функцией $u_{m,j}$, приписанной к центру ячейки (r_m, z_j) .

Уравнение (2) аппроксимируется следующей разностной схемой:

$$(3) \quad (L^h u)_{m,j} = s_{m,j}, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j = j_{-\infty} + 1, \dots, j_{+\infty} - 1$$

где

$$\begin{aligned} (4) \quad (L^h u)_{m,j} &\equiv \frac{1}{h_m^r} \left[\frac{r_{m+1} u_{m+1,j} - r_m u_{m,j}}{\mu_{m+1/2,j} h_{m+1/2}^r r_{m+1/2}} - \frac{r_m u_{m,j} - r_{m-1} u_{m-1,j}}{\mu_{m-1/2,j} h_{m-1/2}^r r_{m-1/2}} \right] + \\ &+ \frac{1}{h_j^z} \left[\frac{u_{m,j+1} - u_{m,j}}{\mu_{m,j+1/2} h_{j+1/2}^z} - \frac{u_{m,j} - u_{m,j-1}}{\mu_{m,j-1/2} h_{j-1/2}^z} \right] + \\ &+ i\omega \sigma_{m,j} u_{m,j}. \end{aligned}$$

При выводе этих уравнений мы полагали, что $\mu = \text{const}$ внутри ячейки, и использовали условия непрерывности функции u и потоков

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r}(ru),$$

вытекающие из физики задачи, чтобы найти величины с полуцелыми индексами (на границах ячейки). Аппроксимация первого потока дает связи

$$\frac{u_{m,j+1} - u_{m,j+1/2}}{\mu_{m,j+1} h_{j+1}^z / 2} = \frac{u_{m,j+1} - u_{m,j}}{\mu_{m,j+1/2} (h_{j+1}^z + h_j^z) / 2}$$

и

$$\frac{u_{m,j+1/2} - u_{m,j}}{\mu_{m,j} h_j^z / 2} = \frac{u_{m,j+1} - u_{m,j}}{\mu_{m,j+1/2} (h_{j+1}^z + h_j^z) / 2}.$$

Тогда, исключая $u_{m,j+1/2}$, получаем выражение

$$\mu_{m,j+1/2} = \frac{\mu_{m,j+1} h_{j+1}^z + \mu_{m,j} h_j^z}{h_{j+1}^z + h_j^z}.$$

Аналогично из условий, аппроксимирующих второй поток,

$$\frac{r_{m+1} u_{m+1,j} - r_{m+1/2} u_{m+1/2,j}}{\mu_{m+1} r_{m+3/4} h_{m+1}^r / 2} = \frac{r_{m+1} u_{m+1,j} - r_m u_m}{\mu_{m+1/2,j} r_{m+1/2} (h_{m+1}^r + h_m^r) / 2}$$

и

$$\frac{r_{m+1/2} u_{m+1/2,j} - r_m u_{m,j}}{\mu_m r_{m+1/4} h_m^r / 2} = \frac{r_{m+1} u_{m+1,j} - r_m u_m}{\mu_{m+1/2,j} r_{m+1/2} (h_{m+1}^r + h_m^r) / 2},$$

получаем, что

$$\mu_{m+1/2,j} = \frac{\mu_{m+1,j} (r_{m+3/4})^v h_{m+1}^r + \mu_{m,j} (r_{m+1/4})^v h_m^r}{(r_{m+1/2})^v (h_{m+1}^r + h_m^r)}$$

где использованы обозначения $r_{m+1/4} = r_m + h_m / 4$, $r_{m+3/4} = r_{m+1} - h_{m+1} / 4$. Заметим, что последнее уравнение может быть записано в виде

$$\mu_{m+1/2,j} = \frac{\mu_{m+1,j} (r_{m+1}^2 - r_{m+1/2}^2) + \mu_{m,j} (r_{m+1/2}^2 - r_m^2)}{2 r_{m+1/2} (r_{m+1} - r_m)}.$$

Правая часть разностного уравнения имеет вид

$$s_{m,j} := -i\omega J^S \delta(m - m_S) \delta(j - j_S) / (h_m^r h_j^z),$$

где индексы m_S, j_S соответствуют координате точечного источника.

Окончательно разностная задача замыкается однородными граничными условиями Дирихле:

$$(5) \quad u_{1,j} = u_{M,j} = 0, \quad j = j_{-\infty}, \dots, j_{+\infty},$$

$$(6) \quad u_{m,j_{-\infty}} = u_{m,j_{+\infty}} = 0, \quad m = 1, \dots, M$$

3 Нелокальные граничные условия на торцах расчетной области

Чтобы резко сократить вычислительные затраты, мы будем использовать область $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$, где действительно необходимо знать решение, в качестве *вычислительной области* (вместо всей, «большой», области $z_{-\infty} \leq z \leq z_{+\infty}$, где ставится задача). Это, очевидно, возможно, если мы построим на границах $z = z_{\min}$ и $z = z_{\max}$ искусственные граничные условия такие, что решение с ними задачи в вычислительной области совпадает с решением задачи (3)–(6) в большой области.

Для этого полагаем, что вне вычислительной области $z_{\min} < z < z_{\max}$ стенка трубы не имеет дефектов, а параметры μ и σ являются постоянными как в металле так и в диэлектрике.

Вначале построим искомые граничные условия на границе $z = z_{\min}$. В соответствии с постановкой задачи, источники могут находиться как внутри так и вне области $z < z_{\min}$. Поэтому граничные условия могут быть неоднородными.

3.1 Однородные граничные условия

Будем строить однородные граничные условия в виде

$$(7) \quad \mathbf{u}^{(j_{\min}-1)} = \mathcal{F} \left[\mathbf{u}^{(j_{\min})} \right],$$

где $\mathbf{u}^{(j_{\min})} \equiv (u_{1,j_{\min}}, u_{2,j_{\min}}, \dots, u_{M,j_{\min}})$ – вектор значений функции на линии $j = j_{\min}$, а оператор (матрица) $\mathcal{F}$ должен быть таким, что (7) справедливо для любого решения задачи (3) – (6) с нулевой правой частью в области $z < z_{\min}$.

Отметим, что идея построения такого рода точных нелокальных разностных условий принадлежит В.С. Рябенькому и использовалась в работах [2], [3].

Очевидно, что если на линии $j = j_{\min}$ известен след некоторого решения $\{w_{m,j}\}$ исходной задачи в «большой» области, то восстановить это решение на линии

$j = j_{\min} - 1$ можно путем решения задачи Дирихле для (3) в области $\{1 < m < M, j_{-\infty} < j < j_{\min}\}$ со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_{1,j} &= u_{M,j} = 0, \quad j = j_{-\infty}, \dots, j_{\min}, \\ u_{m,j_{-\infty}} &= 0, \quad m = 1, \dots, M, \\ u_{m,j_{\min}} &= w_{m,j_{\min}}, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Рассмотрим базисные вектора $\mathbf{e}^l \equiv (e_1^l, e_2^l, \dots, e_m^l, \dots, e_M^l)$, где $e_m^l = \delta_m^l$, т.е. все компоненты вектора $\mathbf{e}^l$ равны нулю кроме компоненты e_l^l , равной единице. Обозначим вектор $\mathcal{F}\mathbf{e}^l$ через $\mathbf{f}^l$. Тогда

$$\mathcal{F}\left[\mathbf{u}^{(j_{\min})}\right] := \sum_{l=2}^{M-1} \mathbf{f}^l u_{l,j_{\min}},$$

а искомое условие (7) принимает вид

$$(8) \quad \mathbf{u}^{(j_{\min}-1)} = \mathbf{F}\mathbf{u}^{(j_{\min})},$$

где l -ый столбец матрицы $\mathbf{F}$ является вектором $\mathbf{f}^l$ при $2 < l < M-1$, а первый и M -ый столбцы – нулевые. Очевидно, что для вычисления $\mathbf{F}$ нужно решить серию указанных задач Дирихле.

Вычисление $\mathbf{F}$ осуществляется достаточно быстро с помощью метода Фурье – за $O(M^2 N)$ операций, где $N = j_{\min} - j_{-\infty}$. Для этого мы используем равномерную сетку $h_j^z = h^z = \text{const}$ в области $z_{-\infty} \leq z \leq z_{\min}$, т.е. для $j = j_{-\infty}, \dots, j_{\min}$. Вектор $\mathbf{f}^l$ является следом на $j = j_{\min} - 1$ решения задачи

$$\begin{aligned} (L^h u)_{m,j} &= 0, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j = j_{\max} + 1, \dots, j_{+\infty} - 1, \\ u_{1,j} &= u_{M,j} = 0, \quad j = j_{-\infty}, \dots, j_{\min}, \\ u_{m,j_{-\infty}} &= 0, \quad m = 1, \dots, M, \\ u_{m,j_{\min}} &= e_m^l, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Чтобы применить метод Фурье, мы полагаем $u_{m,j} = u'_{m,j} + \delta_m^l \delta_j^{j_{\min}}$, где $u'_{m,j}$ является решением уравнения

$$(L^h u')_{m,j} = -(L^h \delta^l \delta^{j_{\min}})_{m,j}, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j = j_{-\infty} + 1, \dots, j_{\min} - 1$$

с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} u_{1,j} = u_{M,j} = 0, \quad j = j_{-\infty}, \dots, j_{\min}, \\ u_{m,j_{-\infty}} = u_{m,j_{\min}} = 0, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Опишем алгоритм нахождения решения. Рассмотрим уравнение с дельта-функцией в правой части:

$$\begin{aligned} (9) \quad (L^h w)_{m,j} &= S \delta_m^l \delta_j^n, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N-1 \\ w_{1,j} &= w_{M,j} = 0, \quad j = 0, \dots, N, \\ w_{m,0} &= w_{m,N} = 0, \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

где $N = j_{\min} - j_{-\infty}$, $S \in \mathbb{C}$. Мы полагаем, что коэффициенты μ и σ уравнения зависят только от индекса m , а шаг h^z – постоянный. Тогда оператор L^h имеет вид

$$\begin{aligned} (10) \quad (L^h w)_{m,j} &\equiv \frac{1}{h_m^r} \left[\frac{r_{m+1} w_{m+1,j} - r_m w_{m,j}}{\mu_{m+1/2} h_{m+1/2}^r r_{m+1/2}} - \frac{r_m w_{m,j} - r_{m-1} w_{m-1,j}}{\mu_{m-1/2} h_{m-1/2}^r r_{m-1/2}} \right] + \\ &+ \frac{w_{m,j+1} - 2w_{m,j} + w_{m,j-1}}{\mu_m (h^z)^2} + i\omega \sigma_m w_{m,j}. \end{aligned}$$

Подставляя дискретное синус-преобразование w по индексу j

$$(11) \quad w_{m,j} = \frac{2}{N} \sum_{j'=1}^{N-1} \zeta_{m,j'} \sin(\pi j j' / N), \quad \zeta_{m,j'} = \sum_{j=1}^{N-1} w_{m,j} \sin(\pi j j' / N)$$

в (10) и учитывая, что

$$\begin{aligned} &\sin(\pi j'(j+1)/N) - 2\sin(\pi j'j/N) + \sin(\pi j'(j-1)/N) \\ &= \sin(\pi j'j/N) 2[\cos(\pi j'/N) - 1] \end{aligned},$$

мы получаем следующий набор уравнений для коэффициентов Фурье $\zeta_{m,k}$:

$$(12) \quad (\hat{L}^h \zeta)_{m,j'} = d_{m,j'}, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j' = 1, \dots, N-1$$

с однородными граничными условиями

$$\zeta_{1,j'} = \zeta_{M,j'} = 0, \quad j' = 0, \dots, N,$$

где

$$\begin{aligned} \left(\hat{L}^h \zeta \right)_{m,j'} &\equiv \frac{1}{h_m^r} \left[\frac{r_{m+1} \zeta_{m+1,j'} - r_m \zeta_{m,j'}}{\mu_{m+1/2} h_{m+1/2}^r r_{m+1/2}} - \frac{r_m \zeta_{m,j'} - r_{m-1} \zeta_{m-1,j'}}{\mu_{m-1/2} h_{m-1/2}^r r_{m-1/2}} \right] \\ &+ \frac{2 [\cos(\pi j' / N) - 1]}{\mu_m (h^z)^2} \zeta_{m,j'} + i\omega \sigma_m \zeta_{m,j'} \end{aligned},$$

$$d_{m,j'} = S \delta_m^l \sin(\pi j' n / N).$$

Уравнения (12) можно переписать для каждой k -ой гармоники $\zeta_{m,k}$ следующим образом:

$$(13) \quad a_m \zeta_{m-1,j'} + b_m \zeta_{m,j'} + c_m \zeta_{m+1,j'} = d_{m,j'}, \quad m = 2, \dots, M-1,$$

где

$$a_m = \frac{1}{h_m^r \mu_{m-1/2} h_{m-1/2}^r} \cdot \left(\frac{r_{m-1}}{r_{m-1/2}} \right), \quad \mu_{m-1/2} = \frac{\mu_{m-1} r_{m-3/4} h_{m-1}^r + \mu_m r_{m-1/4} h_m^r}{r_{m-1/2} (h_{m-1}^r + h_m^r)},$$

$$r_{m-1/4} = r_m - h_m / 4, \quad r_{m-1/2} = r_m - h_m / 2, \quad r_{m-3/4} = r_{m-1} + h_{m-1} / 4;$$

$$c_m = \frac{1}{h_m^r \mu_{m+1/2} h_{m+1/2}^r} \cdot \left(\frac{r_{m+1}}{r_{m+1/2}} \right), \quad \mu_{m+1/2} = \frac{\mu_{m+1} r_{m+3/4} h_{m+1}^r + \mu_m r_{m+1/4} h_m^r}{r_{m_e+1/2} (h_{m_e+1}^r + h_{m_e}^r)},$$

$$r_{m+1/4} = r_m + h_m / 4, \quad r_{m+1/2} = r_m + h_m / 2, \quad r_{m+3/4} = r_{m+1} - h_{m+1} / 4;$$

$$b_m = \frac{2 [\cos(\pi k / N) - 1]}{\mu_m (h^z)^2} + i\omega \sigma_m - \frac{1}{h_m^r \mu_{m-1/2} h_{m-1/2}^r} \cdot \left(\frac{r_m}{r_{m-1/2}} \right)$$

$$- \frac{1}{h_m^r \mu_{m+1/2} h_{m+1/2}^r} \cdot \left(\frac{r_m}{r_{m+1/2}} \right).$$

Уравнения (13) решаем прогонкой: вначале вычисляем коэффициенты α_m и β_m по формулам

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0,$$

$$\alpha_{m+1} = \frac{-c_m}{a_m \alpha_m + b_m}, \quad \beta_{m+1} = \frac{d_{m,k} - a_m \beta_m}{a_m \alpha_m + b_m}, \quad m = 2, \dots, M-1,$$

а затем получаем решение рекурсией

$$\zeta_{m-1,k} = \alpha_m \zeta_{m,k} + \beta_m, \quad m = 2, \dots, M$$

с $\zeta_{M,k} = 0$.

После решения (13) элементы матрицы $\mathbf{F}$ вычисляются как

$$f_m^l = \frac{2}{N} \sum_{j'=1}^{N-1} \zeta_{m,j'} \sin(\pi j' / N).$$

Заметим, что если сетка в области $z_{\max} \leq z \leq z_{+\infty}$ такая же как и рассмотренной области $z_{-\infty} \leq z \leq z_{\min}$, то из-за инвариантности уравнений относительно замены переменных $z \rightarrow \text{const} - z$ искусственные граничные условия на границе $z = z_{\max}$ будут определяться той же матрицей:

$$(14) \quad \mathbf{u}^{(j_{\max}+1)} = \mathbf{F} \mathbf{u}^{(j_{\max})}.$$

3.2 Неоднородные граничные условия

Очевидно, что в этом случае условие на границе $z = z_{\min}$ будет иметь вид

$$\mathbf{u}^{(j_{\min}-1)} = \mathbf{F} \mathbf{u}^{(j_{\min})} + \mathbf{g}$$

с той же матрицей $\mathbf{F}$ и некоторым вектором $\mathbf{g}$, зависящим от местоположения и значения правой части.

Чтобы определить вектор $\mathbf{g}$, мы заметим, что если решение $w_{m,j}^n$ задачи (3) – (6) с некоторой ненулевой правой частью в области $z < z_{\min}$ известно на линии $j = j_{\min}$, то его можно восстановить на линии $j = j_{\min} - 1$ путем решения задачи Дирихле для (3) в области $D^- \equiv \{1 < m < M, j_{-\infty} < j < j_{\min}\}$ с граничными условиями

$$u_{1,j} = u_{M,j} = 0, \quad j = j_{-\infty}, \dots, j_{\min},$$

$$(15) \quad \begin{aligned} u_{m,j_{-\infty}} &= 0, \quad m = 1, \dots, M, \\ u_{m,j_{\min}} &= w_{m,j_{\min}}^n, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Рассмотрим решение $w_{m,j}^p$ указанной задачи с условиями

$$(16) \quad w_{m,j_{\min}}^p = 0, \quad m = 1, \dots, M$$

вместо (15). Очевидно, что функция $w_{m,j}^u = w_{m,j}^n - w_{m,j}^p$ будет являться решением однородного уравнения

$$\left(L^h w^u \right)_{m,j} = 0$$

в области D^- с граничными условиями

$$\begin{aligned} w_{1,j}^u &= w_{M,j}^u = 0, \quad j = j_{-\infty}, \dots, j_{\min}, \\ w_{m,j_{-\infty}}^u &= 0, \quad m = 1, \dots, M, \\ w_{m,j_{\min}}^u &= w_{m,j_{\min}}^n - w_{m,j_{\min}}^p, \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Такая задача была рассмотрена в предыдущем параграфе. Поэтому мы получаем связь

$$\mathbf{w}^{u(j_{\min}-1)} = \mathbf{F} \mathbf{w}^{u(j_{\min})}$$

или

$$\mathbf{w}^{u(j_{\min}-1)} = \mathbf{F} \left(\mathbf{w}^{n(j_{\min})} - \mathbf{w}^{p(j_{\min})} \right).$$

Следовательно

$$\mathbf{w}^{n(j_{\min}-1)} = \mathbf{w}^{p(j_{\min}-1)} + \mathbf{F} \left(\mathbf{w}^{n(j_{\min})} - \mathbf{w}^{p(j_{\min})} \right),$$

откуда

$$\mathbf{g} := \mathbf{w}^{p(j_{\min}-1)} - \mathbf{F} \mathbf{w}^{p(j_{\min})}$$

или

$$\mathbf{g} = \mathbf{w}^{(j_{\min}-1)}$$

из-за (16).

Краевая задача для $w_{m,j}^p$ аналогична задаче (9). Таким образом, вычисление $w_{m,j}^p$ осуществляется по тому же алгоритму с источником $S = -i\omega J^S / (h_{m_S}^r h^z)$, $l = m_S$, $n = j_{\min} - j_S$, поэтому

$$g_m = \frac{2}{N} \sum_{j'=1}^{N-1} \zeta_{m,j'} \sin(\pi j' / N).$$

Замечание. Для серии задач с различным положением источников вдоль оси Z в области D^- ($j_T < j_{\min}$) можно сократить объем вычислений, беря одно и то же приближенное решение $w_{m,j}^p$ для подготовки всех необходимых $\mathbf{g}$. В самом деле, обозначим через $n_{\max} = j_{\min} - \min_S(j_S)$ максимальную глубину проникновения источника в область D^- и предположим, что D^- – бесконечная область с $j_{-\infty} = -\infty$. Тогда, очевидно, из-за сдвиговой инвариантности достаточно взять решение задачи (9) с параметрами $l = m_S$, $n = n_{\max}$, $S = -i\omega J^S / (h_{m_S}^r h^z)$ и вычислить $n_{\max}$ векторов:

$$p_{m,n} = \frac{2}{N} \sum_{j'=1}^{N-1} \zeta_{m,j'} \sin(\pi j' n / N), \quad m = 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, n_{\max}.$$

Соответствующие векторы $\mathbf{g}$ для источника в точке j_S вычисляются затем как

$$(17) \quad g_{m,j_S} = p_{m,1+n_{\max}-n_S} - \sum_{l=1}^M F_{l,m} p_{l,n_{\max}-n_S}, \quad n_S = j_{\min} - j_S.$$

Эти векторы являются точными. Возвращаясь к случаю конечной области D^- , мы тогда уже получим приближенные значения векторов при использовании (17). Однако, погрешность такого приближения можно сделать как угодно малой, выбрав достаточно длинную область с $j_{\min} - j_{-\infty} \gg n_{\max}$.

3.3 Трехмерный случай

Рассмотренный выше метод построения точных разностных граничных условий легко распространяется на трехмерные задачи в цилиндрической геометрии (r, θ, z) для соответствующего скалярного уравнения, т.к. в основе получения матрицы $\mathbf{F}$ лежит метод разделения переменных*. Если сетка по угловой переменной равномерная с соответствующим шагом $h^\theta = 2\pi/K$, то, используя Фурье-разложение периодической по индексу k разностной функции $u_{m,j,k}$

$$u_{m,j,k} = \frac{1}{K} \sum_{k'=0}^{K-1} \bar{u}_{m,j,k'} \exp(ikk'h^\theta), \quad \bar{u}_{m,j,k'} = \sum_{k=0}^{K-1} u_{m,j,k} \exp(ikk'h^\theta),$$

мы приходим к серии двумерных задач для функций $\bar{u}_{m,j,k'}$, $k' = 0, \dots, K-1$.

Таких задач в общем случае должно быть K^2 – произведение числа угловых гармоник на число возможных угловых положений дельта-образных правых частей. Однако, в силу вращательной симметрии геометрии задачи и равномерности угловой сетки искомая «трехмерная» матрица $\mathbf{F}$ является блочно-диагональной по углу; причем зависимость от угла выражается как

$$(\mathbf{F})_k = \mathbf{Q}(kh^\theta)(\mathbf{F})_0\mathbf{Q}(-kh^\theta),$$

где $\mathbf{Q}(\theta)$ – матрица поворота на угол θ , а $(\mathbf{F})_0$ – «частная трехмерная» матрица для случая правой части только при $\theta = 0$.

Для вычисления $(\mathbf{F})_0$ надо решать те же вспомогательные уравнения (13), но зависящие от индекса k' . Эта зависимость состоит в изменении центрального коэффициента

$$b'_m := b_m + \frac{2[\cos(k'h^\theta) - 1]}{\mu_m(h^\theta)^2}$$

и правой части

$$d'_{m,j'} = S\delta_m^l \sin(\pi j'n/N) \exp(ik'h^\theta).$$

Число таких уравнений ровно в K раз больше, чем для двумерного случая. Поэтому число операций для вычисления «трехмерной» матрицы $\mathbf{F}$ возрастет в K раз и составит $O(M^2NK)$.

* Отметим, что в трехмерном случае электромагнитная задача описывается системой уравнений. Поэтому рассматриваемое здесь трехмерное скалярное уравнение всего лишь поясняет идею.

4 Алгоритм решения задачи в вычислительной области

Вычислительная область D ограничена значениями индексов в интервале $j_{\min} \leq j \leq j_{\max}$. Разностное уравнение имеет вид

$$\left(L^h u\right)_{m,j} = s_{m,j}, \quad m = 2, \dots, M-1, \quad j = j_{\min}, \dots, j_{\max},$$

см. (4), с локальными граничными условиями на боковых сторонах

$$u_{1,j} = u_{M,j} = 0, \quad j = j_{\min} - 1, \dots, j_{\max} + 1$$

и нелокальными граничными условиями

$$u_{m,j_{\min}-1} = \sum_{k=1}^M F_{m,k} u_{k,j_{\min}} + g_m, \quad m = 2, \dots, M-1$$

на нижнем торце и

$$u_{m,j_{\max}+1} = \sum_{k=1}^M F_{m,k} u_{k,j_{\max}}, \quad m = 2, \dots, M-1$$

на верхнем торце.

Если источник попадает вовнутрь области D , ($j_T \geq j_{\min}$), то

$$s_{m,j} = -i\omega J^S \delta(m - m_T) \delta(j - j_T) / (h_{m_T}^r h_{j_T}^z), \quad \mathbf{g} = 0;$$

иначе

$$s_{m,j} = 0, \quad \text{а вектор } \mathbf{g} \text{ задан в (17).}$$

Запишем эту систему линейных уравнений в алгебраической форме:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j=j_{\min}-1}^{j_{\max}+1} a_{m,j}^{m_e, j_e} u_{m,j} = R_{m_e, j_e},$$

где (m_e, j_e) – номер уравнения. Соответствующие коэффициенты определяются следующим образом:

для $j_e = j_{\min} - 1, j_{\min}, \dots, j_{\max}, j_{\max} + 1$, если $m_e = 1$ или $m_e = M$:

$$a_{m,j}^{m_e, j_e} = \delta_m^{m_e} \delta_j^{j_e} \quad R_{m_e, j_e} = 0;$$

для $m_e = 2, \dots, M-1$, $m = 1, \dots, M$, если $j_e = j_{\max} + 1$:

$$a_{m,j}^{m_e, j_e} = \begin{cases} 0, & j = j_{\min} - 1, \dots, j_{\max} - 1, \\ F_{m_e, m}, & j = j_{\max}, \\ -\delta_m^{m_e}, & j = j_{\max} + 1, \end{cases}, \quad R_{m_e, j_e} = 0;$$

для $m_e = 2, \dots, M-1$, $m = 1, \dots, M$, если $j_e = j_{\min} - 1$:

$$a_{m,j}^{m_e, j_e} = \begin{cases} 0, & j = j_{\min} + 1, \dots, j_{\max} + 1, \\ F_{m_e, m}, & j = j_{\min}, \\ -\delta_m^{m_e}, & j = j_{\min} - 1, \end{cases}, \quad R_{m_e, j_e} = -g_{m_e};$$

для $j_e = j_{\min}, \dots, j_{\max}$, $m_e = 2, \dots, M-1$:

($m = m_e - 1$, $j = j_e$):

$$a_{m_e-1, j_e}^{m_e, j_e} = \frac{1}{h_{m_e}^r} \frac{1}{\mu_{m_e-1/2, j_e} h_{m_e-1/2}^r} \left(\frac{r_{m_e-1}}{r_{m_e-1/2}} \right);$$

$$\mu_{m_e-1/2, j_e} = \frac{\mu_{m_e-1, j_e} r_{m_e-3/4} h_{m_e-1}^r + \mu_{m_e, j_e} r_{m_e-1/4} h_{m_e}^r}{r_{m_e-1/2} (h_{m_e-1}^r + h_{m_e}^r)};$$

$$r_{m_e-1/4} = r_{m_e} - h_{m_e} / 4, \quad r_{m_e-1/2} = r_{m_e} - h_{m_e} / 2,$$

$$r_{m_e-3/4} = r_{m_e-1} + h_{m_e-1} / 4;$$

($m = m_e + 1$, $j = j_e$):

$$a_{m_e+1, j_e}^{m_e, j_e} = \frac{1}{h_{m_e}^r} \frac{1}{\mu_{m_e+1/2, j_e} h_{m_e+1/2}^r} \left(\frac{r_{m_e+1}}{r_{m_e+1/2}} \right);$$

$$\mu_{m_e+1/2, j_e} = \frac{\mu_{m_e+1, j_e} r_{m_e+3/4} h_{m_e+1}^r + \mu_{m_e, j_e} r_{m_e+1/4} h_{m_e}^r}{r_{m_e+1/2} (h_{m_e+1}^r + h_{m_e}^r)};$$

$$r_{m_e+1/4} = r_{m_e} + h_{m_e} / 4, \quad r_{m_e+1/2} = r_{m_e} + h_{m_e} / 2,$$

$$r_{m_e+3/4} = r_{m_e+1} - h_{m_e+1} / 4;$$

($m = m_e$, $j = j_e - 1$):

$$a_{m_e, j_e-1}^{m_e, j_e} = \frac{1}{h_{j_e}^z} \frac{1}{\mu_{m_e, j_e-1/2} h_{j_e-1/2}^z};$$

$(m = m_e, j = j_e + 1):$

$$a_{m_e, j_e+1}^{m_e, j_e} = \frac{1}{h_{j_e}^z} \frac{1}{\mu_{m_e, j_e+1/2} h_{j_e+1/2}^z};$$

$(m = m_e, j = j_e):$

$$\begin{aligned} a_{m_e, j_e}^{m_e, j_e} = & i\omega\sigma_{m_e, j_e} u_{m_e, j_e} - a_{m_e, j_e-1}^{m_e, j_e} - a_{m_e, j_e+1}^{m_e, j_e} \\ & - \frac{1}{h_{m_e}^r} \frac{1}{\mu_{m_e-1/2, j_e} h_{m_e-1/2}^r} \left(\frac{r_{m_e}}{r_{m_e-1/2}} \right) \\ & - \frac{1}{h_{m_e}^r} \frac{1}{\mu_{m_e+1/2, j_e} h_{m_e+1/2}^r} \left(\frac{r_{m_e}}{r_{m_e+1/2}} \right); \end{aligned}$$

$$R_{m_e, j_e} = f_{m_e, j_e};$$

для остальных индексов m и j

$$a_{m, j}^{m_e, j_e} = 0.$$

Очевидно, что коэффициент $a_{m, j}^{m_e, j_e}$ не равен нулю только если $j \in \{j_e - 1; j_e; j_e + 1\}$. Таким образом система принимает вид

$$\sum_{m=1}^M a_{m, j_e-1}^{m_e, j_e} u_{m, j_e-1} + \sum_{m=1}^M a_{m, j_e}^{m_e, j_e} u_{m, j_e} + \sum_{m=1}^M a_{m, j_e+1}^{m_e, j_e} u_{m, j_e+1} = R_{m_e, j_e}.$$

Перепишем ее в матричной форме:

(18)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{j_{\min}-1} \mathbf{U}_{j_{\min}-1} + \mathbf{C}_{j_{\min}-1} \mathbf{U}_{j_{\min}} &= \mathbf{D}_{j_{\min}-1}, \\ \mathbf{A}_{j_e} \mathbf{U}_{j_e-1} + \mathbf{B}_{j_e} \mathbf{U}_{j_e} + \mathbf{C}_{j_e} \mathbf{U}_{j_e+1} &= \mathbf{D}_{j_e}, \quad j_e = j_{\min}, \dots, j_{\max}, \\ \mathbf{A}_{j_{\max}+1} \mathbf{U}_{j_{\max}} + \mathbf{B}_{j_{\max}+1} \mathbf{U}_{j_{\max}+1} &= \mathbf{D}_{j_{\max}+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{j_e} &= \left\{ U_{m_e}^{j_e} \equiv u_{m_e, j_e}, \quad m_e = 1, \dots, M \right\}, \\ \mathbf{A}_{j_e} &= \left\{ A_{m_e, m}^{j_e} \equiv a_{m, j_e-1}^{m_e, j_e}, \quad m_e = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, M \right\}, \\ \mathbf{B}_{j_e} &= \left\{ B_{m_e, m}^{j_e} \equiv a_{m, j_e}^{m_e, j_e}, \quad m_e = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, M \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{j_e} = \left\{ C_{m_e, m}^{j_e} \equiv a_{m, j_e+1}^{m_e, j_e}, \quad m_e = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, M \right\},$$

$$\mathbf{D}_{j_e} = \left\{ D_{m_e}^{j_e} \equiv R_{m_e, j_e}, \quad m_e = 1, \dots, M \right\}.$$

Эту систему мы решаем матричной прогонкой. Сначала вычисляем матрицы

$$\alpha_{j_{\min}-1} = -\left(\mathbf{B}_{j_{\min}-1}\right)^{-1} \mathbf{C}_{j_{\min}-1}, \quad \beta_{j_{\min}-1} = \left(\mathbf{B}_{j_{\min}-1}\right)^{-1} \mathbf{D}_{j_{\min}-1}$$

и

$$\alpha_j = -\left(\mathbf{A}_j \alpha_{j-1} + \mathbf{B}_j\right)^{-1} \mathbf{C}_j, \quad \beta_j = \left(\mathbf{A}_j \alpha_{j-1} + \mathbf{B}_j\right)^{-1} \left(\mathbf{D}_j - \mathbf{A}_j \beta_{j-1}\right),$$

$$j = j_{\min}, \dots, j_{\max} + 1$$

Затем совершаем обратную рекурсию

$$\mathbf{U}_{j_{\max}+1} = \beta_{j_{\max}+1}$$

и

$$\mathbf{U}_j = \alpha_j \mathbf{U}_{j+1} + \beta_j, \quad j = j_{\max}, \dots, j_{\min} - 1.$$

Очевидно, что для случая серии задач с L различными правыми частями $\mathbf{D}_{j_e}$ является прямоугольной матрицей, т.е.

$$\mathbf{D}_{j_e} = \left\{ D_{m_e, l}^{j_e} \equiv R_{m_e, j_e}^{(l)}, \quad m_e = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, L \right\}.$$

Соответственно возникают прямоугольные матрицы

$$\beta_{j_e} = \left\{ \beta_{m_e, l}^{j_e}, \quad m_e = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, L \right\};$$

$$\mathbf{U}_{j_e} = \left\{ U_{m_e, l}^{j_e}, \quad m_e = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, L \right\}.$$

Поэтому все L вариантов вычисляются одновременно (они различаются по параметру j_S).

Оценим необходимые вычислительные затраты.

Алгоритм матричной прогонки требует $O\left((j_{\max} - j_{\min})M^2(M + L)\right)$ операций и $O\left((j_{\max} - j_{\min})M(M + L)\right)$ ячеек памяти. Вычисление матрицы и правой части в операторе граничных условий на торцах требует дополнительно $O\left((j_{\min} - j_{-\infty})M^2\right)$ операций и ячеек памяти.

Обсудим эти оценки с точки зрения значений типичных параметров. В наших приложениях типичные параметры таковы: $j_{\max} - j_{\min} = 150$, $M = 100$,

$L = 150$, $j_{\min} - j_{-\infty} = 800$. Очевидно, что затраты на операции для торцевых граничных условий несущественны по сравнению с решением задачи в основной области. Но эти нелокальные торцевые условия позволяют в несколько раз сократить размер вычислительной области вдоль Z . Если решать данную задачу каким-либо итерационным алгоритмом, то соответствующие затраты составят по крайней мере $O((j_{\max} - j_{\min})MLN_{it})$ операций, где N_{it} – число итераций. Сравнивая эту оценку с оценкой для алгоритма матричной прогонки, мы видим, что разница заключается в множителях N_{it} и M , соответственно. Учитывая, что сетка, как правило, содержит сильно вытянутые ячейки (она неравномерная вдоль r), коэффициенты системы имеют сильные разрывы ($\mu = 1$ для воздуха и $\mu = 100$ для металла), можно вполне обосновано предположить, что даже самый продвинутый итерационный метод будет требовать не менее сотни итераций для рассматриваемых параметров. Т.е. наш алгоритм удовлетворяет самой оптимистичной оценке для удачного итерационного алгоритма. Следует также подчеркнуть, что предложенный алгоритм дает решение задачи с машинной точностью.

5 Тестовые расчеты

Для тестовой задачи мы выбрали следующие параметры:

- металлическая труба внутренним радиусом 10 дюймов и толщиной стенки 0.5 дюйма;
- проводимость трубы $\sigma = 5 \times 10^6$ сименс/метр, относительная магнитная проницаемость $\mu = 100$;
- внутри и вне трубы находится воздух с нулевой проводимостью и $\mu = 1$;
- в качестве дефекта трубы рассматривается внутренняя канавка длиной 1 дюйм и глубиной в половину стенки;
- возбуждающая катушка имеет радиус 2 дюйма и длину 20 дюймов.

Описанная геометрия отражена на Рис. 5-1.

Первая серия расчетов позволяет получить представление о характере решения. На Рис. 5-1 показаны изолинии амплитуды и фазы решения $u \equiv E^\theta$.

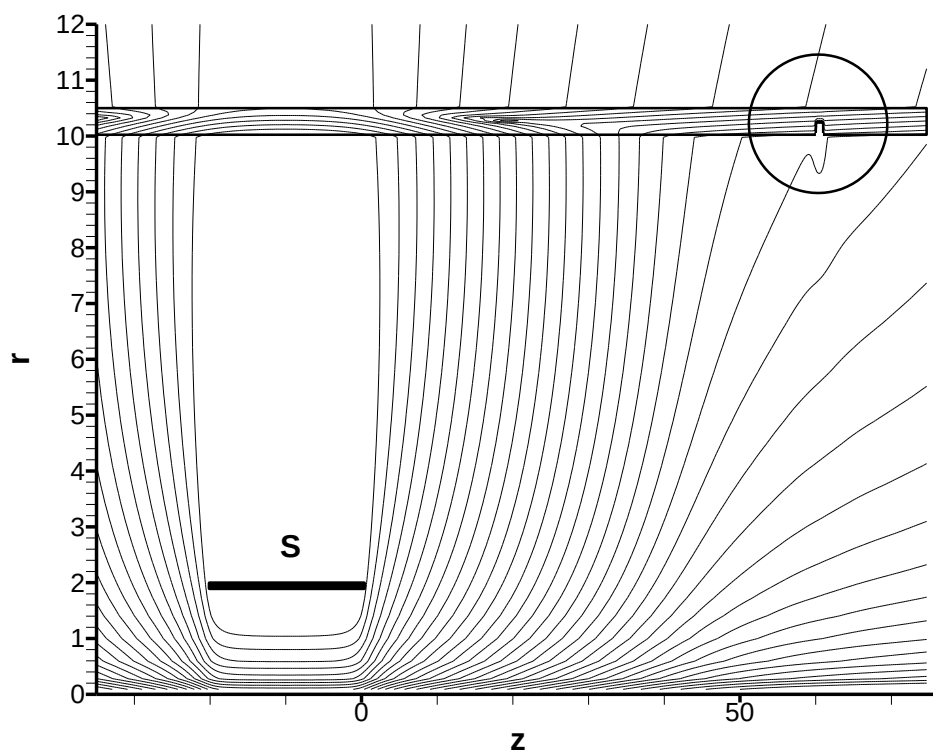
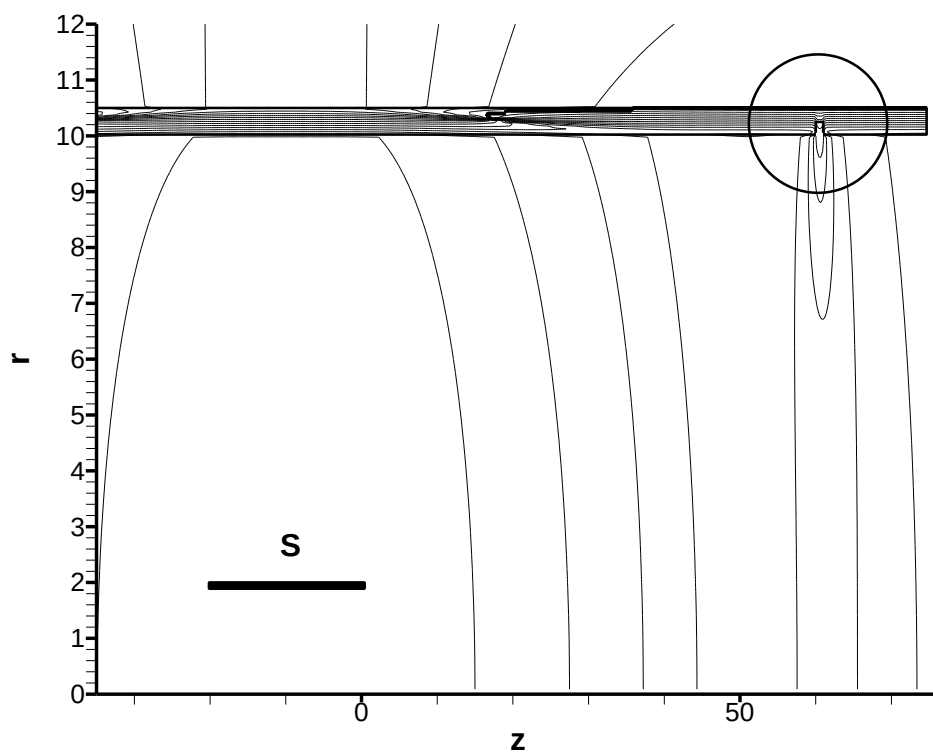


Рис. 5-1: Изолинии амплитуды (вверху) и фазы (внизу) решения

Размеры указаны в дюймах. Левая и правая границы рисунков являются границами вычислительной области, т.е. на них поставлены нелокальные граничные условия. При этом границы области $z_{-\infty}$ и z_{∞} , используемой для вычисления оператора граничных условий отодвинуты на расстояние 600 дюймов. По радиусу вычислительная область простирается до значения $r=1200$. Показаны положение возбуждающей катушки **S** и фрагмент трубы с кольцевым дефектом при $60 \leq z \leq 61$ (в кружочке). Параметры сетки следующие: $j_{\max} - j_{\min} = 440$, $M = 72$, $L = 1$, $j_{\min} - j_{-\infty} = 2400$. Частота переменного тока равна 40Hz .

На Рис. 5-2 показаны графики амплитуды и фазы вдоль линии с координатой $r = 9.7$.

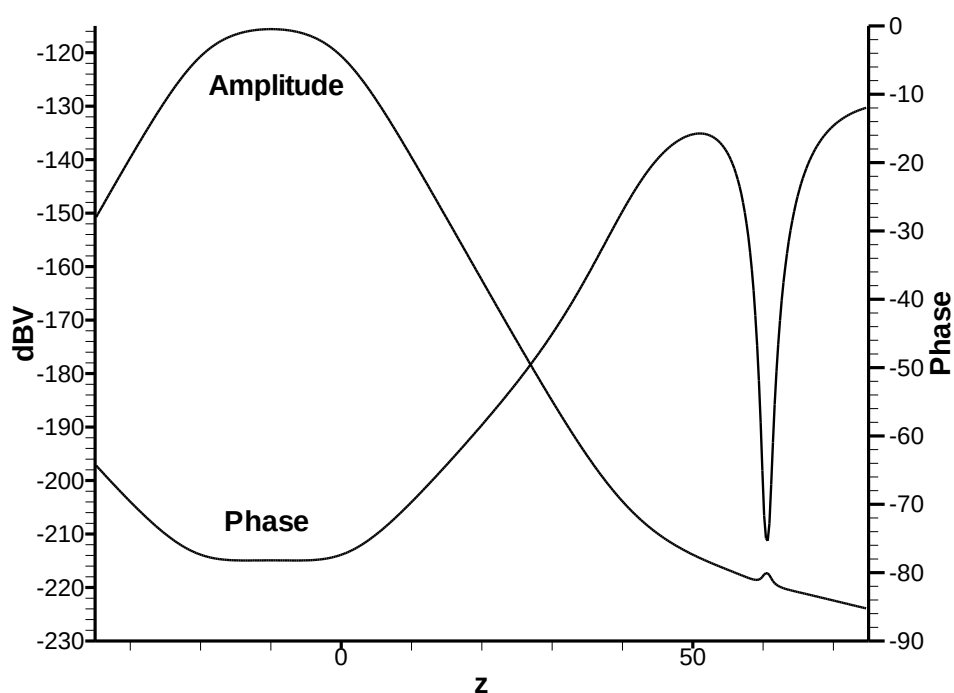


Рис. 5-2: Амплитуда и фаза при $r = 9.7$

Отметим, что решение может вести себя нерегулярно с изменением частоты. Например, на Рис. 5-3 видно, что при частоте 10Hz возникает дополнительный пик амплитуды в районе $z = 25$, не связанный с дефектом; фаза оказывается приподнятой.

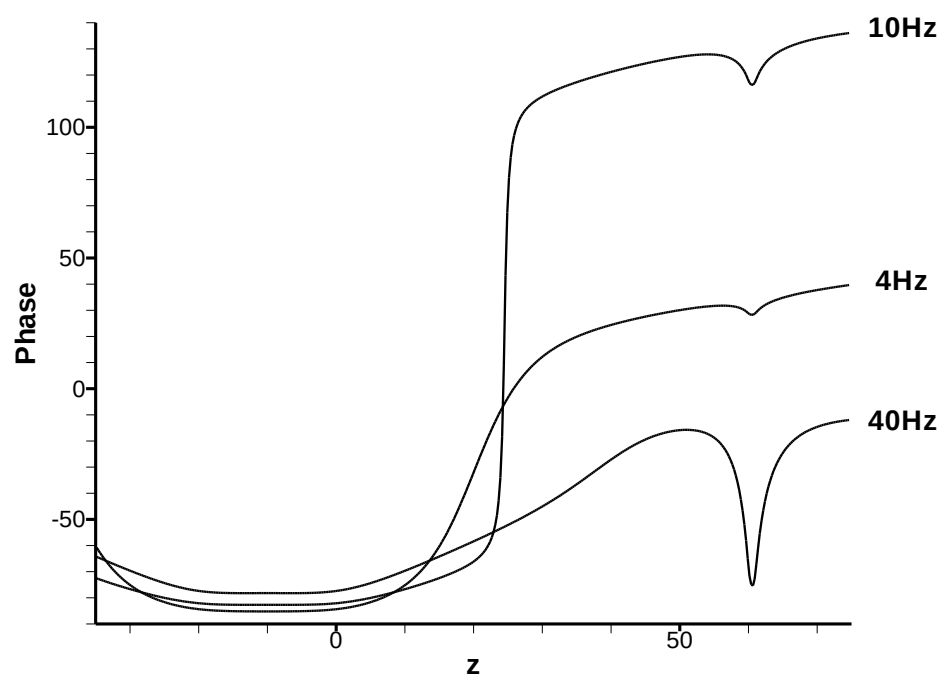
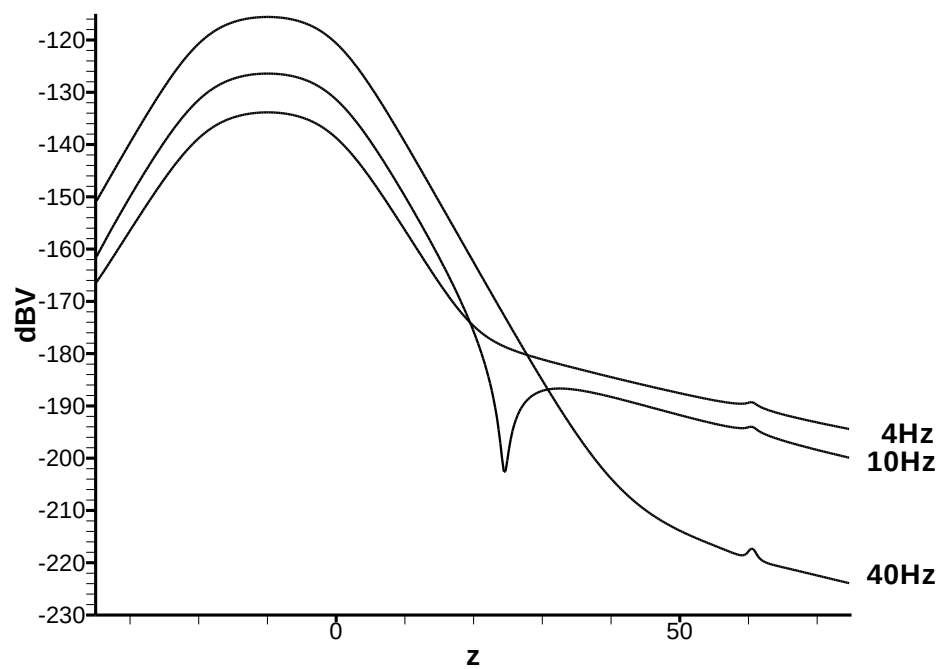


Рис. 5-3: Графики амплитуды и фазы решения в зависимости от частоты

Вторая серия расчетов является тестом для проверки правильности работы оператора торцевых граничных условий. Графики решений, полученных для трех различных вычислительных областей – большой ($-35 \leq z \leq 85$), средней ($45 \leq z \leq 85$) и маленькой ($55 \leq z \leq 65$) – изображены на Рис. 5-4. Для наглядности области помечены прямоугольниками. Частота $f = 40 \text{ Hz}$. Все три решения совпадают в маленькой области вплоть до четвертого знака. Это небольшое различие вызвано применением упрощенного («дешевого») подхода к вычислению правой части $\mathbf{g}$ в операторе граничного условия, см. замечание в конце параграфа 3.3.

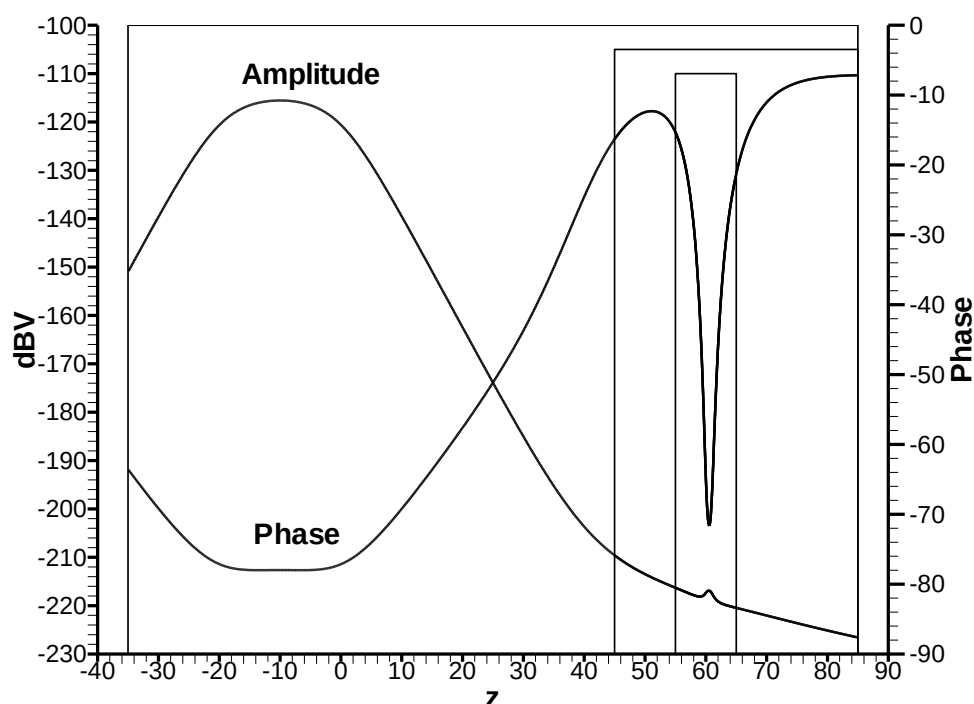


Рис. 5-4: Решение, полученное при трех различных размерах вычислительной области: $-35 \leq z \leq 85$, $45 \leq z \leq 85$, и $55 \leq z \leq 65$

Наконец, третья серия расчетов демонстрирует ожидаемую точность алгоритма. Здесь мы уже задействуем режим одновременного расчета решений с различным положением возбуждающей катушки. Для каждого нового решения катушка сдвигается вправо на один шаг сетки по Z . В качестве грубой сетки выбраны параметры $j_{\max} - j_{\min} = 80$, $M = 43$, $L = 80$, $j_{\min} - j_{-\infty} = 2400$. Частота $f = 40 \text{ Hz}$. Вычислительная область расположена в пределах $52 \leq z \leq 72$. Начальное положение возбуждающей катушки $-28 \leq z \leq -8$. На графиках мы рисуем амплитуду и фазу каждого решения, взятого в одной точке с координатой $z = z_d + z_s$, где $z_d = 60$ – левый край дефекта, z_s – текущая координата правого края возбуждающей катушки.

Расчеты проведены на трех сетках: грубой, средней и мелкой. Средняя сетка имеет удвоенное значение по каждому числу интервалов, т.е. $j_{\max} - j_{\min} = 160$,

$M = 86$, $L = 160$, $j_{\min} - j_{-\infty} = 4800$. Для мелкой сетки эти параметры еще раз удваиваются.

Так как ожидаемая точность имеет второй порядок по шагу сетки, мы применяем для проверки экстраполяцию по Ричардсону:

$$U(h/4) \approx (4U(h/2) - U(h))/3,$$

где через $U(h/4)$, $U(h/2)$, $U(h)$ обозначены решения, полученные с шагами $h/4$, $h/2$ и h соответственно. На Рис. 5-5 сплошными линиями изображены решения, полученные на мелкой сетке и экстраполяцией. Линии практически сливаются, что подтверждает второй порядок точности.

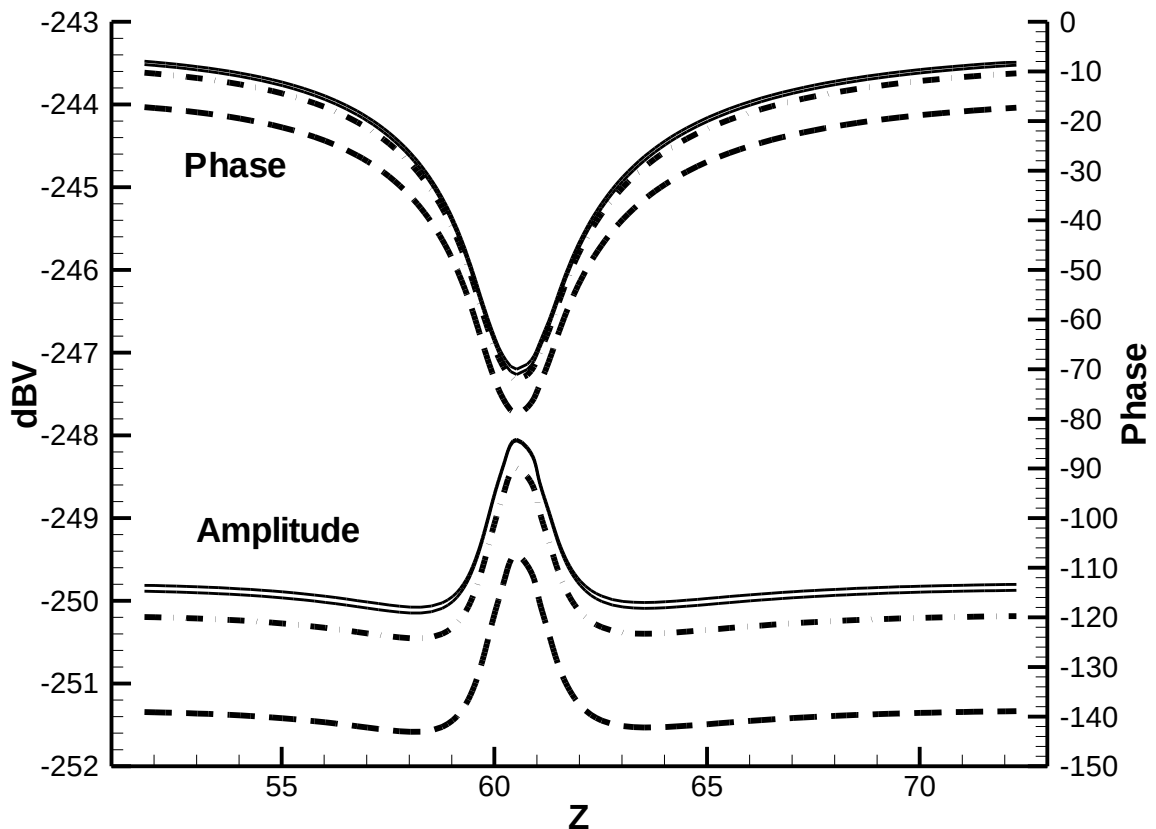


Рис. 5-5: Амплитуда и фаза, полученные на грубой сетке (тире), средней сетке (точка-тире), мелкой сетке (линия) и экстраполяцией по Ричардсону (линия)

В заключение отметим, что время решения описанных примеров не превосходит одной минуты на персональном компьютере с тактовой частотой два гигагерца.

Список литературы

1. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966, 624 с.
1. *Зуева Н.М., Михайлова М.С., Рябенский В.С.* Перенос граничных условий из бесконечности на искусственную границу для разностного уравнения Лапласа. – М., 1991, – (Препр. / ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, №110).
1. *Брушлинский К.В., Рябенский В.С., Тузова Н.Б.* Перенос граничного условия через вакуум в осесимметричных задачах // ЖВМ и МФ. – 1992. – № 12. – С. 1929–1939.

Список литературы

1. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966, 624 с.
2. *Зуева Н.М., Михайлова М.С., Рябенский В.С.* Перенос граничных условий из бесконечности на искусственную границу для разностного уравнения Лапласа. – М., 1991, – (Препр. / ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, №110).
3. *Брушлинский К.В., Рябенский В.С., Тузова Н.Б.* Перенос граничного условия через вакуум в осесимметричных задачах // ЖВМ и МФ. – 1992. – № 12. – С. 1929–1939.