

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША

В.С.Рябенский, В.И.Турчанинов

**Неотражающие искусственные
граничные условия на основе
использования лагун для
вычисления решений системы
Максвелла на больших временах.**

МОСКВА 2004

УДК 519.852.6, 537.8

В.С.Рябенский, В.И.Турчанинов

АННОТАЦИЯ

**Неотражающие искусственные граничные условия
на основе использования лакун для вычисления решений системы
Максвелла на больших временах.**

Предложены неотражающие граничные условия для уравнений Максвелла с финитной плотностью электрического тока. Условия формулируются на границе, расположенной в области однородности уравнений, вблизи носителя плотности тока. Представлен алгоритм вычисления решения на границе, основанный на методе разностных потенциалов. Эффективность алгоритма определяется свойствами лакун разностного волнового уравнения. Доказана теорема, позволяющая свести вычисление электромагнитного поля на границе к решению трех независимых волновых уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02-01-00801.

Ключевые слова: неотражающие искусственные граничные условия, лакуны, разностный потенциал, система Максвелла.

V.S. Ryaben'kii, V.I. Turchaninov

ABSTRACT

Nonreflecting artificial boundary conditions on the base of lacunas using for the calculation of a long time Maxwell's equation's decisions

The non-reflecting boundary conditions for the Maxwell's equations with the compact density of the electrical current are offered. The conditions are formulated on border located in the field of uniformity of the equations, near to density of the current. The algorithm based on a difference potentials method is suggested for the calculation of the decision on the border. The efficiency of algorithm is determined by properties of lacunas of the difference wave equation. The theorem, which allows to reduce calculation of an electromagnetic field on border to the decision of three independent wave equations, is proved.

Рассмотрим следующую задачу для системы Максвелла

$$\frac{\partial E}{\partial t} - c \operatorname{rot} H = f; \quad \frac{\partial H}{\partial t} + c \operatorname{rot} E = g, \quad (1)$$

$$E = H = 0, \quad \text{если } t \leq 0, \quad (2)$$

причем $g \equiv 0$, а $f(t, x, y, z)$ удовлетворяет условию

$$f = 0, \quad \text{если } t \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 \geq q^2, \quad (3)$$

где $q < 1$ заданное положительное число. Пусть решение (E, H) задачи (1-3) нужно вычислить только в области

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Вычисление решения задачи (1-4) по употребительным разностным схемам на сетках с шагами $O(h)$ требует $O(T^4 h^{-4})$ арифметических операций и с ростом T быстро становится непосильным. Здесь будет построен алгоритм, требующий неумножаемого по порядку $O(T^1 h^{-4})$ количества арифметических операций.

Для вычисления решения воспользуемся сеткой M точек $m = (t, x, y, z)$ с координатами

$$t = \left(m_0 + \frac{i}{2}\right)\tau, \quad x = \left(m_1 + \frac{j}{2}\right)h, \quad y = \left(m_2 + \frac{k}{2}\right)h, \quad z = \left(m_3 + \frac{l}{2}\right)h, \quad (5)$$

где τ и h , $\tau \leq \frac{\sqrt{3}}{3c}h$, постоянные шаги сетки; $m_0, m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $i, j, k, l = 0, 1$. Сетка M введена в [1]. Обозначим N_m , $m \in M$, совокупность семи точек

$$m = (t, x, y, z), \left(t, x \pm \frac{h}{2}, y, z\right), \left(t, x, y \pm \frac{h}{2}, z\right), \left(t, x, y, z \pm \frac{h}{2}\right).$$

Обозначим $M^+ \subset M$ совокупность точек $m = (t, x, y, z) \in M$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 < 1$; $M^- = M \setminus M^+$; $N^+ = \bigcup_{m \in M^+} N_m$; $N^- = \bigcup_{m \in M^-} N_m$; $\gamma = N^+ \cap N^-$. Для любого множества Z в пространстве (t, x, y, z)

обозначим $Z^p \subset Z$ совокупность точек Z , лежащих в гиперплоскости $t = p \frac{\tau}{2}$.

Обозначим $M(i, j, k, l) \subset M$ ту подсетку сетки M , координаты точек которой задаются формулами (5) при фиксированном наборе i, j, k, l . Обозначим:

$$\begin{aligned} M_{E^x} &= M(1, 0, 0, 0); & M_{E^y} &= M(1, 1, 1, 0); & M_{E^z} &= M(1, 1, 0, 1); \\ M_{H^x} &= M(0, 1, 1, 1); & M_{H^y} &= M(0, 0, 0, 1); & M_{H^z} &= M(0, 0, 1, 0); \\ M_{f^x} &= M(0, 0, 0, 0); & M_{f^y} &= M(0, 1, 1, 0); & M_{f^z} &= M(0, 1, 0, 1); \\ M_{g^x} &= M(1, 1, 1, 1); & M_{g^y} &= M(1, 0, 0, 1); & M_{g^z} &= M(1, 0, 1, 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Искомые скалярные компоненты $E^x, E^y, E^z, H^x, H^y, H^z$ заменим искомыми скалярными функциями $E_n^x, E_n^y, E_n^z, H_n^x, H_n^y, H_n^z$ на сетках $M_{E^x}, M_{E^y}, M_{E^z}, M_{H^x}, M_{H^y}, M_{H^z}$ соответственно, для вычисления которых воспользуемся следующей схемой [2]:

$$\partial_\tau E^x - c(\partial_y H^z - \partial_z H^y) \Big|_m = f_m^x, \quad m \in M_{f^x}, \quad (7)$$

$$\partial_\tau E^y - c(\partial_z H^x - \partial_x H^z) \Big|_m = f_m^y, \quad m \in M_{f^y}, \quad (8)$$

$$\partial_\tau E^z - c(\partial_x H^y - \partial_y H^x) \Big|_m = f_m^z, \quad m \in M_{f^z}, \quad (9)$$

$$\partial_\tau H^x + c(\partial_y E^z - \partial_z E^y) \Big|_m = O_m, \quad m \in M_{g^x}, \quad (10)$$

$$\partial_\tau H^y + c(\partial_z E^x - \partial_x E^z) \Big|_m = O_m, \quad m \in M_{g^y}, \quad (11)$$

$$\partial_\tau H^z + c(\partial_x E^y - \partial_y E^x) \Big|_m = O_m, \quad m \in M_{g^z}, \quad (12)$$

$$E_n^x = 0, \quad E_n^y = 0, \quad E_n^z = 0, \quad H_n^x = 0, \quad H_n^y = 0, \quad H_n^z = 0, \quad n = (t, x, y, z), \quad t \leq 0. \quad (13)$$

Через $\partial_\tau, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ обозначены операции симметричных разделенных разностей с шагами τ, h, h и h соответственно. Заметим, что в соответствии с (6) точки $n \in M_{E^x}, n \in M_{E^y}$ и $n \in M_{E^z}$, где определены E_n^x, E_n^y, E_n^z , все лежат

на нечетных слоях $t = (2s - 1) \frac{\tau}{2}$, $s = 0, \pm 1, \dots$, а точки $n \in M_{H^x}, n \in M_{H^y},$

$n \in M_{H^z}$ на четных слоях $t = p \frac{\tau}{2}$, $p = 2s$, по времени. Поставим задачу

ВЫЧИСЛИТЬ

$$\begin{aligned} E_n^x, n \in [M_{E^x} \cap M^+]^{2s-1}; \quad E_n^y, n \in [M_{E^y} \cap M^+]^{2s-1}; \\ E_n^z, n \in [M_{E^z} \cap M^+]^{2s-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} H_n^x, n \in [M_{H^x} \cap N^+]^{2s}; \quad H_n^y, n \in [M_{H^y} \cap N^+]^{2s}; \\ H_n^z, n \in [M_{H^z} \cap N^+]^{2s}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$s = 0, \pm 1, \dots; \quad s \leq \frac{T}{\tau}.$$

Таблицы (14), (15) представляют собой таблицы значений компонент $E_n^x, E_n^y, E_n^z, H_n^x, H_n^y, H_n^z$ решения задачи (7-13) в сеточных расчетных подобластях, указанных в (14-15) и соответствующих области (4).

Вычисление таблиц (14-15) путем непосредственного решения по явной разностной схеме (7-13) вовлекает в расчет $O(T^4 h^{-4})$ точек сетки M , и требует $O(T^4 h^{-4})$ арифметических операций.

Построение неуплучшаемого по порядку $O(T^1 h^{-4})$ числа арифметических действий алгоритма для получения таблиц (14-15) с высокой точностью начнем с того, что разобьем таблицу (15) на следующие две таблицы

$$\begin{aligned} H_n^x, n \in [(M_{H^x} \cap M^+) \setminus \gamma]^{2s}; \quad H_n^y, n \in [(M_{H^y} \cap M^+) \setminus \gamma]^{2s}; \\ H_n^z, n \in [(M_{H^z} \cap M^+) \setminus \gamma]^{2s}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$H_n^x, n \in [M_{H^x} \cap \gamma]^{2s}; \quad H_n^y, n \in [M_{H^y} \cap \gamma]^{2s}; \quad H_n^z, n \in [M_{H^z} \cap \gamma]^{2s}. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь следующую разностную систему уравнений

$$\partial_\tau e^x - c(\partial_y h^x - \partial_z h^y) \Big|_m = f_m^x, \quad m \in (M_{E^x} \cap M^+)^{2s}, \quad (18)$$

$$\partial_\tau e^y - c(\partial_z h^x - \partial_x h^y) \Big|_m = f_m^y, \quad m \in (M_{E^y} \cap M^+)^{2s}, \quad (19)$$

$$\partial_\tau e^z - c(\partial_x h^y - \partial_y h^x) \Big|_m = f_m^z, \quad m \in (M_{E^z} \cap M^+)^{2s}, \quad (20)$$

$$\partial_\tau h^x + c(\partial_y e^z - \partial_z e^y) \Big|_m = O_m, \quad m \in (M_{H^x} \cap M^+ \setminus \gamma)^{2s-1}, \quad (21)$$

$$\partial_{\tau} h^y + c(\partial_z e^x - \partial_x e^z) \Big|_m = O_m, \quad m \in (M_{H^y} \cap M^+ \setminus \gamma)^{2s-1}, \quad (22)$$

$$\partial_{\tau} h^z + c(\partial_x e^y - \partial_y e^x) \Big|_m = O_m, \quad m \in (M_{H^z} \cap M^+ \setminus \gamma)^{2s-1}, \quad (23)$$

$$s = 0, \pm 1, \dots; \quad 2s < \frac{T}{\tau}.$$

Дополним систему (18-23) начальными условиями

$$e_n^x = 0, \quad e_n^y = 0, \quad e_n^z = 0, \quad h_n^x = 0, \quad h_n^y = 0, \quad h_n^z = 0, \quad \text{если } n = (t, x, y, z), \quad t \leq 0 \quad (24)$$

и следующими искусственными граничными условиями:

$$\begin{aligned} (h_n^x)^{2s} &= (H_n^x)^{2s}, \quad n \in [\gamma \cap M_{H^x}]^{2s}; \quad (h_n^y)^{2s} = (H_n^y)^{2s}, \quad n \in [\gamma \cap M_{H^y}]^{2s}; \\ (h_n^z)^{2s} &= (H_n^z)^{2s}, \quad n \in [\gamma \cap M_{H^z}]^{2s}. \end{aligned} \quad (25)$$

Величины H_n^x, H_n^y, H_n^z в правых частях условий (25) суть значения решений задачи (7-13) в соответствующих точках n .

Лемма. *Решение $e^x, e^y, e^z, h^x, h^y, h^z$ задачи (18-25) существует, единственно и совпадает с решением $E_n^x, E_n^y, E_n^z, H_n^x, H_n^y, H_n^z$ задачи (7-13) в тех точках, где решение задачи (18-25) определено, т.е. в точках расчетной подобласти.*

Из леммы следует, что условия (25) равносильно заменяют разностную систему (7-13) вне расчетной подобласти, т.е. являются неотражающими искусственными граничными условиями.

Таблицы (14) и (15) при $s \leq 0$ являются тождественно нулевыми в силу (13). Допустим, что таблицы уже вычислены при $2s \leq p$, где p некоторое четное число. Тогда в силу леммы можно вычислить таблицу (14) при $p+1=2s+1$, используя явные разностные уравнения (18-20), выписанные при $2s=p$. После того как таблица (14) вычислена на слое $p+1=2s+1$, можно вычислить также часть таблицы (15), а именно таблицу (16) на слое $p+2=2(s+1)$, воспользовавшись для этого разностными уравнениями (21-23), выписанными на $(p+1)$ -ом слое, т.е. при $t = (2s+1)\frac{\tau}{2}$. Для завершения

вычисления таблицы (15) на слое $t = (p+2)\frac{\tau}{2}$ осталось вычислить таблицу

(16) на $(p+2)$ -ом слое, т.е. правые части искусственных граничных условий (25) при $2s=p+2$.

Введем обозначение \square_h , полагая для каждой функции $v(t, x, y, z)$

$$\square_h v|_m = \partial_\tau^2 v - c^2(\partial_x^2 v + \partial_y^2 v + \partial_z^2 v)|_m, \quad m = (t, x, y, z).$$

Теорема. Числа H_n^x , H_n^y , H_n^z , составляющие таблицу (16) при $t = (p+2)\frac{\tau}{2}$, совпадают со значениями h^x , h^y , h^z в соответствующих точках решений следующих трех разностных вспомогательных волновых задач

$$\square_h h^x|_m = \Psi_m^x, \quad m \in (M_{H^x})^{2s}, \quad 2s \leq p; \quad (26)$$

$$\square_h h^y|_m = \Psi_m^y, \quad m \in (M_{H^y})^{2s}, \quad 2s \leq p; \quad (27)$$

$$\square_h h^z|_m = \Psi_m^z, \quad m \in (M_{H^z})^{2s}, \quad 2s \leq p; \quad (28)$$

$$h_n^x = 0, \quad h_n^y = 0, \quad h_n^z = 0, \quad \text{если } n = (t, x, y, z) \text{ и } t \leq 0. \quad (29)$$

Правые части этих задач задаются формулами

$$\Psi_m^x = \begin{cases} \square_h [\eta(r)H^x]_m, & m \in M_{H^x} \setminus N_{H^x}^-; \quad N_{H^x}^- = N^- \cap M_{H^x}, \\ 0_m, & m \in N_{H^x}^-, \end{cases} \quad (30)$$

$$\Psi_m^y = \begin{cases} \square_h [\eta(r)H^y]_m, & m \in M_{H^y} \setminus N_{H^y}^-; \quad N_{H^y}^- = N^- \cap M_{H^y}, \\ 0_m, & m \in N_{H^y}^-, \end{cases} \quad (31)$$

$$\Psi_m^z = \begin{cases} \square_h [\eta(r)H^z]_m, & m \in M_{H^z} \setminus N_{H^z}^-; \quad N_{H^z}^- = N^- \cap M_{H^z}, \\ 0_m, & m \in N_{H^z}^-. \end{cases} \quad (32)$$

В формулы (30-32) входит функция $\eta(r)$, определенная равенствами

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \geq 1 - 2h, \\ 0, & \text{если } r < 1 - 2h. \end{cases} \quad (33)$$

Для точки $n = (t, x, y, z)$ число $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Решения задач (26-32)

имеют смысл на слоях $t = 2s \left(\frac{\tau}{2} \right)$, $2s \leq p+2$, так как правые части ψ_m^x , ψ_m^y , ψ_m^z

определены формулами (30-33), в которые входят уже вычисленные значения

H_n^x , H_n^y , H_n^z из таблицы (15) при $t = 2s \left(\frac{\tau}{2} \right)$, $2s \leq p$, а также значения уже

вычисленных величин, входящих в таблицу (16) на слое $t = (p+2) \frac{\tau}{2}$.

Сформулированная теорема, сводящая вычисление правых частей неотражающих искусственных граничных условий (25) к решению трех скалярных волновых задач, и составляет результат настоящей работы.

Значение этого результата состоит в том, что мы получили возможность вычислять таблицы (14-15) за $O(T^1 h^{-4})$ арифметических операций, поскольку ранее [6-10] нами уже разработан алгоритм вычисления с высокой точностью решения разностных волновых задач вида (26-33) также за $O(T^1 h^{-4})$ операций. Заметим, что не существует алгоритма точного или приближенного вычисления таблиц (14-15), требующего меньшего по порядку числа арифметических операций, так как порядок числа элементов таблиц (14-15) также есть $O(T^1 h^{-4})$.

Построенные неотражающие граничные условия и алгоритм их вычисления не изменятся, если изменить сетки и разностные уравнения внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 \leq q^2$. Поэтому наши конструкции и алгоритмы можно использовать при решении произвольных, имеющих единственное решение, электродинамических задач на больших временах. Например, электромагнитное поле внутри сферы может быть самосогласованным или (и) развиваться в среде со сложным распределением электрофизических параметров.

Переход от исходной задачи (7-15) к задаче в расчетной подобласти с удобными для вычислений неотражающими граничными условиями на ее сеточной границе (18-25) осуществлен с использованием подходов и конструкций метода разностных потенциалов [3-6]. Экономный алгоритм вычисления правых частей условий (25) опирается на фундаментальное свойство решений волнового уравнения иметь лакуны. Идея использования этого свойства для экономного вычисления неотражающих искусственных граничных условий была впервые высказана в [4], а затем развита и программно реализована в [7-14], см. также [6].

Список литературы

- [1] Лебедев В.Н. О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных. Изв. АН СССР, серия математ., т.22, 1958, с.717-734.
- [2] Yee K.S. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media, IEEE Trans. Antennas Propagat, v.14, 1966, p.302-307.
- [3] Рябенский В.С. Точный перенос разностных краевых условий. Функц. анализ и его приложения, т.24, в.3, 1990, с.90-91.
- [4] Рябенский В.С. Точный перенос краевых условий. Вычислит. механика твердого тела, 1990, с.129-145.
- [5] Ryaben'kii V.S. Nonreflecting time dependent boundary conditions on artificial boundaries of varying location and shape. Applied Numerical Mathematics, V.33, 2000, p.481-492.
- [6] Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов и его приложения. Физматлит, 2002, с.1-492.
- [7] Рябенский В.С., Турчанинов В.И., Цынков С.В. Использование лакун решений 3D-волнового уравнения для вычисления решения задачи Коши на больших временах. Математическое моделирование, 1999, т.11, №12, с.113-126.

- [8] Турчанинов В.И. Свойство лакун решений разностного аналога пространственного волнового уравнения. Доклады РАН, т.375, №4, 2000.
- [9] Рябенский В.С., Турчанинов В.И., Цынков С.В. Неотражающие искусственные граничные условия для замены отбрасываемых уравнений с лакунами. Математическое моделирование, т.12, №12, 2000.
- [10] Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V., Turchaninov V.I. Long-time numerical computation of wave type solutions driven by moving sources. Applied Numerical Mathematics, 2001, V.38, p-187-222.
- [11] Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V., Turchaninov V.I. Global discrete artificial boundary conditions for time-dependent wave propagation. J. Comput. Physics, 2001, v.174, p.712-758.
- [12] Tsynkov S.V. Artificial boundary conditions for the numerical simulation of anstady accoustic waves. J.Comput. Physics, 2003, V.189(2), p.626-650.
- [13] Цынков С.В. Нелокальные искусственные граничные условия для численного решения задач в неограниченных областях. Дисс.докт. физ.-мат. наук, М., Институт математического моделирования РАН, 2003.
- [14] Tsynkov S.V. On the application of lacunae-based methods to Maxwell's equations, J. Comput. Physics, 2004, v.199, p.126-149.