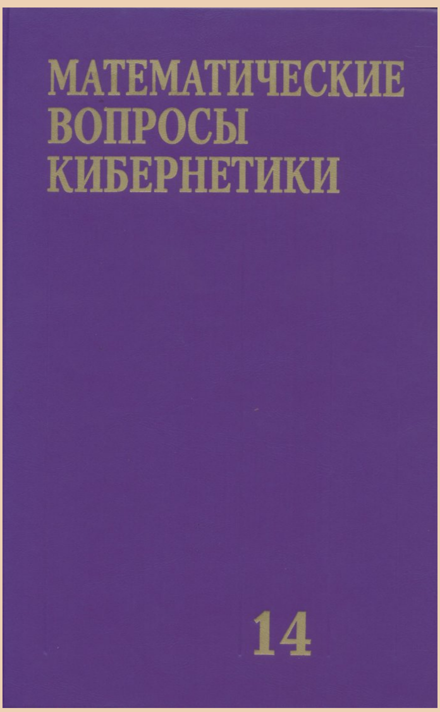



## Н. П. Редькин

# Минимальные самокорректирующиеся схемы для оператора поразрядного сравнения булевых наборов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Редькин Н. П. Минимальные самокорректирующиеся схемы для оператора поразрядного сравнения булевых наборов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 14. — М.: Физматлит, 2005. — С. 19–34. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2005-19

# МИНИМАЛЬНЫЕ САМОКОРРЕКТИРУЮЩИЕСЯ СХЕМЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПОРАЗРЯДНОГО СРАВНЕНИЯ БУЛЕВЫХ НАБОРОВ *)

*Н. П. РЕДЬКИН*

(МОСКВА)

Рассматриваются 1-самокорректирующиеся схемы из функциональных элементов в базисе Б $=\{\&, \vee, -\}$, каждая из которых реализует одну и ту же булеву функцию как в исправном состоянии, так и при переходе в неисправное состояние любого одного ненадежного элемента. Каждый надежный элемент имеет вес $P$ и всегда реализует одну и ту же приписанную ему функцию из Б. Каждый ненадежный элемент имеет вес 1 и реализует в исправном состоянии некоторую приписанную ему функцию из Б, а в неисправном состоянии — булеву константу $\delta$. Пусть $L(f)$ — наименьшая из сложностей 1-самокорректирующихся схем, реализующих булеву функцию $f$; под сложностью схемы понимается сумма весов всех элементов этой схемы. Для булевой функции $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (\bar{x}_1 \vee y_1) \& \ldots \& (\bar{x}_n \vee y_n)$ при $n \geqslant 2$, $P \geqslant 3$ и $\delta \in \{0, 1\}$ показано, что $L(s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})) = 6n + P - 2$.

## Введение

Одно из направлений математической теории надежности управляющих систем связано с изучением самокорректирующихся схем [15]. Постановка вопроса о построении самокорректирующихся схем и первый далеко нетривиальный результат в этом направлении содержится в [4]. Возможность построения асимптотически минимальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов для почти всех (т. е. для самых сложных) булевых функций установлена в [1, 2]; в этом случае соответствующие схемы имеют экспоненциальную — по числу переменных у реализуемых булевых функций — сложность и по этой причине фактически недоступны.

Дальнейшие исследования проблемы самокорректирования схем из функциональных элементов связаны, главным образом, с построением наиболее простых самокорректирующихся схем (линейной по числу переменных сложности) для конкретных булевых функций. Например, в работах [9, 11, 12] развивается некоторый подход к синтезу самокорректирующихся схем, который для булевых функций, допускающих достаточно простую декомпозицию, позволяет строить далеко нетривиальные схемы при весьма общих предположениях относительно характера возникающих в схе-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00994), программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ–1807.2003.1) и программы Университеты России (проект УР.04.02.528).

мах неисправностей. Работа [10] является хорошей иллюстрацией того факта, что учет специфики рассматриваемых неисправностей может позволить значительно уменьшить сложность самокорректирующихся схем. В [5, 7] представлены, по-видимому, первые нетривиальные примеры асимптотически минимальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов для одной конкретной последовательности булевых функций (пороговых симметрических функций с порогом два). В [13] приводятся асимптотически минимальные самокорректирующиеся схемы для так называемых «узких» систем линейных булевых функций. Наконец, в [8] дан пример минимальной самокорректирующейся схемы для конкретной булевой функции — оператора переноса в старший $(n+1)$-й разряд суммы при сложении двух $n$-разрядных двоичных чисел; однако весьма существенным ограничением в этом примере является предположение о том, что выходы функциональных элементов в рассматриваемых схемах не ветвятся (данное ограничение существенно используется в [8] при доказательстве нижней оценки сложности схем).

В данной работе рассматриваются обычные схемы из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, -\}$ [3] без каких-либо ограничений. Допускаются единичные константные неисправности какого-нибудь определенного типа (0 или 1) на выходах функциональных элементов. В классе таких схем найдена минимальная самокорректирующаяся схема из функциональных элементов для конкретной булевой функции — оператора поразрядного сравнения двух булевых наборов.

## § 1. Постановка задачи и формулировка результата

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов в базисе $\text{Б}=\{\&, \vee, -\}$; будем предполагать, что эти схемы можно строить из надежных и ненадежных функциональных элементов. Каждый надежный элемент имеет вес $P$ $(P>0)$ и реализует только приписанную ему функцию из Б. Каждый ненадежный элемент в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из Б, а в неисправном состоянии — булеву константу $\delta$ ($\delta \in \{0,\ 1\}$; предполагается, что константа $\delta$ фиксирована). Вес каждого ненадежного элемента равен единице.

Схема $S$, реализующая булеву функцию $f$, называется 1-*самокорректирующейся*, если $S$ реализует $f$ как при исправном состоянии всех ее элементов, так и при переходе в неисправное состояние любого одного ненадежного элемента; далее в данной работе 1-самокорректирующиеся схемы будем называть просто *самокорректирующимися*.

*Сложность* $L(S)$ самокорректирующейся схемы $S$ определим как сумму весов всех ее элементов. Через $L(f)$ обозначим наименьшую сложность самокорректирующейся схемы, реализующей булеву функцию $f$; число $L(f)$ считается *сложностью реализации* булевой функции $f$ (в классе самокорректирующихся схем). Самокорректирующаяся схема $S$ реализующая булеву функцию $f$, называется *минимальной*, если $L(S)=L(f)$.

Будем рассматривать задачу реализации минимальной самокорректирующейся схемой булевой функции $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = s_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} (\bar{x}_i \vee y_i)$; легко заметить, что

$$s_n(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i \leqslant \beta_i,\ i=1, \ldots, n, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. $s_n$ представляет собой оператор поразрядного сравнения двух $n$-разрядных булевых наборов.

Для сложности реализации оператора поразрядного сравнения булевых наборов докажем следующее утверждение.

Теорема. *Если натуральное число $n$ и действительное число $P$ удовлетворяют условиям $n \geqslant 2$ и $P \geqslant 3$, то при однотипных константных неисправностях на выходах элементов*

$$L(s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})) = 6n + P - 2.$$

Доказательство. Верхняя оценка получается конструктивно. Для определенности будем считать, что на выходах ненадежных элементов возникают константные неисправности типа 1, т. е. $\delta = 1$; при $\delta = 0$ в доказательство следует лишь внести почти очевидные незначительные изменения. В соответствии с определением оператор поразрядного сравнения $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ можно реализовать, очевидно, обычной схемой $S$ (несамокорректирующейся) из $3n - 1$ функциональных элементов, изображенной на рис. 1. Нетрудно заметить, что при любом наборе значений переменных на входах схемы $S$ значение на выходе этой схемы может только увеличиться при переходе в неисправное состояние любого одного элемента. Поэтому самокорректирующуюся схему $S_1$ для $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ можно составить из двух одинаковых схем $S$, построенных из ненадежных элементов и одного надежного конъюнктора (см. рис. 2). Сложность схемы $S_1$ равна $6n + P - 2$; отсюда и получаем верхнюю оценку теоремы.

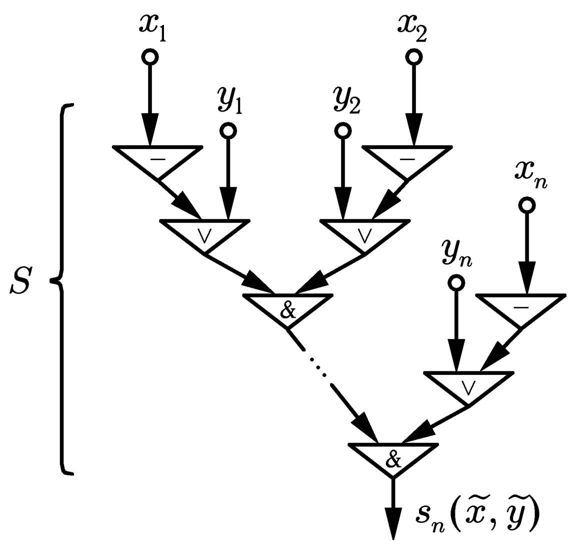



Рис. 1

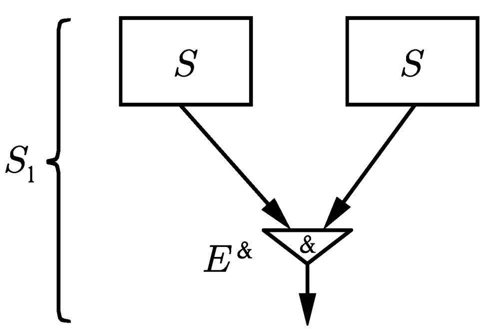



Рис. 2

Замечание 1. Используя рассуждения, подобные представленным в работе [6], нетрудно убедиться, что схема $S$ для $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, представленная на рис. 1, содержит наименьшее возможное число элементов, т. е. минимальна (в классе обычных, несамокорректирующихся схем). В дальнейшем это утверждение существенно используется при $n = 2$ и в этом случае детально обосновывается в доказательстве леммы 4.

Замечание 2. В случае неисправности типа 0 (т. е. при $\delta = 0$) подходящую самокорректирующуюся схему для $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ можно получить, заменив в $S_1$ (рис. 2) выходной надежный конъюнктор на дизъюнктор.

Нижняя оценка теоремы получается индукцией по $n$ с использованием доказываемых ниже лемм 1 и 3. С использованием этих лемм нижние оценки сложности получаются для схем, на входы которых помимо переменных подаются еще и константы 0 и 1. Ясно, что эти оценки останутся в силе и для обычных схем, на входы которых разрешается подавать только переменные (именно этот случай имеется в виду в теореме).

## § 2. Свойства самокорректирующихся схем

Приведем некоторые свойства самокорректирующихся схем, которые обычно используются при доказательстве нижних оценок сложности схем (см., например, [5, 7, 8]).

Свойство 1. *Если в самокорректирующейся схеме $S$ на входы элементов $E_1, \ldots, E_m$, находящихся в исправном состоянии, подаются константы, то эти элементы можно удалить из $S$ и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую ту же функцию, что и $S$ (предполагается, что после удаления из схемы некоторых элементов допускается изменение соединений остающихся в схеме элементов; здесь и ниже рассматриваются схемы, на входы которых наряду с переменными подаются еще и булевы константы).*

Свойство 2. *Если в самокорректирующейся схеме $S$ на выходах элементов $E_1,\ldots,E_m$, находящихся в исправном состоянии, реализуются константы, то эти элементы можно удалить из $S$ и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую ту же функцию, что и $S$.*

Свойство 3. *Если в самокорректирующейся схеме $S$ выход какого-либо элемента не является выходом схемы и не соединен с входами других элементов, то этот элемент $E$ можно удалить из $S$ и получить самокорректирующуюся схему, реализующую ту же функцию, что и $S$.*

Свойство 4. *Пусть самокорректирующаяся схема $S$ разбивается на две подсхемы $S_1$, $S_2$ так, что выполняются следующие условия:*

а) *подсхемы $S_1$ и $S_2$ не содержат общих элементов;*

б) *выход подсхемы $S_1$ является также и выходом всей схемы $S$;*

в) *единственный выход подсхемы $S_2$ соединен только со входом некоторого двухвходового элемента $E$ из подсхемы $S_1$;*

г) *некоторая переменная $x_i$ подается на второй вход элемента $E$ из подсхемы $S_1$ и на входы некоторых элементов $E_1, \ldots, E_m$ из подсхемы $S_2$.*

*В таком случае из схемы $S$ можно удалить элементы $E_1, \ldots, E_m$ и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую ту же функцию, что и схема $S$.*

Обоснование первых трех свойств (хотя они почти очевидны) можно найти в [5, 6]. Последнее свойство аналогично свойству 4 из [7], где рассматриваются схемы без ветвления выходов элементов и приводится обоснование свойства [4].

Самокорректирующиеся схемы, реализующие оператор поразрядного сравнения двух булевых наборов, обладают некоторым весьма важным свойством, которое устанавливается следующей леммой.

Лемма 1 (основная). *Из любой самокорректирующейся схемы, реализующей $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, $n \geqslant 2$, можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему, реализующуюся $s_{n-1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.*

При доказательстве основной леммы используется вспомогательная лемма 2, в которой рассматриваются функции

$$s_n^{i,0}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \bar{x}_i s_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n),$$
$$s_n^{i,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = y_i s_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n).$$

Лемма 2. *Из любой самокорректирующейся схемы, реализующей функцию $s_n^{i,\delta}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$, можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее двух и получить самокорректирующуюся схему, реализующую функцию $s_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$.*

Доказательство. Предположим, что $\delta = 0$ и $S$ — произвольная самокорректирующаяся схема, реализующая $s_n^{i,0}$. Функция $s_n^{i,0}$ существенно зависит от переменной $x_i$ и потому в схеме $S$ найдется хотя бы один элемент $E$, на вход которого подается $x_i$. Если $E$ — ненадежный элемент, то в схеме $S$ найдется еще хотя бы один элемент $E'$, на вход которого также подается переменная $x_i$; иначе при неисправном состоянии элемента $E$ реализуемая схемой $S$ функция не зависела бы от $x_i$. Положим $x_i \equiv 0$. В этом случае константа 0 будет подаваться в схеме $S$ на входы некоторых элементов с общим весом не менее двух. Согласно свойству 1 эти элементы можно удалить из $S$ и получить самокорректирующуюся схему, реализующую функцию $s_{n-1}$.

Аналогичные рассуждения возможны и в случае $\delta = 1$ (для функции $s_n^{i,1}$). Лемма доказана.

Доказательство основной леммы, очевидно, достаточно провести для произвольной минимальной самокорректирующейся схемы $S$, реализующей функцию $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. При этом с учетом леммы 2 для данной схемы $S$ достаточно доказать одно из следующих двух утверждений:

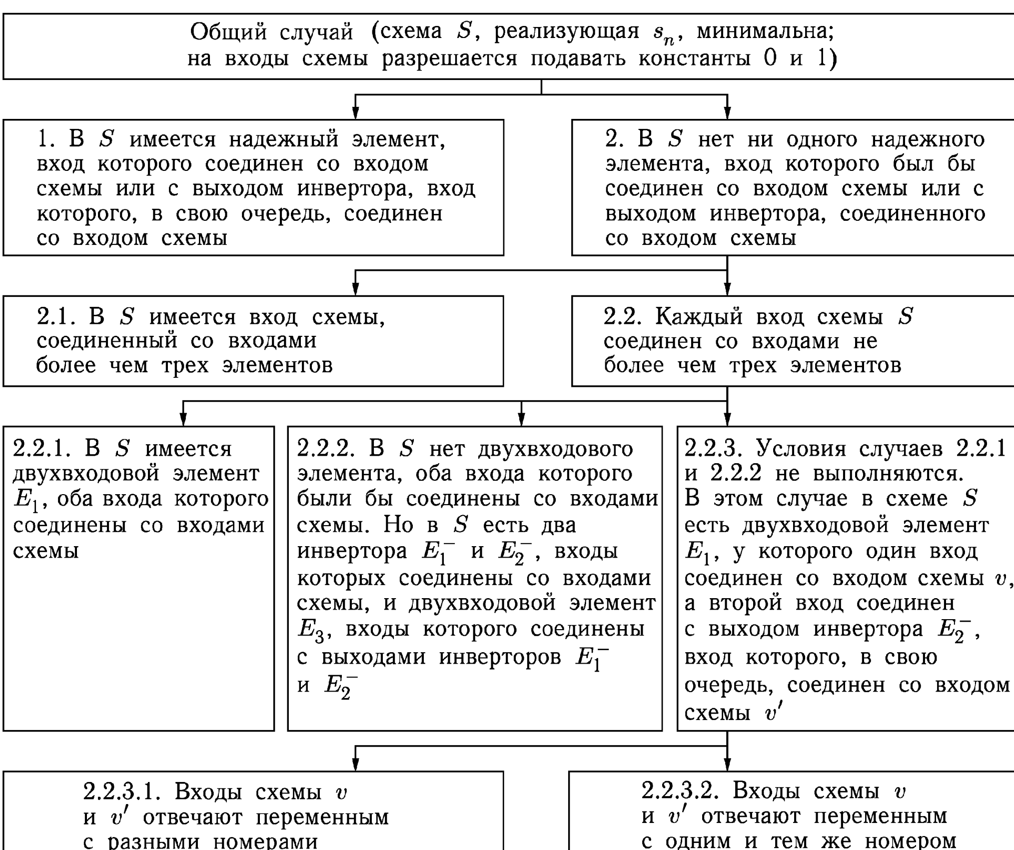
а) из $S$ можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему, реализующую $s_{n-1}$;

б) из $S$ можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее четырех и получить самокорректирующуюся схему, реализующую одну из функций $s_n^{i,0}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, $s_n^{i,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.

В зависимости от вида схемы $S$ рассмотрим всевозможные случаи, представленные в табл. 1.

Таблица 1

**Разбиение доказательства леммы 1 (основной) на случаи**



Случай 1. Пусть на вход надежного элемента $E_1$ подается некоторая переменная, например, $x_i$ (т. е. вход элемента $E_1$ соединен со входом схемы $S$, отвечающим переменной $x_i$; случай подачи на вход надежного элемента $E_1$ переменной $y_i$ рассматривается аналогичным образом). Если $x_i$ подается на вход еще какого-нибудь элемента $E_2$, то при $x_i \equiv 1$ согласно свойству 1 из $S$ можно удалить по крайней мере элементы $E_1$ и $E_2$ с общим весом не менее четырех и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую $s_n^{i,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; утверждение б) будет выполнено. Если выход элемента $E_1$ подается на вход некоторого надежного элемента $E_2$ (т. е. выход элемента $E_1$ соединен с некоторым входом элемента $E_2$), то при $x_i \equiv y_i \equiv \chi(E_1)$, где

$$\chi(E_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } E_1 \text{ конъюнктор или инвертор,} \\ 1, & \text{если } E_1 \text{ — дизъюнктор,} \end{cases}$$

на выходе элемента $E_1$ будет реализована константа $\chi(E_1)$ и эта константа будет подана на вход элемента $E_2$. Согласно свойствам 1 и 2 из $S$ можно удалить по крайней мере элементы $E_1$ и $E_2$ с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую $s_{n-1}$; утверждение а) будет выполнено. Аналогично, утверждение а) будет выполнено, если выход элемента $E_1$ подается на входы каких-нибудь не менее чем трех ненадежных элементов. Далее в рассматриваемом случае будем считать, что $x_i$ подается только на вход элемента $E_1$, а выход элемента $E_1$ подается на входы не более чем двух ненадежных элементов.

Рассмотрим пару элементов $E$, $E'$ в какой-нибудь схеме. Если хотя бы один вход элемента $E'$ соединен с выходом элемента $E$, то будем говорить, что элемент $E$ предшествует элементу $E'$, а элемент$E'$ следует за $E$. В схеме $S$ за элементом $E_1$ должны следовать хотя бы два ненадежных элемента $E_2$ и $E_3$; иначе при неисправности единственного элемента, следующего за $E_1$, реализуемая схемой $S$ функция не зависела бы от $x_i$, что недопустимо для самокорректирующейся схемы.

Предположим, что $y_i$ подается только на вход элемента $E_1$. Если значения всех отличных от $x_i$ и от $y_i$ переменных равны 0, то как при $x_i = 0$, $y_i = 1$, так и при $x_i = 1$, $y_i = 0$ значение на выходе элемента $E_1$, а значит и на выходе всей схемы $S$ будет одно и то же. Вместе с тем функция $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ на указанных наборах значений переменных принимает различные значения. Получаем противоречие. Значит, $y_i$ подается на вход некоторого элемента $E'$, отличного от $E_1$. Если $E'$ отличается еще и от элементов $E_2$, $E_3$, то положим $x_i \equiv y_i \equiv \chi(E_1)$. На выходе элемента $E_1$ будет реализована константа $\chi(E_1)$ и эта же константа будет подана на входы элементов $E_2$, $E_3$, $E'$. Согласно свойствам 2 и 1 можно будет удалить элементы $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E'$ с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему, реализующую $s_{n-1}$; утверждение а) будет выполнено.

Предположим, что $E'$ совпадает с одним из элементов $E_2$, $E_3$, например, с $E_2$. В таком случае при $x_i \equiv y_i \equiv \chi(E_1)$ на выходе элемента $E_1$, а вслед за ним и на выходе элемента $E_2$ будет реализована константа $\chi(E_1)$. Выход элемента $E_2$ не может быть выходом схемы и должен подаваться на вход какого-нибудь отличного от $E_3$ элемента — иначе при неисправности элемента $E_3$ реализуемая схемой $S$ функция $s_n$ не зависела бы от $x_i$. Но если за $E_2$ следует отличный от $E_3$ элемент $E_4$, то согласно свойствам 1, 2 можно удалить элементы $E_1 - E_4$ с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему, реализующую $s_{n-1}$; утверждение а) будет выполнено.

Если в схеме $S$ имеется инвертор $E_1^-$, на вход которого подается, скажем, переменная $x_1$ (или $y_1$), и выход которого соединен со входом надежного элемента $E_2$, то при $x_1 \equiv 1$ (соответственно при $y_1 \equiv 0$) из $S$ можно удалить по крайней мере элементы $E_1^-$, $E_2$ (их общий вес равен четырем) и получить схему $S'$, реализующую $s_n^{1,1}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ ( $s_n^{1,0}(\widetilde{x},\widetilde{y})$); утверждение б) будет выполнено. Случай 1 рассмотрен полностью.

Случай 2.1. Предположим, что в схеме $S$ имеются четыре элемента $E_1$–$E_4$, на входы которых подается некоторая переменная, скажем, $x_i$ (или $y_i$). Положим, $x_i\equiv 1$ (или $y_i\equiv 0$). Согласно свойству 1 из $S$ можно удалить по крайней мере элементы $E_1$–$E_4$ с общим весом не менее четырех и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую $s_n^{i,1}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ (соответственно $s_n^{i,0}(\widetilde{x},\widetilde{y})$); утверждение б) будет выполнено.

Случай 2.2.1. Покажем, что хотя бы одна из переменных, подаваемых на входы элемента $E_1$, должна подаваться на входы еще двух элементов. Предположим, что на входы элемента $E_1$ подаются переменные с разными номерами, например, $x_1$ и $y_2$. В таком случае ограничиться подачей переменной $x_1$ на входы элемента $E_1$ и еще какого-нибудь одного элемента $E_2$ нельзя — при $y_2\equiv\chi(E_1)$ и неисправности элемента $E_2$ реализуемая схемой $S$ функция не будет зависеть от $x_1$, что недопустимо для самокорректирующейся схемы (обратим внимание на то очевидное обстоятельство, что при подстановке в $s_n(\widetilde{x},\widetilde{y})$ любой булевой константы вместо переменной с некоторым номером получается функция, зависящая от переменных со всеми другими номерами; здесь и далее, говоря о зависимости, подразумеваем существенную зависимость).

Одна и та же переменная не может подаваться на оба входа двухвходового элемента $E$ в схеме $S$, поскольку при такой подаче (и вообще при соединении обоих входов элемента $E$ с любой одной и той же вершиной схемы) элемент $E$, очевидно, можно было бы удалить из $S$ и схема $S$ оказалось бы не минимальной, что противоречит исходному предположению о минимальности $S$. Поэтому если на входы элемента $E_1$ и подаются переменные с одним и тем же номером, то это должны быть разные переменные, скажем, $x_1$ и $y_1$. Если $E_1$ — конъюнктор, то нельзя ограничиться подачей переменной $x_1$ на входы лишь двух элементов $E_1$ и $E_2$, так как при $y_1\equiv 0$ и неисправности элемента $E_2$ реализуемая схемой функция не будет зависеть от $x_1$, что недопустимо для самокорректирующейся схемы. Если же $E_1$ — дизъюнктор, то переменная $y_1$ должна подаваться на входы трех элементов; в противном случае (при подаче $y_1$ только на входы элементов $E_1$ и $E_2$) снова получим противоречие, предполагая $x_1\equiv 0$ и неисправность элемента $E_2$.

Будем полагать далее, что некоторая переменная, например, $x_1$ подается на входы трех элементов $E_1$, $E_2$, $E_3$ (случай, когда вместо $x_1$ фигурирует $y_1$, рассматривается аналогично).

Предположим, что среди элементов $E_1$–$E_3$ есть хотя бы одни дизъюнктор, например, $E_1$ — дизъюнктор. Положим $x_1\equiv 1$; на входы элементов $E_1$–$E_3$ будет подана единица, а кроме того на выходе элемента $E_1$ будет реализована единица. Если за элементом $E_1$ следует один из элементов $E_2$, $E_3$, например, $E_2$, то и на выходе элемента $E_2$ будет реализована единица, а если за $E_2$ следует $E_3$, то и на выходе элемента $E_3$ будет реализована единица. Ясно, что ни один из элементов схемы $S$, на выходе которого получается константа при $x_1\equiv 1$, не может быть выходным элементом схемы $S$. Но тогда за каждым из указанных элементов (выдающих константу при $x_1\equiv 1$) должен следовать еще какой-нибудь хотя бы один элемент — иначе схема $S$ оказалась бы не минимальной (с учетом свойств 2 и 3). Получается, что хотя бы один элемент из числа $E_1$–$E_3$, выдающий константу при $x_1\equiv 1$, должен предшествовать некоторому элементу $E_4$, отличному от $E_1$–$E_3$. Согласно свойствам 1, 2 элементы $E_1$–$E_4$ можно удалить из $S$ и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую $s_n^{1,1}(\widetilde{x},\widetilde{y})$; утверждение б) оказывается выполненным.

Далее считаем, что все три элемента $E_1-E_3$ — конъюнкторы. Переменная $y_1$ подаваться на входы хотя бы двух элементов из числа $E_1-E_3$ не может — если $y_1$ подается, например, на входы элементов $E_1$ и $E_2$, то при $y_1 \equiv 0$ и неисправном элементе $E_3$ реализуемая схемой функция не зависела бы от $x_1$, что недопустимо (для самокорректирующейся схемы). Если $y_1$ на входы элементов $E_1-E_3$ не подается или подается на вход лишь одного какого-нибудь элемента из числа $E_1-E_3$, например, на вход элемента $E_1$, то в этом случае переменная $y_1$ должна подаваться на вход хотя бы одного элемента $E_4$, отличного от $E_1-E_3$ (иначе при неисправном элементе $E_1$ реализуемая схемой функция не зависела бы от $y_1$).

Предположим, что $x_1 \equiv 0$, $y_1 \equiv \chi(E_4)$. На выходах элементов $E_1-E_4$ окажутся реализованы константы. При подстановке в $s_n(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ вместо переменных $x_1$ и $y_1$ соответственно нуля и $\chi(E_4)$ получается подфункция $s_{n-1}$, зависящая от остальных переменных. Значит, элементы $E_1-E_4$ не могут быть выходными элементами схемы $S$. С учетом минимальности схемы $S$ и свойства 3 получаем, что за каждым из элементов $E_1-E_4$ должен следовать какой-то элемент. Отсюда вытекает, что в схеме $S$ имеются отличные от $E_1-E_4$ элементы $E_5, \ldots, E_m$, $m \geqslant 5$, следующие за элементами $E_1-E_4$. Если $m = 5$, то элемент $E_5$ должен быть надежным — в противном случае при неисправности $E_5$ реализуемая схемой $S$ функция не зависела бы от переменных $x_1$, $y_1$. Общий вес элементов $E_1-E_5$ оказывается равным семи, после удаления этих элементов (свойства 1, 2) получается схема $S'$, реализующая $s_{n-1}$, и утверждение а) выполняется. Если же $m \geqslant 6$, то из схемы $S$ можно удалить согласно свойствам 1, 2 по крайней мере элементы $E_1-E_6$ с общим весом не менее шести и получить схему $S'$, реализующую $s_{n-1}$; утверждение а) выполняется.

Случай 2.2.2. Пусть на вход инвертора $E_1^-$ подается, скажем, $x_1$ (случай, когда на вход инвертора $E_1^-$ подается $y_1$, рассматривается аналогично), а на вход второго инвертора $E_2^-$ подается некоторая переменная $z$, $z \in \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ (рис. 3). Если $z$ совпадает с $x_1$, то легко заметить, что при $x_1 \equiv 1$ можно будет удалить $E_1^-$, $E_2^-$, $E_3$ и еще хотя бы один следующий за $E_3$ элемент $E_4$ (выход элемента $E_3$ не может быть выходом схемы и за $E_3$ должен следовать хотя бы один какой-нибудь элемент) и получить схему $S'$, реализующую $s^{1,0}_{n-1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; утверждение б) будет выполнено. Далее считаем, что $z$ отличается от $x_1$.

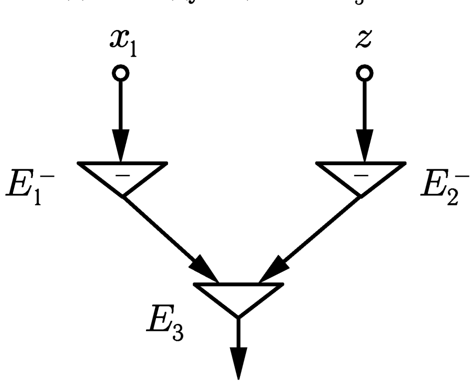



Рис. 3

Обе переменные $x_1$ и $z$ должны подаваться на входы еще каких-то элементов, отличных от $E_1^-$, $E_2^-$; в противном случае, если, скажем, переменная $x_1$ подавалась бы только на вход элемента $E_1^-$, то при неисправности $E_1^-$ реализуемая схемой $S$ функция не зависела бы от $x_1$, что недопустимо. Предположим, что выход хотя бы одного из инверторов $E_1^-$, $E_2^-$, например, инвертора $E_1^-$ ветвится, т. е. подается на входы по крайней мере двух элементов. Получаем, что выход элемента $E_1^-$ подается на входы элемента $E_3$ и еще какого-то элемента $E_4$, и кроме того переменная $x_1$ подается на входы инвертора и еще какого-то элемента $E'$. При $x_1 \equiv 1$ можно удалить либо четыре элемента $E_1^-$, $E_3$, $E_4$ и $E'$, если $E'$ отличается от $E_4$, либо три элемента $E_1^-$, $E_3$, $E_4$ и еще хотя бы один следующий за $E_4$ элемент, если $E'$ совпадает с $E_4$, и получить схему $S'$, реализующую $s_n^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; в любом случае утверждение б) будет выполнено.

Далее считаем, что выходы инверторов $E_1^-$, $E_2^-$ не ветвятся. Убедимся, что хотя бы одна из переменных $x_1$, $z$ должна подаваться на входы трех элементов. Действительно, если элемент $E_3$ — конъюнктор и $z$ подается только на входы инвертора $E_2^-$ и, скажем, некоторого элемента $E'$, то при $x_1 \equiv 1$ и неисправности $E'$ реализуемая схемой функция $s_n^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ не зависела бы от $z$, что недопустимо. Если же $E_3$ — дизъюнктор и $x_1$ подается только на входы инвертора $E_1^-$ и, скажем, некоторого элемента $E'$, то при $z \equiv 0$ и неисправности $E'$ реализуемая схемой функция не зависела бы от $x_1$, что также недопустимо (напомним, что $z$ не совпадает с $x_1$, т. е. либо совпадает с $y_1$, либо номер переменной $z$ отличается от единицы). Предположим, что переменная $x_1$ подается на входы трех элементов $E_1^-$, $E_4$, $E_5$ (для случая, когда на входы трех элементов подается переменная $z$, рассуждения аналогичны). Полагая $x_1 \equiv 1$, можем удалить из схемы элементы $E_1^-$, $E_3$, $E_4$, $E_5$ и получить схему $S'$, реализующую $s_n^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; утверждение б) выполняется.

С л у ч а й 2. 2. 3. 1. Предположим, что входу $v'$ отвечает переменная $x_1$, а входу $v$ — некоторая переменная $z$ с отличным от единицы номером (рис. 4). Переменная $x_1$ должна подаваться на вход еще хотя бы одного отличного от $E_2^-$ элемента $E_3$ — иначе при неисправности инвертора $E_2^-$ реализуемая схемой $S$ функция не зависела бы от $x_1$. Если $x_1$ подается помимо элементов $E_2^-$ и $E_3$ на вход еще хотя бы одного элемента $E_4$, то при $x_1 \equiv 1$ можно удалить по крайней мере элементы $E_1$, $E_2^-$, $E_3$, $E_4$ и получить схему $S'$, реализующую функцию $s_n^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; утверждение б) будет выполнено. Предположим, что $x_1$ подается только на входы элементов $E_2^-$ и $E_3$. В этом случае выход элемента $E_2^-$ должен подаваться на вход некоторого элемента $E_4$, отличного от $E_3$ — иначе при $z \equiv \chi(E_1)$ и неисправности $E_3$ реализуемая схемой функция не зависела бы от $x_1$, что недопустимо. При $x_1 \equiv 1$ снова можно будет удалить не менее четырех элементов и получить схему $S'$, реализующую $s_n^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; утверждение б) выполняется.

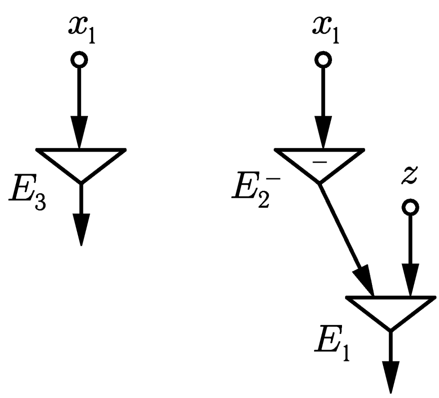



Рис. 4

С л у ч а й 2. 2. 3. 2. Как и в предыдущем случае предположим, что на вход инвертора $E_2^-$ подается переменная $x_1$. Предположим далее, что выход элемента $E_2^-$ ветвится, т. е. подается на входы по крайней мере двух элементов $E_1$ и $E_3$. Если переменная $x_1$ или выход элемента $E_2^-$ подаются на входы еще хотя бы одного элемента $E_4$, отличного от $E_1$, $E_3$, то при $x_1 \equiv 1$ можно выполнить утверждение б). Предположение о том, что переменная $x_1$ и выход инвертора $E_2^-$ подаются только на входы элементов $E_1$, $E_2^-$ и $E_3$ приводит к противоречию. Действительно, если $x_1$ подается на входы обоих элементов $E_1$ и $E_3$, то на выходах этих элементов будут реализованы константы и реализуемая схемой функция не будет зависеть от $x_1$ (ведь переменная $x_1$ по предположению подается только на входы элементов $E_1$, $E_2^-$ и $E_3$). Если же $x_1$ подается на вход лишь одного из элементов $E_1$, $E_3$, например, на вход $E_1$, то при неисправности $E_3$ на выходах элементов $E_1$ и $E_3$ снова окажутся реализованными константы и реализуемая схемой $S$ функция не будет зависеть от $x_1$.

Далее в рассматриваемом случае полагаем, что выход инвертора $E_2^-$ не ветвится.

Предположение о подаче переменной $x_1$ на вход элемента $E_1$ противоречит исходному предположению о минимальности $S$ — ведь в этом случае на выходе элемента $E_1$ оказалась бы реализованной константа (при исправных элементах $E_1$ и $E_2^-$) и элементы $E_1$ и $E_2^-$ можно было бы удалить из схемы $S$. Поэтому ниже будем считать, что на вход элемента $E_1$ подается переменная $y_1$.

Предположим, что элемент $E_1$ — конъюнктор, а переменная $x_1$ помимо элемента $E_2^-$ подается на вход лишь одного какого-то элемента $E_3$. Такое предположение приводит к противоречию — при $y_1 \equiv 0$ и неисправности $E_3$ реализуемая схемой функция, очевидно, не зависела бы от $x_1$, что недопустимо. Если же $x_1$ помимо элемента $E_2^-$ подается на входы еще по крайней мере двух каких-нибудь элементов $E_3$ , $E_4$ то при $x_1 \equiv 1$ можно будет удалить элементы $E_1$, $E_2^-$, $E_3$, $E_4$ и получить схему $S'$, реализующую $s_n^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; утверждение б) будет выполнено.

Далее полагаем, что элемент $E_1$ — дизъюнктор.

При подаче переменной $x_1$ на входы хотя бы трех элементов $E_2^-$, $E_3$, $E_4$ утверждение б) опять же можно будет выполнить. Вместе с тем нельзя ограничиться подачей переменной $x_1$ только на вход элемента $E_2^-$ — в таком случае при неисправности $E_2$ реализуемая схемой функция не зависела бы от $x_1$.

Будем считать далее, что $x_1$ подается на входы элемента $E_2^-$ и еще ровно одного какого-то элемента $E_3$. Ясно, что выход элемента $E_3$ не может быть выходом схемы и (с учетом минимальности схемы $S$ и свойства 3) должен подаваться на вход какого-то элемента $E'$. Если элемент $E_3$ — инвертор или дизъюнктор, то при $x_1 \equiv 1$ можно будет удалить из $S$ по крайней мере элементы $E_1$, $E_2^-$, $E_3$, $E'$ и получить схему $S'$, реализующую $s_n^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; утверждение б) будет выполнено.

Далее считаем, что элемент $E_3$ — конъюнктор.

Переменная $y_1$ подаваться на вход элемента $E_3$ не может — иначе при $y_1 \equiv 0$ и неисправном элементе $E_1$ реализуемая схемой $S$ функция не зависела бы от $x_1$, что недопустимо. Вместе с тем $y_1$ не может подаваться только на вход элемента $E_1$, так как в этом случае при неисправности $E_1$ реализуемая схемой функция не зависела бы от $y_1$, что недопустимо. Значит, найдется еще один элемент $E_4$ , отличный от $E_1$, $E_2^-$, $E_3$, на вход которого подается переменная $y_1$ (рис. 5).

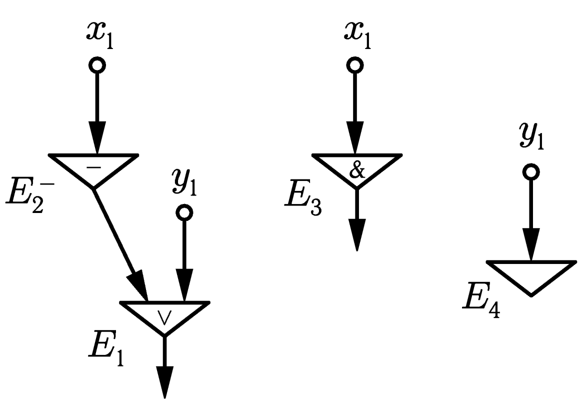



Рис. 5

Предположим, что выход элемента $E_1$ подается на входы обоих элементов $E_3$, $E_4$. Положим $x_1 \equiv 0$, $y_1 \equiv \chi(E_4)$. В этом случае на выходах элементов $E_3$, $E_4$ будут реализованы константы, ни один из этих выходов не может быть выходом схемы и за элементами $E_3$, $E_4$ должны следовать элементы. Если за элементами $E_3$, $E_4$ следуют хотя бы два элемента $E_5$, $E_6$, то согласно свойствам 1, 2 можно будет удалить по крайней мере элементы $E_1$, $E_2^-$, $E_3$–$E_6$ и получить схему $S'$, реализующую $s_{n-1}$; утверждение а) будет выполнено. Если выходы элементов $E_3$, $E_4$ подаются только на входы одного какого-нибудь элемента $E_5$, то на выходе этого элемента будет реализована константа и за ним должен будет следовать некоторый элемент $E_6$; получается, что и в этом случае можно будет удалить шесть элементов и выполнить утверждение а).

Предположим теперь, что выход элемента $E_1$ не ветвится и подается на вход только одного какого-нибудь элемента из числа $E_3$, $E_4$, например, только на вход элемента $E_3$. Схему $S$ разобьем на две подсхемы $S_1$ и $S_2$, полагая, что $S_2$ состоит из $E_1$ и $E_2^-$, а $S_1$ — из всех остальных элементов схемы $S$. При указанном разбиении выполняется свойство 4, согласно которому из исходной схемы можно будет удалить по крайней мере элемент $E_2^-$ и получить самокорректирующуюся схему $S'$ для $s_n(\tilde{x}, \tilde{y})$, что противоречит предположению о минимальности $S$.

Остается далее предположить, что в $S$ имеется отличный от $E_1$–$E_4$ элемент $E_5$, на вход которого подается выход элемента $E_1$ (рис. 6). При $x_1 \equiv 0$ и $y_1 \equiv \chi(E_4)$ на выходах элементов $E_1$–$E_4$ будут реализованы константы; на вход элемента $E_5$ подается по крайней мере одна константа. Если выходы элементов $E_3$ и $E_4$ не подаются на вход элемента $E_5$, то хотя бы за одним из элементов $E_3$, $E_4$ должен следовать отличный от $E_1$–$E_5$ элемент $E_6$ (выход схемы $S$ не может совпадать с выходом одного из элементов $E_3$, $E_4$, а сама схема $S$ минимальна!). Элементы $E_1$–$E_6$ в соответствии со свойствами 1, 2 можно удалить из $S$ и получить схему $S'$, реализующую $s_{n-1}$; утверждение а) будет выполнено.

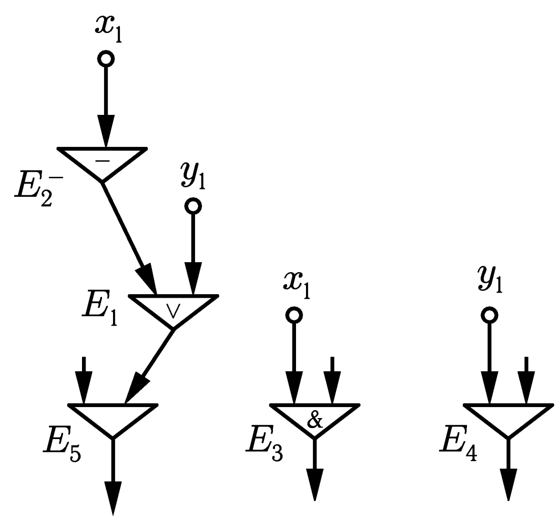



Рис. 6

Предположим, что выход одного из элементов $E_3$, $E_4$, например, элемента $E_3$ подается на вход элемента $E_5$. Тогда на выходе элемента $E_5$ окажется реализована константа (при вышеуказанных значениях переменных $x_1$ и $y_1$) и хотя бы за одним из элементов $E_4$, $E_5$ будет следовать элемент $E_6$, отличный от $E_1$–$E_5$. Опять можно будет удалить не менее шести элементов и получить самокорректирующуюся схему, реализующую $s_{n-1}$; утверждение а) будет выполнено. Лемма 1 (основная) доказана.

## § 3. Нижняя оценка сложности самокорректирующихся схем для $s_2(\tilde{x}, \tilde{y})$

Установим нижнюю оценку сложности реализации оператора поразрядного сравнения двух 2-разрядных булевых наборов самокорректирующейся схемой.

Лемма 3. *Если $P \geqslant 3$, то $L(s_2(\tilde{x}, \tilde{y})) \geqslant 13$.*

Доказательству этой леммы предпошлем еще две вспомогательные леммы.

Лемма 4. *Любая схема, реализующая $s_2(\tilde{x}, \tilde{y})$, содержит не менее пяти элементов.*

Доказательство, очевидно, достаточно провести для минимальной, т. е. содержащей наименьшее возможное число элементов схемы $S$, реализующей $s_2(\tilde{x}, \tilde{y})$. Предположим, что в $S$ имеется инвертор $E_1^-$, на вход которого подается какая-нибудь переменная, например, $x_1$ (т. е. вход элемента $E_1^-$, соединен со входом схемы, отвечающим переменной $x_1$). Ясно, что выход элемента $E_1^-$ не может быть выходом схемы и за ним следует еще хотя бы один какой-нибудь элемент $E_2$. Положим $x_1 \equiv 1$, удалим из $S$ элементы $E_1^-$, $E_2$ и получим схему $S'$, реализующую $s_2^{1,1}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = y_1(\bar{x}_2 \vee y_2)$ (для обычных, несамокорректирующихся схем свойства 1−4, конечно, выполняются, но только получающиеся после удаления элементов схемы $S'$, разумеется, самокорректирующимися могут и не быть). Далее положим $y_1 \equiv 1$, удалим из $S'$ элементы, на входы которых подается $y_1$ (хотя бы один такой элемент найдется), и получим схему $S''$, реализующую $\bar{x}_2 \vee y_2$. Схема $S''$, очевидно, должна содержать хотя бы один инвертор и хотя бы один двухвходовой элемент. В итоге получаем неравенство $L(S) \geqslant 5$.

Предположим теперь, что в схеме $S$ переменные на входы инверторов не подаются. В таком случае в $S$ найдется двухвходовой элемент $E_1$, например, конъюнктор (случай, когда $E_1$ — дизъюнктор, рассматривается аналогично), на входы которого подаются переменные, скажем $x_1$ и $y_1$. Переменная $x_1$ в данном случае должна подаваться на вход еще хотя бы одного какого-нибудь элемента $E_2$ — иначе при $y_1 \equiv 0$ реализуемая схемой $S$ функция не зависела бы от $x_1$, что недопустимо. Положим $x_1 \equiv 1$, удалим из $S$ элементы $E_1$, $E_2$ и получим схему $S'$, реализующую $y_1(\bar{x}_2 \vee y_2)$; такая схема $S'$, как уже было показано выше, содержит не менее трех элементов. Опять получаем неравенство $L(S) \geqslant 5$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть самокорректирующаяся схема $S$ реализует функцию $s_1 = \bar{x}_1 \vee y_1$. Тогда $L(S) = 6$ в единственном случае, когда $S$ состоит из надежного инвертора и следующего за ним надежного дизъюнктора, и $L(S) \geqslant 7$ во всех остальных случаях.*

Доказательство. Если $S$ содержит более двух надежных элементов, то $L(S) \geqslant 7$ (ведь общий вес двух надежных элементов уже равен шести). Легко также заметить, что если схема $S$ составлена ровно из двух надежных элементов, то этими элементами должны быть инвертор и следующий за ним дизъюнктор, причем на вход инвертора должна подаваться переменная $x_1$, а на один из входов дизъюнктора — переменная $y_1$.

Допустим, что $S$ содержит ровно один надежный элемент $E_1$, который будет выходным элементом схемы; в данном случае выходной элемент самокорректирующейся схемы $S$, очевидно, должен быть конъюнктором — иначе при неисправности некоторого элемента $E_2$, предшествующего элементу $E_1$ (а такой элемент $E_2$, как нетрудно заметить, обязательно должен быть в схеме) на выходе схемы окажется реализованной константа, а не функция $\bar{x}_1 \vee y_1$. Переменные $x_1$ и $y_1$ непосредственно на входы элемента $E_1$ подаваться не могут: если $x_1$ подается на вход элемента $E_1$, то при $x_1 \equiv 0$ на выходе схемы получим константу 0 вместо требуемой константы 1, а если $y_1$ подается на вход элемента $E_1$, то при $y_1 \equiv 0$ на выходе схемы опять-таки получим константу 0 вместо требуемой подфункции $\bar{x}_1$. Выход одного и того же элемента $E_2$ подаваться на оба входа элемента $E_1$ не может — такая подача привела бы к реализации на выходе схемы константы 1 при неисправности элемента $E_2$, что недопустимо. Следовательно, в $S$ должны быть два различных элемента (ненадежных) $E_2$ и $E_3$, предшествующих элементу $E_1$ (рис. 7). Далее рассмотрим три случая: (а) в схеме $S$ есть два инвертора, на входы которых подаются переменные $x_1$ и $y_1$; (б) в $S$ имеется только один инвертор, на вход которого подается одна из

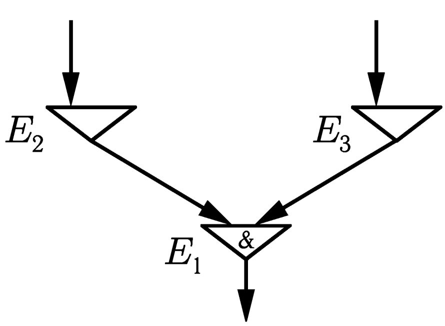


Рис. 7

переменных $x_1, y_1$; (в) переменные $x_1, y_1$ на входы инверторов в схеме $S$ не подаются.

Случай (а). Если переменная $x_1$ подается на вход инвертора $E_2^-$, предшествующего конъюнктору $E_1$, то при $x_1 \equiv 1$ на выходе схемы получим 0, а должно быть $y_1$. Если переменная $y_1$ подается на вход инвертора $E_3^-$, предшествующего элементу $E_1$, то при $y_1 \equiv 1$ и $x_0 \equiv 0$ на выходе элемента $E_1$ получим 0, а должна быть единица. Значит, в схеме должны быть два инвертора $E_4^-$, $E_5^-$, на входы которых подаются переменные $x_1$ и $y_1$. Но в таком случае, очевидно, $L(S) \geqslant 7$.

Случай (б). Пусть $E_4^-$ инвертор в схеме $S$, на вход которого подается переменная. Как показано было в предыдущем случае, элемент $E_4^-$ не может предшествовать элементу $E_1$, т. е. $E_4^-$ отличается от $E_2, E_3$. Если в $S$ помимо $E_4^-$ есть еще хотя бы один элемент $E_5$, отличный от $E_1 - E_3$, $E_4^-$, то требуемая оценка $L(S) \geqslant 7$ выполняется. Предположим, что $S$ состоит только из элементов $E_1 - E_3$, $E_4^-$. Но в таком случае при неисправности элемента $E_4$ получается схема, в которой на выходе каждого элемента реализуется монотонная функция [14] (относительно переменных, подаваемых на входы элементов). Значит, и на выходе схемы в рассматриваемом случае окажется реализованной некоторая монотонная булева функция (от переменных $x_1$, $y_1$); вместе с тем функция $s_1(x_1, y_1)$, очевидно, не является монотонной. Получаем противоречие, исключающее наше предположение о том, что $S$ состоит из четырех элементов.

Случай (в). Если элемент $E_2$ (или $E_3$) — двухвходовой и на оба входа его подаются переменные $x_1, y_1$, то при $x_1 \equiv y_1 \equiv 0$ на выходе схемы $S$ окажется реализованной константа 0, что недопустимо. Поэтому в $S$ найдется отличный от $E_2, E_3$, элемент $E_4$, на входы которого подаются переменные $x_1, y_1$ (рис. 8); относительно схемы $S$ предполагаем, что она минимальна в рассматриваемом классе схем (содержащих ровно по одному надежному выходному элементу), а потому одна и та же переменная на оба входа двухвходового элемента в схеме подаваться не может. Функция $\bar{x}_1 \vee y_1$, очевидно, немонотонна [14] и потому схема $S$ должна содержать хотя бы один инвертор $E^-$. Если этот инвертор $E^-$ отличен от $E_1 - E_4$, то $L(S) \geqslant 7$. Допустим, что $S$ содержит только четыре элемента и инвертором является, скажем, элемент $E_2$. Но при неисправном элементе $E_3$ схема реализует $\bar{x}_1 \vee y_1$, а это возможно только в том случае,

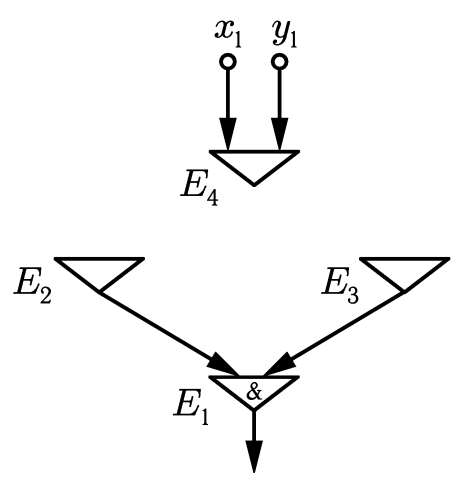


Рис. 8

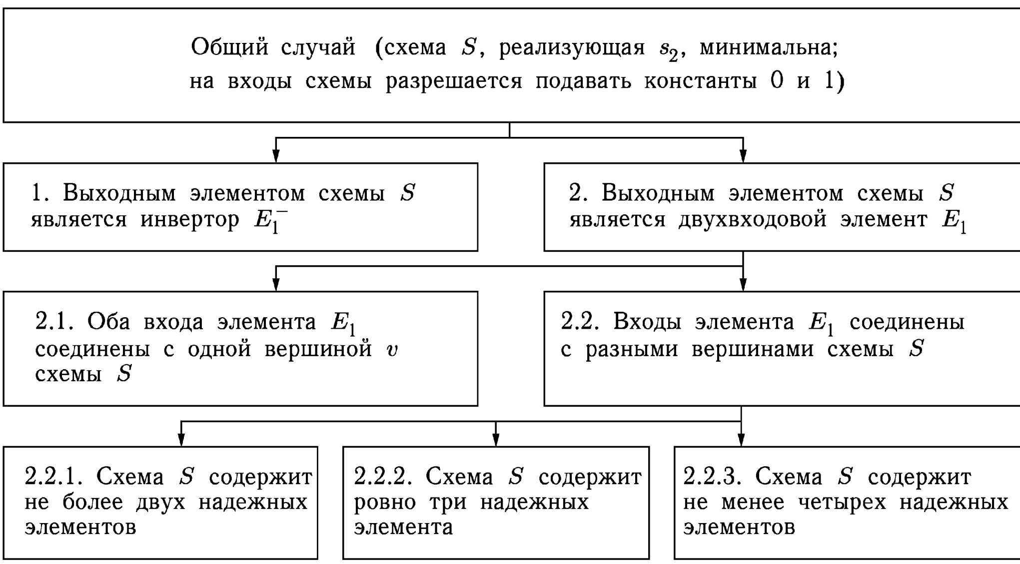
когда на вход инвертора $E_2$ подается немонотонная функция $x_1 \,\&\, \bar{y}_1$. А это исключено в рассматриваемой схеме, так как на выходе элемента $E_4$ реализуется либо $x_1 y_1$, либо $x_1 \vee y_1$, а элемент $E_3$ не может предшествовать инвертору $E_2$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть $S$ — произвольная минимальная самокорректирующаяся схема, реализующая $s_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Докажем, что $L(S) \geqslant 13$; при доказательстве рассмотрим различные случаи, представленные в табл. 2.

Случай 1. Выходным элементом схемы $S$ в данном случае является инвертор $E_1^-$. Применим к этой схеме лемму 1 (основную). Действуя в соответствии с доказательством леммы 1, удалим из $S$ некоторые элементы с общим весом не менее шести так, чтобы каждый удаляемый элемент $E$ удовлетворял хотя бы одному из условий: а) на вход элемента $E$ подается константа; б) на выходе элемента $E$ реализуется константа; в) выход элемента $E$ не является выходом схемы. В итоге получим некоторую схему $S'$, реализующую, скажем, $s_1(x_2, y_2)$, в которой инвертор $E_1^-$ останется выходным элементом схемы. Ясно, что вход элемента $E_1^-$ должен соединяться с выходом некоторого надежного элемента $E_2$. Легко заметить, что каким бы ни был второй элемент $E_2$, указанных двух элементов $E_1^-$ и $E_2$ недостаточно, чтобы составить схему $S'$, реализующую $s_1(x_2, y_2)$. Значит, в $S'$ обязательно присутствует еще хотя бы один какой-нибудь третий элемент и $L(S') \geqslant 7$, а $L(S) \geqslant 13$.

Таблица 2

**Разбиение доказательства леммы 3 на случаи**




Случай 2.1. Вершина $v$ должна совпадать в данном случае с выходом некоторого надежного элемента $E_2$, на котором должна быть реализована одна и та же функция $s_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ как при исправном состоянии схемы $S$, так и при переходе в неисправное состояние одного ненадежного элемента. Но тогда элемент $E_1$ можно удалить из $S$ и получить схему $S'$ (самокорректирующуюся!), реализующую $s_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$; получаем противоречие с исходным предположением о минимальности $S$.

Случай 2.2.1. В схеме $S$ выходным элементом $E_1$ должен быть конъюнктор. Действительно, если $E_1$ — дизъюнктор, то хотя бы на один вход элемента $E_1$ будет подаваться либо какая-нибудь переменная $z$, $z \in \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, либо выход некоторого ненадежного элемента $E$. Но в таком случае при $z \equiv 1$ или при неисправном элементе $E$ на выходе схемы $S$ окажется реализованной константа 1, что недопустимо. При наличии в схеме $S$ надежного конъюнктора в ней никак не могут оказаться (в условиях рассматриваемого случая) надежные инвертор и дизъюнктор. Согласно лемме 1 из исходной схемы $S$ можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему $S'$, реализующую $s_1$. В схеме $S'$, возможно, останутся лишь те надежные элементы, которые имелись в $S$. Получаем, что в $S'$ может оказаться не более двух надежных элементов, и даже при наличии в $S'$ двух надежных элементов они не могут оказаться инвертором и дизъюнктором. С учетом леммы 5 это означает, что $L(S') \geqslant 7$, а для исходной схемы выполняется оценка $L(S) \geqslant 13$.

Случай 2.2.2. По лемме 4 схема $S$ содержит не менее пяти элементов. Среди этих элементов найдется ненадежный элемент $E$, выход которого (с учетом минимальности схемы $S$ и свойства 3) подается на вход хотя бы одного какого-нибудь элемента $E'$. Предположим, что элемент $E$ перешел в неисправное состояние. В этом случае схему $S$ можно рассматривать как некоторую схему (уже несамокорректирующуюся), которая реализует функцию $s_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ и в которой на выходе элемента $E$ реализуется константа 1 и на вход элемента $E'$ подается константа 1. Согласно свойствам 1, 2 элементы $E, E'$ можно удалить из $S$ и получить некоторую схему $S'$, реализующую $s_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Согласно лемме 4 схема $S'$ содержит не менее пяти элементов. Выходит, что исходная схема $S$ содержит не менее семи элементов и среди них три ненадежных элемента. Это означает, что $L(S) \geqslant 13$.

Случай 2.2.3. Согласно лемме 4 схема $S$ содержит не менее пяти элементов и по условию данного случая не менее четырех из них — надежные. Поэтому $L(S) \geqslant 13$.

Лемма доказана.

Замечание 3. Как уже говорилось выше, доказательство теоремы при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов проводится аналогично. Рассуждения при получении нижней оценки остаются, фактически, прежними; незначительные изменения в этих рассуждениях, обусловленные характером неисправностей, почти очевидны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 12. — М.: Наука, 1964. — С. 29–37.
2. Кириенко Г. И. Синтез самокорректирующихся схем из функциональных элементов для случая растущего числа ошибок в схеме // Дискретный анализ. Вып. 16. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1970. — С. 38–43.
3. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Из-во МГУ, 1984.
4. Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем // ДАН СССР. — 1960. — Т. 134, № 3. — С. 544–547.
5. Редькин Н. П. Об асимптотически минимальных самокорректирующихся схемах для одной последовательности булевых функций // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1966. — № 3. — С. 3–9.
6. Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 83–101.
7. Редькин Н. П. Асимптотически минимальные самокорректирующиеся схемы для одной последовательности булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 2. — С. 62–79.
8. Редькин Н. П. Минимальные самокорректирующиеся схемы для одной последовательности булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1998. — Т. 5, № 3. — С. 44–63.
9. Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем для некоторых последовательностей булевых функций // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 77–86.
10. Турдалиев Н. И. О схемах, самокорректирующихся относительно однотипных константных неисправностей // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 49. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1989. — С. 60–74.
11. Турдалиев Н. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов для линейной функции // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, вып. 2. — С. 150–154.
12. Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем из функциональных элементов для некоторых булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. — М.: Наука, 1994. — С. 280–294.
13. Чашкин А. В. Самокорректирующиеся схемы, реализующие «узкие» системы линейных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1998. — Т. 5, № 3. — С. 80–95.

14. Яблонский С. В. Ведение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
15. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

Поступило в редакцию 25 V 2003