

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Н.А.Брюханов, В.В.Цветков, М.Ю.Беляев,
Е.В.Бабкин, Т.В.Матвеева, В.В.Сазонов

**ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕУПРАВЛЯЕМЫМ
ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КА *ПРОГРЕСС***

Москва - 2005

Аннотация

Описаны результаты летных испытаний двух режимов неуправляемого вращательного движения космического корабля *Прогресс*, предлагаемых для проведения экспериментов в области микрогравитации: трехосной гравитационной ориентации и закрутки в плоскости орбиты вокруг оси максимального момента инерции. Испытания проводились 27.02 — 07.03.2005 на КА *Прогресс М-51*. Фактическое движение КА относительно центра масс в указанных режимах определялось по телеметрической информации об электрическом токе, снимаемом с солнечных батарей. Значения тока, полученные на временном интервале в несколько часов, обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений вращательного движения КА. В результате обработки оценивались начальные условия движения и параметры использованных математических моделей. Для найденных движений рассчитана квазистатическая составляющая микроускорения в точке борта, где возможна установка экспериментального оборудования.

N.A.Bryukhanov, V.V.Tsvetkov, M.Yu.Belyaev, E.V.Babkin, T.V.Matveeva, V.V.Sazonov. Experiments with the spacecraft *Progress uncontrolled attitude motion*. We describe the results of flight tests of two modes of the spacecraft Progress uncontrolled attitude motion, which are offered for carrying out experiments in microgravity science. They are triaxial gravitational orientation and spacecraft rotation in the orbital plane around the axis of the maximal moments of inertia. The tests were carried out from 27.02 to 07.03.2005 on the spacecraft Progress M-51. The spacecraft attitude motion in those modes was reconstructed by processing telemetry information about electric current from spacecraft solar batteries. The measurements of the current, collected on a time interval about a few hours, were processed simultaneously by means of the least squares method and integration of the spacecraft attitude motion equations. The estimations of the mathematical model parameters and initial conditions of an attitude motion were obtained as a result of such processing. The real quasi-steady acceleration component was calculated for found motions and the point on board the spacecraft where experimental equipment can be placed.

1. Использование КА *Прогресс* для исследований в области микрогравитации. Остаточные микроускорения на Российском сегменте Международной космической станции (МКС) достаточно велики. По этой причине рассматривается возможность проведения экспериментов с гравитационно-чувствительными объектами на кораблях *Прогресс*, функционирование которых в составе МКС завершено [1]. Такие корабли предполагается загрузить научным оборудованием, предварительно доставленным на станцию, и отправить в самостоятельный полет вблизи нее. Во время полета, который продлится несколько суток большей частью в режиме неуправляемого вращательного движения, на корабле в автоматическом режиме будут эксперименты. Затем корабль пристыкуют к станции, из него выгрузят оборудование и будут готовить для новой научной экспедиции или затопления.

Для проверки целесообразности таких экспедиций 24.05 — 01.06.2004 г. на КА *Прогресс М1-11* и 27.02 — 07.03.2005 на КА *Прогресс М-51* были проведены соответствующие летные испытания. Их цель состояла в оценке остаточных микроускорений в некоторых режимах неуправляемого вращательного движения и исследовании устойчивости этих режимов. Результаты испытаний на КА *Прогресс М1-11* описаны в [2]. Ниже приводятся результаты испытаний на КА *Прогресс М-51*. На этом КА были реализованы два из трех режимов, опробованных в первой экспедиции: трехосная гравитационная ориентация и закрутка в плоскости орбиты вокруг оси максимального момента инерции [1,2]. Новым во второй экспедиции было то, что выставка начальных условий ориентированного движения КА выполнялась с помощью специально разработанных для этой цели программ бортового компьютера. В первой экспедиции выставка начальных условий осуществлялась штатными программами, выполнение которых прерывалось в подходящий момент времени.

Математическое моделирование [1] и летные испытания [2] показали, что аэродинамический момент оказывает заметное дестабилизирующее влияние на неуправляемое движение КА в указанных выше режимах. При этом, чем выше точность выставки начальных условий, тем меньше возмущен режим на отрезке времени заданной длины и тем ниже уровень остаточных микроускорений на борту КА. Таким образом, высокая точность реализации начальных условий является одним из главных факторов, обеспечивающих низкий уровень остаточных микроускорений на *Прогрессах*. Именно это обстоятельство потребовало разработки специализированных способов выставки начальных условий ориентированного движения. Одна из задач полета КА *Прогресс М1-11* состояла в испытании таких способов.

КА *Прогресс М-51* не имел акселерометров, предназначенных для измерения микроускорений на его борту, и специализированных датчиков для определения неуправляемого вращательного движения, поэтому анализ результа-

тов второй экспедиции выполнялся по той же схеме, которая применялась в [2]. Реконструкция фактического вращательного движения КА осуществлялась на основании статистической обработки телеметрической информации о токосъеме с солнечных батарей КА, квазистатические микроускорения находились расчетным путем по результатам этой реконструкции. Ниже приводится краткое описание применявшихся методов и полученных результатов.

2. Уравнения вращательного движения КА. КА считается твердым телом, геоцентрическое движение его центра масс — кеплеровым эллиптическим. Элементы этого движения находятся по данным радиоконтроля орбиты. Для записи уравнений введем две правые декартовы системы координат — орбитальную $OX_1X_2X_3$ и образованную главными центральными осями инерции КА $Ox_1x_2x_3$. Точка O — центр масс КА, оси OX_3 и OX_1 направлены соответственно вдоль геоцентрического радиуса-вектора точки O и по трансверсали к орбите в этой точке. Упрощая модель, полагаем, что ось Ox_1 направлена вдоль продольной оси КА в сторону агрегатного отсека, ось Ox_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей, светочувствительная сторона которых обращена к полупространству $x_2 > 0$.

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ будем задавать углами γ , δ и β , которые введем следующим образом. Система $OX_1X_2X_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OX_2 , 2) на угол β вокруг новой оси OX_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси OX_1 , совпадающей с осью Ox_1 . Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $OX_1X_2X_3$ обозначим $\| a_{ij} \|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} — косинус угла между осями OX_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через введенные углы с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{21} &= \sin \beta, \\ a_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ & & a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, \\ & & a_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ & & a_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

В уравнениях вращательного движения КА учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты. Эти уравнения имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu a_{32}a_{33}), \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu a_{31}a_{33}) + \frac{\kappa\nu_3}{1 + \lambda\mu}, \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu a_{31}a_{32}) - \kappa\nu_2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= a_{12}\omega_3 - a_{13}\omega_2 - \omega_0 a_{31}, & \dot{a}_{31} &= a_{32}\omega_3 - a_{33}\omega_2 + \omega_0 a_{11}, \\
\dot{a}_{12} &= a_{13}\omega_1 - a_{11}\omega_3 - \omega_0 a_{32}, & \dot{a}_{32} &= a_{33}\omega_1 - a_{31}\omega_3 + \omega_0 a_{12}, \\
\dot{a}_{13} &= a_{11}\omega_2 - a_{12}\omega_1 - \omega_0 a_{33}, & \dot{a}_{33} &= a_{31}\omega_2 - a_{32}\omega_1 + \omega_0 a_{13},
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu_e}{r^3},$$

$$\kappa = E \varrho_a \left(p_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} + p_2 |v_2| \right), \quad v_i = \sum_{j=1}^3 V_j a_{ji} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t , ω_i ($i = 1, 2, 3$) — компоненты абсолютной угловой скорости КА в системе $Ox_1x_2x_3$, I_i — моменты инерции КА относительно осей Ox_i , μ_e — гравитационный параметр Земли, r — геоцентрическое расстояние точки O , ϱ_a — плотность атмосферы в этой точке, V_i — компоненты скорости точки O относительно поверхности Земли в орбитальной системе координат, ω_0 — модуль абсолютной угловой скорости орбитальной системы, параметры p_1 и p_2 характеризуют действующий на КА аэродинамический момент, E — масштабирующий множитель.

Первые три уравнения системы (1) представляют собой динамические уравнения Эйлера, остальные — кинематические уравнения Пуассона для направляющих косинусов осей OX_1 и OX_3 в системе координат $Ox_1x_2x_3$. При численном интегрировании системы (1) единицей измерения времени служит 1000 с, единицей измерения длины — 1000 км, скорость выражается в км/с, единица измерения угловой скорости — 0.001 с^{-1} , плотность атмосферы рассчитывается в кг/м^3 согласно модели [3], $E = 10^{10}$. Недостающие элементы матрицы перехода $\| a_{ij} \|$ вычисляются по формулам

$$a_{21} = a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}, \quad a_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}, \quad a_{23} = a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}.$$

Переменные a_{1i} и a_{3i} не являются независимыми, они связаны соотношениями

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \quad a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,$$

которые справедливы вследствие ортогональности этой матрицы. Начальные условия для a_{1i} и a_{3i} параметризуются независимыми углами γ , δ и β .

3. Режимы вращательного движения КА. Чтобы пояснить режимы неуправляемого вращательного движения КА, опробованные в космических экспериментах, рассмотрим эти режимы в упрощенной ситуации. Орбита КА в свободном полете близка к круговой, аэродинамический момент влияет на вращательное движение КА существенно слабее гравитационного момента. В таком случае для анализа этого движения наряду с уравнениями (1) можно

рассмотреть более простые уравнения, записанные в предположении, что орбита центра масс КА — круговая и неизменна в абсолютном пространстве и что на КА действует один лишь гравитационный момент. Такие упрощенные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32}a_{33}), \\
\dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{33}), \\
\dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{32}), \\
\dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\
\dot{\delta} &= \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, \\
\dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ω_0 — среднее движение КА (орбитальная частота), величины a_{3i} выражаются через углы γ , δ и β . Применявшимся режимам неуправляемого движения КА отвечают простые частные решения уравнений (2).

Трехосная гравитационная ориентация. Уравнения (2) допускают два стационарных решения, которые можно задать соотношениями

$$\sin \gamma = \beta = 0, \quad \delta = \pi, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \gamma. \tag{3}$$

Эти решения описывают положения равновесия КА в орбитальной системе координат. В них оси Ox_1 и Ox_2 совпадают с осями $-OX_3$ и $\pm OX_2$ соответственно. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову решений (3) выражаются неравенствами [4]: $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu$, которые для КА *Прогресс* выполнены.

Одноосная закрутка в плоскости орбиты. Уравнения (2) допускают два семейства частных решений, в которых

$$\sin \gamma = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = (\omega_0 + \dot{\delta}) \cos \gamma, \tag{4}$$

а δ определяется уравнением математического маятника

$$2\ddot{\delta} + \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda\mu}\omega_0^2 \sin 2\delta = 0. \tag{5}$$

Решения такого вида достаточно разнообразны. Например, в случае стационарного решения уравнения (5) $\delta = \pi$ решения (4), (5) совпадут с решениями (3). В данном случае интерес представляют вращательные решения уравнения (5) с угловой скоростью $\dot{\delta} \approx \operatorname{const}$, $|\dot{\delta}| > \omega_0$.

4. Метод определения вращательного движения КА. Фактическое движение КА относительно центра масс будем аппроксимировать решениями уравнений (1), выбирая эти решения из условия наилучшего сглаживания с их помощью телеметрических данных об электрическом токе, снимаемом с солнечных батарей. Ток, вырабатываемый батареями, примерно пропорционален косинусу угла падения солнечных лучей на их светочувствительную поверхность. Пусть в орбитальной системе координат орт направления "Земля — Солнце" имеет компоненты $A_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Эти компоненты находятся по приближенным формулам [7] и по элементам кеплеровой орбиты КА. Упомянутый косинус и снимаемый с батарей ток задаются формулами

$$\eta = A_1 a_{12} + A_2 a_{22} + A_3 a_{32}, \quad I = I_0 \max(\eta, 0).$$

Здесь I_0 — максимальный ток, вырабатываемый батареями на орбите Земли при перпендикулярном падении на их плоскость солнечных лучей, $I_0 \approx 29$ А. На самом деле расчет тока более сложен и требует знания труднодоступной дополнительной информации, но и приведенная упрощенная формула позволяет получить приемлемые результаты.

Эту формулу можно еще более упростить, если учесть, что в те моменты времени, для которых телеметрические значения тока превышают некоторый положительный предел I_{\min} , заведомо выполнялось условие $\eta > 0$. Для таких моментов расчетные значения тока можно находить по формуле $I = I_0 \eta$. При обработке полученных данных принималось $I_{\min} = 3$ А.

Телеметрическая информация о токе, снимаемом с батарей, представляет собой последовательности чисел

$$t_n, I_n \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

Здесь I_n — приближенное значение тока в момент времени t_n , $t_1 \leq t_2 \dots \leq t_N$. Разности $t_{n+1} - t_n$, как правило, не превышают нескольких минут. В обработку включаются последовательности (6), охватывающие отрезки времени, длина которых $t_N - t_1$ составляет 30 — 150 мин.

Обработка данных (6) выполняется методом наименьших квадратов. Пусть ошибки в значениях I_n независимы и имеют одинаковое нормальное распределение с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ . Значение σ неизвестно. На решениях уравнений (1) определим функционал

$$\Phi = \sum_{n=1}^N [I_n - I_0 \eta(t_n)]^2. \quad (7)$$

Аппроксимацией фактического движения КА на этом отрезке будем считать решение, доставляющее такому функционалу минимум. Минимизация Φ проводится по начальным условиям решения в точке t_1 : $\gamma_0 = \gamma(t_1)$, $\delta_0 = \delta(t_1)$,

$\beta_0 = \beta(t_1)$, $\omega_{i0} = \omega_i(t_1)$ и параметрам p_1 , p_2 и I_0 . Значения параметров λ и μ считаются известными: $\lambda = 0.16$, $\mu = 0.19$. Для простоты письма все уточняемые величины объединим в один девятимерный вектор z . Тогда $\Phi = \Phi(z)$ и $z_* = \operatorname{argmin} \Phi(z)$ — искомая оценка вектора z .

Минимизация функционала (7) (в данном случае функции $\Phi(z)$) выполнялась методом Левенберга – Марквардта, являющимся одной из модификаций метода Гаусса – Ньютона. Реализация этого метода в задачах определения вращательного движения спутников по данным измерений бортовых датчиков описана в [8]. Точность аппроксимации данных (7) и разброс в определении компонент z_* будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Пусть C — вычисленная в точке z_* матрица системы нормальных уравнений, возникающей при минимизации Φ методом Гаусса-Ньютона, $2C \approx \partial^2 \Phi(z_*) / \partial z^2$. Тогда стандартное отклонение ошибок в значениях I_n находится по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Phi(z_*)}{N - 9}},$$

стандартные отклонения компонент z_* равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma^2 C^{-1}$. Эти стандартные отклонения будем обозначать (ср. указанные выше обозначения компонент z) σ_γ , σ_δ , σ_β , σ_{ω_i} , σ_{p_i} , σ_{I_0} .

Чтобы минимизирующие функционал (7) значения параметра I_0 были близки номинальному значению этого параметра $I_0^* = 29$ А, в (7) вводилось дополнительное слагаемое $\varepsilon (I_0 - I_0^*)^2$, где ε — неотрицательное число. Такая замена функционала учитывает априорную информацию об I_0 и регуляризует задачу поиска минимума $\Phi(z)$. За новым функционалом сохраним прежнее обозначение. При вычислении стандартных отклонений использовались новое выражение для Φ и соответствующая матрица нормальных уравнений.

Решения системы (1), доставляющее минимум функционалу (7), неединственно. Эта система и выражение $\eta = A_1 a_{12} + A_2 a_{22} + A_3 a_{32}$ (напомним, $a_{22} = a_{33} a_{11} - a_{31} a_{13}$) инвариантны относительно преобразования переменных и параметров

$$\omega_1 \rightarrow -\omega_1, \quad \omega_3 \rightarrow -\omega_3, \quad a_{11} \rightarrow -a_{11}, \quad a_{13} \rightarrow -a_{13}, \quad (8)$$

$$a_{31} \rightarrow -a_{31}, \quad a_{33} \rightarrow -a_{33}, \quad p_1 \rightarrow -p_1, \quad p_2 \rightarrow -p_2.$$

Следовательно, выписанное преобразование переводит решение, доставляющее локальный минимум функционалу (7), в решение, которое также доставляет этому функционалу локальный минимум, причем с тем же самым значением Φ .

Преобразование (8) для переменных a_{1i} и a_{3i} в терминах углов γ , δ , β можно выразить соотношениями $\gamma \rightarrow -\gamma$, $\delta \rightarrow \delta + \pi$, $\beta \rightarrow -\beta$. Эти соотношения

вместе с соотношениями (8) для ω_1, ω_3, p_1 и p_2 связывают начальные условия и параметры решений системы (1), доставляющих Φ равные значения. Возникает задача — из двух решений с одинаковыми значениями функционала выбрать решение, аппроксимирующее фактическое движение спутника. Возможный способ выбора — руководствоваться знаками параметров p_1 и p_2 . Их расчетные значения: $p_1 < 0, p_2 > 0$. Однако такой способ не очень надежен, поскольку стандартные отклонения оценок этих параметров, как правило, близки их абсолютным величинам. Ниже выбор решения осуществляется согласно условиям: в режиме гравитационной ориентации $\delta_0 \approx \pi$, в режиме закрутки в плоскости орбиты $p_2 > 0$.

5. Результаты определения вращательного движения КА. Определение фактического движения КА относительно центра масс по данным (7) было выполнено на 15 интервалах времени. Основные характеристики этих интервалов приведены в табл. 1. Полученные результаты представлены в табл. 2, 3 и на рис. 1 — 15. В табл. 1 для каждого интервала указаны: дата, декретное московское время точки t_1 , продолжительность $t_N - t_1$, число N включенных в обработку данных, угол φ между плоскостью OX_1X_3 и ортом направления "Земля — Солнце" в момент $(t_1 + t_N)/2$ (Солнце находилось в полупространстве $X_2 > 0$), значения ε . В табл. 2, 3 приведены результаты минимизации функционала (7) на интервалах из табл. 1. Здесь указаны значения компонент вектора z_* , стандартные отклонения этих компонент и стандартное отклонение σ ошибок в данных (6).

Построенная реконструкция вращательного движения КА представлена на рис. 1 — 15. Эти рисунки иллюстрируют решения уравнений вращательного движения КА, доставляющие минимум функционалу (7). Все рисунки устроены одинаково и естественным образом разбиваются на три части — левую, среднюю и правую. В левой части рисунков изображены графики функций $\gamma(t), \delta(t), \beta(t)$ и $I_0\eta(t)$. Они построены на отрезке $t_1 \leq t \leq t_N$, причем начало координат на оси t помещено в точку t_1 . Рядом с графиком функции $I_0\eta(t)$ маркерами указаны точки (t_n, I_n) ($n = 1, 2, \dots, N$), иллюстрирующие сглаживаемые данные (6). В средней части рисунков приведены графики компонент угловой скорости КА $\omega_i(t)$, в правой части — графики компонент микроускорения $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и его модуля $|\mathbf{b}|$ в фиксированной точке борта.

Компоненты микроускорения указаны в системе $Ox_1x_2x_3$ и рассчитывались по формуле [9]

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} \times \dot{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} \times \mathbf{d}) \times \vec{\omega} + \frac{\mu_e}{r^3} [3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 - \mathbf{d}] + c_{\varrho_a} |\mathbf{v}| \mathbf{v}.$$

Здесь \mathbf{d} — радиус-вектор точки, в которой вычисляется микроускорение, относительно точки O , $\vec{\omega}$ — абсолютная угловая скорость КА, \mathbf{v} — скорость КА относительно поверхности Земли, \mathbf{E}_3 — орт оси OX_3 , c — баллистиче-

ский коэффициент КА. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ компоненты векторов $\vec{\omega}$, $\dot{\vec{\omega}}$, \mathbf{E}_3 и \mathbf{v} равны соответственно (см. раздел 2) ω_i , $\dot{\omega}_i$, a_{3i} и v_i ($i = 1, 2, 3$). Микроускорение рассчитано для точки, имеющей в системе $Ox_1x_2x_3$ координаты $(-3.5 \text{ м}, 0.5 \text{ м}, 0.5 \text{ м})$. Значение баллистического коэффициента в этих расчетах взято из данных радиоконтроля орбиты.

Анализ таблиц и рисунков позволяет заключить об успешной, на первой взгляд, реконструкции вращательного движения КА по телеметрической информации о токе, вырабатываемом солнечными батареями. Среднеквадратичные ошибки аппроксимации данных измерений, полученных во второй экспедиции, оказались примерно такими же, как в первой [2]. Однако приведенные в [2] стандартные отклонения определяемых параметров, как правило, меньше и аппроксимация данных первой экспедиции строилась на более продолжительных интервалах времени.

Точность реконструкции реального движения КА по изложенной методике характеризуется стандартными отклонениями определяемых параметров (см. табл. 2, 3). Анализ этих стандартных отклонений вместе с анализом собственных векторов матрицы C (см. предыдущий раздел), отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер неопределенности, которая возникает при реконструкции движения. Анализ основан на формуле

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^6 \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right) \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right)^T,$$

где c_k и u_k — собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы C . Из этой формулы следует, что наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие компоненты векторов $u_k/\sqrt{c_k}$.

В качестве первого примера такого анализа исследуем точность определение движения на интервале G2 (рис. 2). Собственные числа матрицы C в данном случае составляют 1.63, 10.9, 22.4, 164, 540, 1635, 7025, 15303, 92956. Собственные векторы этой матрицы $u_k/\sqrt{c_k}$, отвечающие ее собственным числам 1.63 и 10.9, имеют вид

$$[-0.13, 0.15, -0.07, 0.00, -0.17, 0.13, -0.47, 0.54, 0.09]^T,$$

$$[-0.02, -0.07, -0.03, 0.03, 0.05, 0.05, 0.03, 0.01, 0.28]^T.$$

Они дают наиболее значимый вклад в диагональные элементы матрицы C^{-1} . Стандартные отклонения компонент вектора z_* примерно пропорциональны максимальным модулям одноименных компонент этих векторов. Вклад остальных таких векторов несуществен. Судя по стандартным отклонениям σ_γ , σ_δ и т.д. в табл. 2, движение КА на интервале G2 найдено достаточно

точно. Это движение представляет собой режим гравитационной ориентации, причем ошибки ориентации по углам δ и β , характеризующим отклонение продольной оси КА от местной вертикали, ненамного превосходят стандартные отклонения σ_δ и σ_β .

В качестве второго примера проведем аналогичный анализ интервала G1 (рис. 1). Собственные числа матрицы C в данном случае такие: 0.00864, 0.869, 10.8, 14.5, 56.2, 949, 5125, 60713, 200030. Собственные векторы этой матрицы $u_k/\sqrt{c_k}$, отвечающие ее собственным числам 0.00864 и 0.869, имеют вид

$$[2.42, -4.19, -1.65, 0.67, 6.92, -0.54, 1.24, -6.26, -0.04]^T,$$

$$[0.07, -0.35, -0.09, 0.06, 0.50, -0.14, 0.35, 0.79, -0.09]^T.$$

Здесь основной вклад в диагональные элементы матрицы C^{-1} вносит первый вектор. Стандартные отклонения σ_γ , σ_δ и т.д. примерно пропорциональны модулям его соответствующих компонент. В данном примере движение КА найдено неточно. Это движение представляет собой сильно возмущенный режим гравитационной ориентации, причем ошибки ориентации даже меньше стандартных отклонений σ_γ , σ_δ и σ_β . Поскольку интервал G1 предшествует интервалу G2, естественно предположить, что указанные возмущения на самом деле следствие ошибок реконструкции движения.

Некоторые интервалы в табл. 1 имеют непустое пересечение, в частности, $G1 \cap G2 \neq \emptyset$, $G1 \subset G4$, $G3 \subset G2 \subset G4$, $R2 \subset R3$, $R6 \subset R7$. Такие пересечения позволяют найти рассогласование функций $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $\beta(t)$ и $\omega_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) на общей части пересекающихся интервалах, и по этому рассогласованию оценить точность реконструкции движения. В некоторых случаях указанные функции более или менее согласованы, например, на интервалах G2 и G3, R6 и R7, но в ряде случаев (интервалы G5, G6, G7 или R5, R6) их значения даже после выполнения преобразования (8) различаются на десятки градусов. Отметим, что согласно анализу собственных чисел и векторов матрицы C движение спутника на пересекающихся интервалах R5 и R7 определяется примерно с одинаковой точностью, но максимальные отклонения оси Ox_1 от плоскости орбиты (по углу β) на этих интервалах существенно различны. Следовательно, по крайней мере на одном из интервалов движение реконструировано с большой ошибкой.

Следует заметить, что реконструкция вращательного движения КА описанным способом в режимах трехосной гравитационной ориентации и закрутки в плоскости орбиты возможна лишь при наличии возмущенного движения. При идеальной реализации этих режимов имеет место соотношение $\eta(t) = \text{const}$ (регрессией узла орбиты пренебрегаем), и никакая реконструкция невозможна. Но возмущенное движение — фактор нестабильный, поэтому использованный способ реконструкции движения КА не может обеспечить ее достаточную точность во всех ситуациях.

Возникает вопрос, действительно ли движение КА было таким возмущенным, или все дело в ошибках реконструкции? Есть основания полагать, что движение было сильно возмущенным. Во время описываемой экспедиции направление "КА — Солнце" составляло с плоскостью обиты угол не менее 40° (табл. 1). В некоторые моменты времени ток, вырабатываемый батареями, был близок к максимально возможному значению 29 А (рис. 10, 11 и др.). Следовательно, в эти моменты плоскость солнечных батарей КА была перпендикулярна солнечным лучам и составляла с плоскостью орбиты угол около 50° . Действующий на КА аэродинамический момент в таких положениях увеличивался и вносил возмущения во вращательное движение. Расчеты, аналогичные описанным в [1], показали, что возмущения должны были быть значительными.

Несмотря на большие возмущения ориентированных движений КА, расчетные микроускорения в этих движениях оказались не намного выше, чем во время первой экспедиции [2].

6. Заключение. Анализ результатов реконструкции неуправляемого вращательного движения КА *Прогресс М-51* во время его автономного полета в феврале — марте 2005 г. показал необходимость дальнейшего повышения точности выставки требуемых начальных условий движения. Для надежного определения вращательного движения КА и микроускорений на его борту КА следует снабдить трехосными магнитометром и акселерометром.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00451).

Литература

- [1] Беляев М.Ю., Бабкин Е.В., Сазонов В.В. Режимы неуправляемого вращательного движения КА *Прогресс* для экспериментов в области микрогравитации. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2004, № 44.
- [2] Брюханов Н.А., Цветков В.В., Беляев М.Ю., Бабкин Е.В., Матвеева Т.В., Сазонов В.В. Экспериментальное исследование режимов неуправляемого вращательного движения КА *Прогресс*. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2004, № 43.
- [3] Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов. ГОСТ 22721-77. М.: Изд-во стандартов, 1978.
- [4] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.

- [5] Черноусько Ф.Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника. Прикладная математика и механика, 1963, т. 28, № 1, с. 155-157.
- [6] Сарычев В.А., Сазонов В.В. Гравитационная ориентация вращающегося спутника. Космические исследования, 1981, т. 19, № 4, с. 499-512.
- [7] Меес Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. М.: Мир, 1988.
- [8] Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Кузьмин С.П., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение движения орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7* относительно центра масс в режиме медленной закрутки по данным измерений. Космические исследования, 1988, т. 26, № 3, с. 390-405.
- [9] Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение микроускорений на орбитальных комплексах *Салют-6* и *Салют-7*. Космические исследования, 1986, т. 24, № 3, с. 337-344.

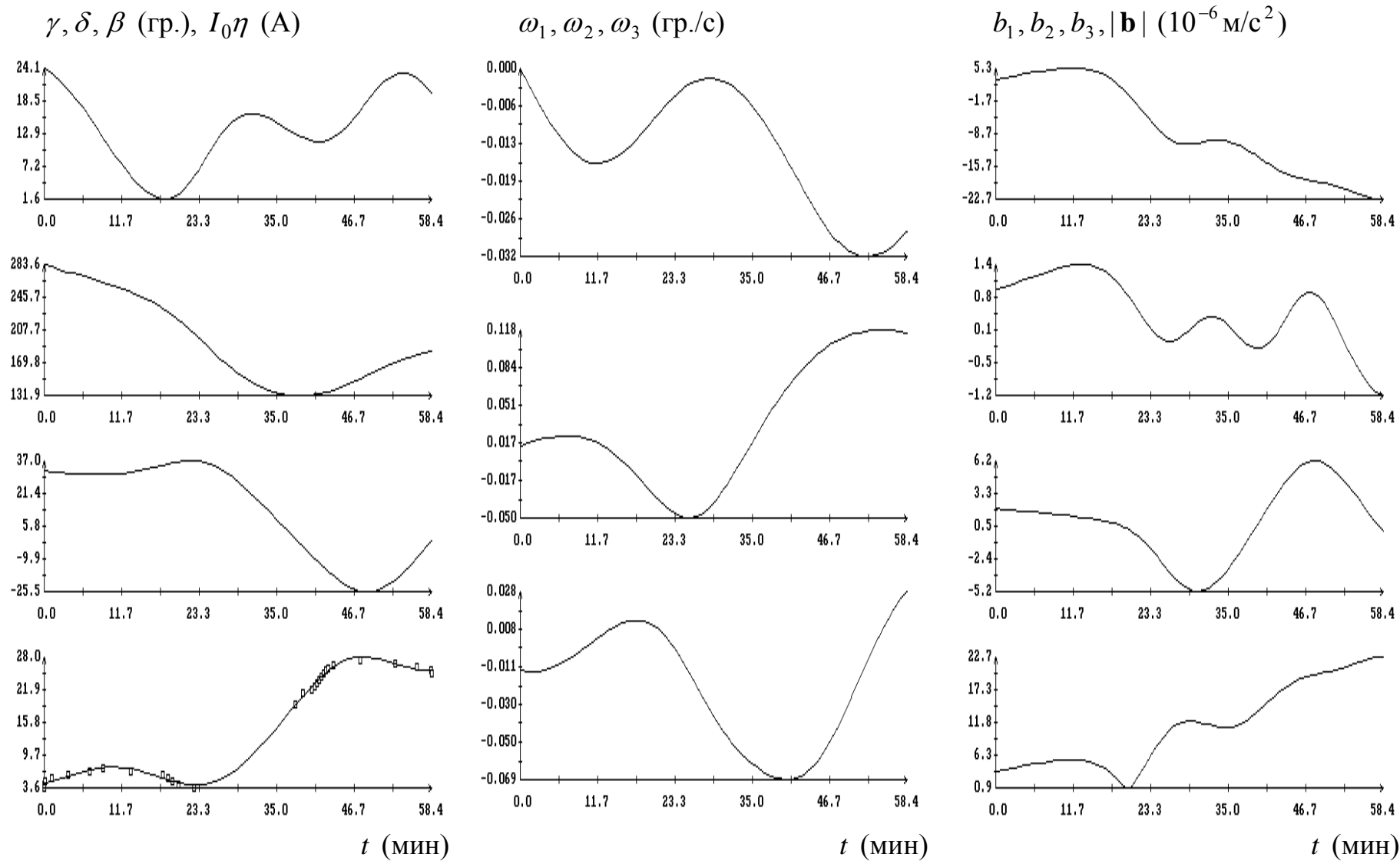


Рис. 1. Интервал G1, момент $t = 0$ соответствует 21:04:50 ДМВ 04.03.2005, $\sigma = 0.54$ А.

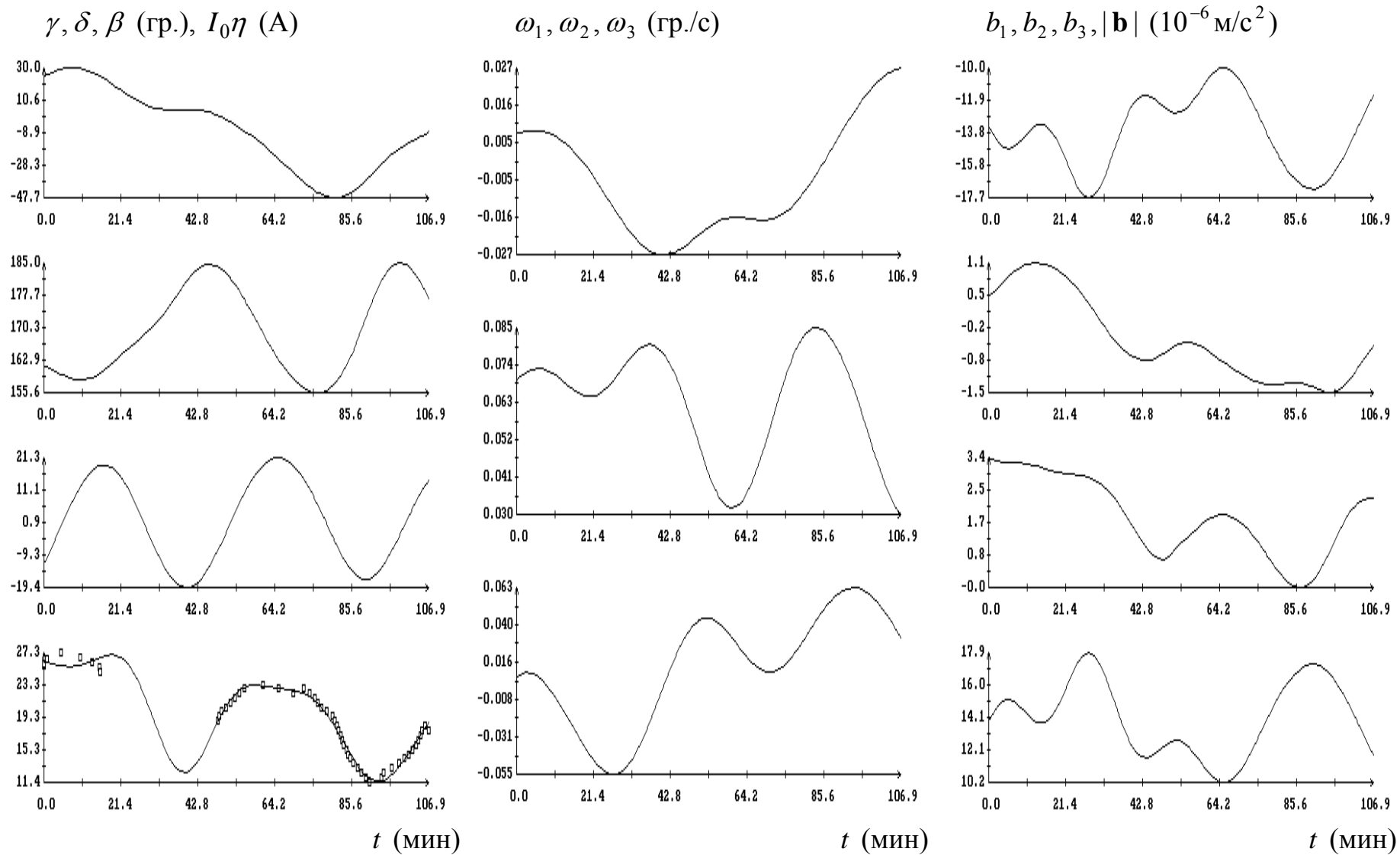


Рис. 2. Интервал G2, момент $t = 0$ соответствует 21:47:37 ДМВ 04.03.2005, $\sigma = 0.61$ А.

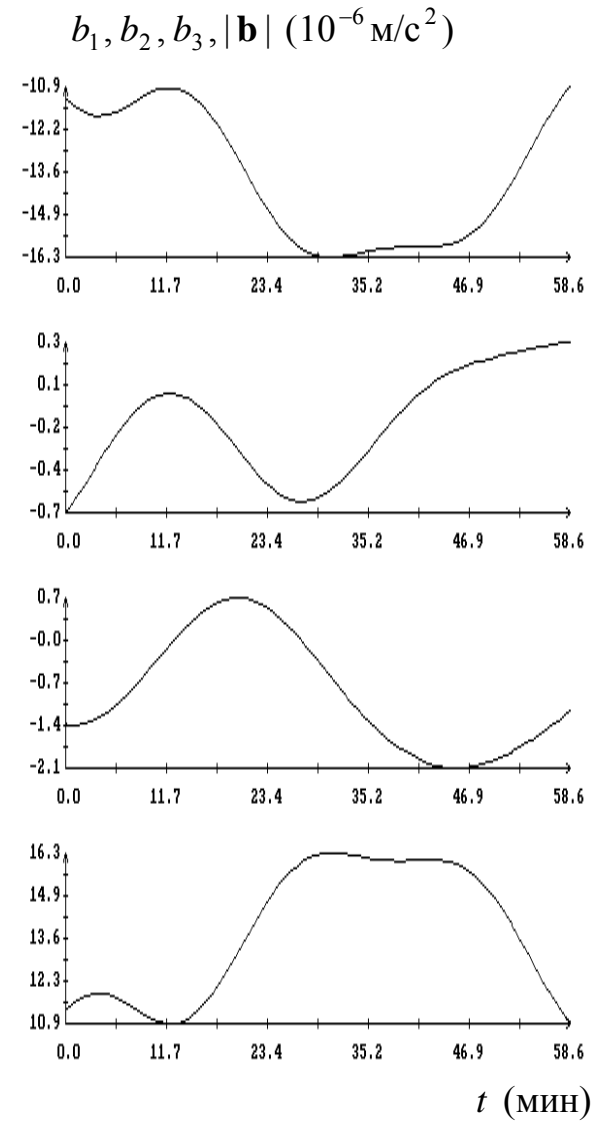
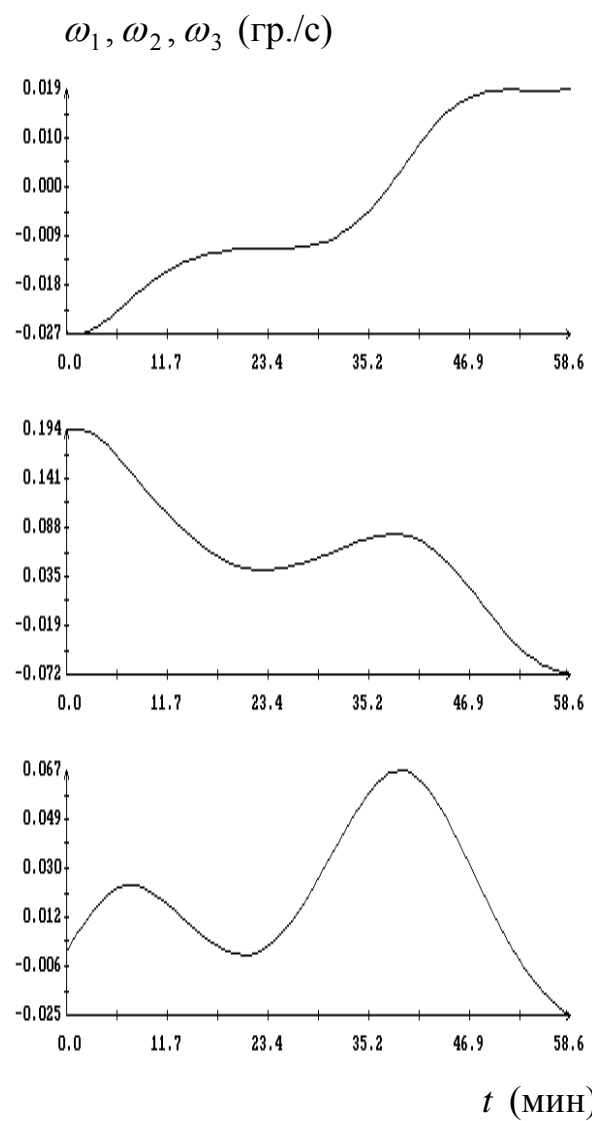
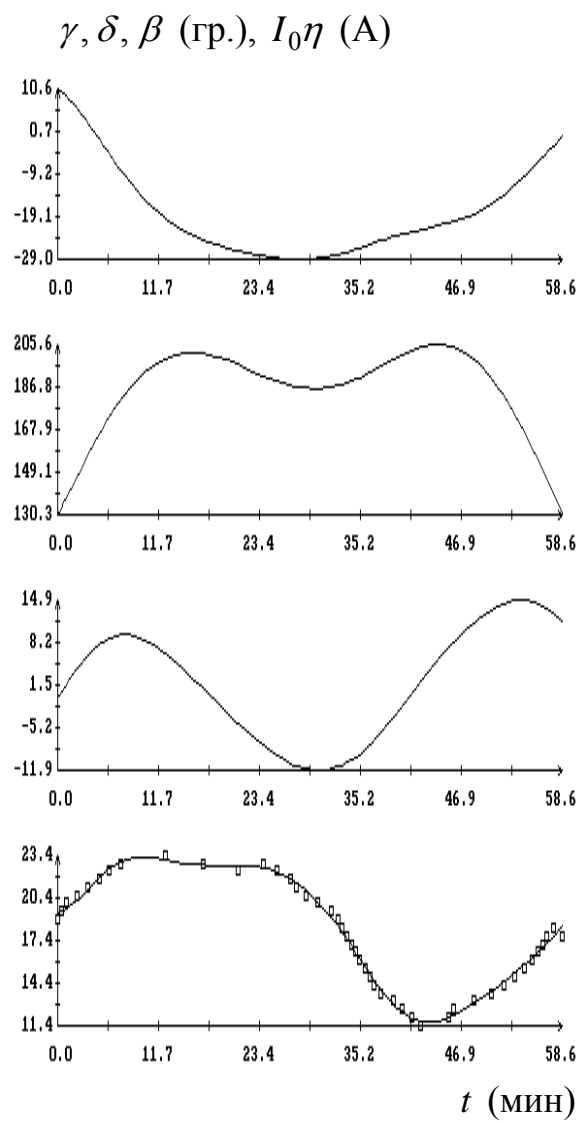


Рис. 3. Интервал G3, момент $t = 0$ соответствует 22:35:57 ДМВ 04.03.2005, $\sigma = 0.33$ А.

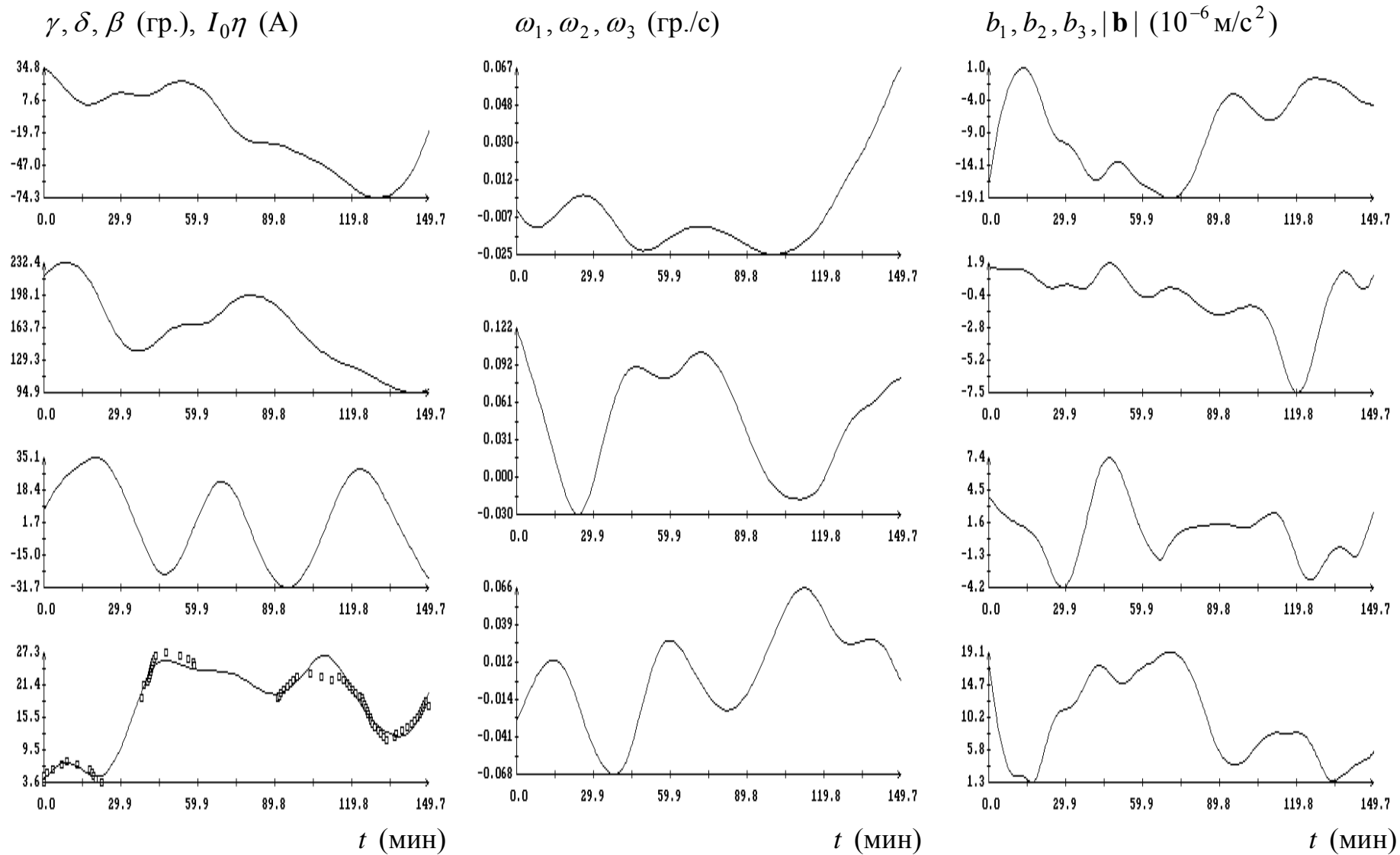


Рис. 4. Интервал G4, момент $t = 0$ соответствует 21:04:50 ДМВ 04.03.2005, $\sigma = 1.13 \text{ A}$.

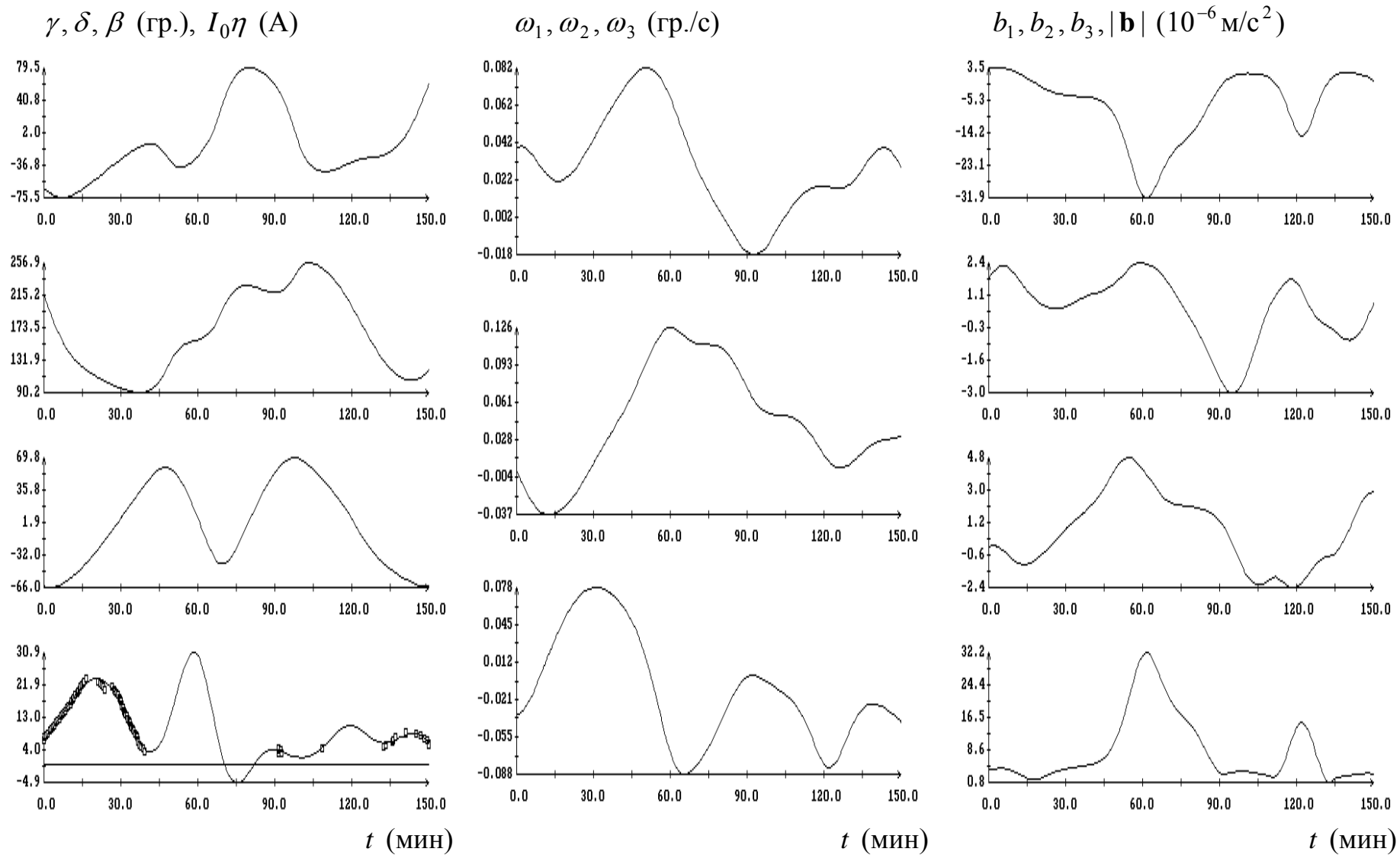


Рис. 5. Интервал G5, момент $t = 0$ соответствует 15:46:29 ДМВ 05.03.2005, $\sigma = 0.62$ А.

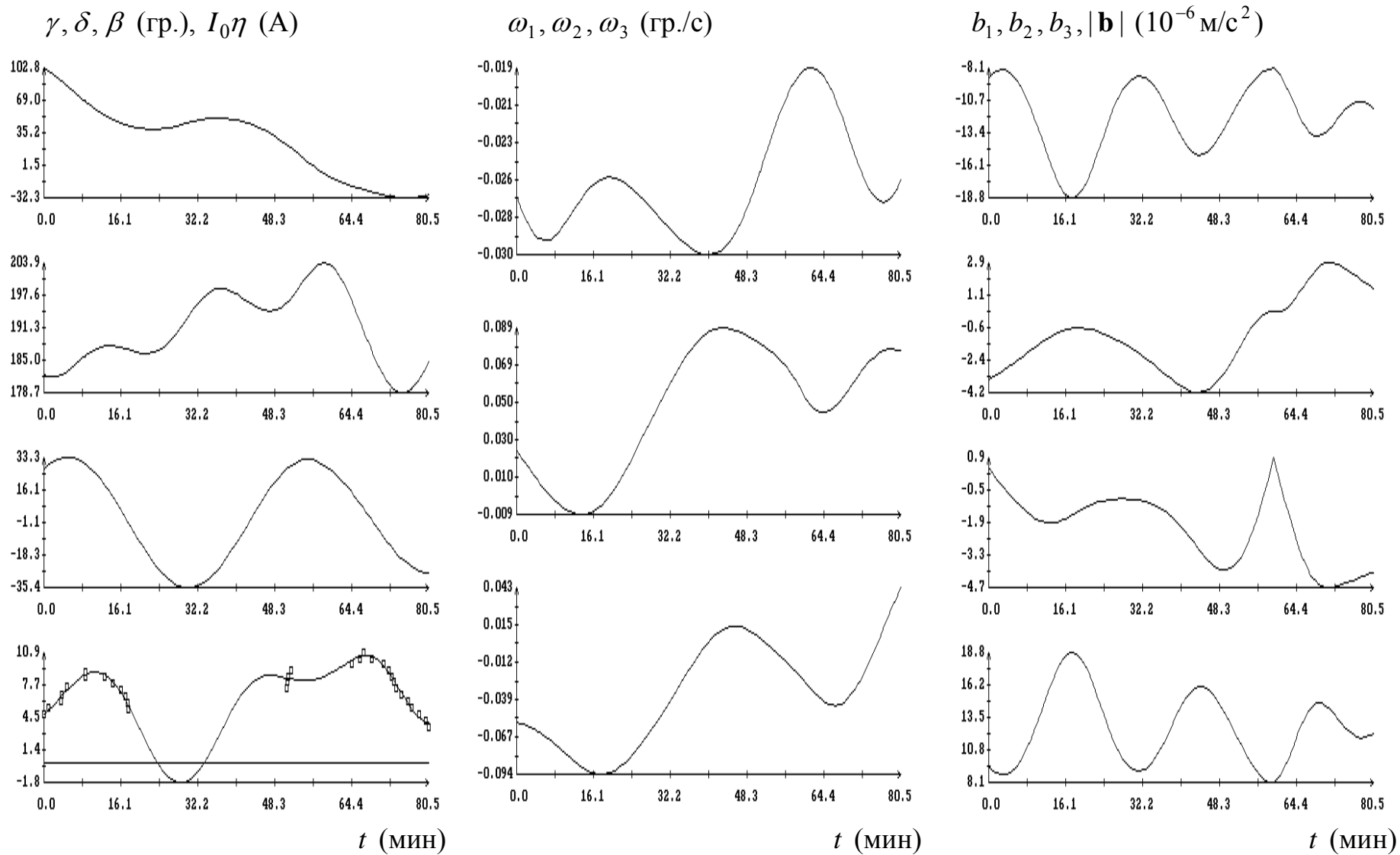


Рис. 6. Интервал G6, момент $t = 0$ соответствует 17:58:47 ДМВ 05.03.2005, $\sigma = 0.41$ А.

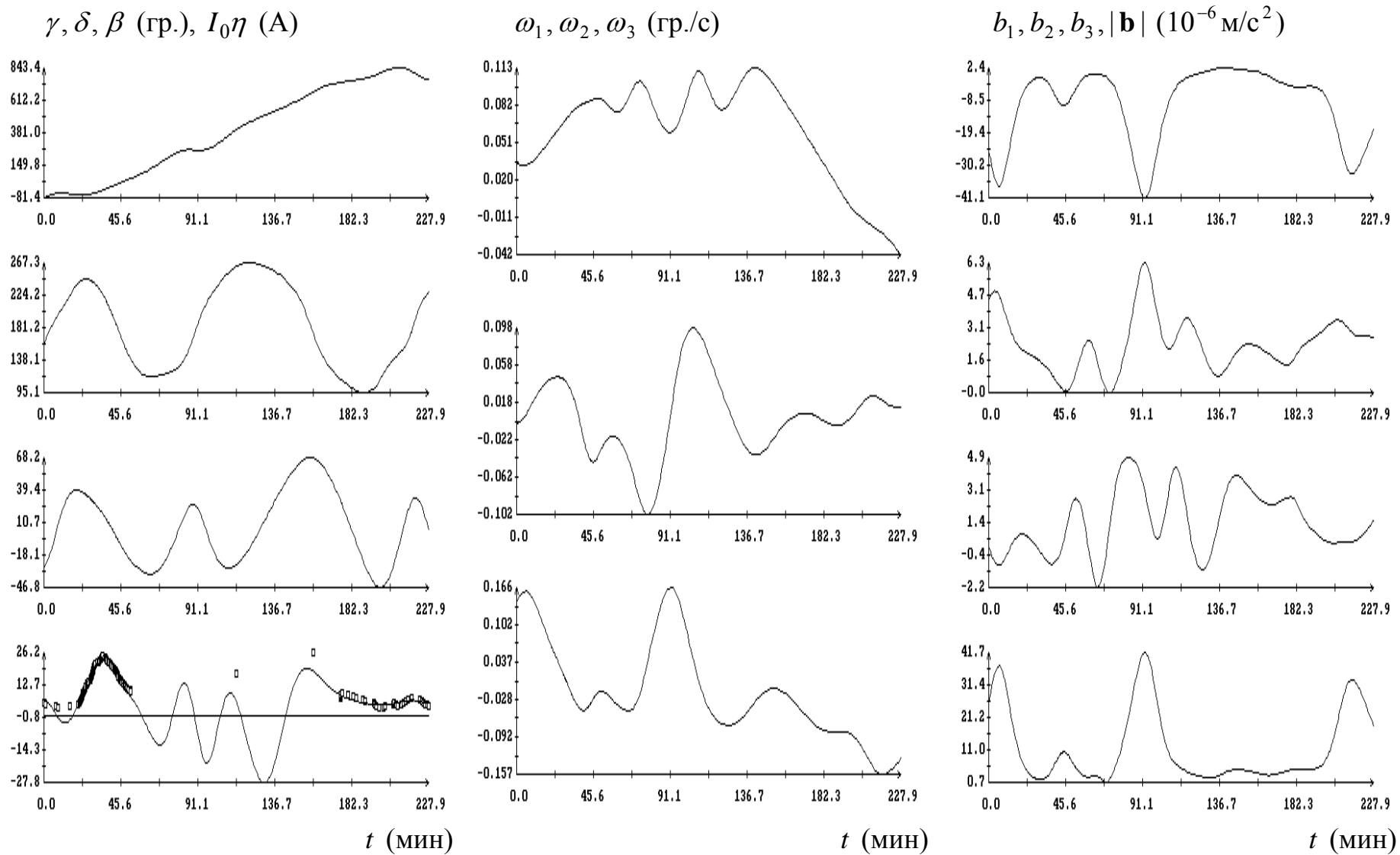


Рис. 7. Интервал G7, момент $t = 0$ соответствует 20:27:32 ДМВ 05.03.2005, $\sigma = 1.94$ А.

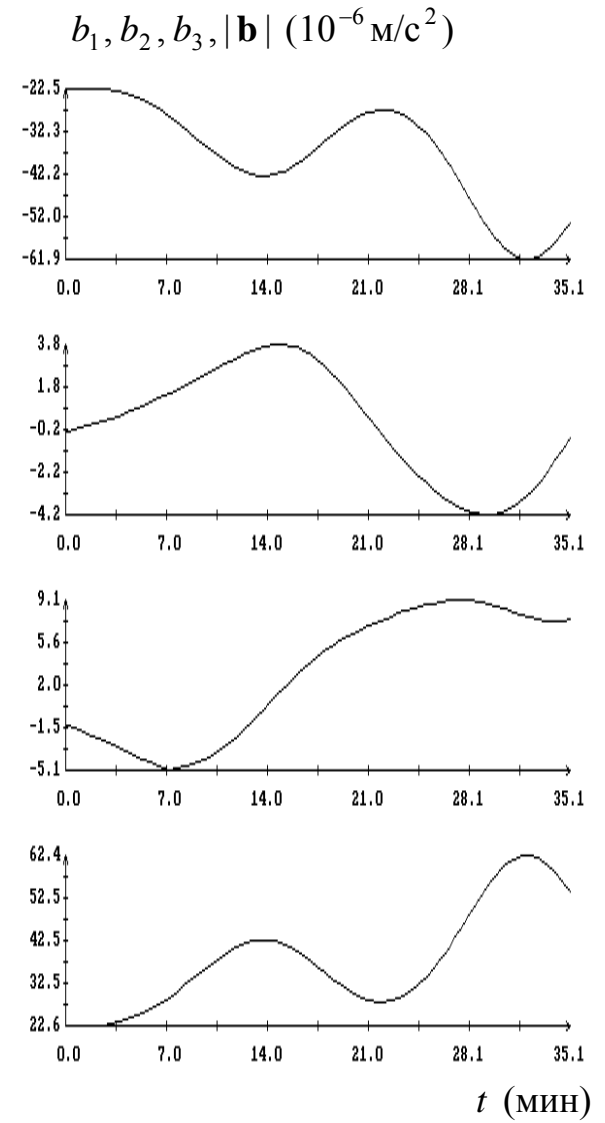
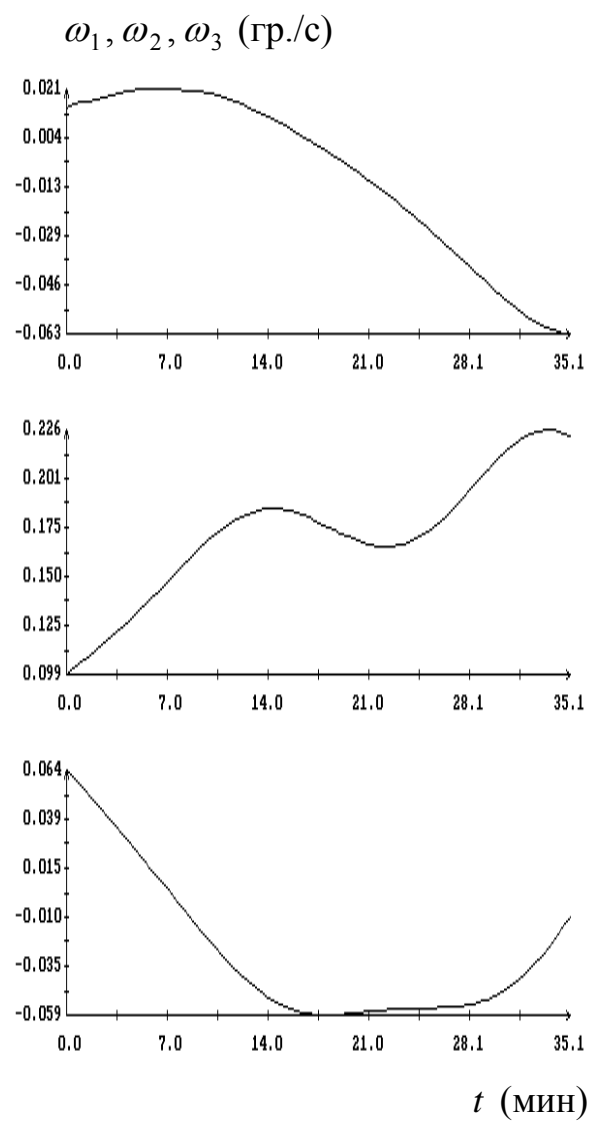
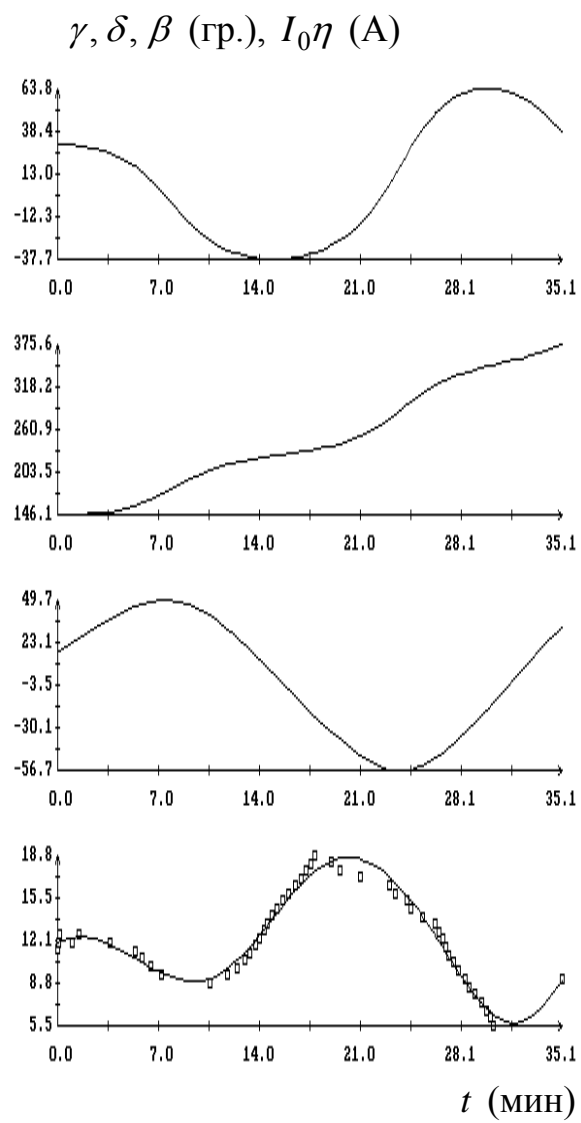


Рис. 8. Интервал R1, момент $t = 0$ соответствует 22:21:50 ДМВ 27.03.2005, $\sigma = 0.58$ А.

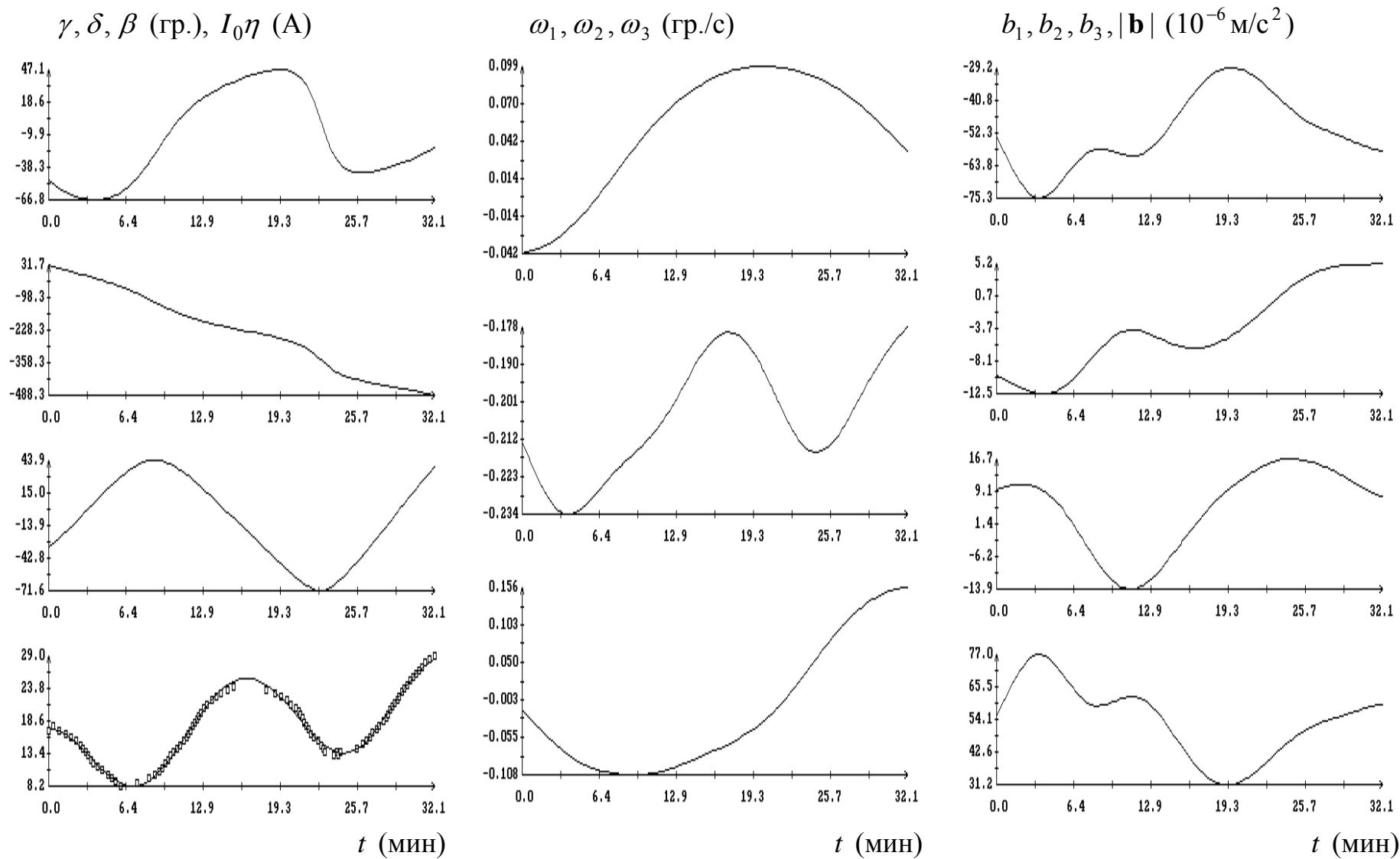


Рис. 9. Интервал R2, момент $t = 0$ соответствует 15:05:44 ДМВ 07.03.2005, $\sigma = 0.40$ А.

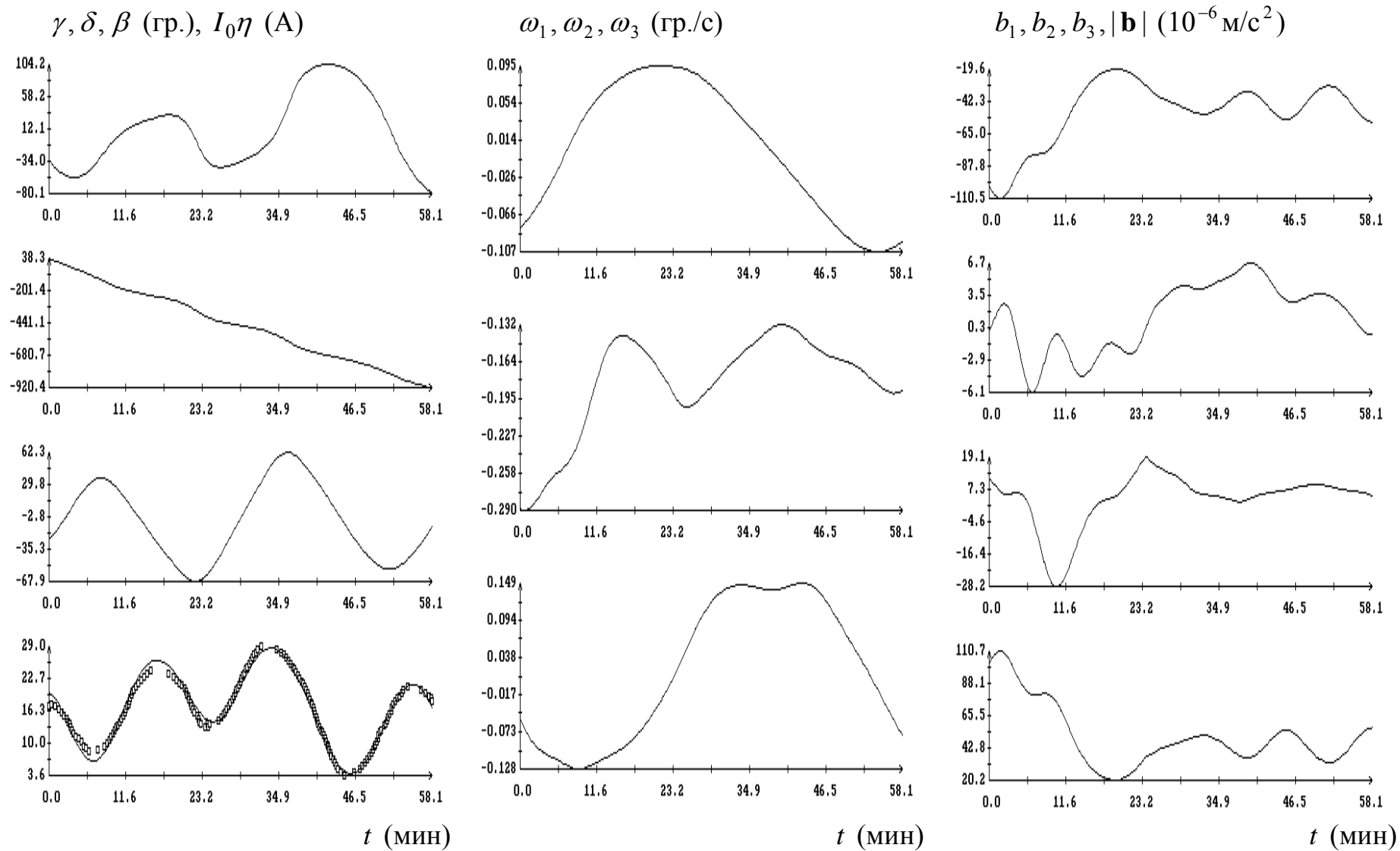


Рис. 10. Интервал R3, момент $t = 0$ соответствует 15:05:44 ДМВ 07.03.2005, $\sigma = 0.98$ А.

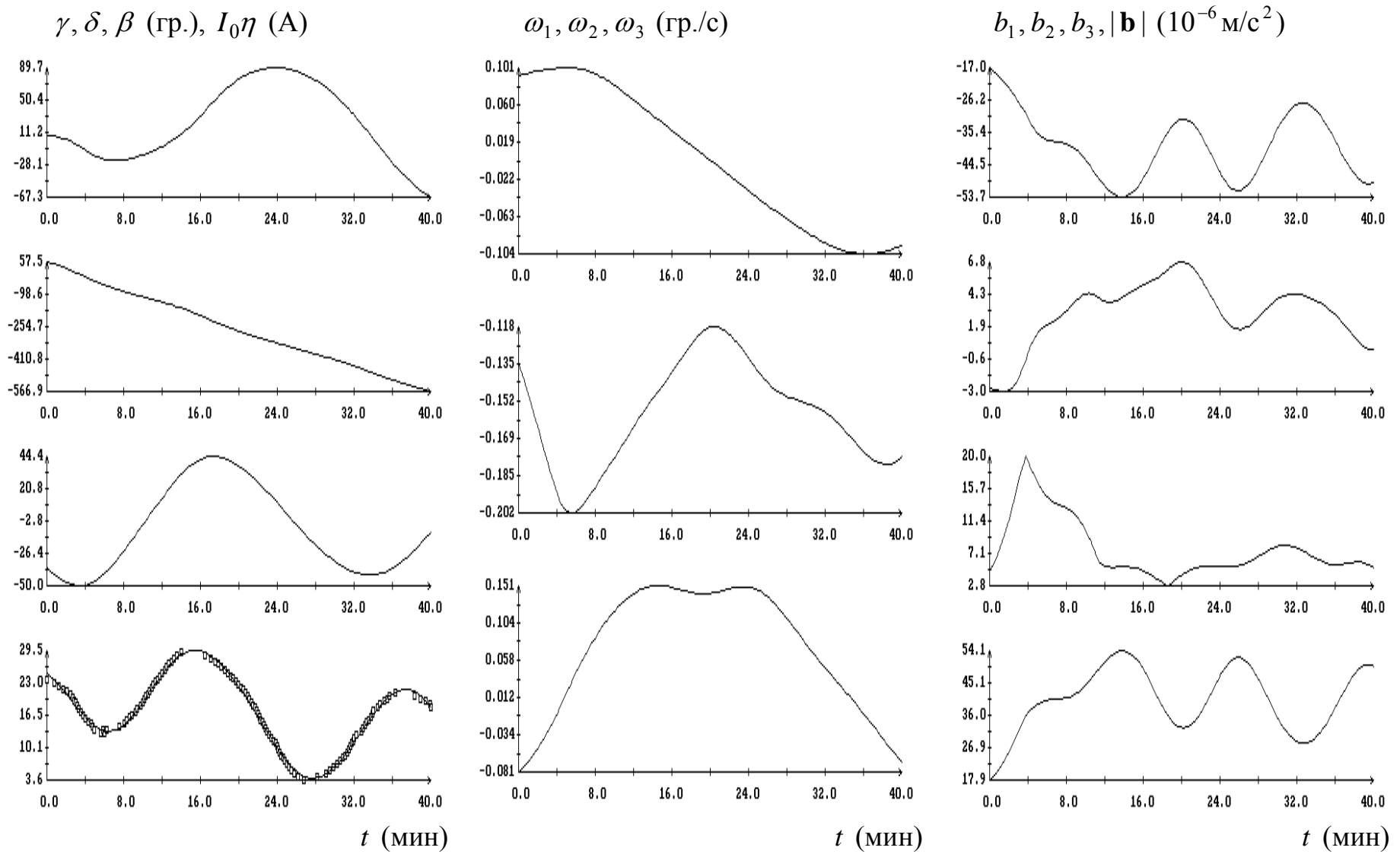


Рис. 11. Интервал R4, момент $t = 0$ соответствует 15:23:49 ДМВ 07.03.2005, $\sigma = 0.47$ А.

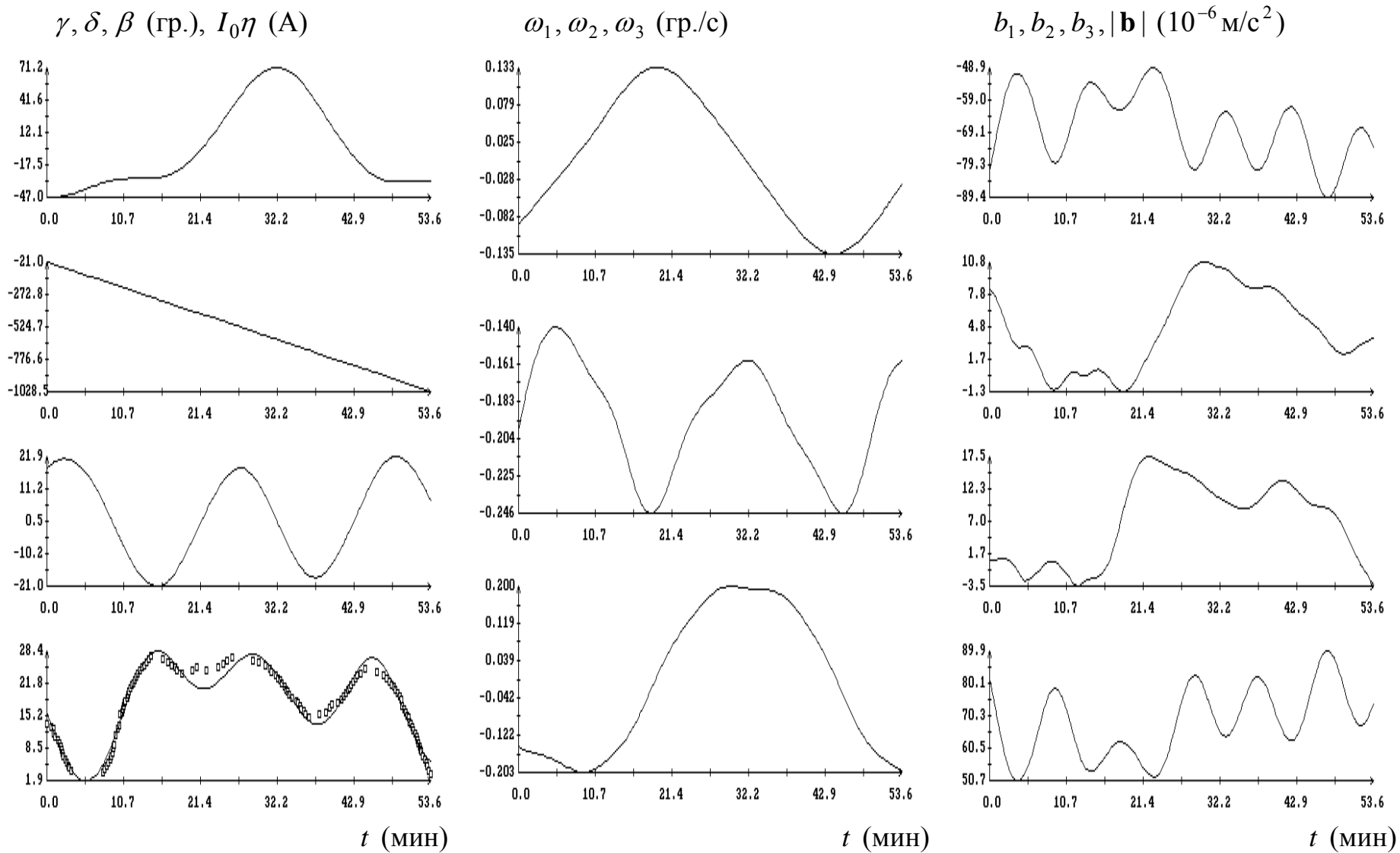


Рис. 12. Интервал R5, момент $t = 0$ соответствует 16:36:55 ДМВ 07.03.2005, $\sigma = 1.27$ А.

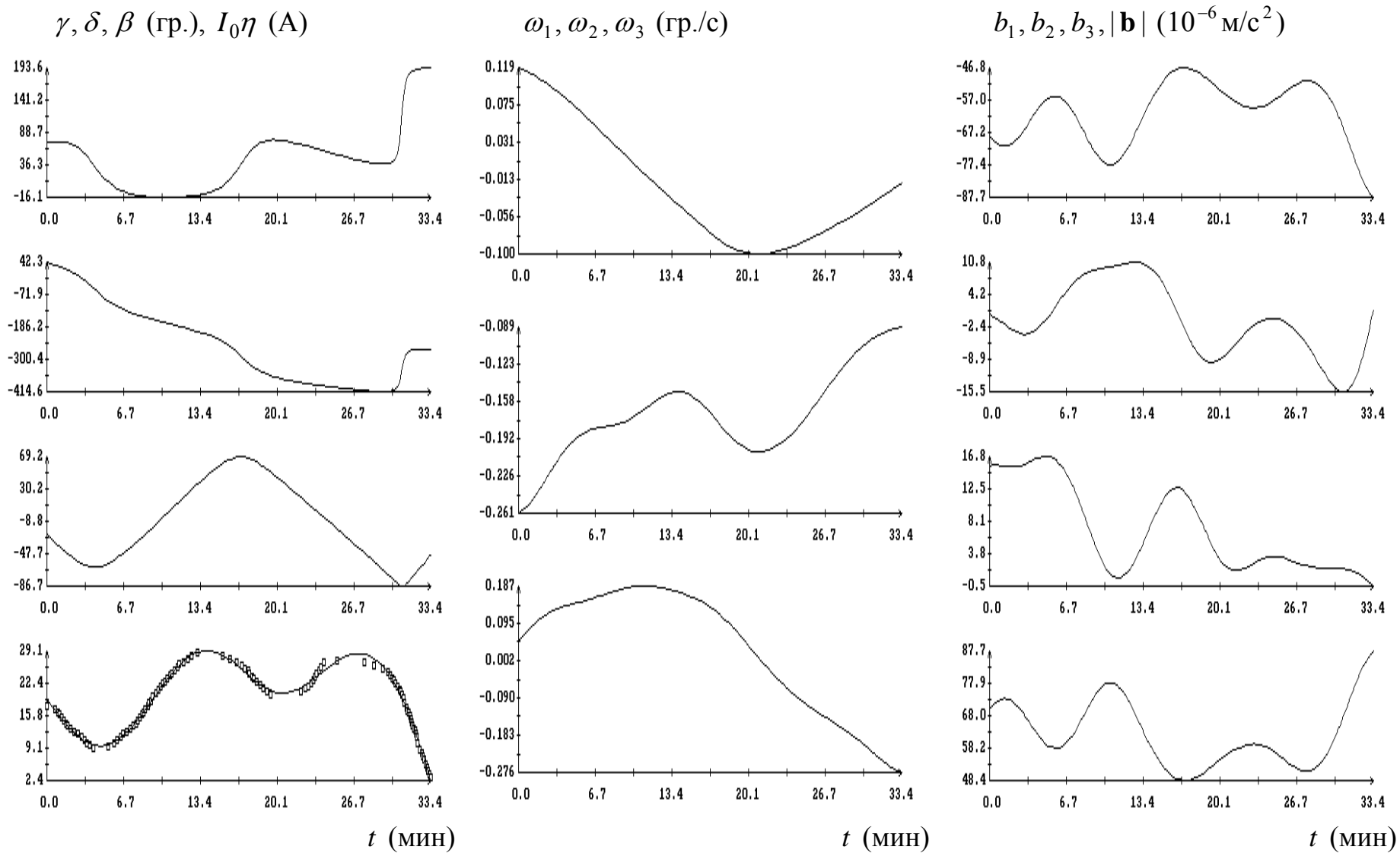


Рис. 13. Интервал R6, момент $t = 0$ соответствует 17:16:49 ДМВ 07.03.2005, $\sigma = 0.54$ А.

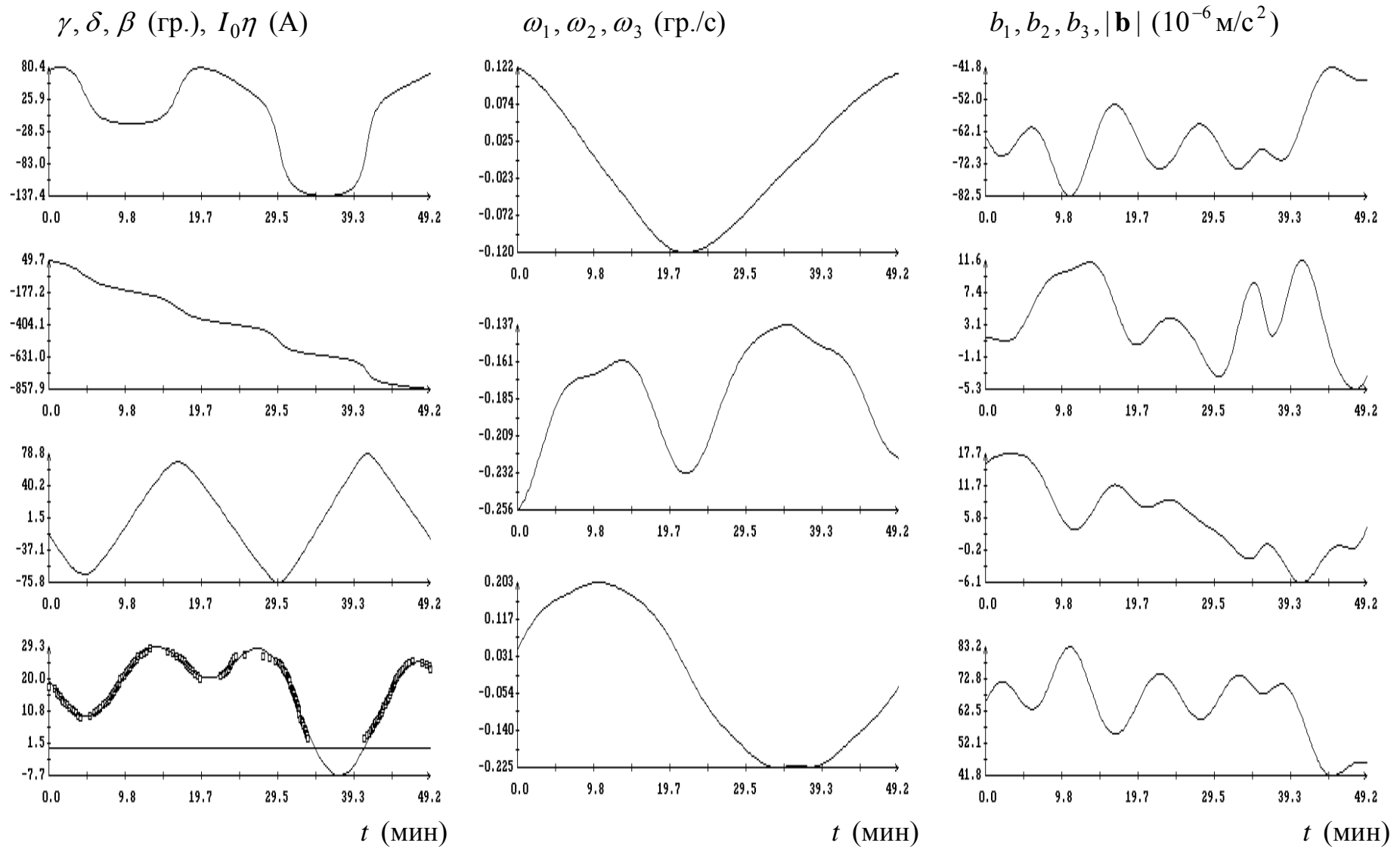


Рис. 14. Интервал R7, момент $t = 0$ соответствует 17:16:49 ДМВ 07.03.2005, $\sigma = 0.82$ А.

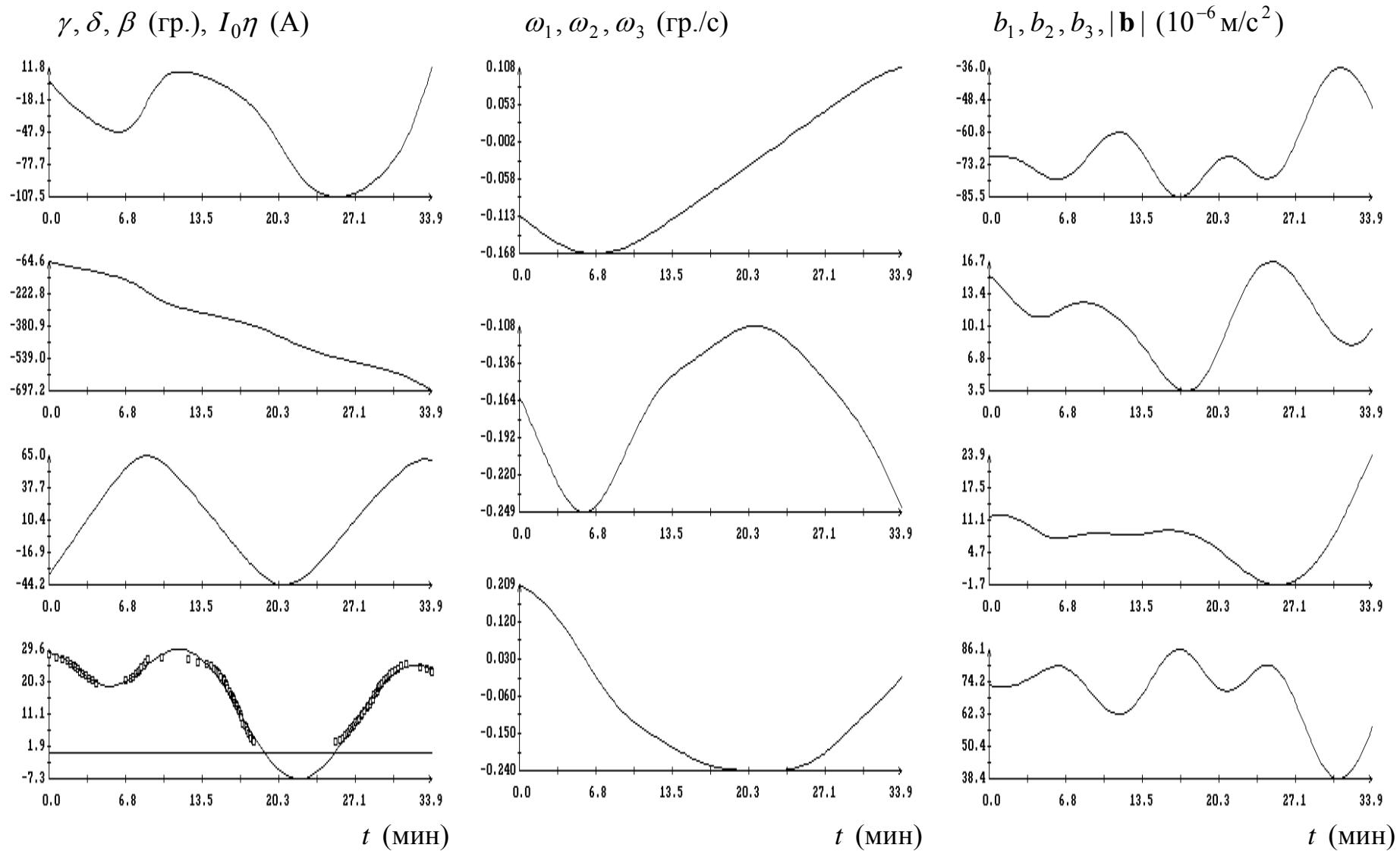


Рис. 15. Интервал R8, момент $t = 0$ соответствует 17:32:08 ДМВ 07.03.2005, $\sigma = 1.01$ А.

Таблица 1. Интервалы определения вращательного движения
КА *Прогресс М-51*

Интервал	t_1 ч : мин : с ДМВ	$t_N - t_1$ мин	N	φ градусы	ε
Трехосная гравитационная ориентация 04.03.2005					
G1	21:04:50	58.4	29	45.48	10
G2	21:47:37	106.9	52	45.49	10
G3	22:35:57	58.6	45	45.50	10
G4	21:04:50	149.7	74	45.49	0
Трехосная гравитационная ориентация 05.03.2005					
G5	15:46:29	150.0	85	45.49	0
G6	17:58:47	80.5	32	45.44	0
G7	20:27:32	227.9	98	45.44	0
Одноосная закрутка в плоскости орбиты 27.2.2005					
R1	22:21:50	35.1	51	36.19	10
Одноосная закрутка в плоскости орбиты 07.03.2005					
R2	15:05:44	32.1	93	43.51	10
R3	15:05:44	58.1	170	43.51	10
R4	15:23:37	40.0	125	43.51	10
R5	16:36:55	53.6	131	43.51	10
R6	17:16:49	33.4	109	43.41	10
R7	17:16:49	49.2	149	43.41	10
R8	17:32:08	33.9	100	43.41	10

Таблица 2. Трехосная гравитационная ориентация

Инт.	σ	I_0	σ_I	γ_0	σ_γ	δ_0	σ_δ	β_0	σ_β
G1	0.54	29.0	0.17	0.421	1.3	4.950	2.2	0.562	0.89
G2	0.61	29.0	0.18	0.432	0.11	2.819	0.12	-0.205	0.058
G3	0.33	29.0	0.10	0.186	0.013	2.274	0.15	-0.010	0.024
G4	1.13	26.7	0.29	0.608	0.053	3.815	0.50	0.146	0.29
G5	0.62	37.6	1.39	-1.135	0.20	3.745	0.30	-1.131	0.16
G6	0.41	29.0	0.13	1.795	0.18	3.181	0.29	0.481	0.045
G7	1.94	28.0	0.59	-1.421	0.11	2.792	0.11	-0.493	0.033

ω_{10}	$\sigma_{\omega 1}$	ω_{20}	$\sigma_{\omega 2}$	ω_{30}	$\sigma_{\omega 3}$	p_1	σ_{p1}	p_2	σ_{p2}
0.006	0.36	0.248	3.7	-0.224	0.30	-0.723	0.70	2.529	3.4
0.144	0.031	1.216	0.12	0.125	0.094	0.578	0.28	-0.694	0.33
-0.473	0.033	3.376	0.26	-0.006	0.072	3.125	0.47	7.709	1.03
-0.046	0.087	2.132	0.62	-0.533	0.11	-0.623	0.46	2.808	0.94
0.686	0.063	0.020	0.17	-0.601	0.14	0.017	0.015	-0.178	0.041
-0.467	0.14	0.431	0.36	-0.974	0.059	0.216	0.11	-1.121	0.65
0.604	0.11	-0.085	0.14	2.490	0.13	0.309	0.045	-0.426	0.060

Таблица 3. Закрутка в плоскости орбиты

Инт.	σ	I_0	σ_I	γ_0	σ_γ	δ_0	σ_δ	β_0	σ_β
R1	0.58	29.0	0.18	0.539	0.25	2.554	0.41	0.296	0.059
R2	0.40	29.1	0.12	5.412	0.11	0.554	0.023	-0.580	0.027
R3	0.98	29.0	0.18	5.714	0.087	0.668	0.046	-0.448	0.013
R4	0.47	29.6	0.13	0.128	0.12	1.004	0.20	-0.651	0.071
R5	1.27	29.0	0.23	-0.816	0.041	5.918	0.099	0.315	0.049
R6	0.54	29.1	0.13	1.255	0.11	0.738	0.17	-0.418	0.11
R7	0.82	29.4	0.16	1.326	0.038	0.867	0.050	-0.321	0.035
R8	1.01	29.6	0.25	-0.007	0.34	5.155	0.40	-0.618	0.065

ω_{10}	$\sigma_{\omega 1}$	ω_{20}	$\sigma_{\omega 2}$	ω_{30}	$\sigma_{\omega 3}$	p_1	σ_{p1}	p_2	σ_{p2}
0.250	0.30	1.731	0.58	1.15	0.26	-1.894	0.51	2.765	0.95
-0.732	0.084	-3.713	0.23	-0.283	0.077	-1.005	0.24	2.810	0.45
-1.407	0.069	-5.038	0.14	-0.926	0.21	-1.858	0.074	2.835	0.22
1.616	0.13	-2.347	0.24	-1.409	0.17	-1.924	0.49	3.295	0.79
-1.616	0.064	-3.471	0.17	-2.567	0.17	0.023	0.34	0.763	0.58
2.071	0.069	-4.551	0.32	0.896	0.26	-4.856	1.4	8.459	1.3
2.132	0.035	-4.470	0.043	0.825	0.063	-2.743	0.55	4.270	0.61
-1.963	0.29	-2.813	0.16	3.655	0.14	-1.464	0.96	1.572	0.66