

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

В.И.Абрашкин, Н.Л.Богоявленский,
К.Е.Воронов, А.Е.Казакова, Ю.Я.Пузин,
В.В.Сазонов, Н.Д.Семкин, С.Ю.Чебуков

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
СПУТНИКА *ФОТОН М-2* ПО ДАННЫМ БОРТОВЫХ
ИЗМЕРЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ**

Москва - 2005

Аннотация

Приведены результаты определения неуправляемого вращательного движения спутника *Фотон М-2* (находился на орбите 31.5 — 16.06.2005). Определение выполнялось по данным бортовых измерений напряженности магнитного поля Земли. Из этих данных, охватывающих первые две трети полета, выбирались отрезки длиной в 270 мин (три орбитальных витка). На каждом таком отрезке данные обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения спутника относительно центра масс. При обработке оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели. Полученные результаты дали полное представление о движении спутника. Это движение, начавшееся с малой угловой скоростью, постепенно становилось быстрее и через двое суток стало близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. В последний день измерений 09.06.2005 угловая скорость спутника относительно его продольной оси составляла примерно 1.1 град./с, проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную этой оси, имела модуль около 0.11 град./с. Отклонения продольной оси от нормали к плоскости орбиты не превышали 60°. Получены оценки квазистатической составляющей микроускорений на борту спутника.

V.I.Abrashkin, N.L.Bogoyavlensky, K.E.Voronov, A.E.Kazakova, Yu.Ya.Puzin, V.V.Sazonov, N.D.Semkin. S.Yu.Chebukov. Determination of the spacecraft *Foton M-2* attitude motion on measurements of the Earth magnetic field. The preprint presents the results of reconstruction of the *Foton M-2* attitude motion during its uncontrolled flight 31.5 — 16.06.2005. The reconstruction was carried out by processing onboard measurements of the Earth magnetic field strength. The measurement data were accumulated continually during the most part of the flight, but the processing procedure dealt with data segments, which had length 270 min. The measurement data on each such segment were processed simultaneously by means of the least squares method and integration of the spacecraft attitude motion equations. The estimates of the mathematical model parameters and initial conditions of the attitude motion were obtained as a result of such processing. The results of processing several segments above made clear the motion during the flight. The motion began with very small angular rates, but then it became faster and proved to be close to Euler's regular precession of an axially symmetric rigid body. In the last day of magnetic field measurements 09.06.2005, the spacecraft angular rate around its longitudinal axis was equal 1.1 deg./s, projection of the angular rate vector onto the plane perpendicular to that axis was equal 0.11 deg./s. Deflections of the longitudinal axis from the normal to the spacecraft orbital plane did not exceed 60°. The estimations of real quasi-steady acceleration component on board the spacecraft were obtained.

1. Уравнения вращательного движения спутника. Спутник считаем твердым телом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс и соотношений, используемых при обработке данных измерений, введем четыре правые декартовы системы координат.

$Oy_1y_2y_3$ — жестко связанная со спутником приборная система координат. Точка O — центр масс спутника, ось Oy_1 параллельна продольной оси спутника и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку. В этой системе интерпретируются данные измерений бортовых магнитометров.

$Ox_1x_2x_3$ — система координат, образованная главными центральными осями инерции спутника. Оси Ox_i составляют малые углы с осями Oy_i ($i = 1, 2, 3$).

$CY_1Y_2Y_3$ — гринвичская система координат. Ее начало находится в центре масс Земли, плоскость CY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось CY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось CY_3 направлена в Северный полюс.

$OX_1X_2X_3$ — орбитальная система координат. Ось OX_3 направлена вдоль геоцентрического радиуса-вектора точки O , ось OX_2 направлена по вектору кинетического момента орбитального движения спутника.

Положение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной системы будем задавать двумя наборами углов. Первый набор — углы γ , δ и β — вводится так [1,2], чтобы систему $OX_1X_2X_3$ можно было перевести в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OX_2 , 2) на угол β вокруг новой оси OX_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси OX_1 , совпадающей с осью Ox_1 . Второй набор образован углами ψ , θ и φ , определяемыми следующим образом [3]. Система $OX_1X_2X_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол ψ вокруг оси OX_3 , 2) на угол θ вокруг новой оси OX_2 , 3) на угол φ вокруг новой оси OX_1 , совпадающей с осью Ox_1 . Оба набора углов используются для графического представления движения спутника. Первый набор — в случае, когда ось Ox_1 в некоторые моменты времени лежит в плоскости орбиты (плоскости OX_1X_3), второй набор — в случае, когда эта ось составляет с плоскостью орбиты достаточно большой угол.

Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к приборной системе координат обозначим $\| b_{ij} \|_{i,j=1}^3$, где b_{ij} — косинус угла между осями Oy_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются в функции углов γ_c , α_c и β_c [2,4], на которые надо повернуть приборную систему последовательно вокруг осей Oy_2 , Oy_3 и Oy_1 , чтобы перевести ее в систему $Ox_1x_2x_3$.

Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к гринвичской системе обозначим $\| g_{ij} \|_{i,j=1}^3$. Здесь g_{ij} — косинус угла между осями CY_i и Ox_j . Элементы этой матрицы будем выражать в функции углов γ_g , δ_g и β_g , определяемых аналогично углам γ , δ и β . Углы γ_g , δ_g , β_g и γ_c , α_c , β_c используются в программах обработки данных измерений.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение его центра масс, другая — движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс спутника записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004 [5]. Решения этой подсистемы находились из условия наилучшей аппроксимации двухстрочных элементов *Фотона М-2* на отрезках времени длиной 3 – 4 сут (см. [6], где примененная методика изложена на примере *Фотона-11*).

Подсистема уравнений движения спутника относительно центра масс образована динамическими уравнениями Эйлера и кинематическими уравнениями Пуассона. В ней учитываются действующие на спутник гравитационный момент, восстанавливающий аэродинамический момент и момент, постоянный в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Эта подсистема имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2x_3) + \kappa(v_2p_3 - v_3p_2) + m_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1x_3) + \frac{\lambda\kappa}{1 + \lambda\mu}(v_3p_1 - v_1p_3) + m_2, \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda\kappa(v_1p_2 - v_2p_1) + m_3, \\ \\ \dot{g}_{11} &= g_{12}\omega_3 - g_{13}\omega_2 + \omega_e g_{21}, & \dot{g}_{21} &= g_{22}\omega_3 - g_{23}\omega_2 - \omega_e g_{11}, & (1) \\ \dot{g}_{12} &= g_{13}\omega_1 - g_{11}\omega_3 + \omega_e g_{22}, & \dot{g}_{22} &= g_{23}\omega_1 - g_{21}\omega_3 - \omega_e g_{12}, \\ \dot{g}_{13} &= g_{11}\omega_2 - g_{12}\omega_1 + \omega_e g_{23}, & \dot{g}_{23} &= g_{21}\omega_2 - g_{22}\omega_1 - \omega_e g_{13},\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu_e}{R^5},$$

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \kappa = E\rho_a\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Здесь ω_i , x_i и v_i — компоненты в системе $Ox_1x_2x_3$ абсолютной угловой скорости спутника, геоцентрического радиуса-вектора точки O и скорости этой точки относительно поверхности Земли, p_i — параметры аэродинамического момента, m_i — угловые ускорения, создаваемые постоянным моментом, I_i — моменты инерции спутника относительно осей Ox_i , μ_e и ω_e — гравитационный параметр Земли и ее угловая скорость, ρ_a — плотность атмосферы в точке O , E — масштабирующий множитель. При численном интегрировании уравнений (1) единицами измерения времени и длины служат 1000 с и

1000 км, единицы измерения других величин: $[v_i] = \text{км/с}$, $[\omega_i] = 10^{-3}\text{с}^{-1}$, $[p_i] = \text{см/кг}$, $[m_i] = 10^{-6}\text{с}^{-2}$, $[\rho_a] = \text{кг/м}^3$, $E = 10^{10}$. Недостающие элементы матрицы $\|g_{ij}\|$ вычисляются по формулам $g_{31} = g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}$ и т. п.

Переменные g_{1i} и g_{2i} не являются независимыми, они связаны условиями ортогональности матрицы $\|g_{ij}\|$. По этой причине начальные условия для g_{1i} и g_{2i} будем выражать через углы γ_g , δ_g и β_g .

Параметры λ и μ в уравнениях (1), а также углы γ_c , α_c и β_c , можно считать известными, поскольку известен расчетный тензор инерции спутника в приборной системе координат. Расчетные значения этих параметров $\lambda = \lambda^\circ = 0.27$, $\mu = \mu^\circ = 0.10$, $\gamma_c = \alpha_c = \beta_c = 0$. Параметры p_i и m_i определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т. е. служат параметрами согласования. Используются также варианты обработки данных измерений, в которых параметрами согласования являются, кроме перечисленных, λ , μ , γ_c , α_c , β_c и варианты, в которых некоторые или все m_i равны нулю.

2. Методика определения движения спутника по данным измерений бортовых магнитометров. На *Фотоне М-2* находилась аппаратура *Мираж*, имевшая шесть трехкомпонентных магнитометров и предназначенная для измерения магнитного поля внутри спутника во время проведения космических экспериментов. Измерения проводились с начала полета до 09.06.2005. Магнитометры были разбиты на две группы по три датчика. Каждая группа управлялась собственным контроллером. Оцифровка показаний всех трех магнитометров группы выполнялась для одних и те же моментов времени с шагом 5 с. Моменты оцифровки разных групп не совпадали. Как показал анализ полученных данных, измерения первого контроллера представляют собой достаточно точные измерения магнитного поля Земли (МПЗ). То же можно сказать и об измерениях первого и третьего магнитометров второго контроллера (у первой компоненты третьего магнитометра надо поменять знак). Второй магнитометр второго контроллера имеет, по видимому, неверную калибровку. Ниже описываются результаты обработки измерений магнитометров первого контроллера.

Обработка выполнялась следующим образом. Измерения магнитометров, относящиеся к одному и тому же моменту времени, пересчитывались в приборную систему $Oy_1y_2y_3$ и покомпонентно усреднялись с равными весами. Найденные средние значения считались измеренными значениями компонент h_i ($i = 1, 2, 3$) вектора напряженности МПЗ в начале приборной системы координат в указанный момент.

Данные измерений, полученные на временном интервале в несколько часов, обрабатывались совместно. Объем этих данных велик, и при построении по ним решения уравнений (1), аппроксимирующего фактическое движение спутника, проводилось их предварительное сжатие [3]. Для данных измере-

ний каждой компоненты h_i , относящихся к обрабатываемому отрезку времени $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, методом наименьших квадратов строилось сглаживающее выражение

$$f_i(t) = C_{i,M+1} + C_{i,M+2}(t - t_0) + \sum_{m=1}^M C_{i,m} \sin \frac{\pi m(t - t_0)}{T}, \quad (2)$$

где $C_{i,m}$ — коэффициенты. С помощью таких выражений вычислялась совокупность чисел

$$t_n = t_0 + \frac{nT}{N}, \quad h_i^{(n)} = f_i(t_n) \quad (i = 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad N > M), \quad (3)$$

служившая исходной информацией для построения требуемого решения уравнений (1). Величины $h_i^{(n)}$ будем называть псевдоизмерениями. Они представляют собой приближенные значения компонент местной напряженности МПЗ в приборной системе координат в момент времени t_n . Ниже во всех вариантах обработки принято $T \approx 270$ мин, $N = 270$, $t_{n+1} - t_n \approx 1$ мин, $M = 150 - 200$.

Типичный вид данных измерений компонент напряженности МПЗ в приборной системе координат и аппроксимирующих их выражений (2) представлен левыми и средними графиками на рис. 1. Графики выражений (2) изображены сплошными линиями, измерения указаны маркерами. В этом примере число моментов времени с измерениями — 3109, $M = 200$, средние квадратические ошибки аппроксимации компонент h_1 , h_2 и h_3 выражениями (2) равны соответственно 70γ , 187γ и 149γ .

Из-за разного рода сбоев в измерениях магнитного поля имеются пропуски — отрезки времени между соседними измерениями иногда значительно превышают 5 с. В примере, представленном на рис. 1, хорошо заметны два таких пропуска. Выражения (2) при значениях t , отвечающих пропускам, обычно содержат значительные ошибки (ср. рис. 1). По этой причине те псевдоизмерения (3), для которых t_n приходились на пропуски в исходных данных, из дальнейшей обработки исключались.

Привязка ко времени данных измерений МПЗ не вполне точна, и в моментах t_n имеется некоторый сдвиг. Этот сдвиг принимался неизменным на всем интервале обработки. Величина сдвига определялась методом наименьших квадратов из условия наилучшего совпадения модулей (псевдо)измеренного и расчетного векторов напряженности МПЗ в точках t_n . Пусть $H_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) — компоненты напряженности МПЗ в гринвичской системе координат в момент времени t , рассчитанные по аналитической модели поля IGRF2005 вдоль имеющейся аппроксимации орбиты спутника. Введем функцию

$$\Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = \sum_{n=0}^N \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_i]^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^3 H_i^2(t_n + \tau)} \right\}^2,$$

где τ — указанный сдвиг во времени, Δ_i — постоянные систематические ошибки (смещения) в псевдоизмерениях. Положим

$$\Psi_1(\tau) = \min_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Функция $\Psi_1(\tau)$ вычислялась на равномерной сетке с шагом 1 с. Минимизация Ψ по Δ_i на каждом шаге выполнялась методом Гаусса-Ньютона. Значение τ , доставляющее минимум функции Ψ_1 на этой сетке, принималось в качестве сдвига. Стандартное отклонение σ_τ сдвига рассчитывалось в рамках метода наименьших квадратов по формуле

$$\sigma_\tau^2 = 2\Psi_1 \left[(N - 4) \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau^2} \right]^{-1}.$$

Правая часть этой формулы вычисляется в точке минимума Ψ_1 , вторая производная находится по сеточным значениям Ψ_1 разностным способом.

В качестве примера в правой части рис. 1 приведены графики зависимости от времени модуля напряженности МПЗ, рассчитанного по модели IGRF2005 и вычисленного по псевдоизмерениям (3), которые были построены для измерений на левых графиках того же рисунка. Оба графика модуля — ломаные, вершины которых имеют абсциссы $t_n + \tau$. График модуля псевдоизмерений построен после удаления из них смещений Δ_i . На рисунке этот график выглядит менее гладким, чем график модельной зависимости. В данном случае $\tau = 373$ с, $\sigma_\tau = 3.9$ с, средняя квадратическая ошибка аппроксимации модуля псевдоизмерений составляет 1160 γ .

Следуя методу наименьших квадратов, аппроксимацией фактического движения спутника на отрезке $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + \tau + T$ будем считать решение системы (1), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 \left[h_i^{(n)} - \Delta_i - h_i(t_n + \tau) \right]^2, \quad h_i(t) = \sum_{j,k=1}^3 H_j(t) g_{jk}(t) b_{ik}. \quad (4)$$

Минимизация Φ_1 проводится по начальным условиям решения в точке $t_0 + \tau$ и параметрам математической модели: $\Delta_i, p_i, m_i, \lambda, \mu, \gamma_c, \alpha_c$ и β_c . Некоторые из этих параметров могут быть фиксированы. Те параметры, значения которых определяются в процессе минимизации Φ_1 , будем называть уточняемыми.

Число аргументов функционала (4) можно уменьшить, выполнив аналитически его минимизацию по смещениям Δ_i . Остальные аргументы при этом фиксированы. В результате получаем новый функционал

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=0}^N \left[h_i^{(n)} - h_i(t_n + \tau) \right]^2 - (N+1) \tilde{\Delta}_i^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\tilde{\Delta}_i = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \left[h_i^{(n)} - h_i(t_n + \tau) \right].$$

Теперь отыскание решения системы (1), аппроксимирующего фактическое вращательное движение спутника, состоит в минимизации функционала (5) по начальным условиям этого решения $\gamma_0 = \gamma_g(t_0 + \tau)$, $\delta_0 = \delta_g(t_0 + \tau)$, $\beta_0 = \beta_g(t_0 + \tau)$, $\omega_{i0} = \omega_i(t_0 + \tau)$ ($i = 1, 2, 3$) и уточняемым параметрам математической модели.

Минимизация функционала (5) выполнялась методом Левенберга – Марквардта, являющимся одной из модификаций метода Гаусса – Ньютона. Реализация этого метода в задачах определения вращательного движения спутников по данным измерений бортовых датчиков описана в [1, 2].

Использовались несколько вариантов минимизации Φ . Они отличались числом уточняемых параметров и применялись поэтапно. На начальном этапе минимизация всегда выполнялась по начальным условиям и параметрам p_i при $m_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) и фиксированных номинальных значениях параметров тензора инерции (см. п. 1). Схемы последующих этапов варьировались, но в случае сравнительно большой длины обрабатываемого интервала на окончательном этапе минимизация выполнялась либо по всем параметрам, либо при выполнении условия $m_2 = m_3 = 0$. Ниже будем рассматривать только эти два случая. Для простоты письма все уточняемые величины объединим в один вектор z . В первом из указанных случаев $\dim z = 17$, во втором $\dim z = 15$. В принятых обозначениях $\Phi = \Phi(z)$, $z_* = \operatorname{argmin} \Phi(z)$ — искомая оценка вектора z .

Точность аппроксимации псевдоизмерений и оценки z_* будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях не коррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок, относящихся к одной и той же компоненте напряженности МПЗ, равны. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (5). Теоретико-вероятностные условия его адекватности требуют дополнительного обсуждения. При сделанных допущениях z_* — случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению z . Ковариационная

матрица этого вектора и оценка дисперсии ошибок в псевдоизмерениях вычисляются по формулам

$$K_z = \sigma^2 C^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^q, \quad \sigma^2 = \frac{\Phi(z_*)}{3N - q}.$$

Здесь $q = \dim z$, C — вычисленная в точке z_* матрица системы нормальных уравнений, возникающей при минимизации $\Phi(z)$ методом Гаусса-Ньютона, $2C \approx \partial^2 \Phi(z_*) / \partial z^2$. Точность аппроксимации псевдоизмерений будем характеризовать стандартным отклонением σ , точность оценки z_* — стандартными отклонениями $\sqrt{K_{ii}}$ ($i = 1, 2, \dots, q$). Стандартные отклонения величин γ_0 , ω_{i0} , p_i , λ , γ_c и т. п. будем обозначать σ_γ , $\sigma_{\omega i}$, $\sigma_{p i}$, σ_λ , $\sigma_{\gamma c}$.

Чтобы минимизирующие функционал (5) значения параметров λ , μ и γ_c лежали в приемлемых с физической точки зрения пределах, в этот функционал вводилось дополнительное слагаемое

$$\varepsilon_1 [(\lambda - \lambda^\circ)^2 + (\mu - \mu^\circ)^2] + \varepsilon_2 \gamma_c^2.$$

Здесь ε_1 и ε_2 — положительные числа, λ° , μ° — указанные выше номинальные значения параметров λ и μ . Такая замена функционала учитывает априорную информацию об уточняемых параметрах спутника и регуляризует задачу минимизации Φ . За новым функционалом сохраним прежнее обозначение. Описываемые ниже результаты получены в при $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 0.005$. При вычислении стандартных отклонений использовались новое выражение для Φ и соответствующая матрица нормальных уравнений.

3. Результаты определения вращательного движения спутника *Фотон М-2* по описанной методике приведены на рис. 2 — 14 и в табл. 1 — 3. Рисунки даны в хронологическом порядке. Они иллюстрируют движение спутника относительно орбитальной системы координат и качество аппроксимации псевдоизмерений в рамках принятой математической модели. Таблицы содержат некоторые характеристики решений системы (1), представленных на рисунках. Каждый из рисунков дает детальное описание движения только на трех орбитальных витках, но взятые вместе они позволяют получить полное представление о движении в течение большей части неуправляемого полета.

Решения на рис. 2, 3 построены при уточнении всех параметров математической модели, решения на рис. 4 — 14 — при уточнении всех параметров кроме $m_2 = m_3 = 0$. Согласие псевдоизмерений с математической моделью на представленных интервалах движения характеризуется стандартным отклонением σ , значения которого приведены в табл. 1 и в подписях к рисункам. Там же указаны исправленная начальная точка интервала $t_0 + \tau$, временной сдвиг τ и стандартное отклонение σ_τ . Каждый из рис. 2 — 14 естественным

образом разбивается на три части — левую, среднюю и правую. Правые части иллюстрируют качество аппроксимации псевдоизмерений (3) функциями $h_i(t)$ в (4). Здесь в каждой системе координат сплошной линией изображен график одной из этих функций на отрезке $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + \tau + T$, маркерами указаны точки $(t_n + \tau, h_i^{(n)} - \tilde{\Delta}_i)$ ($n = 0, 1, \dots, N$).

В средней части рисунков помещены графики компонент угловой скорости $\omega_i(t)$ в найденных решениях уравнений (1) и график отношения $K(t)$ плотности атмосферы в точке O к минимальному значению этой плотности на данном интервале. Минимальные значения $K = 1$ достигаются в окрестности апогея, максимальные — вблизи перигея. Из графиков видно, что угловая скорость спутника постепенно возрастала. В рамках принятой модели этот эффект объясняется действием на спутник механического момента, постоянного в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Такой момент может возникнуть, например, из-за травления газа. Похожий режим вращательного движения был у спутников *Фотон-11* и *Фотон-12* [6–8]. В [8] раскрутка спутника объяснялась влиянием аэродинамического момента. Однако математическое моделирование показало, что влияние аэродинамического момента на спутник осесимметричной формы, как *Фотона*, хотя и приводит к увеличению угловой скорости до некоторого уровня, близкого к установленному в [7,8], не обеспечивает векового увеличения ω_1 на продолжительных интервалах времени. Предположение о том, что раскрутка *Фотона М-2* была вызвана моментом, постоянным в связанной со спутником системе координат, выглядит более правдоподобным.

Как видно из рисунков, неуправляемое движение спутника, начавшееся из положения покоя в орбитальной системе координат, постепенно становилось все более быстрым. Особенно заметно возрастала компонента угловой скорости ω_1 . По мере увеличения угловой скорости движение спутника становилось все больше похоже на регулярную прецессию Эйлера осесимметричного твердого тела. Формирование регулярной прецессии с медленно возрастающей угловой скоростью ω_1 и практически неизменным значением $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$ завершилось после полутора — двух суток полета.

Точная регулярная прецессия Эйлера может иметь место лишь в случае, когда главный момент приложенных к спутнику внешних сил равен нулю и спутник осесимметричен — $\mu = 0$. В этом случае величины ω_1 и ω_{\perp} остаются неизменными во время движения. Если же главный момент внешних сил равен нулю, но $\mu \neq 0$, то неизменными будут величины

$$\Omega = \left[\omega_1^2 + \frac{\mu \omega_3^2}{1 - \lambda + \lambda \mu} \right]^{1/2}, \quad w = \left[\omega_2^2 + \frac{(1 - \lambda) \omega_3^2}{(1 + \lambda \mu)(1 - \lambda + \lambda \mu)} \right]^{1/2}.$$

Движение спутника уже не будет регулярной прецессией, но если

$$\frac{\mu(1 + \lambda\mu)w^2}{\lambda(1 - \lambda)\Omega^2} \ll 1,$$

то оно будет близко к ней. *Фотон М-2* имел $\mu \ll 1$, а условие $w^2/\Omega_2^2 \ll 1$ выполнялось, начиная со вторых суток полета. Следовательно, уже на вторые сутки вращательное движение этого спутника было близко к регулярной прецессии Эйлера. При выполнении двух последних условий с высокой точностью $\Omega \approx \omega_1$, $\omega_{\perp} \approx w$, поэтому движение *Фотона М-2* на интервалах обработки данных измерений имеет смысл характеризовать величинами

$$\langle \omega_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T} \omega_1 dt, \quad \delta\omega_1 = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T} (\omega_1 - \langle \omega_1 \rangle)^2 dt \right]^{1/2}$$

и определяемыми аналогичными формулами величинами $\langle w \rangle$, δw . Средние квадратические отклонения $\delta\omega_1$ и δw характеризуют близость движения спутника к регулярной прецессии с параметрами $\langle \omega_1 \rangle$ и $\langle w \rangle$. По существу эти отклонения характеризуют приложенные к спутнику механические моменты, играющие в данном случае роль малых возмущений. Значения величин $\langle \omega_1 \rangle$, $\delta\omega_1$, $\langle w \rangle$ и δw для обработанных интервалов времени указаны в подписях к рисункам и в табл. 1.

Вернемся к рисункам. В левой части рис. 2 — 14 находятся графики зависимости от времени углов, задающих положение спутника в орбитальной системе координат. На рис. 2 — 8 использованы углы γ , δ и β . Наибольший интерес здесь представляют графики угла β между осью Ox_1 и плоскостью орбиты. На всех этих графиках β меняет знак. На рис. 9 — 14 использованы углы θ , ψ и $\Lambda = \arccos(\cos \theta \sin \psi)$. Последний угол образован осями Ox_1 и Ox_2 , углы θ и ψ задают положение оси Ox_1 в орбитальной системе координат. При $\theta = 0$, $\psi = \pi/2$ ось Ox_1 совпадает с осью Ox_2 — нормалью к плоскости орбиты. В окрестности этого положения углы $\psi - \pi/2$ и θ задают смещения оси Ox_1 в направлениях, противоположных трансверсали к орбите и геоцентрическому радиусу-вектору точки O . В то время, как углы γ , δ и β дают полное представление о движении спутника, углы Λ , θ и ψ описывают только движение оси Ox_1 . Если спутник совершает движение, близкое к регулярной прецессии Эйлера, то перемещение именно этой оси наиболее интересно. Второй набор углов соответствует движению спутника во второй половине полета — угол Λ и модули углов θ и $\psi - 90^\circ$ на рис. 10 — 14 не превышают 70° . Иными словами, ось Ox_1 во второй половине полета находилась достаточно далеко от плоскости орбиты. Вначале полета она, наоборот, не уходила далеко от этой плоскости.

Точность реконструкции движения спутника по описанной методике характеризуется стандартными отклонениями начальных условий и парамет-

ров модели. Хотя, как уже отмечалось, обычные теоретико-вероятностные допущения метода наименьших квадратов в применяемой методике не выполнены, стандартные отклонения оказываются полезными характеристиками. Анализ этих стандартных отклонений вместе с анализом собственных векторов матрицы C (см. п. 2), отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер неопределенности, которая возникает при реконструкции движения. Анализ основан на формуле

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^q \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right) \left(\frac{u_k}{\sqrt{c_k}} \right)^T,$$

где c_k и u_k — собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы C . Из этой формулы следует, что наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие компоненты векторов $u_k/\sqrt{c_k}$.

В качестве примера такого анализа исследуем точность определение движения на интервале от 7 июня (рис. 12). Стандартные отклонения уточняемых величин в данном случае составляют

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= 0.32, & \sigma_\delta &= 0.0091, & \sigma_\beta &= 0.0029, & \sigma_{\omega_1} &= 0.062, & \sigma_{\omega_2} &= 0.19, \\ \sigma_{\omega_3} &= 0.75, & \sigma_{p_1} &= 0.0027, & \sigma_{p_2} &= 0.070, & \sigma_{p_3} &= 0.077, & \sigma_\lambda &= 0.00033, \\ \sigma_\mu &= 0.0073, & \sigma_{m_1} &= 0.00027, & \sigma_{\gamma_c} &= 0.32, & \sigma_{\alpha_c} &= 0.0027, & \sigma_{\beta_c} &= 0.0027. \end{aligned}$$

Стандартные отклонения углов здесь выражены в радианах, стандартные отклонения остальных величин — в единицах, в которых интегрируются уравнения (1), в частности, $[\sigma_{\omega_i}] = 10^{-3}\text{с}^{-1}$. В приведенном примере наименее точно найдены начальные условия γ_0 , ω_{20} , ω_{30} и параметр γ_c .

Большие значения σ_γ , σ_{ω_2} , σ_{ω_3} и σ_{γ_c} объясняются так. Собственные числа матрицы C в данном случае составляют $c_1 = 0.00068$, $c_2 = 0.063$, $c_3 = 0.11$, 1.4, 3.8, 9.7, 10.8, 44, 73, 74, 78, 338, 1360, 277640, 567419; ее собственные векторы $u_k/\sqrt{c_k}$ ($k = 1, 2, 3$) имеют вид

$$\begin{aligned} &[-13.6, 0, 0, 0.2, 8.1, 32.3, 0, 0.2, 1.5, 0, 0, 0, -13.6, 0, 0]^T, \\ &[0, 0, 0, 2.7, 0.1, 0, 0, 2.9, -0.8, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \\ &[1, 0, 0, -0.1, 0, -0.1, 0, 0.8, 2.9, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T. \end{aligned}$$

Компоненты этих векторов упорядочены также, как указанные выше стандартные отклонения; нули означают, что модули соответствующих компонент меньше 0.05. Выписанные векторы дают наиболее значимый вклад в стандартные отклонения уточняемых величин, причем вклад первого вектора в σ_γ , σ_{ω_2} , σ_{ω_3} и σ_{γ_c} весьма велик. Причина этого эффекта — уточнение тензора инерции спутника. Для твердого тела, близкого к осесимметричному, такое уточнение может содержать большую ошибку. Ошибка проявляется в параметрах положения главных осей с близкими моментами инерции,

например, в угле, задающем поворот этих осей вокруг главной оси "почти симметрии" тела, а также в величинах, так или иначе зависящих от этого положения. В случае *Фотона М-2* в роли такого угла выступает угол γ_c , поскольку распределение массы этого спутника близко к осесимметричному с осью симметрии Ox_1 , в роли зависимых величин выступают начальные условия γ_0 , ω_{20} и ω_{30} . Свой вклад в указанную неопределенность вносит и быстрое вращение спутника вокруг оси Ox_1 .

Большое значение σ_{γ_c} является объективным, большие значения σ_γ , σ_{ω_2} и σ_{ω_3} обусловлены не удачной для данного типа движений спутника параметризацией начальных условий (эта параметризация выбиралась по другим критериям). Величины, не зависящие от γ_c , определяются намного точнее, например, δ_0 , β_0 , λ , p_1 и т. д. Величины $\xi_1 = \gamma_0 - \gamma_c$, $\xi_2 = \omega_{20} \cos \gamma_0 - \omega_{30} \sin \gamma_0$, $\xi_3 = \omega_{20} \sin \gamma_0 + \omega_{30} \cos \gamma_0$ также уточнялись бы с существенно меньшими стандартными отклонениями. А именно, для их стандартных отклонений справедливы соотношения

$$\sigma_{\xi_i}^2 = a_i^T K_z a_i = \sigma^2 \sum_{k=1}^q \left(\frac{u_k^T a_i}{\sqrt{c_k}} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

где векторы a_i задаются видом дифференциалов $d\xi_i = a_i^T dz$ в точке z_* . Например, $d\xi_1 = d\gamma_0 - d\gamma_c$, $d\xi_2 = -\xi_3 d\gamma_0 + \cos \gamma_0 d\omega_{20} - \sin \gamma_0 d\omega_{30}$. Оказывается,

$$a_1^T u_1 / \sqrt{c_1} = 0.011, \quad a_2^T u_1 / \sqrt{c_1} = -0.76, \quad a_3^T u_1 / \sqrt{c_1} = 0.78.$$

Проверка в случае a_1 тривиальна. Поскольку $\omega_\perp^2(t_0 + \tau) = \xi_2^2 + \xi_3^2$, отсюда и из вида векторов $u_k / \sqrt{c_k}$ следует, что $\omega_\perp(t_0 + \tau)$ определяется примерно в 2.5 раза точнее чем ω_{10} .

Малые значения σ_δ и σ_β показывают, что движение оси Ox_1 определяется довольно точно — с ошибкой около 0.5° . Характерная ошибка в определении угловой скорости оценивается стандартным отклонением σ_{ω_1} . Как правило, стандартные отклонения, рассчитанные в рамках метода наименьших квадратов, дают заниженные оценки погрешности. Сопоставление точности определения фактического движения станции *Mur* по данным измерений магнитометров с результатами аналогичного определения по показаниям оптического звездного датчика [9] и телеметрической информации из БЦВМ [3] показывает, что реальную оценку максимальной погрешности можно получить увеличив указанные стандартные отклонения в два раза. Таким образом, реальная погрешность определения положения оси Ox_1 спутника составляет около 1° , а модуля угловой скорости — менее 0.01 град./с.

Анализ стандартных отклонений позволяет сделать выводы относительно принятых математических моделей. В табл. 1 — 3 приведены стандартные отклонения параметров m_i и p_i ($i = 1, 2, 3$). Из табл. 2 следует, что по мере

раскрутки спутника параметры m_2 и m_3 в рамках модели с $q = 17$ определяются все менее точно, а уменьшение σ по сравнению с моделью, в которой $q = 15$, становится несущественным. В такой ситуации следует либо добавить в функционал (5) слагаемое $\sim m_2^2 + m_3^2$, либо, что было сделано, перейти к модели с $m_2 = m_3 = 0$. Как видно табл. 1, с ростом $\langle \omega_1 \rangle$ значение m_1 уменьшается. По-видимому, возрастает момент сопротивления $\sim \omega_1$.

Как видно из табл. 3, параметр p_1 в несколько раз превышает по модулю σ_{p1} , а модули параметров p_2 и p_3 сравнимы с σ_{p2} , σ_{p3} или даже меньше их. Это означает, что знак p_1 , совпадающий со знаком x_1 -координаты центра давления спутника, установлен достаточно надежно.

4. Расчет микроускорений, возникавших на спутнике. Зная движение спутника, можно рассчитать квазистатическую компоненту микроускорения в любой неподвижной относительно его корпуса точке в функции времени. Информация о микроускорениях важна для анализа результатов некоторых выполненных на спутнике экспериментов.

Пусть спутник представляет собой твердое тело, и точка P , жестко связана с его корпусом. Микроускорением \mathbf{b} в точке P называется разность между напряженностью гравитационного поля в этой точке и абсолютным ускорением последней. Если в точке P закрепить пробное тело с исчезающе малой массой m , то сила реакции, действующая на это тело со стороны спутника, будет равна $-m\mathbf{b}$. Из негравитационных воздействий на спутник будем учитывать только сопротивление атмосферы. Тогда микроускорение можно найти по формуле [6 – 8]

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \dot{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \times \vec{\omega} + \frac{\mu_e}{R^3} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R} - \mathbf{r} \right] + c\rho_a |\mathbf{v}| \mathbf{v}.$$

Здесь $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{\omega}$ — абсолютная угловая скорость спутника, c — его баллистический коэффициент, \mathbf{R} — геоцентрический радиус точки O , \mathbf{v} — скорость этой точки относительно поверхности Земли. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ компоненты векторов $\vec{\omega}$, $\dot{\vec{\omega}}$, \mathbf{R} и \mathbf{v} равны соответственно (см. п. 1) ω_i , $\dot{\omega}_i$, x_i и v_i ($i = 1, 2, 3$). Значения баллистического коэффициента находятся в результате обработки траекторных измерений [6].

Результаты расчетов микроускорений на временных интервалах, представленных на рис. 3, 5, 7, 10, 12 и 14, приведены на рис. 15, 16. На этих рисунках изображены графики зависимости от времени компонент вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и его модуля $|\mathbf{b}|$ для точки P с радиусом-вектором $\mathbf{r} = (-1 \text{ м}, -0.9 \text{ м}, 0)$. Здесь компоненты векторов указаны в приборной системе координат. Как показывает анализ рисунков, максимальное и среднее значения $|\mathbf{b}|$ на интервале возрастают вместе с соответствующим значением $\langle \omega_1 \rangle$. Особенно существенно влияние $\langle \omega_1 \rangle$ на компоненту микроускорения b_2 — в приведенных примерах приближенно $b_2 \sim \langle \omega_1 \rangle^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00451).

Литература

- [1] Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Кузьмин С.П., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение движения орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7* относительно центра масс в режиме медленной закрутки по данным измерений. *Космические исследования*, 1988, т. 26, № 3, с. 390-405.
- [2] Сарычев В.А., Сазонов В.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И. Повышение точности определения вращательного движения орбитальных станций *Салют-6* и *Салют-7* по данным измерений. *Космические исследования*, 1991, т. 29, № 3, с. 375-389.
- [3] Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции *Мир*. *Космические исследования*, 2001, т. 39, № 1, с. 27-42.
- [4] Сарычев В.А., Сазонов В.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Лапшина И.Л. Определение пассивного вращательного движения орбитальной станции *Мир* по измерениям напряженности геомагнитного поля. *Космические исследования*, 1995, т. 33, № 1, с. 12-19.
- [5] ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли.
- [6] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11*. *Космические исследования*, 2004, т. 42, № 2, с. 185-200.
- [7] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ *Фотон-11*. *Космические исследования*, 2001, т. 39, № 4, с. 419-435.
- [8] В.И.Абрашкин, В.Л.Балакин, И.В.Белоконов, К.Е.Воронов, А.С.Зайцев, В.В.Иванов, А.Е.Казакова, В.В.Сазонов, Н.Д.Семкин. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту. *Космические исследования*, 2003, т. 41, № 1, с. 45-56.
- [9] Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В. Определение ориентации орбитального комплекса "Мир" по показаниям оптического звездного датчика. *Космические исследования*, 1995, т. 33, № 4, с. 395-402.

Таблица 1. Результаты обработки измерений напряженности МПЗ,
выполненных на спутнике *Фотон М-2*.

Дата 06.05	$t_0 + \tau$ ДМВ	τ с	σ_τ с	σ γ	$\langle \omega_1 \rangle$ гр./с	$\delta\omega_1$ гр./с	$\langle w \rangle$ гр./с	δw гр./с	m_1 10^{-6}М/с^2	σ_{m1} 10^{-6}М/с^2
1	02:25:39	45	3.8	2999	0.200	0.017	0.107	0.045	0.0405	0.0024
1	14:11:30	96	4.6	1352	0.313	0.014	0.082	0.045	0.0494	0.0012
2	03:12:10	136	3.5	1463	0.441	0.013	0.099	0.038	0.0501	0.00080
2	14:12:34	160	5.0	1571	0.521	0.011	0.066	0.029	0.0315	0.00070
3	03:13:22	208	3.2	1070	0.646	0.017	0.070	0.024	0.0611	0.00033
3	14:14:01	247	5.1	1297	0.746	0.0078	0.055	0.015	0.0225	0.00037
4	03:14:21	267	4.4	1463	0.789	0.0060	0.094	0.028	0.0221	0.00050
4	16:15:38	344	3.6	1153	0.849	0.0066	0.147	0.013	0.0237	0.00032
5	13:36:07	373	3.8	1364	0.931	0.0061	0.147	0.011	0.0043	0.00028
6	14:17:56	482	3.5	1090	1.009	0.0072	0.147	0.011	0.0261	0.00025
7	12:18:51	537	3.8	1163	1.066	0.0038	0.131	0.0099	0.0032	0.00027
8	12:20:02	608	3.9	1243	1.111	0.0059	0.115	0.010	0.0028	0.00027
9	12:21:18	684	4.0	1180	1.150	0.0021	0.113	0.010	0.00064	0.00025

Таблица 2. Оценки постоянного момента.

Дата 06.05	$t_0 + \tau$ ДМВ	σ γ	m_1 10^{-6}М/с^2	σ_{m1} 10^{-6}М/с^2	m_2 10^{-6}М/с^2	σ_{m2} 10^{-6}М/с^2	m_3 10^{-6}М/с^2	σ_{m3} 10^{-6}М/с^2
1	02:25:39	2999	0.0405	0.0024	0.0493	0.020	0.0204	0.026
		3011	0.0393	0.0022	—	—	—	—
1	14:11:30	1352	0.0494	0.0012	-0.5270	0.043	-0.0242	0.21
		1494	0.0429	0.00083	—	—	—	—
2	03:12:10	1318	0.0476	0.0017	0.9935	0.60	-1.294	0.45
		1463	0.0501	0.00080	—	—	—	—
2	14:12:34	1175	0.0624	0.013	4.661	0.81	2.199	1.4
		1571	0.0315	0.00070	—	—	—	—
3	03:13:22	1001	0.0343	0.0054	-3.317	1.3	3.910	1.2
		1070	0.0611	0.00033	—	—	—	—

Таблица 3. Оценки параметров аэродинамического момента.

Дата 06.05	$t_0 + \tau$ ДМВ	p_1 см/кг	σ_{p1} см/кг	p_2 см/кг	σ_{p2} см/кг	p_3 см/кг	σ_{p3} см/кг
1	02:25:39	-0.0917	0.0024	0.0345	0.0016	0.0010	0.0077
1	14:11:30	-0.0555	0.0016	0.0028	0.0070	-0.0167	0.0038
2	03:12:10	-0.0557	0.0072	0.0272	0.010	-0.0003	0.017
2	14:12:34	-0.0108	0.0020	-0.0892	0.019	-0.0739	0.017
3	03:13:22	-0.0757	0.0011	0.0428	0.021	0.0211	0.021
3	14:14:01	-0.0722	0.0031	0.1539	0.064	0.0352	0.085
4	03:14:21	-0.0187	0.0026	0.0064	0.050	0.0228	0.050
4	16:15:38	-0.0410	0.0020	-0.0148	0.046	0.0430	0.044
5	13:36:07	-0.0368	0.0033	0.0573	0.084	0.1555	0.066
6	14:17:56	-0.0356	0.0024	0.0026	0.061	0.0463	0.062
7	12:18:51	-0.0477	0.0027	0.1115	0.079	-0.0177	0.077
8	12:20:02	-0.0337	0.0030	0.1277	0.096	0.1342	0.093
9	12:21:18	-0.0346	0.0030	-0.0581	0.11	-0.0464	0.12