

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша

М.П. Галанин, Т.В. Низкая

**Разработка и применение численного метода
решения линейных эллиптических уравнений
в неограниченной области**

Москва – 2005

Аннотация.

Предложен новый метод решения линейных эллиптических уравнений в неограниченной области. Метод основан на представлении точного решения исходной задачи в виде суммы двух функций. Первая из них является решением некоторой вспомогательной задачи, а вторая находится с помощью формулы Грина. При использовании разностных схем для нахождения решения метод имеет квадратичный порядок точности, не зависящий от размеров области, и для двумерной задачи позволяет найти решение за $O(N^3)$ операций, где N^2 - число точек сетки в вычислительной области. В трехмерном случае метод требует $O(N^4)$ действий. Приведены результаты тестовых расчетов, подтверждающие эффективность метода.

M.P. Galanin, T.V. Nizkaya

Development and application of a numerical method for solution of linear elliptic equations in unbounded region.

Abstract

In this work we propose a new method for solution of linear elliptic equations in unbounded domain. The method is based on representation of exact solution as a sum of two functions. The former is a solution of some auxiliary problem and the latter can be found using Green's formula. Using finite-difference schemes this method has quadratic order of accuracy, independent of the size of computational domain, and in 2d case requires $O(N^3)$ operations to find the solution, where N^2 - is the number of nodes within the computational domain. In 3d case the method requires $O(N^4)$ operations. Test computational examples are provided, showing the method's efficiency.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Введение</i>	3
<i>§ 1. Метод решения уравнений вида $\Delta U - \mu \cdot U = -f$.</i>	7
<i>§ 2. Метод решения бигармонического уравнения.</i>	10
<i>§ 3. Дискретизация задачи для уравнений вида $\Delta U - \mu \cdot U = -f$.</i>	13
<i>§ 4. Дискретизация задачи для бигармонического уравнения.</i>	17
<i>§ 5. Результаты тестовых расчетов.</i>	19
<i>Заключение</i>	28
<i>Литература</i>	28

Введение

Необходимость решения эллиптических уравнений в неограниченной области возникает в различных задачах математической физики. Как правило, в подобных задачах источники сосредоточены на некотором ограниченном множестве S , так что находить решение во всем пространстве нет необходимости. Это позволяет заменить исходную задачу задачей в некоторой ограниченной области, на границе которой поставлены искусственные граничные условия (ИГУ). Проблеме построения таких условий посвящено большое количество работ, подробный обзор которых приведен в [1]. В идеальном случае ИГУ должны быть выбраны так, чтобы решение задачи в ограниченной расчетной области совпадало в этой области с решением исходной задачи. Однако точные ИГУ являются, как правило, нелокальными и требуют значительных вычислительных затрат при реализации. Поэтому на практике их обычно приходится заменять приближенными локальными условиями.

В качестве примера рассмотрим уравнение Пуассона на плоскости:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r, \varphi), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\text{supp } f(r, \varphi) = S \subset \{r \leq R_0\}, \quad u(r, \varphi) = O(\ln r) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Разложим функцию u в ряд по гармоникам при $r \geq R_0$:

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{ik\varphi}, \quad \hat{u}_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cdot e^{-ik\varphi} d\varphi. \quad (0.1)$$

Для каждой из \hat{u}_k имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{u}_k}{dr} \right) - \frac{k^2}{r^2} \hat{u}_k = 0, \quad r \geq R_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Каждое из этих уравнений имеет два линейно независимых решения:

$$\hat{u}_0^{(1)}(r) = \ln(r) \text{ и } \hat{u}_0^{(2)}(r) = \text{const} \text{ при } k = 0,$$

$$\hat{u}_k^{(1)}(r) = r^{-k} \text{ и } \hat{u}_k^{(2)}(r) = r^k \text{ при } k > 0.$$

Из них только $\hat{u}_k^{(1)}$ удовлетворяют условиям на бесконечности, поэтому следует потребовать выполнения следующего соотношения:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{u}_k & \hat{u}_k^{(1)} \\ \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial r} & \frac{\partial \hat{u}_k^{(1)}}{\partial r} \end{pmatrix} \Big|_{r=R_0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{d\hat{u}_k}{dr} \Big|_{r=R_0} - \frac{(u_k^{(1)})'_r}{u_k^{(1)}} \hat{u}_k \Big|_{r=R_0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для самой функции u граничное условие имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \hat{u}_k e^{ik\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_k u(R_0, \varphi') e^{ik(-\varphi'+\varphi)} d\varphi' = Pu, \quad (0.2)$$

$$\text{где } \gamma_k = \frac{(u_k^{(1)})'_r}{u_k^{(1)}} \Big|_{r=R_0} = \begin{cases} \frac{1/r}{\ln r} \Big|_{r=R_0}, & k = 0, \\ \frac{|k|}{r} \Big|_{r=R_0}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Это условие является, очевидно, нелокальным. Ограничив количество слагаемых в разложении (0.1), (0.2), на его основе можно получить приближенные локальные условия. Они более удобны для реализации, однако точными уже не являются. В частности, удерживая единственное слагаемое ($k = 0$), имеем граничное условие 3 рода:

$$\left(U + \frac{\ln(1/r)}{1/r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_0} = 0. \quad (0.3)$$

Здесь U - решение задачи описанного вида в ограниченной области с условием (0.3) на ее границе.

Его погрешность можно оценить величиной $O(1/R_0)$, которая зависит от размера вспомогательной области. На практике размер области, необходимый для получения приемлемых результатов, может оказаться достаточно большим. Кроме того, в некоторых случаях (когда в разложении точного решения отсутствует член при $k = 0$) это условие будет неработоспособным при любом значении R_0 .

Удерживая дополнительные слагаемые в разложении u , можно получить локальные условия более высокого порядка. Однако их точность также будет зависеть от размера области.

Одним из эффективных подходов к решению задач в неограниченных областях является использование граничных условий на основе метода разностных потенциалов [2]. Пусть решение исходной задачи вне некоторой ограниченной области S удовлетворяет уравнению $Lu=0$, где L - линейный оператор. Внутри области S может действовать более сложный оператор. Тогда для значений функции на сеточной границе записываются нелокальные условия вида

$$P_{\Gamma}\xi_{\Gamma} = \xi_{\Gamma},$$

где действие оператора P_{Γ} определяется через решение некоторой вспомогательной задачи. Это также задача в неограниченной области, но с более простым оператором L .

В случае линейного оператора с постоянными коэффициентами можно воспользоваться интегральным представлением точного решения. Известно [3], что решение линейного эллиптического уравнения может быть записано в виде свертки с соответствующей функцией Грина. Для линейных уравнений с коэффициентами, постоянными во всем пространстве или вне достаточно простой области, эта функция часто известна. Наиболее очевидный способ использования интегрального представления для определения граничных данных и решения задачи в ограниченной области состоит в следующем: необходимо вычислить значения функции U на границе некоторой вспомогательной области D , а затем решить в этой области первую краевую задачу. Погрешность получаемого таким образом решения будет определяться только точностью квадратурной формулы, используемой для вычисления интеграла, и точностью метода, применяемого для решения краевой задачи.

Оценим по порядку величины расчетные затраты на получение решения.

В двумерном случае на прямое вычисление решения во всей пространственной области, представляющей интерес, потребуется $O(N^4)$

действий (вычисление двойного интеграла во всех точках сетки). Здесь N - число точек по одной координате.

Вычисление решения на границе вспомогательной области требует $O(N^3)$ операций (вычисление двойного интеграла во всех точках границы). Столько же действий необходимо выполнить для нахождения решения в ограниченной области, например, методом сопряженных градиентов [4, с. 349], [5, с. 83]. При фиксированной относительной точности решения системы линейных алгебраических уравнений число итераций метода пропорционально $\sqrt{\gamma_1/\gamma_2}$, где γ_1 и γ_2 - постоянные энергетической эквивалентности оператора задачи (в простых ситуациях это границы спектра). Значение этого квадратного корня можно грубо оценить величиной $O(N)$ [4, с. 348]. При этом на выполнение одной итерации требуется $O(N^2)$ операций. Отсюда и получаем указанное выше число действий.

Рассмотрим трехмерный случай.

В трехмерном случае на прямое вычисление решения во всей пространственной области, представляющей интерес, потребуется $O(N^6)$ действий (вычисление тройного интеграла во всех точках сетки).

Вычисление решения на границе вспомогательной области в этом случае требует $O(N^5)$ операций (вычисление тройного интеграла во всех точках границы). Для нахождения же решения в ограниченной области методом сопряженных градиентов требуется выполнить $O(N^4)$ действий. При этом число итераций метода также есть $O(N)$, а на выполнение одной итерации требуется выполнить $O(N^3)$ операций. В результате имеем указанное выше число.

Таким образом, прямое вычисление решения во всей области с помощью интегрального представления заведомо неприемлемо в обоих рассмотренных вариантах. Дополнительное вычисление решения на границе также оказывается дорогим в трехмерном случае.

Целью данной работы является построение численного алгоритма решения задач в неограниченных областях, который требовал бы количества

действий, не превышающего числа действий на прямое решение задачи в ограниченной области как в двумерном, так и в трехмерном случаях.

В данной работе предложен метод решения эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, позволяющий найти решение в двумерном случае за $O(N^3)$ операций, а в трехмерном – за $O(N^4)$ операций. При этом погрешность численного решения для гладких источников не зависит от размера вспомогательной области и не превышает $O(h^2)$, где h - шаг сетки по каждому из направлений. Такой результат достигнут за счет использования формул Грина, позволяющих избежать вычисления двойных интегралов.

Авторы приносят свою благодарность И.Л. Софронову и А.В. Колдобе за интерес к работе и полезные обсуждения.

Необходимо также указать, что на возможность использования вспомогательных задач для нахождения решений в неограниченных областях авторов натолкнуло сообщение Л.М. Дегтярева, услышанное от него в первой половине 1990 – х годов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 03 - 01 - 00461).

§ 1. Метод решения уравнений вида $\Delta U - \mu \cdot U = -f$

Необходимо решить следующее уравнение

$$\Delta U - \mu \cdot U = -f, \quad M \in \mathbb{R}^2, \quad \text{supp } f = S,$$

дополненное на бесконечности одним из следующих условий [3]:

$$\begin{aligned} U &\rightarrow 0, & r &\rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \mu = c^2 > 0, \\ U &= O(\ln r), & r &\rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \mu = 0, \\ i|c|U + \frac{\partial U}{\partial r} &\rightarrow 0, & r &\rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \mu = -c^2 < 0. \end{aligned}$$

Будем рассматривать только действительную часть получаемого решения.

Тогда фундаментальное решение задачи имеет вид [3]:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0(|c|r), & \mu = c^2 > 0, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & \mu = 0, \\ \operatorname{Re} \left(\frac{i}{4} H_0^1(|c|r) \right) = -\frac{1}{4} Y_0(|c|r), & \mu = -c^2 < 0, \end{cases}$$

где $K_0(x)$ - функция Макдональда нулевого порядка, а $Y_0(x)$ - функция Неймана нулевого порядка.

Решение задачи можно записать следующим образом:

$$U(M) = \int_S \Phi(r_{MP}) f(P) ds_P,$$

где r_{MP} - расстояние между точками M и P . Индекс P при элементе площади означает, что при интегрировании соответствующая область пробегается точкой P .

Рассмотрим вспомогательную область $D \supset S$ с кусочно-гладкой границей Γ и будем искать решение внутри этой области в виде суммы двух функций

$$U = V + W,$$

где V есть решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta V - \mu \cdot V &= -f, & M \in D, \\ \alpha V + \frac{\partial V}{\partial n} &= 0, & M \in \Gamma, \quad \alpha > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

а W - некоторая неизвестная функция такая, что

$$\Delta W - \mu \cdot W = 0 \text{ в } D.$$

Задача (1.1) имеет единственное решение при $\mu \neq -\lambda_k(D, \alpha)$, где $\lambda_k(D, \alpha)$ - собственные значения соответствующего оператора - решения задачи Штурма - Лиувилля:

$$\begin{aligned} -\Delta V &= \lambda \cdot V, & M \in D, \\ \alpha V + \frac{\partial V}{\partial n} &= 0, & M \in \Gamma, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Далее всегда будем предполагать, что $\mu \neq -\lambda_k(D, \alpha)$. Так как при $\alpha > 0$ все λ_k положительны [3], то для $\mu \geq 0$ это условие выполняется автоматически. Если же окажется, что $\mu = -\lambda_k(D, \alpha)$, то значения λ_k можно изменить, сместив границу области D или выбрав другое значение коэффициента α .

Для функции V запишем третью интегральную формулу Грина [3]:

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial V(P)}{\partial n_p} \Phi(M, P) - \frac{\partial \Phi(M, P)}{\partial n_p} V(P) \right) dl_p - \int_D (\Delta V - \mu \cdot V) \Phi(M, P) ds_p = \\ &= - \int_{\Gamma} \left(\alpha \cdot \Phi(M, P) + \frac{\partial \Phi(M, P)}{\partial n_p} \right) V(P) dl_p + \int_S f(P) \Phi(M, P) ds_p = -A(V|_{\Gamma}, M) + U(M), \end{aligned}$$

где

$$A(V|_{\Gamma}, M) = \int_{\Gamma} \left(\alpha \cdot \Phi(M, P) + \frac{\partial \Phi(M, P)}{\partial n_p} \right) V(P) dl_p = \int_{\Gamma} G_{\alpha}(M, P) \cdot V(P) dl_p.$$

Тогда

$$W(M) = U(M) - V(M) = A(V|_{\Gamma}, M), \quad M \in D.$$

Для нахождения функции U необходимо найти значения интеграла $A(V|_{\Gamma}, M)$ в точках области D . Непосредственное вычисление этого интеграла во всей области требует значительных вычислительных затрат. Однако можно поступить следующим образом: выбрать некоторую область $D' \subset D$ (см. рис. 1), вычислить значения этого интеграла на ее границе Γ' и решить следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta W(M) - \mu \cdot W(M) &= 0, \quad M \in D', \\ W(M) &= A(V|_{\Gamma}, M), \quad M \in \Gamma'. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь также предполагается, что условия единственности выполнены.

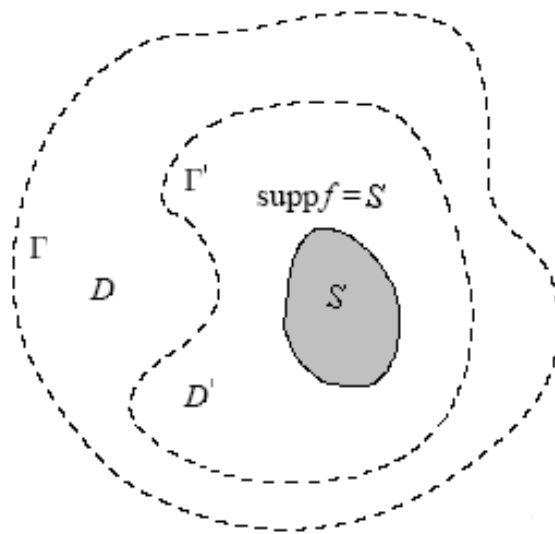


Рис. 1.

Таким образом, для решения исходной задачи необходимо:

- 1) Найти решение вспомогательной задачи (1.1).
- 2) Вычислить значения $A(V|_{\Gamma}, M)$ в точках на границе области D' .
- 3) Решить краевую задачу для функции W в области D' с построенными граничными условиями.

После этого остается вычислить решение:

$$U(M) = V(M) + W(M) \quad M \in D'.$$

§ 2. Метод решения бигармонического уравнения: $\Delta\Delta U = -f$

Требуется решить задачу:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta U &= -f, \quad \text{supp } f = S, \\ \Delta U &= O\left(\ln \frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Данное уравнение имеет четвертый порядок, но путем введения новой переменной его можно записать в виде системы двух уравнений второго порядка типа уравнений Пуассона. Поэтому для его решения можно применить метод для уравнений второго порядка, изложенный в § 1.

Фундаментальное решение данного уравнения имеет вид [3]:

$$\Phi(r) = \frac{1}{8\pi} r^2 \left(\ln \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \right).$$

Решение задачи можно записать следующим образом:

$$U(M) = \iint_S \Phi(r_{MP}) f(P) ds_P.$$

Можно получить соотношение, аналогичное формуле Грина:

$$\iint_D \Delta(\Delta\Phi \cdot U) - \Delta(\Delta U \cdot \Phi) ds = \iint_D (\Delta\Delta\Phi \cdot U - \Delta\Delta U \cdot \Phi) ds - 2 \iint_D (\vec{\nabla}(\Delta U) \vec{\nabla}\Phi - \vec{\nabla}(\Delta\Phi) \vec{\nabla}U) ds.$$

Преобразуем интегралы по области в контурные интегралы:

$$\int_D \Delta(\Delta\Phi \cdot U) - \Delta(\Delta U \cdot \Phi) ds = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial n} U + \Delta\Phi \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial(\Delta U)}{\partial n} \Phi - \Delta U \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dl,$$

$$\int_D (\vec{\nabla}(\Delta U) \vec{\nabla}\Phi - \vec{\nabla}(\Delta\Phi) \vec{\nabla}U) ds = \int_D (\vec{\nabla}(\Delta U \cdot \vec{\nabla}\Phi) - \vec{\nabla}(\Delta\Phi \cdot \vec{\nabla}U)) ds = \int_{\partial D} \left(\Delta U \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Delta\Phi \frac{\partial U}{\partial n} \right) dl.$$

Учитывая, что

$$\Delta\Delta\Phi(M, P) = -\delta(M, P),$$

имеем:

$$\begin{aligned} U(M) &= \iint_D \Delta(\Delta U \cdot \Phi) - \Delta(\Delta\Phi \cdot U) ds_p - \iint_D \Delta\Delta U \cdot \Phi ds_p - 2 \int_{\partial D} \left(\Delta U \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Delta\Phi \frac{\partial U}{\partial n} \right) dl_p = \\ &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial(\Delta U)}{\partial n} \Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Delta U + \frac{\partial U}{\partial n} \Delta\Phi - \frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial n} U \right) dl_p - \iint_D \Delta\Delta U \cdot \Phi ds_p. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выберем вспомогательную область $D \supset S$ с кусочно - гладкой границей Γ и будем искать решение в виде суммы двух функций $U = W + V$. Здесь W - некоторая неизвестная функция, удовлетворяющая в области D уравнению $\Delta\Delta W = 0$, а V - решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta\Delta V &= -f, \quad M \in D, \\ \alpha \cdot \Delta V + \frac{\partial(\Delta V)}{\partial n} &= 0, \quad M \in \Gamma, \\ \beta \cdot V + \frac{\partial V}{\partial n} &= 0, \quad M \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где α и β - произвольные положительные числа, $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали.

Для функции V запишем формулу (2.1) и преобразуем ее с учетом граничных условий:

$$\begin{aligned} V(M) &= - \int_{\Gamma} \Delta V(P) \left(\frac{\partial\Phi(M, P)}{\partial n_p} + \alpha \cdot \Phi(M, P) \right) dl_p - \\ &- \int_{\Gamma} V(P) \left(\frac{\partial(\Delta_p \Phi(M, P))}{\partial n_p} + \beta \cdot \Delta_p \Phi(M, P) \right) dl_p + \iint_S \Phi(M, P) \cdot f(P) ds_p. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое представляет собой в точности решение задачи в неограниченной области, т.е. функцию U .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_\alpha(M, P) &= \frac{\partial\Phi(M, P)}{\partial n_p} + \alpha \cdot \Phi(M, P), \\ G_\beta(M, P) &= \frac{\partial(\Delta_p \Phi(M, P))}{\partial n_p} + \beta \cdot \Delta_p \Phi(M, P). \end{aligned}$$

Фундаментальное решение задачи $\Phi(M, P)$ известно, так что эти функции всегда можно вычислить с достаточной точностью.

Тогда

$$\begin{aligned} W(M) &= U(M) - V(M) = \\ &= \int_{\Gamma} V(P) \cdot G_{\beta}(M, P) ds_P + \int_{\Gamma} \Delta V(P) \cdot G_{\alpha}(M, P) ds_P = B(V|_{\Gamma}, \Delta V|_{\Gamma}, M). \end{aligned}$$

Значения этого интеграла можно вычислить непосредственно в каждой точке области D , а можно найти их, решив некоторую краевую задачу для функции W . Для этого необходимо поставить дополнительные граничные условия на ΔW .

Так как ΔV удовлетворяет в области D уравнению Пуассона

$$\Delta(\Delta V) = -f,$$

то для нее можно записать формулу Грина. При этом функцию Грина G следует выбирать так, чтобы для нее выполнялось условие

$$G \rightarrow \Delta\Phi \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

В данном случае

$$G(r_{MP}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}}.$$

Учитывая, что

$$\alpha \cdot \Delta V + \frac{\partial(\Delta V)}{\partial n} = 0,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \Delta V(M) &= - \int_{\Gamma} \Delta V(P) \left(\alpha \cdot G(M, P) + \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \right) dl_P + \\ &+ \int_S G(M, P) f(P) ds_P = -A(\Delta V|_{\Gamma}, M) + \Delta U(M). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta W(M) = \Delta U(M) - \Delta V(M) = A(\Delta V|_{\Gamma}, M).$$

Таким образом, для W возникает следующая задача:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta W &= 0, & M \in D', \\ \Delta W(M) &= A(\Delta V|_{\Gamma}, M), & M \in \Gamma', \\ W(M) &= B(V|_{\Gamma}, \Delta V|_{\Gamma}, M), & M \in \Gamma'. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для решения исходной задачи необходимо:

- 1) Найти решение вспомогательной задачи (2.2).

2) Вычислить значения интегралов $B(V|_{\Gamma}, \Delta V|_{\Gamma}, M)$ и $A(\Delta V|_{\Gamma}, M)$ на границе области D' .

3) Решить краевую задачу для функции W с построенными граничными условиями.

После этого остается вычислить решение:

$$U(M) = V(M) + W(M).$$

§ 3. Дискретизация задачи для уравнений вида $\Delta U - \mu \cdot U = -f$

Рассмотрим полярную систему координат с центром в некоторой точке. В этой системе уравнение (1.1) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} - \mu \cdot V(r, \varphi) = -f(r, \varphi) \quad \text{в } D,$$

$$\alpha V + \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

В качестве вспомогательной области выберем круг $D = [0; R] \times [0; 2\pi)$ и введем на нем равномерную сетку по r и φ :

$$\bar{\omega}_h = \{r_i = h_r/2 + h_r \cdot i, \quad i = 0..N_r, \quad r_{N_r} = R;$$

$$\varphi_j = h_\varphi j, \quad j = 0..N_\varphi, \quad \varphi_{N_\varphi} = 2\pi - h_\varphi\}.$$

Предполагается, что при измельчении сетки шаги по r и по φ имеют одинаковый порядок малости, т.е. $h_\varphi = h_r \cdot \text{const} = h \cdot \text{const}$.

Для построения разностной схемы проинтегрируем уравнение (1.1) по элементарной ячейке:

$$\int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - \mu \cdot V \cdot r \right) dr = \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} f \cdot r dr, \quad (r_i, \varphi_j) \in \omega_h.$$

Заменив первые производные центральными разностями, с точностью до слагаемых порядка $O(h_r^2 + h_\varphi^2)$ получим:

$$\left(\frac{r_{i+1/2}(v_{i+1,j} - v_{ij})}{h_r} - \frac{r_{i-1/2}(v_{ij} - v_{i-1,j})}{h_r} \right) h_\varphi + \frac{1}{r_i} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_\varphi} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_\varphi} \right) h_r - \mu \cdot v_{ij} r_i h_\varphi h_r = -f_{ij} \cdot r_i h_r h_\varphi.$$

Заметим, что при $i = 0$ выполнены равенства

$r_i = \frac{h_r}{2}$, $r_{i-1/2} = 0$, $r_{i+1/2} = h_r$ (см. рис. 2) и справедливо уравнение

$$(v_{1,j} - v_{0,j})h_\varphi + \frac{1}{r_0}v_{\varphi\varphi}^- h_\varphi h_r - \mu \cdot v_{0,j} r_0 h_r h_\varphi = -f_{0j} \cdot r_0 h_r h_\varphi.$$

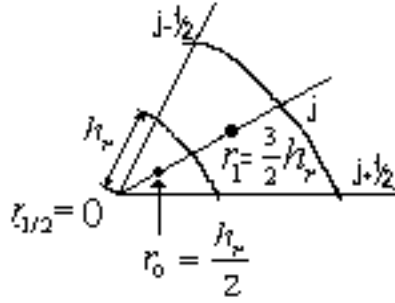


Рис. 2.

Для аппроксимации уравнения (1.1) в окрестности границы проинтегрируем его по ячейке от $r_{N-1/2}$ до r_N с учетом граничных условий:

$$\left((-\alpha v_{N,j}) r_N - \frac{(v_{N,j} - v_{N-1,j})}{h_r} r_{N-1/2} \right) h_\varphi + \frac{1}{r_N} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_\varphi} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_\varphi} \right) \frac{h_r}{2} - \mu v_{N,j} h_\varphi \frac{h_r}{2} = -f_{N,j} \cdot r_N h_\varphi \frac{h_r}{2}.$$

В итоге получим схему следующего вида:

$$v_{ij} = -f_{ij} \cdot r_i, \quad i = 0..N_r - 1, \quad j = 0..N_\varphi,$$

где

$$\hat{A}v_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{h_r}(v_{1,j} - v_{0,j}) + \frac{1}{r_0}v_{\varphi\varphi}^- - \mu \cdot v_{0,j} \cdot r_i, & i = 0, \quad j = 0..N_\varphi, \\ (r_{i-1/2}v_r)_r + \frac{1}{r_i}v_{\varphi\varphi}^- - \mu \cdot v_{ij} \cdot r_i, & i = 1..N_r - 1, \quad j = 0..N_\varphi, \\ -\frac{\alpha v_{N_r} r_{N_r}}{h_r} - \frac{1}{h_r}(v_{N_r,j} - v_{N_r-1,j}) + \frac{1}{r_{N_r}}v_{N_r,\varphi\varphi}^- - \mu \cdot v_{N_r,j} \cdot r_{N_r}, & i = 1..N_r, \quad j = 0..N_\varphi, \end{cases}$$

$$f_{ij} = f(r_i, \varphi_j)$$

Для компактности записи здесь и далее используются соотношения

$$v_{i,-1} = v_{i,N_\varphi}, \quad v_{i,N_\varphi+1} = v_{i,1},$$

учитывающие периодичность по φ .

Эти же уравнения можно записать в виде

$$\hat{A}'v_{ij} = -f_{ij}, \quad \hat{A}' = \Lambda_\alpha - \mu E,$$

где Λ_α - разностная аппроксимация оператора Лапласа с граничными условиями 3-го рода.

Погрешность аппроксимации этой схемы [4, 6] на четырехжды непрерывно дифференцируемых решениях равна $\psi_h = O(h_\varphi^2 + h_r^2)$.

Если $\mu \geq 0$ и $\alpha > 0$, то при любых значениях h_r и h_φ для схемы выполнен принцип максимума [6] и в соответствии с ним

$$\|\delta V\|_{C(D)} \leq C_1 \|\psi_h\|_{C(D)} + C_2 \|\delta f\|_{C(D)}.$$

где δV - ошибка численного решения, δf - ошибка задания правой части.

Считая, что функция f задана точно, имеем

$$\|\delta V\|_{C(D)} \leq C(h_r^2 + h_\varphi^2).$$

Если же $\mu < 0$, то знакоопределенность матрицы $\hat{A}' = \Lambda + |\mu| \cdot E$ имеет место при $|\mu| < \lambda_{\min}(\Lambda)$ и $|\mu| > \lambda_{\max}(\Lambda)$. В этом случае схема устойчива [6] и верна оценка

$$\|\delta V\|_{C(D)} \leq C(h_r^2 + h_\varphi^2).$$

Теперь обратимся к решению задачи (1.2). Введем область $D' = [0; R'] \times [0; 2\pi)$, $D' \subset S$. Если граница этой области Γ' не является линией сетки, сместим ее так, чтобы между Γ и Γ' укладывалось целое число шагов, т.е. $\Delta R = R - R' = k(h_r) \cdot h_r$, $k(h_r) \in \mathbb{Z}$ (рис. 3). Тогда на D' можно пользоваться сеткой ω_h .

При расчете граничных данных для задачи (1.2) необходимо вычислять интегралы вида

$$A(V|_{\Gamma}, M) = \int_{\Gamma} G_\alpha(M, P) V(P) dl_P, \quad M \in \Gamma'.$$

Для их вычисления можно использовать, например, квадратурную формулу трапеций:

$$A(V|_{\Gamma}, M_j) \approx A_j = \sum_{k=0}^{N_\varphi} \frac{1}{2} (G_\alpha(M_j, P_k) v_{N_r, k} + G_\alpha(M_j, P_{k+1}) v_{N_r, k+1}) R h_\varphi,$$

$$M_j = (R', \varphi_j), \quad P_k = (R, \varphi_k).$$

Функция $G_\alpha(r_{M_j P_k}) = G_\alpha(\sqrt{R^2 + (R')^2 - 2R'R \cos(\varphi_j - \varphi_k)})$ зависит только от разности $|\varphi_j - \varphi_k|$, поэтому ее значения достаточно вычислить в $N_\varphi/2$ точках.

Оценим погрешность квадратурной формулы, обозначив для краткости $\sigma(\varphi_j, \varphi) = G(M_j, P) \cdot V(P)$:

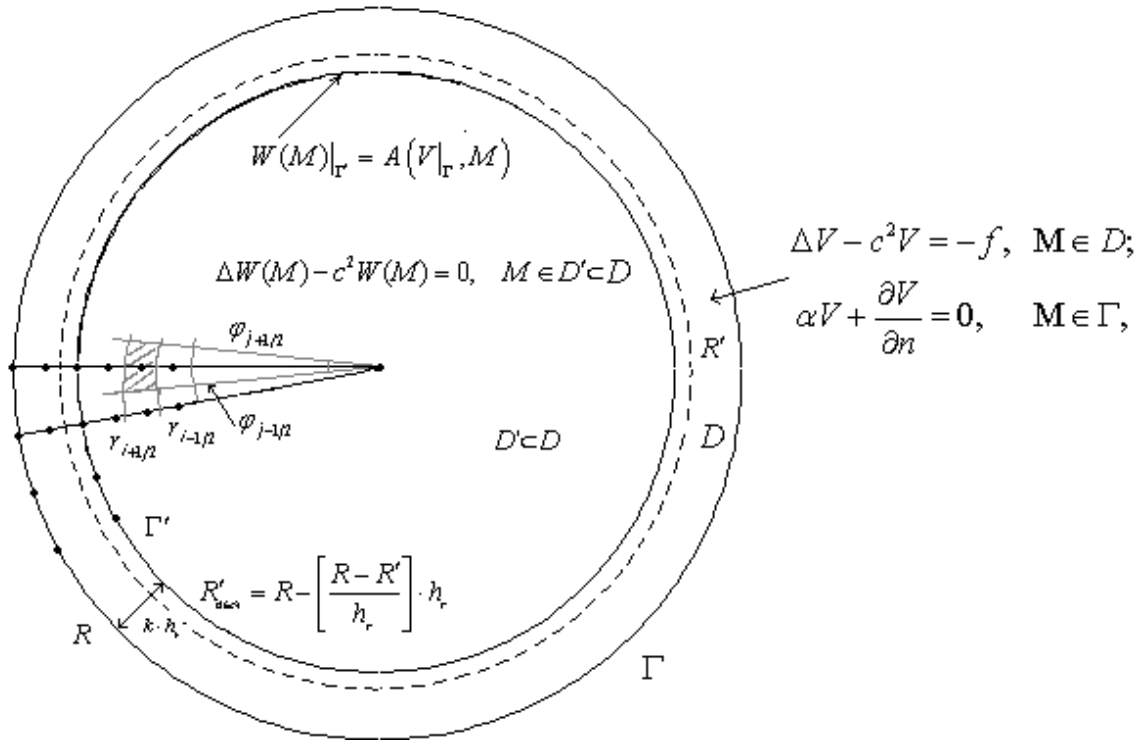


Рис. 3.

$$\begin{aligned} |\delta A_j| &= \left| \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi_j, \varphi) R d\varphi - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_\varphi} [(\sigma(\varphi_j, \varphi_k) + \delta\sigma(\varphi_j, \varphi_k)) + (\sigma(\varphi_j, \varphi_{k+1}) + \delta\sigma(\varphi_j, \varphi_{k+1}))] \cdot R \cdot h_\varphi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi_j, \varphi) R d\varphi - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_\varphi} [\sigma(\varphi_j, \varphi_k) + \sigma(\varphi_j, \varphi_{k+1})] \cdot R \cdot h_\varphi \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_\varphi} (G_\alpha(r_{M_j P_k}) \delta V_k + G_\alpha(r_{M_j P_{k+1}}) \delta V_{k+1}) \cdot h_\varphi \cdot R \right| \leq \left(\frac{h_\varphi^2}{12} \|(V G_\alpha)''_{\varphi\varphi}\|_{C(\Gamma)} + 2\pi \|\delta V\|_{C(\Gamma)} \cdot \|G_\alpha(r_{M_j P})\|_{C(\Gamma)} \right) R. \end{aligned}$$

Функция V является решением 3-й краевой задачи, поэтому V , V'_φ , $V''_{\varphi\varphi}$ ограничены на контуре Γ .

При $\Delta R \rightarrow 0$ функция $G_\alpha(M_j, P)$ неограниченно возрастает в точках $\varphi_j = \varphi_P$, но при любом фиксированном значении ΔR она ограничена и имеет ограниченные производные нужного порядка.

Кроме того,

$$\|\delta V\|_{C(\Gamma)} \leq \|\delta V\|_{C(D)} \leq C(h_r^2 + h_\varphi^2).$$

Поэтому верна оценка

$$\max_j |\delta A_j| \leq \frac{h_\varphi^2}{12} M_2 + C(h_\varphi^2 + h_r^2) = O(h_\varphi^2 + h_r^2).$$

Для решения задачи (1.2) будем использовать ту же схему, что и для задачи (1.1):

$$(\Lambda - kE)w = 0, \quad w_{N_r-1,j} = A_j, \quad A_j = A(V|_{\Gamma}, M_j) + \delta A_j,$$

где Λ - разностный оператор Лапласа с граничными условиями 1-го рода, аналогичный описанному в начале § 3.

Т.к. для схемы выполнен принцип максимума, то

$$\|\delta W\|_{C(D)} \leq C_1 \|\psi_h\|_{C(D)} + C_3 \max_j |\delta A_j|,$$

и решение может быть вычислено с точностью $O(h_r^2 + h_\varphi^2)$.

Для решения полученной системы разностных уравнений будем использовать метод сопряженных градиентов [4].

Оценим число арифметических действий, необходимых для реализации данного алгоритма в двумерном случае. Как уже указывалось во Введении, для решения задачи методом сопряженных градиентов необходимо $O(N^3)$ операций. На вычисление граничных данных по интегральным формулам затрачивается $O(N^2)$ действий. В целом же для реализации алгоритма необходимо выполнить $O(N^3)$ арифметических действий, как и на решение задачи в ограниченной области. Отметим, что сам расчет граничных данных в описываемом алгоритме требует меньшего числа действий, чем расчет граничных данных по интегральному представлению решения. Правда, это компенсируется необходимостью решать дополнительную задачу.

Описанный метод можно распространить и на пространственные (трехмерные) задачи. Для решения задачи в ограниченной области методом сопряженных градиентов необходимо $O(N^4)$ операций. При использовании описанного метода возникает необходимость вычисления двойных интегралов в точках некоторой поверхности, что требует того же количества действий. В результате чего итоговая оценка числа операций принимает вид $O(N^4)$.

§ 4. Дискретизация задачи для бигармонического уравнения

Рассмотрим задачу (2.2). Она эквивалентна (считаем решения достаточно гладкими) следующей системе

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{V} &= -f, \quad M \in D, \\ \alpha \cdot \tilde{V} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} &= 0, \quad M \in \Gamma. \\ \Delta V &= \tilde{V}, \quad M \in D, \\ \beta \cdot V + \frac{\partial V}{\partial n} &= 0, \quad M \in \Gamma.\end{aligned}$$

Преобразовав (2.3) аналогичным образом, имеем:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{W} &= 0, \quad M \in D', \\ \tilde{W}(M) &= A(\tilde{V}|_{\Gamma}, M), \quad M \in \Gamma'. \\ \Delta W(M) &= \tilde{W}, \quad M \in D', \\ W(M) &= B(V|_{\Gamma}, \tilde{V}|_{\Gamma}, M), \quad M \in \Gamma'.\end{aligned}$$

Для решения полученных краевых задач будем использовать разностную схему, описанную в предыдущем параграфе. При этом имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}\|\delta \tilde{V}\|_{C(D)} &\leq C \|\psi_h\|_{C(D)} = O(h_r^2 + h_\varphi^2), \\ \|\delta V\|_{C(D)} &\leq C_1 \|\psi_h\|_{C(D)} + C_2 \|\delta \tilde{V}\|_{C(D)} = O(h_r^2 + h_\varphi^2),\end{aligned}$$

где $\delta \tilde{V}$, δV - ошибки численного решения.

Величины $B(V|_{\Gamma}, \Delta V|_{\Gamma}, M)$ и $A(\Delta V|_{\Gamma}, M)$ представляют собой суммы однотипных интегралов вида $\int_{\Gamma} Y(P) \cdot \tilde{G}(M, P) ds_P$, где функция $Y(P)$ - решение некоторой 3-й краевой задачи, а $\tilde{G}(M, P)$ - линейная комбинация функций $\Phi(M, P)$, $\frac{\partial \Phi(M, P)}{\partial n_p}$, $G(M, P)$ и $\frac{\partial (G(M, P))}{\partial n_p}$.

Вычисление таких интегралов описано в § 3.

Для нахождения функций W и \tilde{W} можно использовать уже известную схему.

Для нее выполнен принцип максимума, поэтому имеют место оценки

$$\begin{aligned}\|\delta \tilde{W}\|_{C(D)} &\leq C \|\psi_h\|_{C(D)} + C_3 \max_j |\delta A_j| = O(h_r^2 + h_\varphi^2), \\ \|\delta W\|_{C(D)} &\leq C_1 \|\psi_h\|_{C(D)} + C_2 \|\delta \tilde{W}\|_{C(D)} + C_4 \max_j |\delta B_j| = O(h_r^2 + h_\varphi^2).\end{aligned}$$

Таким образом, решения $U = V + W$ и $\Delta U = \Delta V + \Delta W$ будут вычислены с точностью $O(h_r^2 + h_\varphi^2)$. Оценка числа операций остается такой же, как и в предыдущем случае.

§ 5. Результаты тестовых расчетов

Описанный выше алгоритм реализован в виде программы на языке C++. Для тестирования программы и проверки работоспособности метода была решена серия задач, имеющих простое аналитическое решение.

При вычислениях в качестве вспомогательных областей D и D' использовались круги радиусов R и R' соответственно. Возникающие в задаче разностные уравнения для V и W решались методом сопряженных градиентов [4]. Во всех случаях использовался следующий критерий прекращения итераций:

$$\|Au - f\|_{L_2} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

Значения специальных функций в нужных точках вычислялись стандартными средствами пакета Matlab 7.0 [7]. Затем эти значения записывались в файл и считывались программой.

Результаты численного решения тестовых задач приведены в виде таблиц.

Во всех таблицах далее использованы следующие обозначения:

(N_r, N_φ) - число точек сетки по r и φ ,

h_r, h_φ - значения соответствующих шагов,

$R'_{\text{выч}} = R - \left[\frac{R - R'}{h_r} \right] \cdot h_r$ - значение радиуса, использованное при вычислениях

(см. рис. 3),

$K_{L_2}(u) = \|U - u_h\|_{L_2} / \|U\|_{L_2}$, $K_C(u) = \|U - u_h\|_C / \|U\|_C$ - отношения норм погрешности и точного решения,

U - точное решение, u_h - приближенное решение,

$\| \cdot \|_C, \| \cdot \|_{L_2}$ - разностные аналоги соответствующих норм функций,

α - коэффициент в граничных условиях 3-го рода для вспомогательной задачи.

Тестовая задача 1 :

$$\Delta U(r, \varphi) = f(r, \varphi),$$

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r}{R_0}\right)^m \cdot \cos \varphi, & r \leq R_0, \\ 0, & r > R_0. \end{cases}$$

Точное решение имеет вид:

$$U(r, \varphi) = \begin{cases} \left(\sum_{k=2}^{m+2} y_k r^k + C_1 r \right) \cdot \cos \varphi, & r \leq R_0 \\ C_2 \frac{\cos \varphi}{r}, & r > R_0 \end{cases}, \quad y_k = \frac{(-1)^k C_m^{k-2}}{R_0^{k-2} (k^2 - 1)},$$

где

$$C_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{m+2} (k+1) y_k R_0^{k-1}, \quad C_2 = \sum_{k=2}^{m+2} y_k R_0^{k+1} + C_1 R_0.$$

Таблица 1. Результаты решения задачи 1 при

$$m=1, \quad R_0=0.85, \quad R=1, \quad R'=0.9, \quad \alpha=10$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U - u_h\ _C$	$\ U - u_h\ _{L_2}$
(10,50)	0.105263	0.125664	0.894737	0.00864689	0.0080306
(20,100)	0.051282	0.062832	0.897436	0.0013749	0.00109687
(50,250)	0.020202	0.025133	0.89899	0.00032447	0.00030831
(100,500)	0.010050	0.012566	0.899497	6.08897e-005	4.25809e-005

Из этой таблицы видно, что погрешность действительно убывает пропорционально h^2 как в равномерной, так и в интегральной нормах.

Также представляет интерес поведение погрешности при уменьшении размеров вспомогательной области. Из построения метода следует, что его погрешность не должна сильно зависеть от размеров области.

В таблицах 2 - 4 приведены результаты расчетов при различном выборе вспомогательных областей.

Таблица 2. Результаты решения задачи 1 при

$$m=1, R_0=0.25, R=1, R'=0.9, \alpha=10.$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,50)	0.105263	0.125664	0.894737	0.147042	0.212887
(20,100)	0.051282	0.062832	0.897436	0.0206864	0.0183026
(50,250)	0.020202	0.025133	0.89899	0.00227075	0.00229832
(100,500)	0.010050	0.012566	0.899497	0.000788506	0.000658062

Таблица 3. Результаты решения задачи 1 при

$$m=1, R_0=0.25, R=0.5, R'=0.4, \alpha=10.$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,100)	0.0526316	0.062832	0.394737	0.0383266	0.0383266
(25,250)	0.0204082	0.025133	0.397959	0.00272425	0.00165604
(50,500)	0.0101	0.012566	0.39899	0.000664831	0.000412263

Таблица 4. Результаты решения задачи 1 при

$$m=1, R_0=0.25, R=0.3, R'=0.27, \alpha=10.$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(17,250)	0.0181818	0.025133	0.263636	0.00223799	0.0017188
(34,500)	0.0089552	0.012566	0.273134	0.000655564	0.000615554

Сравнивая значения погрешностей при одинаковом числе точек сетки по φ (например, значения в 3-й строке таблицы 2 и 2-й строке таблицы 3), можно убедиться в том, что погрешность метода практически не зависит от размеров вспомогательной области.

При построении вспомогательной задачи для функции V имеется некоторая свобода в выборе коэффициента α в граничных условиях 3-го рода. Ясно, что решение не должно зависеть от этого параметра, однако его значение влияет на собственные числа матрицы A' вспомогательной задачи. При этом с увеличением α обусловленность матрицы улучшается.

Это должно приводить к уменьшению числа итераций, необходимых для решения задачи методом сопряженных градиентов. Соответствующие результаты приведены в таблице 5: M_1 и M_2 - количество итераций, затраченных на нахождение функций V и W (соответственно) методом сопряженных градиентов.

Таблица 5. Результаты решения задачи 1 при $R = 1$, $R' = 0.9$, $R_0 = 0.85$, $m = 1$ и различных α , $(N_r, N_\varphi) = (50, 250)$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

α	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$	M_1	M_2
0.01	0.000326599	0.00031488	5994	263
0.1	0.000327565	0.000315732	5839	263
1	0.000324052	0.000308127	4275	0*
10	0.00032524	0.000307632	2056	261
100	0.000322977	0.000305613	2371	292
1000	0.000323876	0.000307187	705	289
10^4	0.000326066	0.000309486	690	319

* при $\alpha = 1$ решение 3-й краевой задачи для V совпадает с точным решением исходной задачи в неограниченной области

Из таблицы видно, что M_1 действительно убывает с увеличением α . В данной задаче за счет выбора α необходимое число итераций удалось снизить почти на порядок.

Для сравнения построенных граничных условий с локальными условиями (0.3), описанными во введении, вида

$$U - G|_R \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_R \right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

была проведена серия расчетов при $R = 1$ и различном числе точек сетки.

В этом случае $G(R) = \frac{1}{2\pi} \ln(1) = 0$, так что имеют место условия 1-го рода

$$U|_R = 0.$$

На приведенных ниже графиках показана зависимость относительной погрешности от числа точек при использовании граничных условий 3-го рода (пунктирная линия) и при расчете по построенному алгоритму (сплошная линия). Последняя соответствует данным таблицы 4.

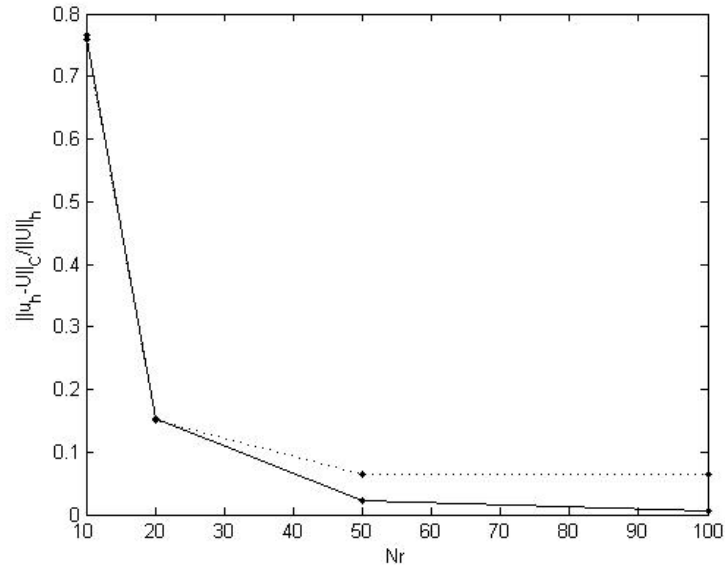


Рис. 4. Зависимость относительной погрешности от числа точек (в равномерной норме $\| \cdot \|_C$).

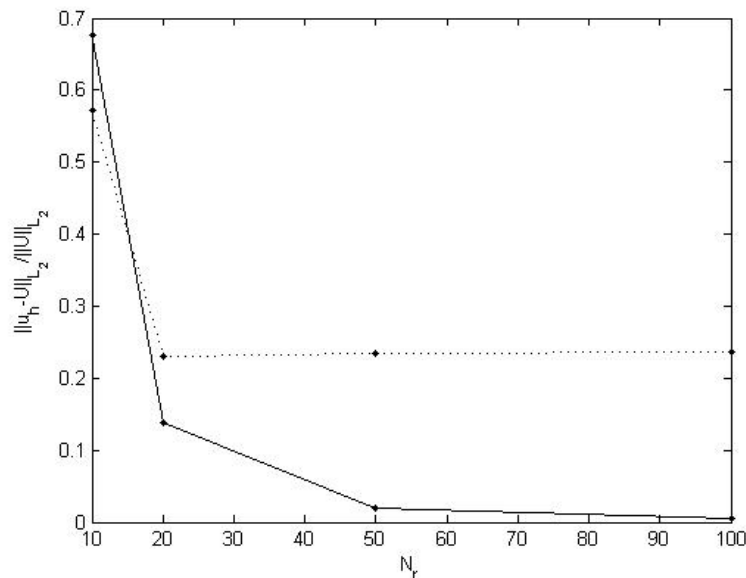


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности от числа точек (в интегральной норме $\| \cdot \|_{L_2}$).

Видно, что решение задачи с граничными условиями первого рода содержит систематическую ошибку, которая не уменьшается с ростом числа точек.

Тестовая задача 2:

$$\Delta U - k^2 U = f(r, \varphi),$$

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} (R_0^2 - r^2)r \cdot \cos \varphi, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Точное решение:

$$U(r) = \begin{cases} \left(\frac{r^3}{k^2} + \frac{(8 - k^2 R_0^2)}{k^4} \right) \cdot \cos \varphi + C_1 I_1(kr) \cdot \cos \varphi, & r \leq R_0, \\ C_2 \cdot K_2(kr) \cdot \cos \varphi, & r > R_0. \end{cases}$$

где

$$C_1 = k \cdot R_0 \left(\frac{R_0^3}{k^2} + \frac{(8 - k^2 R_0^2) R_0}{k^4} \right) \frac{\partial K_1}{\partial z} \Big|_{z=kR_0} - R_0 \left(\frac{3R_0^2}{k^2} + \frac{8 - k^2 R_0^2}{k^4} \right) K_1(kR_0),$$

$$C_2 = \left(\frac{R_0^3}{k^2} + \frac{(8 - k^2 R_0^2) R_0}{k^4} \right) \frac{1}{K_1(kR_0)} + C_1 \frac{I_1(kR_0)}{K_1(kR_0)}.$$

Результаты решения этой задачи при $k=1$ и различном числе точек сетки приведены в таблице 6.

Таблица 6. Результаты решения задачи 2 при

$$k=1, R=1, R'=0.9, R_0=0.85 \alpha=100$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,50)	0.105263	0.125664	0.894737	0.0143531	0.0136375
(20,100)	0.051282	0.062832	0.897436	0.00315890	0.00197086
(50,250)	0.020202	0.025133	0.89899	0.000533993	0.000509884
(100,500)	0.010050	0.012566	0.899497	0.000120951	7.00274e-005

Из этой таблицы видно, что погрешность решения убывает с квадратичной скоростью как в интегральной, так и в равномерной норме.

В таблицах 7 - 9 приведены результаты расчетов при различном выборе вспомогательных областей.

Таблица 7. Результаты решения задачи 2 при

$$k = 1, R = 1, R' = 0.9, R_0 = 0.25, \alpha = 100$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,50)	0.105263	0.125664	0.894737	0.154048	0.169800
(20,100)	0.051282	0.062832	0.897436	0.0363932	0.0366361
(50,250)	0.020202	0.025133	0.89899	0.00461905	0.00442613
(100,500)	0.010050	0.012566	0.899497	0.00136373	0.001336582

Таблица 8. Результаты решения задачи 2 при

$$k = 1, R = 0.5, R' = 0.4, R_0 = 0.25, \alpha = 100$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,100)	0.0526316	0.062832	0.394737	0.0256204	0.0211052
(25,250)	0.0204082	0.025133	0.397959	0.00321061	0.0020671
(50,500)	0.0101	0.012566	0.39899	0.00084187	0.000606913

Таблица 9. Результаты решения задачи 2 при

$$R = 0.3, R' = 0.27, R_0 = 0.25, \alpha = 100$$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(17,250)	0.0181818	0.025133	0.263636	0.00294396	0.00244587
(34,500)	0.0089552	0.012566	0.273134	0.000860839	0.000758193

Из этих таблиц видно, что при сгущении сетки погрешность убывает пропорционально h^2 и практически не зависит от размеров вспомогательной области.

В следующих двух таблицах (табл. 10 и 11) приведены результаты решения этой же задачи со значениями коэффициента k , отличными от единицы. Из них видно, что и при таких значениях коэффициента метод имеет квадратичный порядок точности.

Таблица 10. Результаты решения задачи 2при $R=1$, $R'=0.9$, $\alpha=100$, $k^2=0.1$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,50)	0.105263	0.125664	0.894737	0.0144415	0.0136045
(20,100)	0.051282	0.062832	0.897436	0.00332	0.00213348
(50,250)	0.020202	0.025133	0.89899	0.00054033	0.000510689
(100,500)	0.010050	0.012566	0.899497	0.000127227	7.69336e-005

Таблица 11. Результаты решения задачи 2при $R=1$, $R'=0.9$, $\alpha=100$, $k^2=10$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,50)	0.105263	0.125664	0.894737	0.0127693	0.0125663
(20,100)	0.051282	0.062832	0.897436	0.00349497	0.00211311
(50,250)	0.020202	0.025133	0.89899	0.000469108	0.000458505
(100,500)	0.010050	0.012566	0.899497	0.000133479	7.3982e-005

Тестовая задача 3:

$$\Delta U + k^2 U = f(r, \varphi),$$

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} (R_0^2 - r^2)r \cdot \cos \varphi, & r \leq R_0, \\ 0, & r > R_0. \end{cases}$$

Точное решение:

$$U(r) = \begin{cases} \left(-\frac{r^3}{k^2} + \frac{(8+k^2R_0^2)}{k^4} \right) \cdot \cos \varphi + C_1 J_1(kr) \cdot \cos \varphi, & r \leq R_0, \\ C_2 \cdot Y_1(kr) \cdot \cos \varphi, & r > R_0. \end{cases}$$

где

$$C_1 = \frac{\pi R_0}{2} \left(-\frac{3R_0^2}{k^2} + \frac{8+k^2R_0^2}{k^4} \right) Y_1(kR_0) - \frac{\pi k R_0}{2} \left(-\frac{R_0^3}{k^2} + \frac{(8+k^2R_0^2)R_0}{k^4} \right) \frac{\partial Y_1}{\partial z} \Big|_{z=kR_0},$$

$$C_2 = \left(-\frac{R_0^3}{k^2} + \frac{(8+k^2R_0^2)R_0}{k^4} \right) \frac{1}{Y_1(kR_0)} + C_1 \frac{J_1(kR_0)}{Y_1(kR_0)}.$$

Результаты решения этой задачи приведены в таблице 12.

Таблица 12. Результаты решения задачи 5при $R=1$, $R'=0.9$, $\alpha=100$, $k^2=1$

(N_r, N_φ)	h_r	h_φ	$R'_{\text{выч}}$	$\ U_h - u\ _C / \ U_h\ _C$	$\ U_h - u\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$
(10,50)	0.105263	0.125664	0.894737	0.0142418	0.0133602
(20,100)	0.051282	0.062832	0.897436	0.00326799	0.00217309
(50,250)	0.020202	0.025133	0.89899	0.000536064	0.000504426
(100,500)	0.010050	0.012566	0.899497	0.000127264	8.07959e-005

При данном значении коэффициента k решение вспомогательных задач существует и единственно, так что проблем с применением описанного метода не возникло. Результаты расчетов (табл. 12) показали, что в этом случае метод работает и его погрешность убывает пропорционально h^2 .

Тестовая задача 4:

$$\Delta \Delta U = -f,$$

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r}{R_0}\right) \cdot \cos \varphi, & r \leq R_0, \\ 0, & r > R_0. \end{cases}$$

Точное решение:

$$U(r, \varphi) = \begin{cases} -\frac{r^3 R}{32} + \frac{r^4}{45} - \frac{r^5}{192R} + C_1 r, & r \leq R_0, \\ -\frac{R^3 r}{48} (\ln r + 1/2) + C_2 / r, & r > R_0. \end{cases}$$

где

$$C_1 = \frac{R_0^3}{48} \left(\frac{1}{12} + \ln \frac{1}{R_0} \right),$$

$$C_2 = R_0^5 \left(-\frac{1}{32} + \frac{1}{45} - \frac{1}{192} + \frac{1}{96} \right) + \frac{R_0^5}{48} \ln R_0 + C_1 R_0^2.$$

Результаты решения этой задачи приведены в таблице 13.

Таблица 13. Результаты решения задачи 4 при $R=1$, $R'=0.9$, $\alpha=100$, $\beta=100$

(N_r, N_φ)	$\ u - U_h\ _C / \ U_h\ _C$	$\ u - U_h\ _{L_2} / \ U_h\ _{L_2}$	$\ \tilde{u}_h - \Delta U\ _C / \ \Delta U\ _C$	$\ \tilde{u}_h - \Delta U\ _{L_2} / \ \Delta U\ _{L_2}$
(10,50)	0.00764829	0.00692964	0.0574866	0.0505767
(20,100)	0.00150599	0.00104931	0.0102951	0.00707112
(50,250)	0.000284844	0.00026261	0.00211738	0.00190325
(100,500)	5.81778e-005	3.909e-005	0.000400304	0.000265356

Из этой таблицы видно, что погрешность как самой функции, так и ее лапласиана убывает со сгущением сетки пропорционально h^2 .

Заключение

В работе построен метод решения линейных эллиптических уравнений, заданных в неограниченной области. Метод применен для решения уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (уравнений Лапласа, Гельмгольца, уравнения с поглощением) и бигармонического уравнения. Получены оценки погрешности, показывающие, что метод имеет второй порядок точности. Эти оценки подтверждаются результатами проведенных тестовых расчетов.

Количество операций, необходимое для реализации метода, оценивается величиной $O(N^3)$ в двумерном случае, а в трехмерном - $O(N^4)$ действий. Это по порядку величины не превышает количества операций, затрачиваемого на решение краевой задачи в ограниченной области.

К недостаткам метода можно отнести тот факт, что для его реализации необходимо знать явный вид функции G - фундаментального решения. Это ограничивает применимость метода в случае уравнений с переменными коэффициентами.

Литература

1. S.V. Tsynkov. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Math. – 1998. – V. 27. – P. 465 - 532.

2. В.С. Рябенский. Метод разностных потенциалов и его приложения. М., Физматлит. 2002. 496 с.
3. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. - М.: Наука. Физматлит. 1972. 736 с.
4. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. -М.: Наука. 1978. 592 с.
5. В.П. Ильин. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М., Наука, Физматлит. 1995. 288 с.
6. А.А. Самарский. Теория разностных схем. - М.: Наука. Физматлит. 1989. 616 с.
7. К. Чен, П. Джиблин, А. Ирвинг. MATLAB в математических исследованиях. М., Мир. 2001. 346 с.