

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина Институт прикладной математики  
им. М. В. Келдыша

М. П. Галанин, Е. Б. Савенков, С. А. Токарева

**Применение разрывного метода Галеркина для численного решения  
квазилинейного уравнения переноса**

Москва - 2005

## Аннотация

Работа посвящена тестированию разрывного метода Галеркина для численного решения квазилинейного уравнения переноса, а также его сравнению с другими известными схемами. Сравнение проводилось между различными вариантами разрывного метода Галеркина, а также со схемами, рассмотренными в [2]. Приведенная информация об ошибках численного решения позволяет сравнить качество различных схем. Сравнительный анализ ошибок численного решения показал, что рассмотренный метод дает более высокую точность в широком диапазоне изменения чисел Куранта, а также меньшее “размазывание” разрывов решений.

**M. P. Galanin, E. B. Savenkov, S. A. Tokareva**

### **Application of the discontinuous Galerkin method for numerical solution of the quasi - linear advection equation**

#### **Abstract**

The paper is dedicated to the testing of discontinuous Galerkin method for numerical solution of quasi - linear advection equation, as well as its comparison with other well - known schemes. The comparison was carried out between different variants of the discontinuous Galerkin method and schemes considered in [2]. The presented information about the errors of numerical solutions allows to compare the quality of the schemes. Analysis of the errors has shown that the studied method gives higher accuracy in the broad range of Courant numbers, as well as smaller "spreading" of shock solutions.

## Содержание

|                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение .....                                                                             | 3  |
| § 1. Постановка задачи .....                                                               | 3  |
| § 2. Разрывный метод Галеркина<br>(RKDG – Runge-Kutta discontinuous Galerkin method) ..... | 6  |
| § 3. Организация вычислительного эксперимента .....                                        | 11 |
| § 4. Результаты численного исследования .....                                              | 12 |
| § 5. Сравнение схем .....                                                                  | 27 |
| Заключение .....                                                                           | 34 |
| Литература .....                                                                           | 35 |

## Введение

В данной работе проведено тестирование разрывного метода Галеркина [1] для численного решения квазилинейного уравнения переноса, а также выполнен сравнительный анализ различных вариантов этого метода и методов, использованных в [2]. Целью данной работы является продолжение исследований, проведенных в [2, 3, 4, 5].

Решения получены для финитных начальных условий и различных чисел Куранта на пространственно-временном прямоугольнике достаточно больших размеров. Для определения ошибок численных решений использованы конечномерные аналоги норм пространств  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ . В работе представлены графики с точными и численными решениями для некоторых моментов времени, а также таблицы ошибок для конечного момента времени и для всего временного промежутка. Такой способ представления результатов позволяет качественно и количественно оценивать характеристики схем.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00461).

## § 1. Постановка задачи

Будем рассматривать задачу Коши для квазилинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, T] \quad (1.1)$$

с финитными начальными условиями  $u(x, 0) = u_0(x)$  вида:

$$1. \quad u_0(x) = \begin{cases} \frac{2(x-l_1)}{l_2-l_1}, & x \in [l_1, 0.5(l_1+l_2)), \\ \frac{2(l_2-x)}{l_2-l_1}, & x \in [0.5(l_1+l_2), l_2], \\ 0, & x \notin [l_1, l_2] \end{cases} \quad \text{“треугольник”,}$$

$$2. \ u_0(x) = \begin{cases} 1, x \in [l_1, l_2] \\ 0, x \notin [l_1, l_2] \end{cases} \quad \text{“прямоугольник”},$$

$$3. \ u_0(x) = \begin{cases} \frac{(x-l_1)}{l_2-l_1}, x \in [l_1, l_2] \\ 0, x \notin [l_1, l_2] \end{cases} \quad \text{“левый треугольник”},$$

$$4. \ u_0(x) = \begin{cases} \frac{(l_2-x)}{l_2-l_1}, x \in [l_1, l_2] \\ 0, x \notin [l_1, l_2] \end{cases} \quad \text{“правый треугольник”},$$

$$5. \ u_0(x) = \begin{cases} 0, x \in [-\infty, l_1] \\ 1, x \in [l_1, +\infty] \end{cases} \quad \text{“ступенька вверх”},$$

$$6. \ u_0(x) = \begin{cases} 1, x \in [-\infty, l_1] \\ 0, x \in [l_1, +\infty] \end{cases} \quad \text{“ступенька вниз”}.$$

Приведем точные решения задачи (1.1) для указанных выше начальных условий:

1. “треугольник”:

$$u(x, t) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{2(x-l_1)}{l_2-l_1+2t}, x \in [l_1, 0.5(l_2+l_1)+t], \\ &\frac{2(l_2-x)}{l_2-l_1-2t}, x \in [0.5(l_2+l_1)+t, l_2], \\ &0, x \notin [l_1, l_2], \end{aligned} \right\} & 0 < t \leq 0.5(l_2-l_1), \\ \left. \begin{aligned} &\frac{2(x-l_1)}{l_2-l_1+2t}, x \in [l_1, l_1+\sqrt{0.5(l_2-l_1)(l_2-l_1+2t)}], \\ &0, x \notin [l_1, l_1+\sqrt{0.5(l_2-l_1)(l_2-l_1+2t)}], \end{aligned} \right\} & t > 0.5(l_2-l_1); \end{cases}$$

2. “прямоугольник”:

$$u(x, t) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{x-l_1}{t}, x \in [l_1, l_1+t], \\ &1, x \in [l_1+t, l_2+0.5t], \\ &0, x \notin [l_1, l_2+0.5t], \end{aligned} \right\} & 0 < t \leq 2(l_2-l_1), \\ \left. \begin{aligned} &\frac{x-l_1}{t}, x \in [l_1, l_1+\sqrt{2(l_2-l_1)t}], \\ &0, x \notin [l_1, l_1+\sqrt{2(l_2-l_1)t}], \end{aligned} \right\} & t > 2(l_2-l_1); \end{cases}$$

3. “левый треугольник”:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{x-l_1}{t+(l_2-l_1)}, & x \in [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2-l_1)(t+(l_2-l_1))}], \\ 0, & x \notin [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2-l_1)(t+(l_2-l_1))}]; \end{cases}$$

4. “правый треугольник”:

$$u(x,t) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{x-l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1+t], \\ &\frac{l_2-x}{l_2-l_1-t}, & x \in [l_1+t, l_2], \\ &0, & x \notin [l_1, l_2], \end{aligned} \right\} & 0 < t \leq (l_2-l_1), \\ \left. \begin{aligned} &\frac{x-l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2-l_1)t}], \\ &0, & x \notin [l_1, l_1 + \sqrt{(l_2-l_1)t}], \end{aligned} \right\} & t > (l_2-l_1); \end{cases}$$

5. “ступенька вверх”:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, l_1), \\ \frac{x-l_1}{t}, & x \in [l_1, l_1+t], \\ 1, & x \in (l_1+t, +\infty); \end{cases}$$

6. “ступенька вниз”:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \in [l_1, l_1+0.5t], \\ 0, & x \notin [l_1, l_1+0.5t]. \end{cases}$$

Сравнение численного решения с точным будем проводить с использованием конечномерных аналогов норм в пространствах  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  на  $\Omega = (-\infty, +\infty) \times [0, T]$ :

$$\|u\|_C = \max_{\Omega} |u|, \quad \|u\|_{L_1} = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u| dx dt, \quad \|u\|_{L_2} = \left( \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

и на  $R = (-\infty, +\infty)$  при  $t = t_i$ :

$$\|u\|_C = \max_R |u|, \quad \|u\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| dx, \quad \|u\|_{L_2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## § 2. Разрывный метод Галеркина (RKDG – Runge-Kutta discontinuous Galerkin method)

Рассмотрим применение RKDG - метода на примере поставленной задачи (1.1), записав ее в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} u_t + f_x(u) &= 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in (0, L), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $f(u) = u^2/2$ .

На  $(0, L)$  введем равномерную сетку с узлами  $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^N$ , обозначим  $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ ,  $\Delta_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Умножим уравнения (2.1) на произвольную гладкую функцию  $v(x)$  и проинтегрируем это произведение по  $I_j$ . После интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \partial_t u(x, t) v(x) dx - \int_{I_j} f(u(x, t)) \partial_x v(x) dx + \\ + f(u(x_{j+1/2}, t)) v(x_{j+1/2}) - f(u(x_{j-1/2}, t)) v(x_{j-1/2}) &= 0, \\ \int_{I_j} u(x, 0) v(x) dx &= \int_{I_j} u_0(x) v(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для каждого момента времени  $t \in [0, T]$  будем искать приближенное решение  $u_h(t)$  как элемент конечномерного пространства

$$V_h = V_h^k \equiv \{v \in L^1(0, L) : v|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, \dots, N\},$$

где  $P^k(I_j)$  – пространство полиномов степени не выше  $k$  на  $I_j$ .

Заменим гладкую функцию  $v$  произвольной пробной функцией, принадлежащей пространству  $V_h$ , а точное решение  $u$  – приближенным решением  $u_h$ . Функция  $u_h$  разрывна в точках  $x_{j+1/2}$ , поэтому необходимо заменить поток  $f(u_h(x_{j+1/2}, t))$  численным потоком  $h$ , зависящим от предельных значений функции  $u_h$  слева и справа от точки  $x_{j+1/2}$ , т.е.

$$h(u_h(x_{j+1/2}, t)) = h(u_h(x_{j+1/2}^-, t), u_h(x_{j+1/2}^+, t)).$$

Тогда уравнения (2.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \forall j = 1, \dots, N, \quad \forall v_h \in P^k(I_j): \\
& \int_{I_j} \partial_t u_h(x, t) v_h(x) dx - \int_{I_j} f(u_h(x, t)) \partial_x v_h(x) dx + \\
& + h(u_h(x_{j+1/2}, t)) v_h(x_{j+1/2}^-) - h(u_h(x_{j-1/2}, t)) v_h(x_{j-1/2}^+) = 0, \\
& \int_{I_j} u_h(x, 0) v_h(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v_h(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Численный поток  $h$  должен быть монотонным и согласованным с физическим потоком  $f$ , т.е.:

1.  $h(a, a) = f(a)$ ,
2.  $h(a, b)$  – неубывающая функция по  $a$ ,
3.  $h(a, b)$  – невозрастающая функция по  $b$ .

Численные потоки могут быть выбраны различными способами, широко распространенными являются следующие [6]:

1. поток Годунова:

$$h^G(a, b) = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} f(u), & a \leq b, \\ \max_{a \geq u \geq b} f(u), & a > b; \end{cases}$$

2. поток Энгквиста-Ошера:

$$h^{EO}(a, b) = \int_0^b \min(f'(s), 0) ds + \int_0^a \max(f'(s), 0) ds + f(0);$$

3. поток Лакса-Фридрихса:

$$\begin{aligned}
h^{LF}(a, b) &= \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - C(b - a)], \\
C &= \max_{\inf u_0(x) \leq s \leq \sup u_0(x)} |f'(s)|;
\end{aligned}$$

4. «локальный» поток Лакса-Фридрихса:

$$\begin{aligned}
h^{LLF}(a, b) &= \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - C(b - a)], \\
C &= \max_{\min(a, b) \leq s \leq \max(a, b)} |f'(s)|;
\end{aligned}$$

5. поток Роу:

$$h^R(a, b) = \begin{cases} f(a), & f'(u) \geq 0, u \in [\min(a, b), \max(a, b)], \\ f(b), & f'(u) \leq 0, u \in [\min(a, b), \max(a, b)], \\ h^{LLF}(a, b), & \text{иначе.} \end{cases}$$

На следующем этапе необходимо выбрать на каждом интервале  $I_j$  систему базисных функций. Для этого удобно использовать

ортогональную систему функций, например, полиномы Лежандра. Использование ортогональных базисных функций позволяет получить диагональную матрицу масс и, следовательно, явную схему.

Пусть  $P_l$  - полином Лежандра степени  $l$ .

Для  $x \in I_j$  приближенное решение  $u_h$  будем искать в виде:

$$u_h(x, t) = \sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x),$$

где  $\varphi_l(x) = P_l(2(x - x_j)/\Delta_j)$ ,  $x_j = (x_{j+1/2} + x_{j-1/2})/2$ .

Учитывая равенства

$$\int_{-1}^1 P_m(s) P_n(s) ds = \left( \frac{2}{2n+1} \right) \delta_{mn}, \quad P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l,$$

получаем следующую форму уравнений (2.3):

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, N, \quad \forall l = 0, \dots, k \\ \left( \frac{1}{2l+1} \right) \partial_t u_j^l(t) - \frac{1}{\Delta_j} \int_{I_j} f(u_h(x, t)) \partial_x \varphi_l(x) dx + \\ + \frac{1}{\Delta_j} \{ h(u_h(x_{j+1/2}, t)) - (-1)^l h(u_h(x_{j-1/2}, t)) \} = 0, \\ u_j^l(0) = \frac{2l+1}{\Delta_j} \int_{I_j} u_0(x) \varphi_l(x) dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, задача нахождения приближенного решения  $u_h(x, t)$  сводится к задаче решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u_j^l(t)$ . Запишем систему (2.4) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_h = L_h(u_h), \quad t \in (0, T), \\ u_h|_{t=0} = u_{0h}. \end{aligned}$$

Пусть  $\{t^n\}_{n=0}^M$  - разбиение отрезка  $[0, T]$ ,  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Для решения системы дифференциальных уравнений используется явный метод Рунге-Кутты порядка  $(k+1)$ , который записывается следующим образом:

1.  $u_h^0 = u_{0h}$ ;
2.  $\forall n = 0, \dots, M-1$ ;
  - 1)  $u_h^{(0)} = u_h^n$ ;
  - 2)  $\forall i = 1, \dots, k+1 \quad u_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \{ \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)}) \}$ ;



$$3) u_h^{n+1} = u_h^{(k+1)}.$$

Коэффициенты  $\alpha_{il}$  должны выбираться таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\alpha_{il} \geq 0, \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, k+1.$$

Для обеспечения монотонности получаемой схемы необходимо на каждом промежуточном этапе метода Рунге-Кутты применять специальные монотонизаторы (лимитеры).

Обозначим через  $\bar{u}_h$  среднее значение приближенного решения на интервале  $I_j$ . «Идеальным» [1] является лимитер  $\Lambda\bar{\Pi}_h$ , удовлетворяющий следующим требованиям.

1. Лимитер не может изменять «массу», содержащуюся в каждом интервале, т.е. если  $u_h = \Lambda\bar{\Pi}_h(v_h)$ , то  $\bar{u}_j = \bar{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

2. Если  $u_h = \Lambda\bar{\Pi}_h(v_h)$ ,  $w_h = u_h + \delta L_h(u_h)$ , то для достаточно малого параметра  $\delta$  должно выполняться неравенство:  $|\bar{w}_h|_{TV(0,L)} \leq |\bar{u}_h|_{TV(0,L)}$ , где  $|\cdot|_{TV(0,L)}$  – полная вариация функции на интервале  $(0,L)$ .

3. Лимитер не должен снижать точность метода.

Однако невозможно построить такой «идеальный» лимитер, т.к. при попытке обеспечить свойство TVDM (total variation diminishing in the means) теряется точность в локальных экстремумах решения. Избежать этого можно с помощью TVBM (total variation bounded in the means) лимитеров. При этом условие TVBM является более слабым, чем TVDM.

TVDM свойство RKDG метода означает выполнение неравенства

$$|\bar{u}_h^n|_{TV(0,L)} \leq |\bar{u}_0|_{TV(0,L)}, \quad \forall n \geq 0,$$

а TVBM свойство – выполнение неравенства

$$|\bar{u}_h^n|_{TV(0,L)} \leq |\bar{u}_0|_{TV(0,L)} + CM, \quad \forall n \geq 0,$$

где  $C$  зависит только от  $k$ .

Приведем примеры TVDM лимитеров.

Определим функцию

$$m(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} s \min_{1 \leq m \leq n} |a_m|, & s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_n), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. MUSCL лимитер (monotonic upstream-centered scheme for conservation laws).

В случае кусочно-линейной аппроксимации решения, т.е.

$$v_h|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)v_{x,j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

имеем

$$u_h|_{I_j} = \bar{v}_j + (x - x_j)m(v_{x,j}, \frac{\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j}{\Delta_j}, \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}}{\Delta_j}).$$

2. «Менее строгий» лимитер  $\Lambda \Pi_h^1$ .

$$u_h|_{I_j} = \Lambda \Pi_h^1(v_h) = \bar{v}_j + (x - x_j)m(v_{x,j}, \frac{\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j}{\Delta_j/2}, \frac{\bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}}{\Delta_j/2}).$$

Отметим, что  $\|\bar{v}_h - \Lambda \Pi_h^1(v_h)\|_{L^1(0,L)} \leq \frac{\Delta x}{2} |\bar{v}_h|_{TV(0,L)}.$

3. Лимитер  $\Lambda \Pi_h^k$ .

В случае кусочно-полиномиальной аппроксимации решения, т.е.

$$v_h|_{I_j} = \sum_{l=0}^k v_j^l(t) \varphi_l(x),$$

лимитер вычисляется следующим образом.

Обозначим  $v_h^1(x, t) = \sum_{l=0}^1 v_j^l(t) \varphi_l(x).$

Для  $j = 1, \dots, N$

- Вычисляем

$$u_{j+1/2}^- = \bar{v}_j + m(v_{j+1/2}^- - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j),$$

$$u_{j-1/2}^+ = \bar{v}_j - m(\bar{v}_j - v_{j-1/2}^+, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j).$$

- Если  $u_{j+1/2}^- = v_{j+1/2}^-$  и  $u_{j-1/2}^+ = v_{j-1/2}^+$ , то полагаем  $u_h|_{I_j} = v_h|_{I_j}.$
- Если нет, то полагаем  $u_h|_{I_j} = \Lambda \Pi_h^1(v_h^1).$

4. Лимитер  $\Lambda \Pi_{h,\alpha}^k$ .

Модифицированный лимитер  $\Lambda \Pi_h^k$ , в котором

$$u_{j+1/2}^- = \bar{v}_j + m(v_{j+1/2}^- - \bar{v}_j, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j, C(\Delta x)^\alpha),$$

$$u_{j-1/2}^+ = \bar{v}_j - m(\bar{v}_j - v_{j-1/2}^+, \bar{v}_j - \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j, C(\Delta x)^\alpha),$$

где  $\Delta x = \max_j \Delta_j$ ,  $C \in (0, 1).$

Данный лимитер применяется только в теоретических исследованиях.

Если вместо функции  $m$  использовать функцию  $\tilde{m}$ :

$$\tilde{m}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1, & |a_1| \leq M(\Delta x)^2, \\ m(a_1, \dots, a_n), & |a_1| > M(\Delta x)^2, \end{cases}$$

где  $M$  – заданная константа, то получим TVBM лимитеры.

Справедлив следующий результат [1].

**Теорема.** Пусть в RKDG методе используется TVDM или TVBM лимитер. Пусть все коэффициенты  $\alpha_{il}$  неотрицательны и удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1, \quad i = 1, \dots, k+1.$$

Тогда существует подпоследовательность  $\{\bar{u}_{h'}\}_{h'>0}$  последовательности  $\{\bar{u}_h\}_{h>0}$ , порожденной RKDG методом, которая сходится в  $L^\infty(0, T; L^1(0, L))$  к обобщенному решению задачи (2.1).

Если к тому же используется TVBM лимитер  $\Lambda \Pi_{h,\alpha}^k$ , то обобщенное решение является энтропийным решением, и вся последовательность сходится.

Наконец, если используемый лимитер  $\Lambda \Pi_h$  удовлетворяет условию

$$\|\bar{v}_h - \Lambda \Pi_h(v_h)\|_{L^1(0,L)} \leq C\Delta x |\bar{v}_h|_{TV(0,L)},$$

то результаты справедливы не только для последовательности средних значений  $\{\bar{u}_h\}_{h>0}$ , но и для последовательности функций  $\{u_h\}_{h>0}$ .

### § 3. Организация вычислительного эксперимента

Аналогично работе [2] численное решение поставленной задачи (1.1) получено для всех указанных форм начальных профилей при следующих значениях параметров:  $L=520$ ,  $l_1=0$ ,  $l_2=20$ ,  $T=1000$ . Шаги по  $x$  и  $t$  выбирались постоянными:  $\forall j \Delta_j = \tilde{h} = 1$ ,  $\forall n \Delta t^n = \tau$ .

Число Куранта  $\gamma$  ( $\gamma = \max_{x,t} \frac{\tau}{h} |y(x,t)|$ ) ограничено сверху величиной  $\gamma_m$ , которая принимала значения: 0.1, 0.25, 0.5, 0.9. Таким образом, временной шаг  $\tau$  принимал те же значения, что и число Куранта. Для определения точности полученного при этом решения вычислялись относительные ошибки с использованием норм

$$\|u\|_C = \max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M} |u_i^j|, \|u\|_{L_1} = \tau \tilde{h} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M |u_i^j|, \|u\|_{L_2} = \left( \tau \tilde{h} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M (u_i^j)^2 \right)^{1/2}$$

интегрально по временному промежутку  $0 \leq t \leq T$ , а также

$$\|u\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |u_i^j|, \|u\|_{L_1} = \tilde{h} \sum_{i=0}^N |u_i^j|, \|u\|_{L_2} = \left( \tilde{h} \sum_{i=0}^N (u_i^j)^2 \right)^{1/2}$$

локально для момента времени  $t_j$ .

В данной работе тестировался RKDG метод для кусочно-линейной и кусочно-квадратичной аппроксимаций (т.е. для  $l=1, 2$ ).

Для проведения численного эксперимента создана программа для персонального компьютера, реализующая алгоритмы поиска решения по указанным разностным схемам. На экран монитора выводится графическое изображение точного и численного решений для каждого временного слоя, а также относительные ошибки вычислений для нескольких промежуточных и конечного моментов времени. Такое представление результатов позволяет визуально и численно оценить качество полученного решения и тем самым сравнить используемые схемы.

#### § 4. Результаты численного исследования

Полученные в численном эксперименте результаты представлены следующим образом. Для каждой схемы, используемой для получения численного решения, приведены таблицы интегральных и локальных по времени ошибок для различных чисел Куранта. В каждой таблице указаны относительные ошибки вычислений для всех начальных условий и используемых норм, соответствующее число Куранта приведено в левом верхнем углу таблицы.

С целью иллюстрации всех особенностей поведения решения для каждого из начальных профилей представлены графики решения для нескольких промежуточных моментов времени. При этом каждый рисунок содержит графики точного решения и численного решения для числа Куранта  $\gamma = 0.5$ .

## 1. Кусочно-линейная аппроксимация

а) с использованием TVDM лимитера  $\Lambda \Pi_h^1$ .

Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6310      | 0.4022             | 0.6216               | 0.6305                | 0.0003             | 0.2252            |
| $L_1$          | 0.0044      | 0.0043             | 0.0046               | 0.0075                | 0.0006             | 0.0005            |
| $L_2$          | 0.0423      | 0.0315             | 0.0487               | 0.0551                | 0.0005             | 0.0086            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.6311      | 0.4105             | 0.6214               | 0.6329                | 0.0004             | 0.2331            |
| $L_1$           | 0.0044      | 0.0044             | 0.0046               | 0.0075                | 0.0006             | 0.0005            |
| $L_2$           | 0.0423      | 0.0321             | 0.0487               | 0.0553                | 0.0005             | 0.0089            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6315      | 0.4351             | 0.6209               | 0.6438                | 0.0004             | 0.2657            |
| $L_1$          | 0.0044      | 0.0047             | 0.0047               | 0.0077                | 0.0007             | 0.0006            |
| $L_2$          | 0.0423      | 0.0338             | 0.0487               | 0.0563                | 0.0006             | 0.0099            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6326      | 0.5311             | 0.6191               | 0.6998                | 0.0013             | 0.4211            |
| $L_1$          | 0.0044      | 0.0058             | 0.0047               | 0.0090                | 0.0010             | 0.0009            |
| $L_2$          | 0.0424      | 0.0409             | 0.0487               | 0.0616                | 0.0009             | 0.0145            |

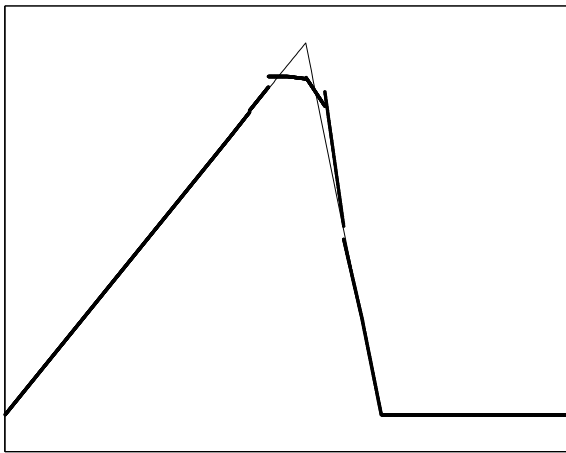
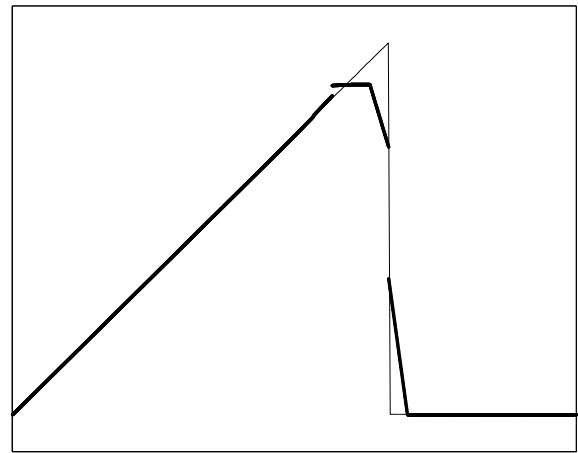
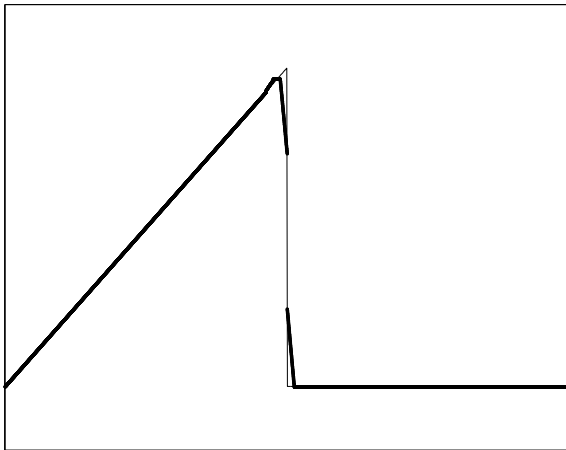
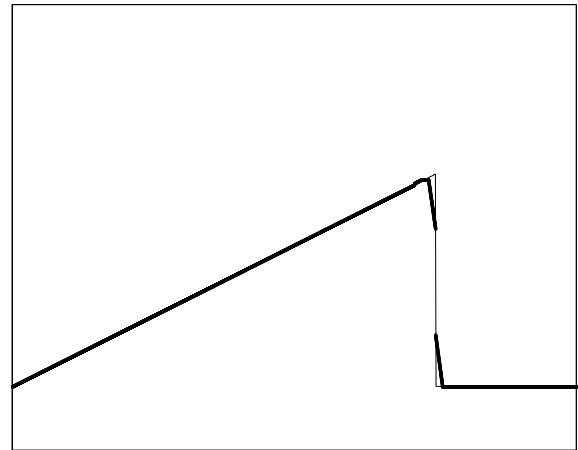
Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ )

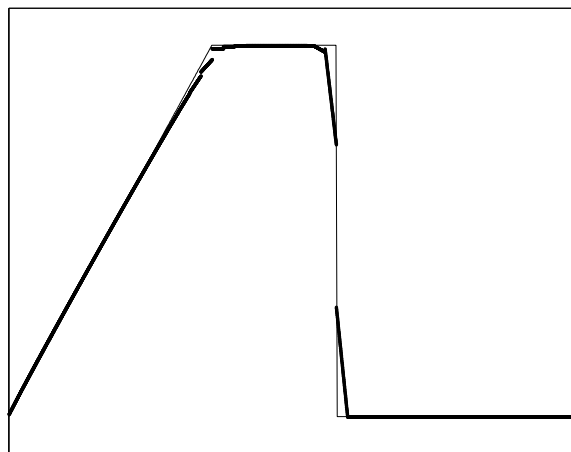
| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6257      | 0.8200             | 0.7412               | 0.7039                | 0.3967             | 0.8200            |
| $L_1$          | 0.0081      | 0.0086             | 0.0080               | 0.0129                | 0.0005             | 0.0012            |
| $L_2$          | 0.0668      | 0.0598             | 0.0674               | 0.0737                | 0.0012             | 0.0192            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.5998      | 0.7750             | 0.7816               | 0.6755                | 0.3750             | 0.7750            |
| $L_1$           | 0.0081      | 0.0088             | 0.0080               | 0.0130                | 0.0005             | 0.0012            |
| $L_2$           | 0.0669      | 0.0604             | 0.0675               | 0.0737                | 0.0012             | 0.0196            |

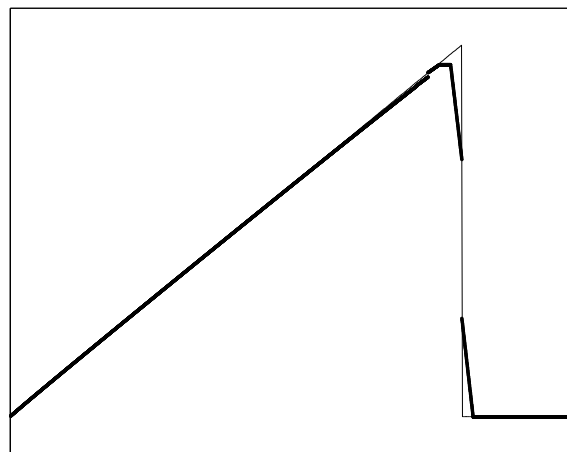
| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.5485      | 0.6116             | 0.6136               | 0.6221                | 0.4000             | 0.6000            |
| $L_1$          | 0.0082      | 0.0093             | 0.0080               | 0.0133                | 0.0006             | 0.0013            |
| $L_2$          | 0.0674      | 0.0616             | 0.0679               | 0.0742                | 0.0014             | 0.0197            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.5718      | 0.7301             | 0.5317               | 0.5809                | 0.4098             | 0.7417            |
| $L_1$          | 0.0087      | 0.0113             | 0.0083               | 0.0160                | 0.0009             | 0.0017            |
| $L_2$          | 0.0696      | 0.0683             | 0.0694               | 0.0824                | 0.0021             | 0.0228            |

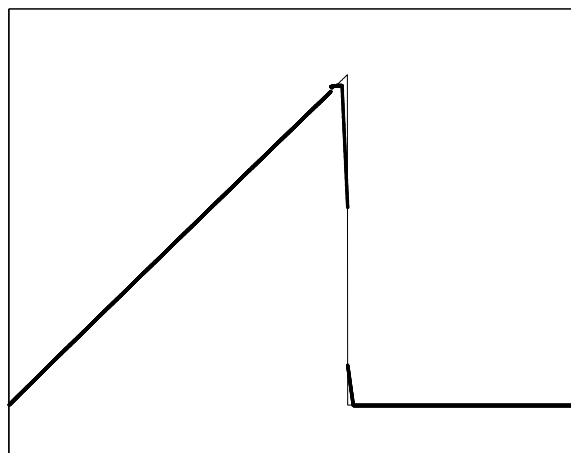
 $t=6$  $t=10$  $t=70$  $t=170$ Рис. 4.1.1 Численное решение для “треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )



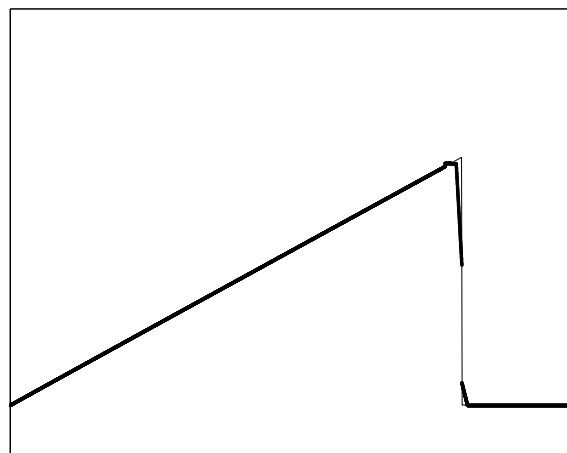
$t=18$



$t=40$

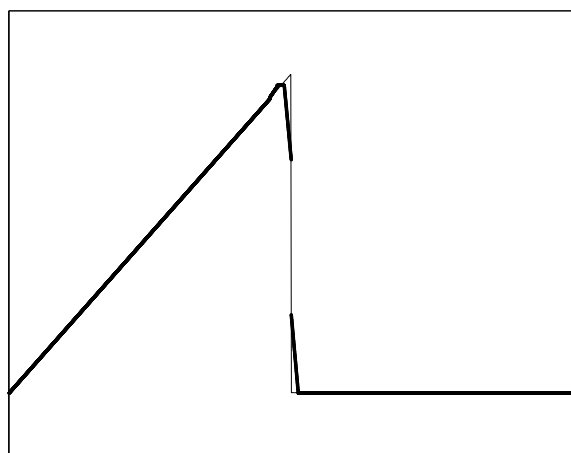


$t=90$

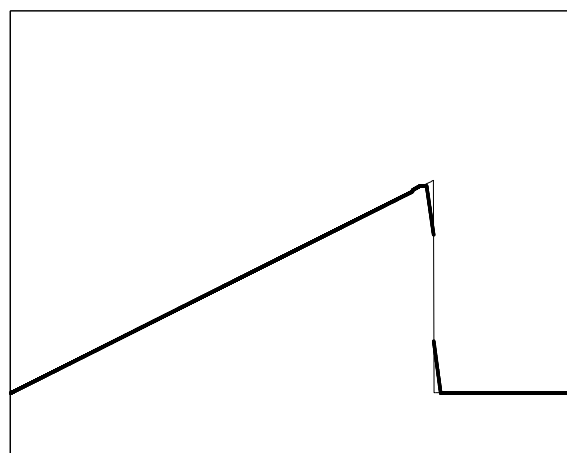


$t=160$

Рис. 4.1.2 Численное решение для “прямоугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

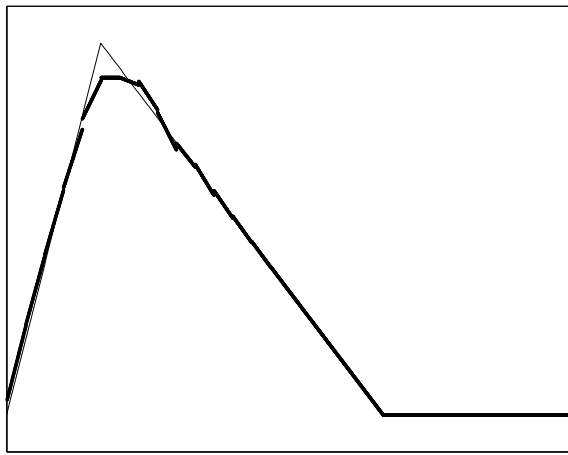


$t=60$

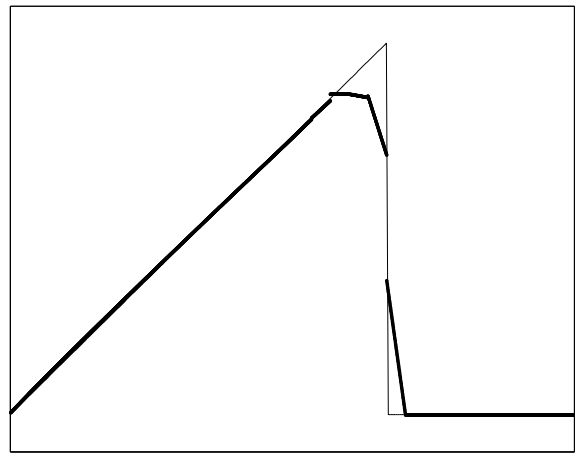


$t=160$

Рис. 4.1.3 Численное решение для “левого треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

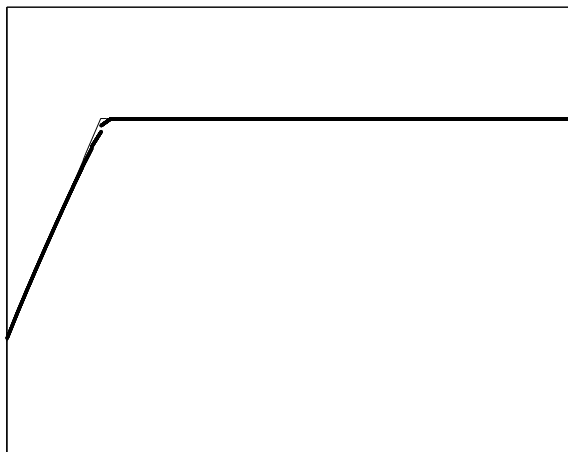


$t=5$

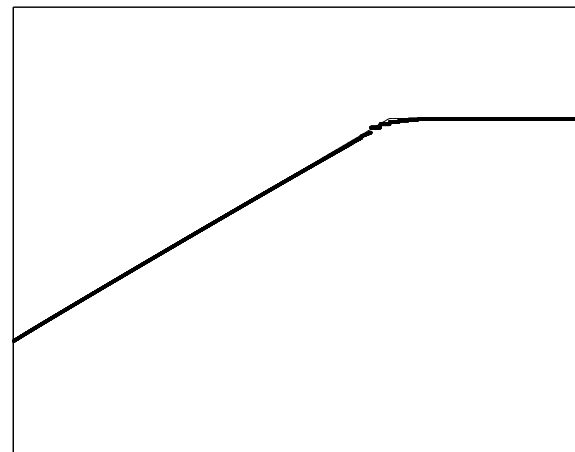


$t=20$

Рис. 4.1.4 Численное решение для “правого треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

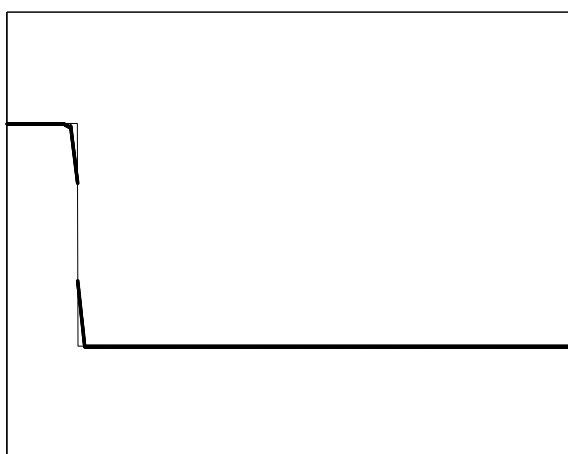


$t=10$

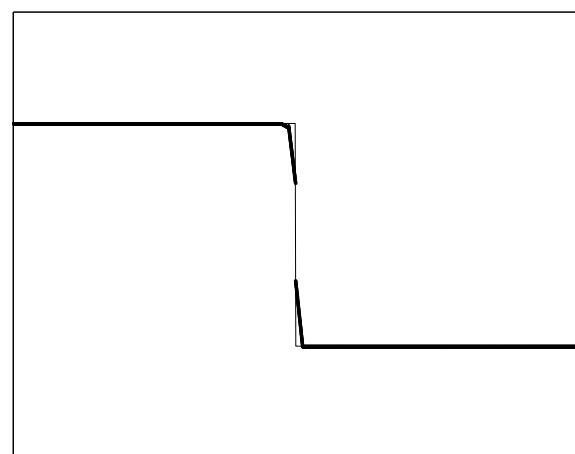


$t=40$

Рис. 4.1.5 Численное решение для “ступеньки вверх” ( $\gamma = 0.5$ )



$t=20$



$t=80$

Рис. 4.1.6 Численное решение для “ступеньки вниз” ( $\gamma = 0.5$ )



**б) с использованием MUSCL лимитера.**Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6819      | 0.5061             | 0.6496               | 0.7505                | 0.0008             | 0.2553            |
| $L_1$          | 0.0072      | 0.0077             | 0.0072               | 0.0125                | 0.0012             | 0.0007            |
| $L_2$          | 0.0487      | 0.0465             | 0.0547               | 0.0727                | 0.0011             | 0.0113            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.6813      | 0.5075             | 0.6496               | 0.7510                | 0.0008             | 0.2598            |
| $L_1$           | 0.0072      | 0.0077             | 0.0072               | 0.0125                | 0.0012             | 0.0007            |
| $L_2$           | 0.0487      | 0.0466             | 0.0547               | 0.0728                | 0.0011             | 0.0114            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6805      | 0.5123             | 0.6493               | 0.7531                | 0.0008             | 0.2769            |
| $L_1$          | 0.0072      | 0.0078             | 0.0072               | 0.0126                | 0.0013             | 0.0008            |
| $L_2$          | 0.0487      | 0.0471             | 0.0547               | 0.0730                | 0.0011             | 0.0120            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6796      | 0.5339             | 0.6485               | 0.7623                | 0.0008             | 0.3197            |
| $L_1$          | 0.0072      | 0.0081             | 0.0072               | 0.0129                | 0.0013             | 0.0009            |
| $L_2$          | 0.0487      | 0.0490             | 0.0547               | 0.0740                | 0.0011             | 0.0132            |

Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6389      | 0.8602             | 0.7992               | 0.7508                | 0.5042             | 0.8602            |
| $L_1$          | 0.0131      | 0.0145             | 0.0121               | 0.0216                | 0.0011             | 0.0017            |
| $L_2$          | 0.0803      | 0.0784             | 0.0805               | 0.0991                | 0.0027             | 0.0234            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.6244      | 0.8254             | 0.8306               | 0.7367                | 0.5028             | 0.8254            |
| $L_1$           | 0.0131      | 0.0145             | 0.0121               | 0.0216                | 0.0011             | 0.0018            |
| $L_2$           | 0.0803      | 0.0783             | 0.0806               | 0.0989                | 0.0027             | 0.0234            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6058      | 0.7321             | 0.6892               | 0.7062                | 0.5027             | 0.6781            |
| $L_1$          | 0.0131      | 0.0147             | 0.0121               | 0.0217                | 0.0011             | 0.0018            |
| $L_2$          | 0.0806      | 0.0786             | 0.0808               | 0.0987                | 0.0026             | 0.0235            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6088      | 0.7204             | 0.5852               | 0.6429                | 0.4208             | 0.7526            |
| $L_1$          | 0.0132      | 0.0153             | 0.0123               | 0.0223                | 0.0011             | 0.0021            |

|       |        |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $L_2$ | 0.0817 | 0.0801 | 0.0817 | 0.0994 | 0.0024 | 0.0250 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

## 2. Кусочно-квадратичная аппроксимация

а) с использованием TVDM - лимитера  $\Lambda \Pi_h^k$ .

Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.5651      | 0.3603             | 0.5633               | 0.7421                | 0.0006             | 0.2750            |
| $L_1$          | 0.0042      | 0.0038             | 0.0055               | 0.0071                | 0.0008             | 0.0004            |
| $L_2$          | 0.0380      | 0.0282             | 0.0510               | 0.0565                | 0.0007             | 0.0083            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.6027      | 0.3807             | 0.5659               | 0.7167                | 0.0004             | 0.2475            |
| $L_1$           | 0.0048      | 0.0042             | 0.0054               | 0.0071                | 0.0006             | 0.0005            |
| $L_2$           | 0.0439      | 0.0327             | 0.0509               | 0.0551                | 0.0005             | 0.0095            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.5144      | 0.3644             | 0.5736               | 0.5290                | 0.0022             | 0.2380            |
| $L_1$          | 0.0045      | 0.0040             | 0.0053               | 0.0057                | 0.0007             | 0.0005            |
| $L_2$          | 0.0392      | 0.0317             | 0.0503               | 0.0479                | 0.0007             | 0.0091            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6139      | 0.4062             | 0.5792               | 0.6974                | 0.0039             | 0.2943            |
| $L_1$          | 0.0047      | 0.0045             | 0.0052               | 0.0075                | 0.0021             | 0.0005            |
| $L_2$          | 0.0436      | 0.0336             | 0.0501               | 0.0549                | 0.0023             | 0.0095            |

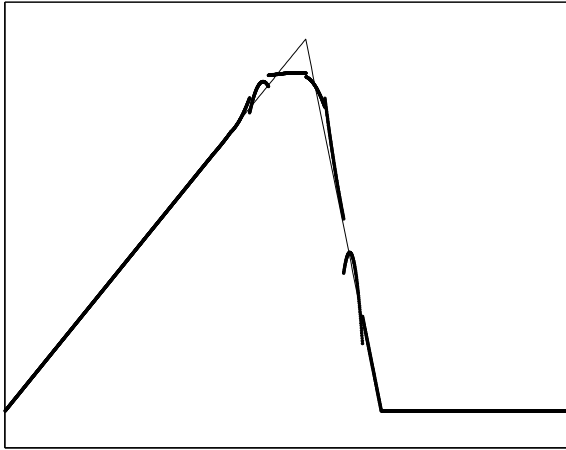
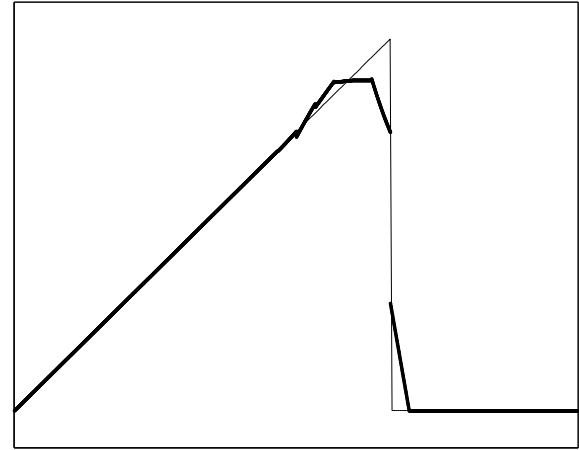
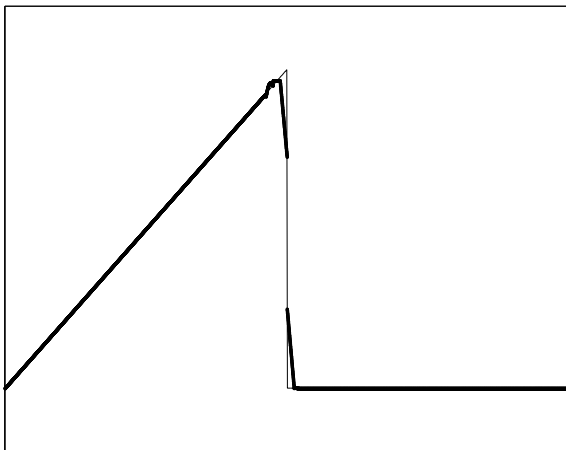
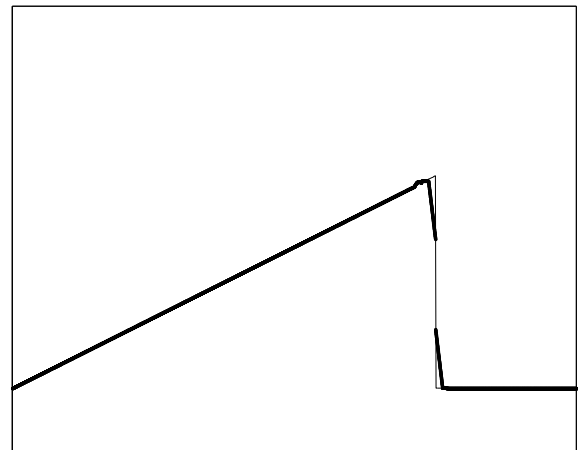
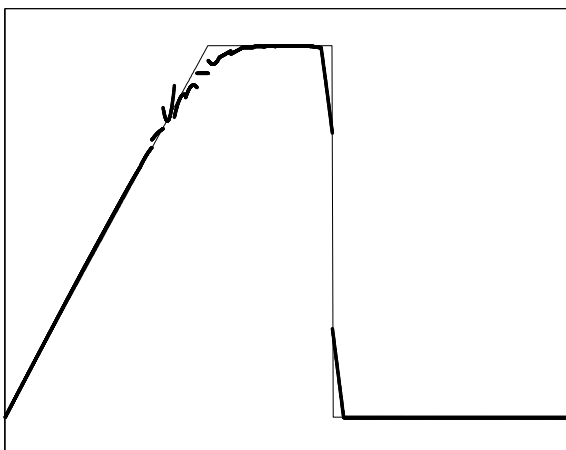
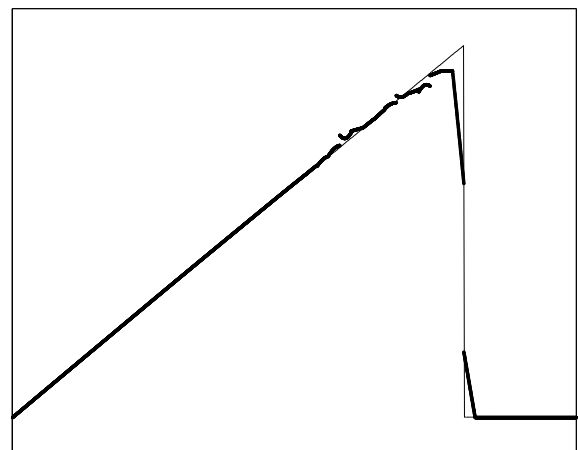
Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ )

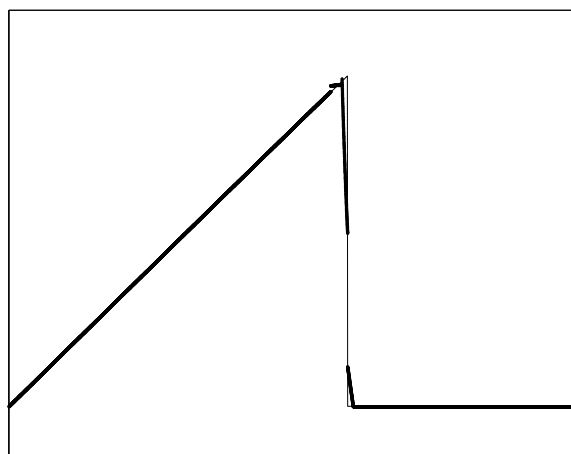
| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6606      | 0.8201             | 0.7429               | 0.7347                | 0.3661             | 0.9000            |
| $L_1$          | 0.0089      | 0.0099             | 0.0086               | 0.0145                | 0.0008             | 0.0013            |
| $L_2$          | 0.0683      | 0.0663             | 0.0683               | 0.0856                | 0.0020             | 0.0193            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.6324      | 0.7750             | 0.7849               | 0.7641                | 0.3750             | 0.7750            |
| $L_1$           | 0.0089      | 0.0090             | 0.0087               | 0.0144                | 0.0006             | 0.0012            |
| $L_2$           | 0.0675      | 0.0625             | 0.0680               | 0.0838                | 0.0016             | 0.0190            |

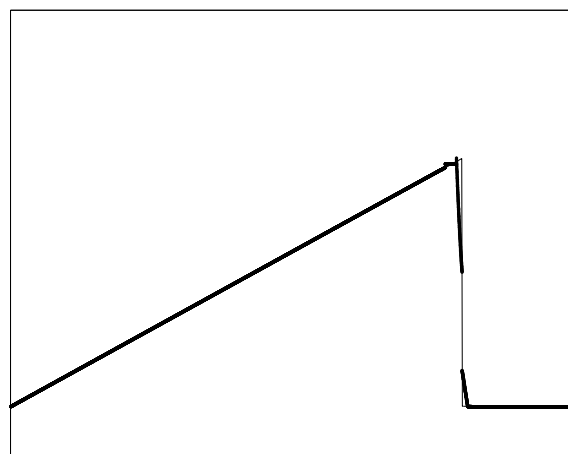
| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6048      | 0.7505             | 0.6186               | 0.7026                | 0.4396             | 0.6823            |
| $L_1$          | 0.0088      | 0.0091             | 0.0086               | 0.0122                | 0.0011             | 0.0012            |
| $L_2$          | 0.0674      | 0.0641             | 0.0678               | 0.0756                | 0.0028             | 0.0188            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.5698      | 0.8466             | 0.6882               | 0.6605                | 0.3670             | 0.8028            |
| $L_1$          | 0.0091      | 0.0129             | 0.0086               | 0.0158                | 0.0020             | 0.0012            |
| $L_2$          | 0.0685      | 0.0821             | 0.0686               | 0.0904                | 0.0043             | 0.0196            |

 $t=6$  $t=10$  $t=70$  $t=170$ Рис. 4.2.1 Численное решение для “треугольника” ( $\gamma = 0.5$ ) $t=18$  $t=40$

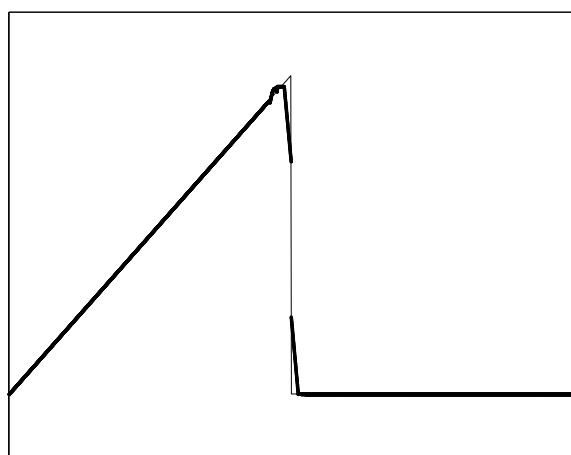


$t=90$

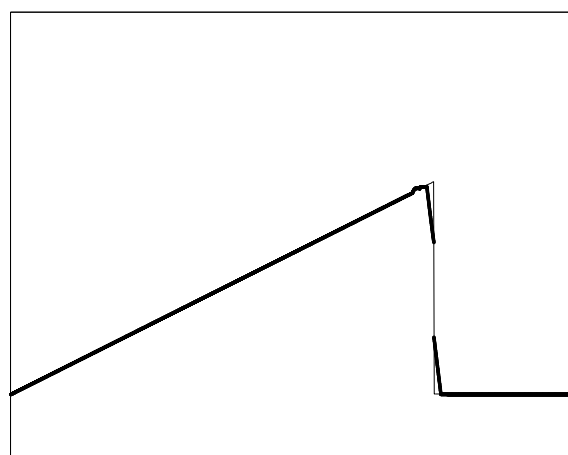


$t=160$

Рис. 4.2.2 Численное решение для “прямоугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

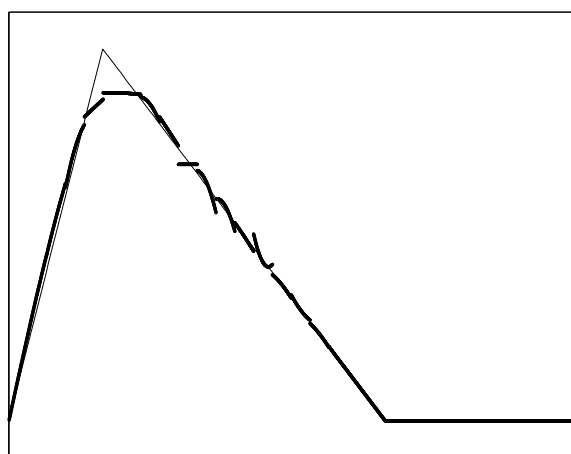


$t=60$

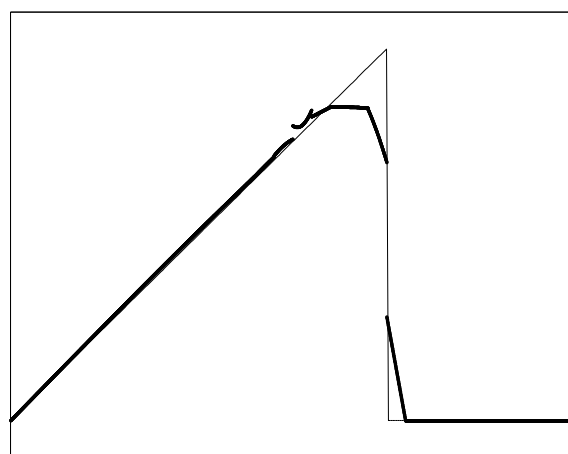


$t=160$

Рис. 4.2.3 Численное решение для “левого треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

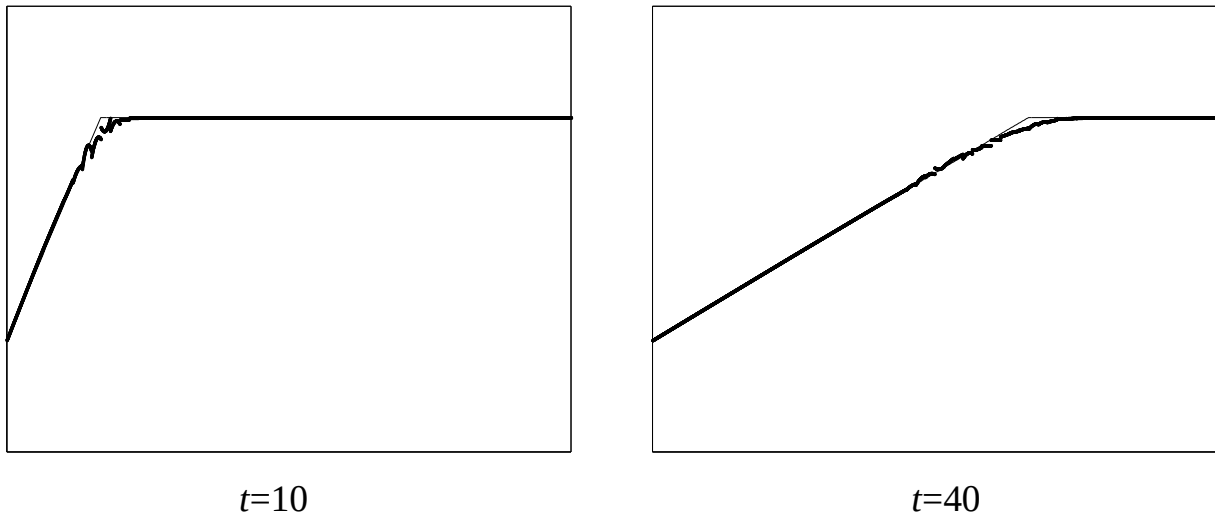
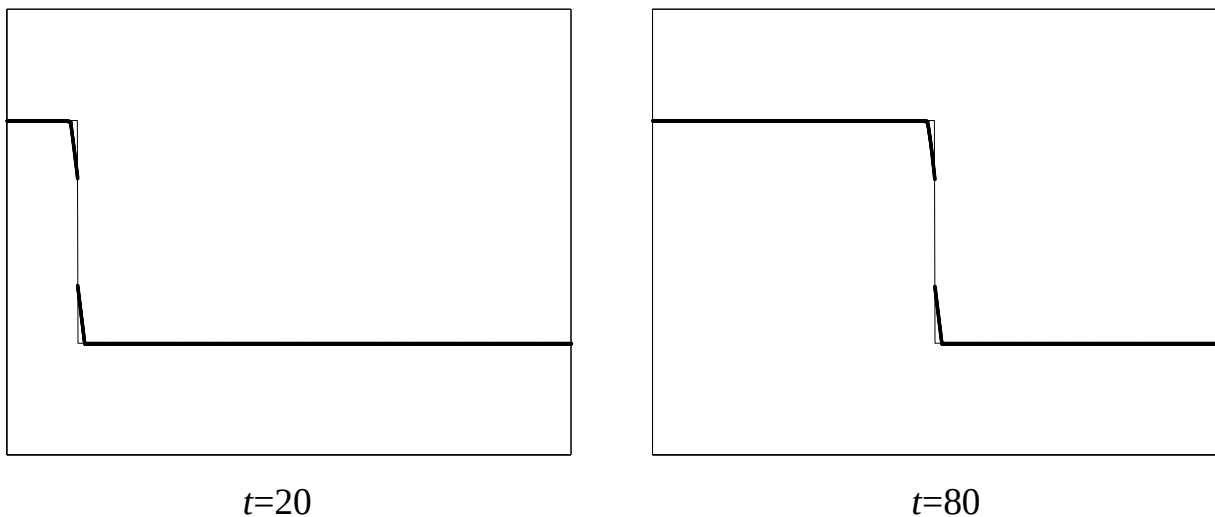


$t=5$



$t=20$

Рис. 4.2.4 Численное решение для “правого треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

Рис. 4.2.5 Численное решение для “ступеньки вверх” ( $\gamma = 0.5$ )Рис. 4.2.6 Численное решение для “ступеньки вниз” ( $\gamma = 0.5$ )

Из приведенных рисунков видно, что использование кусочно-квадратичной аппроксимации в сочетании с рассматриваемыми типами лимитеров не всегда обеспечивает монотонность получаемого численного решения. Это явление характерно для разрывных квадратичных галеркинских аппроксимаций, т.к. данный метод уменьшает полные вариации только средних значений приближенного решения.

**б) с использованием TVBM - лимитера  $\Lambda \Pi_h^k$  ( $M = 0.1$ ).**

Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.4284      | 0.7666             | 0.4808               | 0.7183                | 0.0003             | 0.2700            |
| $L_1$          | 0.0030      | 0.0035             | 0.0027               | 0.0044                | 0.0004             | 0.0005            |

|       |        |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $L_2$ | 0.0302 | 0.0394 | 0.0297 | 0.0428 | 0.0004 | 0.0085 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.4392      | 0.7799             | 0.4497               | 0.7290                | 0.0004             | 0.8063            |
| $L_1$           | 0.0030      | 0.0037             | 0.0023               | 0.0045                | 0.0006             | 0.0185            |
| $L_2$           | 0.0304      | 0.0409             | 0.0288               | 0.0435                | 0.0006             | 0.0321            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.4367      | 0.8047             | 0.4446               | 0.7699                | 0.0047             | 0.9641            |
| $L_1$          | 0.0030      | 0.0041             | 0.0023               | 0.0052                | 0.0010             | 0.0298            |
| $L_2$          | 0.0304      | 0.0429             | 0.0289               | 0.0463                | 0.0009             | 0.0459            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.4720      | 0.5533             | 0.4454               | 0.5557                | 0.2425             | 1.0092            |
| $L_1$          | 0.0031      | 0.0035             | 0.0023               | 0.0055                | 0.0366             | 0.0386            |
| $L_2$          | 0.0312      | 0.0299             | 0.0289               | 0.0361                | 0.0633             | 0.0593            |

Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6444      | 0.8231             | 0.6539               | 0.6321                | 0.4248             | 0.8385            |
| $L_1$          | 0.0061      | 0.0083             | 0.0061               | 0.0092                | 0.0004             | 0.0012            |
| $L_2$          | 0.0582      | 0.0589             | 0.0589               | 0.0629                | 0.0011             | 0.0182            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.6248      | 0.7767             | 0.7777               | 0.6869                | 0.4566             | 0.9840            |
| $L_1$           | 0.0061      | 0.0084             | 0.0061               | 0.0098                | 0.0077             | 0.0166            |
| $L_2$           | 0.0584      | 0.0586             | 0.0591               | 0.0653                | 0.0180             | 0.0337            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6132      | 0.8880             | 0.6104               | 0.7620                | 0.3284             | 1.1099            |
| $L_1$          | 0.0067      | 0.0122             | 0.0062               | 0.0144                | 0.0208             | 0.0299            |
| $L_2$          | 0.0612      | 0.0824             | 0.0592               | 0.0911                | 0.0342             | 0.0487            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.6538      | 0.8739             | 0.7773               | 0.7818                | 0.3670             | 1.2158            |
| $L_1$          | 0.0107      | 0.0206             | 0.0082               | 0.0231                | 0.0339             | 0.0387            |
| $L_2$          | 0.0834      | 0.1149             | 0.0701               | 0.1309                | 0.0478             | 0.0595            |

**в) с использованием TVBM - лимитера  $\Lambda \Pi_h^k (M = 0.001)$ .**

Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|

|       |        |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C$   | 0.5729 | 0.3628 | 0.6205 | 0.7307 | 0.0005 | 0.2735 |
| $L_1$ | 0.0043 | 0.0039 | 0.0046 | 0.0073 | 0.0007 | 0.0004 |
| $L_2$ | 0.0382 | 0.0284 | 0.0487 | 0.0562 | 0.0006 | 0.0082 |

|                 |             |                    |                      |                       |                    |                   |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
| $C$             | 0.5386      | 0.4138             | 0.5423               | 0.7331                | 0.0004             | 0.2268            |
| $L_1$           | 0.0046      | 0.0044             | 0.0056               | 0.0073                | 0.0006             | 0.0007            |
| $L_2$           | 0.0393      | 0.0343             | 0.0494               | 0.0563                | 0.0005             | 0.0087            |

|                |             |                    |                      |                       |                    |                   |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
| $C$            | 0.6300      | 0.3614             | 0.5443               | 0.7212                | 0.0060             | 0.2360            |
| $L_1$          | 0.0049      | 0.0039             | 0.0056               | 0.0070                | 0.0007             | 0.0008            |
| $L_2$          | 0.0437      | 0.0301             | 0.0492               | 0.0552                | 0.0008             | 0.0090            |

|                |             |                    |                      |                       |                    |                   |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
| $C$            | 0.5761      | 0.4125             | 0.5628               | 0.7686                | 0.0080             | 0.2015            |
| $L_1$          | 0.0044      | 0.0044             | 0.0052               | 0.0078                | 0.0030             | 0.0008            |
| $L_2$          | 0.0387      | 0.0328             | 0.0485               | 0.0588                | 0.0038             | 0.0076            |

Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ )

|                |             |                    |                      |                       |                    |                   |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
| $C$            | 0.6636      | 0.8201             | 0.7429               | 0.7293                | 0.3646             | 0.8427            |
| $L_1$          | 0.0091      | 0.0099             | 0.0088               | 0.0146                | 0.0007             | 0.0013            |
| $L_2$          | 0.0683      | 0.0668             | 0.0681               | 0.0857                | 0.0017             | 0.0193            |

|                 |             |                    |                      |                       |                    |                   |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
| $C$             | 0.6385      | 0.7750             | 0.7849               | 0.7376                | 0.3750             | 0.7750            |
| $L_1$           | 0.0089      | 0.0091             | 0.0088               | 0.0146                | 0.0007             | 0.0014            |
| $L_2$           | 0.0670      | 0.0627             | 0.0677               | 0.0848                | 0.0016             | 0.0189            |

|                |             |                    |                      |                       |                    |                   |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
| $C$            | 0.6104      | 0.7473             | 0.6186               | 0.7035                | 0.4396             | 0.6823            |
| $L_1$          | 0.0088      | 0.0092             | 0.0086               | 0.0124                | 0.0015             | 0.0015            |
| $L_2$          | 0.0669      | 0.0644             | 0.0674               | 0.0758                | 0.0030             | 0.0189            |

|                |             |                    |                      |                       |                    |                   |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
| $C$            | 0.5560      | 0.8120             | 0.6882               | 0.6982                | 0.3670             | 0.8485            |
| $L_1$          | 0.0091      | 0.0136             | 0.0086               | 0.0161                | 0.0025             | 0.0016            |
| $L_2$          | 0.0680      | 0.0840             | 0.0682               | 0.0910                | 0.0045             | 0.0197            |

### 3. Кусочно-квадратичная аппроксимация (по средним значениям) с использованием TVDM - лимитера $\Lambda \Pi_h^k$ .

Таблицы ошибок (локально при  $t = T$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.2000      | 0.1785             | 0.2549               | 0.3350                | 0.0006             | 0.1227            |
| $L_1$          | 0.0040      | 0.0037             | 0.0049               | 0.0071                | 0.0008             | 0.0005            |
| $L_2$          | 0.0312      | 0.0231             | 0.0387               | 0.0491                | 0.0007             | 0.0077            |

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.2220      | 0.2001             | 0.2533               | 0.3466                | 0.0004             | 0.1379            |
| $L_1$           | 0.0046      | 0.0041             | 0.0048               | 0.0074                | 0.0006             | 0.0006            |
| $L_2$           | 0.0352      | 0.0274             | 0.0384               | 0.0510                | 0.0005             | 0.0087            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.2182      | 0.1898             | 0.2474               | 0.3954                | 0.0014             | 0.1320            |
| $L_1$          | 0.0046      | 0.0039             | 0.0047               | 0.0072                | 0.0007             | 0.0005            |
| $L_2$          | 0.0346      | 0.0266             | 0.0374               | 0.0578                | 0.0006             | 0.0083            |

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.2168      | 0.2118             | 0.2436               | 0.3276                | 0.0036             | 0.1418            |
| $L_1$          | 0.0045      | 0.0043             | 0.0046               | 0.0075                | 0.0021             | 0.0005            |
| $L_2$          | 0.0343      | 0.0278             | 0.0367               | 0.0483                | 0.0023             | 0.0088            |

Таблицы ошибок (интегрально по  $t$ )

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.5030      | 0.5660             | 0.5029               | 0.6065                | 0.2197             | 0.5827            |
| $L_1$          | 0.0099      | 0.0105             | 0.0096               | 0.0152                | 0.0008             | 0.0015            |
| $L_2$          | 0.0726      | 0.0675             | 0.0729               | 0.0846                | 0.0020             | 0.0207            |

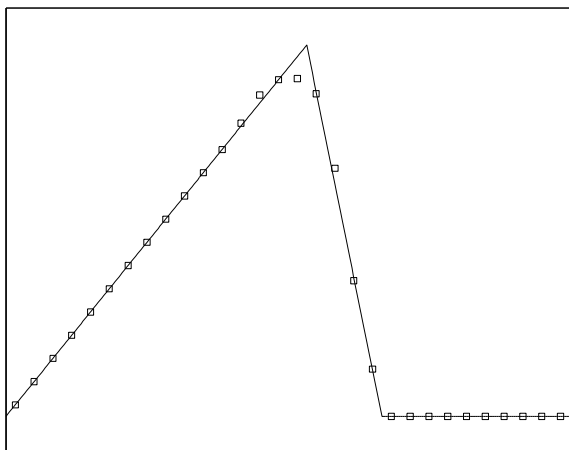
| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | 0.4660      | 0.5330             | 0.4661               | 0.5779                | 0.2411             | 0.5391            |
| $L_1$           | 0.0098      | 0.0097             | 0.0097               | 0.0150                | 0.0006             | 0.0015            |
| $L_2$           | 0.0719      | 0.0644             | 0.0726               | 0.0828                | 0.0016             | 0.0207            |

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.4689      | 0.5588             | 0.4839               | 0.5228                | 0.2155             | 0.5000            |
| $L_1$          | 0.0097      | 0.0098             | 0.0095               | 0.0130                | 0.0011             | 0.0014            |
| $L_2$          | 0.0717      | 0.0655             | 0.0723               | 0.0756                | 0.0027             | 0.0209            |

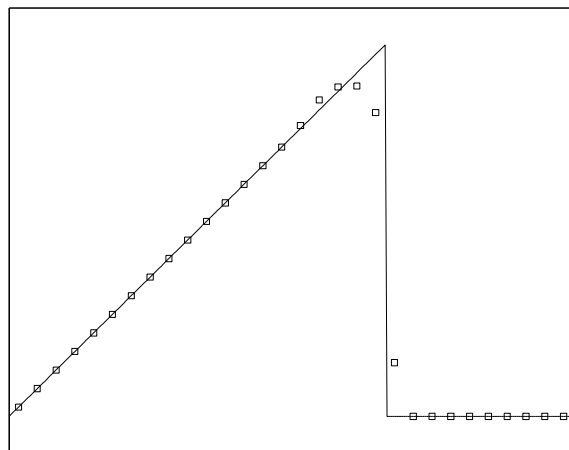
| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | 0.4107      | 0.6296             | 0.4533               | 0.5287                | 0.1882             | 0.5275            |



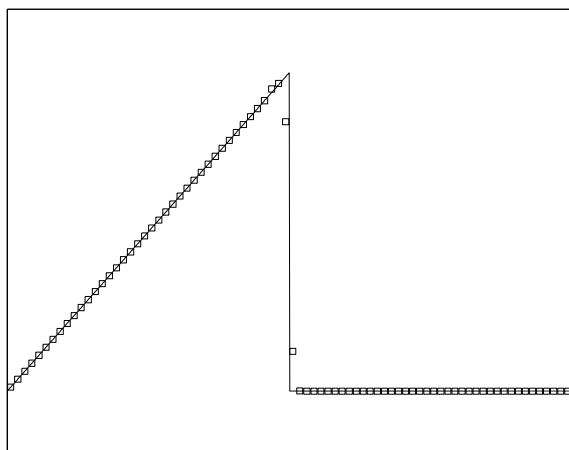
|       |        |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $L_1$ | 0.0098 | 0.0134 | 0.0095 | 0.0162 | 0.0020 | 0.0014 |
| $L_2$ | 0.0716 | 0.0802 | 0.0728 | 0.0859 | 0.0042 | 0.0199 |



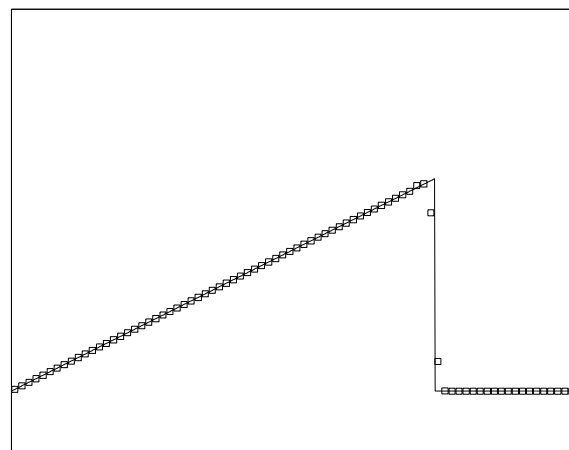
$t=6$



$t=10$

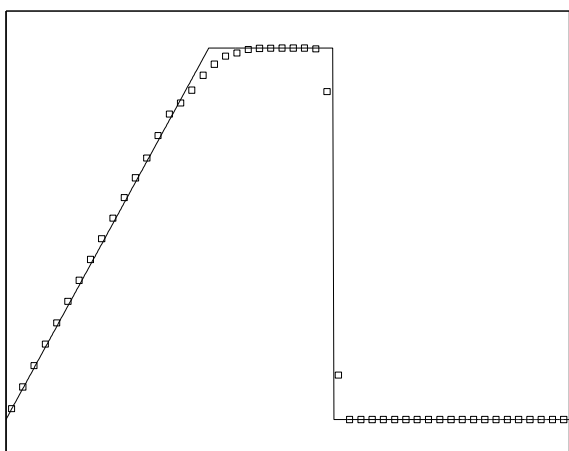


$t=70$

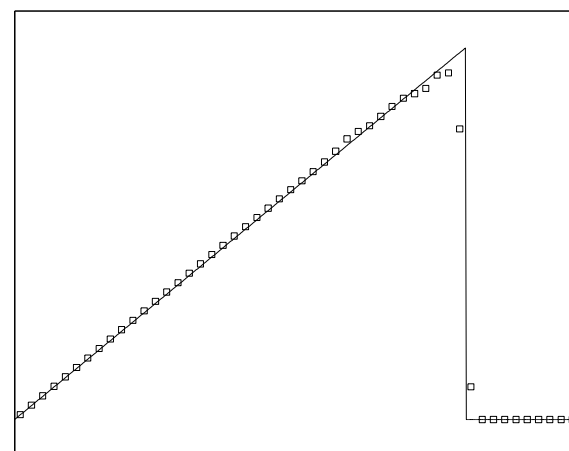


$t=170$

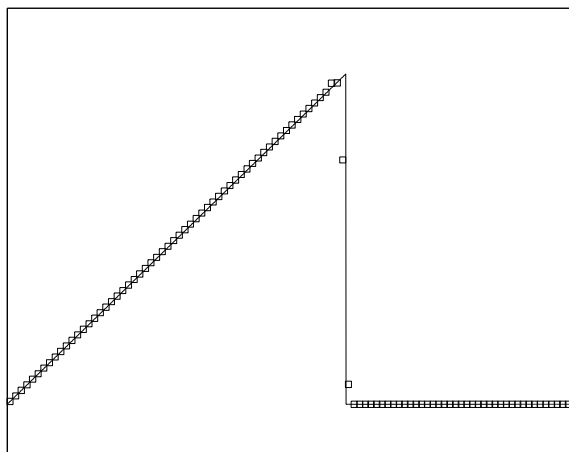
Рис. 4.3.1 Численное решение для “треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )



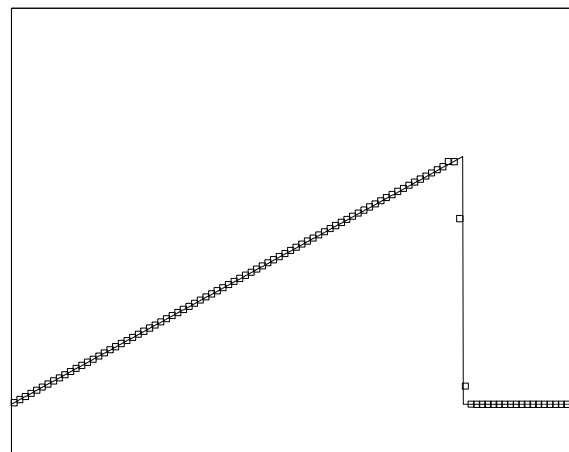
$t=18$



$t=40$

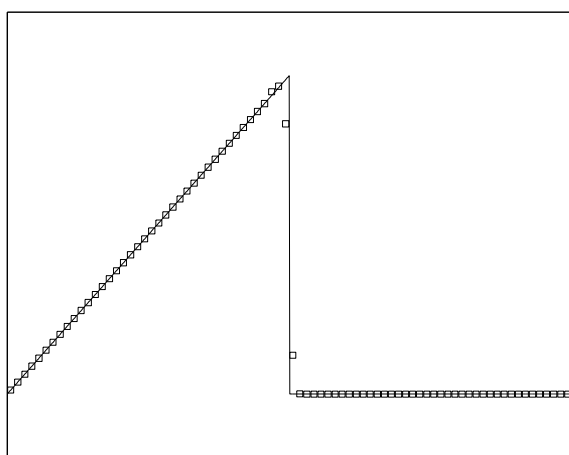


$t=90$

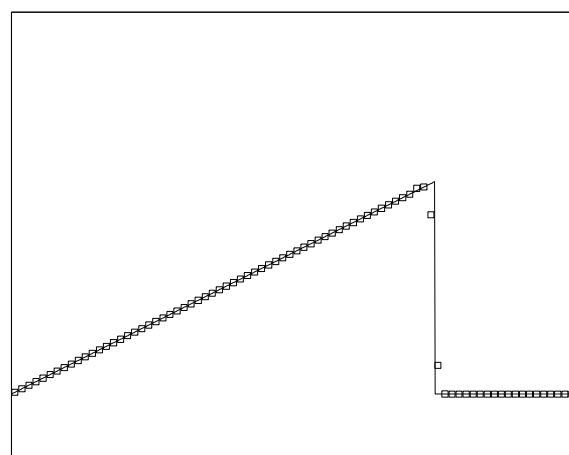


$t=160$

Рис. 4.3.2 Численное решение для “прямоугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

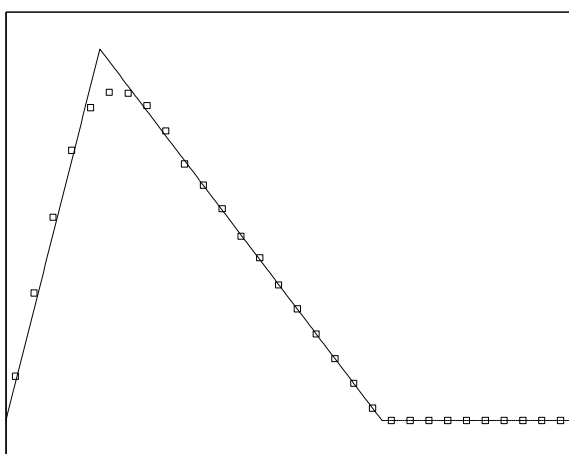


$t=60$

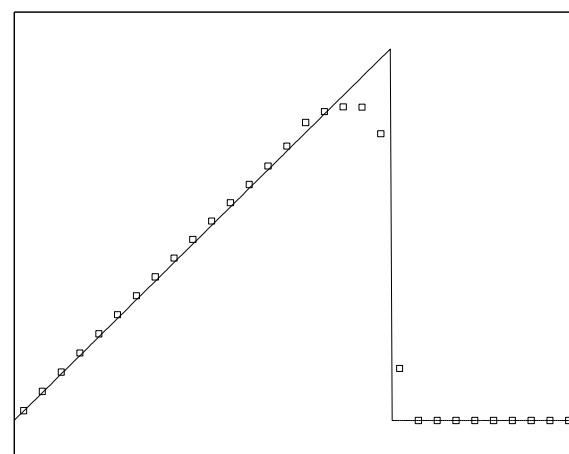


$t=160$

Рис. 4.3.3 Численное решение для “левого треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )



$t=5$



$t=20$

Рис. 4.3.4 Численное решение для “правого треугольника” ( $\gamma = 0.5$ )

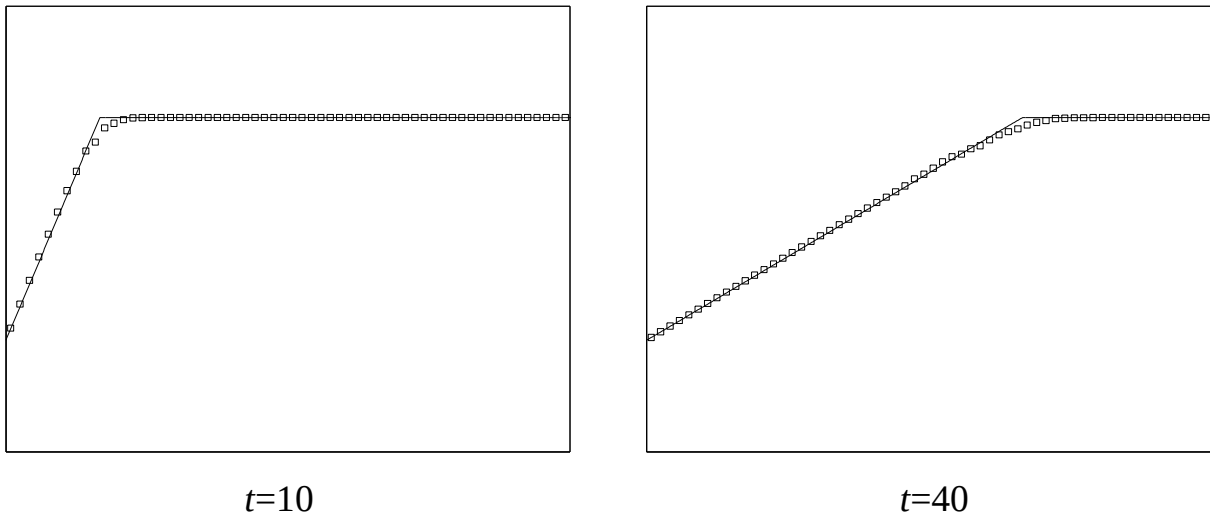


Рис. 4.3.5 Численное решение для “ступеньки вверх” ( $\gamma = 0.5$ )

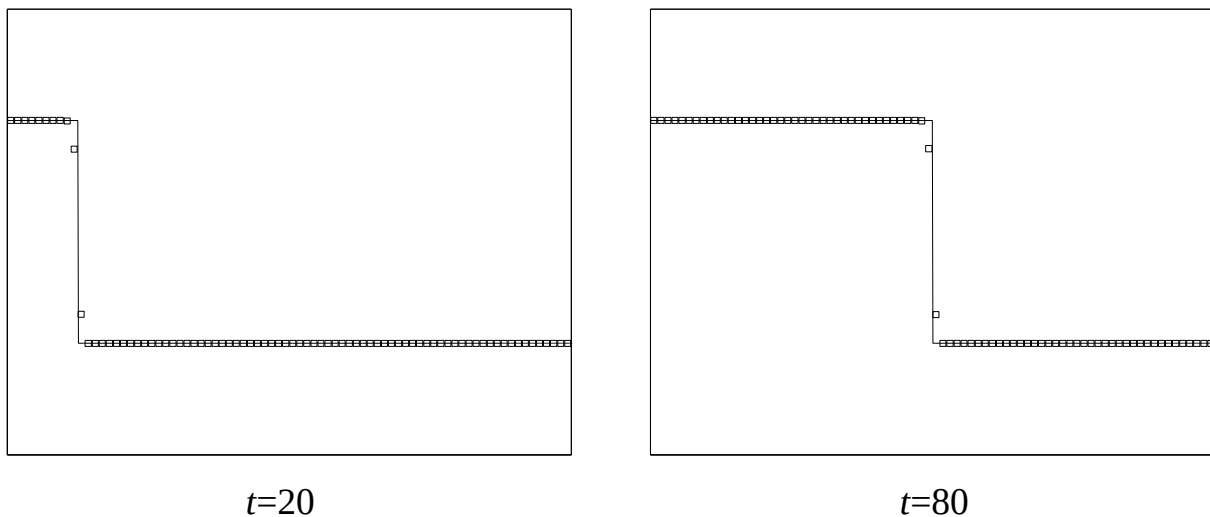


Рис. 4.3.6 Численное решение для “ступеньки вниз” ( $\gamma = 0.5$ )

## § 5. Сравнение схем

На основе полученных численных результатов сравнены рассмотренные выше и в [2] схемы. Ниже приведены таблицы сравнения, содержащие названия тех схем, которые при данном числе Куранта дали наименьшую относительную ошибку в соответствующей норме. Если в ячейке таблицы указаны несколько схем, то ошибки вычислений, полученные для данных схем, либо совпадают, либо очень незначительно отличаются друг от друга.

## Обозначения:

- $\Gamma_{1a}$  – разрывный метод Галеркина с кусочно-линейной аппроксимацией и лимитером  $\Lambda\Gamma_h^1$  (т.е.  $M=0$ );
- $\Gamma_{1б}$  – кусочно-линейная аппроксимация и MUSCL лимитер;
- $\Gamma_{2a}$  – кусочно-квадратичная аппроксимация и лимитер  $\Lambda\Gamma_h^k$  (т.е.  $M=0$ );
- $\Gamma_{2б}$  – кусочно-квадратичная аппроксимация и TVBM-лимитер с  $M=0.1$ ;
- $\Gamma_{2в}$  – кусочно-квадратичная аппроксимация и TVBM-лимитер с  $M=0.001$ ;
- $\Gamma_3$  – кусочно-квадратичная аппроксимация по средним значениям, лимитер  $\Lambda\Gamma_h^k$ ;
- $\Gamma$  – один из вариантов метода Галеркина;
- ЯЛ – явная схема с левой разностью;
- НЛ – неявная схема с левой разностью;
- ЛВ – схема Лакса-Вендрофа;
- ПП – метод прыжкового переноса;
- Б – схема К.И. Бабенко.

## 1. Сравнение различных вариантов разрывного метода Галеркина.

1) Сравнение схем по локальным (при  $t = T$ ) ошибкам.

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник      | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх         | ступенька<br>вниз                                      |
|----------------|-------------|-------------------------|----------------------|-----------------------|----------------------------|--------------------------------------------------------|
| $C$            | $\Gamma_3$  | $\Gamma_3$              | $\Gamma_3$           | $\Gamma_3$            | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2б}$ | $\Gamma_3$                                             |
| $L_1$          | $\Gamma_3$  | $\Gamma_{2б}, \Gamma_3$ | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_{2б}$         | $\Gamma_{2б}$              | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2a},$<br>$\Gamma_{2в}, \Gamma_3$ |
| $L_2$          | $\Gamma_3$  | $\Gamma_3$              | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_3$            | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2б}$ | $\Gamma_3$                                             |

При  $\gamma = 0.1$  в норме  $C$  для тестов №№ 1, 2, 3, 4, 6 наименьшие ошибки дает вариант метода  $\Gamma_3$ , для теста № 5 – варианты  $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2б}$ . В норме  $L_1$  вариант  $\Gamma_3$  является наиболее эффективным для тестов № 1, 2, 6, вариант  $\Gamma_{2б}$  – для тестов №№ 2, 3, 4, 5, варианты  $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2a}$  – для теста

№ 6. В норме  $L_2$  наилучшим для тестов №№ 1, 2, 4, 6 является вариант  $\Gamma_3$ , для теста № 3 –  $\Gamma_{2б}$ , для теста № 5 – варианты  $\Gamma_{1а}$  и  $\Gamma_{2б}$ .

| $\gamma = 0.25$ | треугольник   | прямоуголь-<br>ник      | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх                                                       | ступенька<br>вниз                         |
|-----------------|---------------|-------------------------|----------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $C$             | $\Gamma_3$    | $\Gamma_3$              | $\Gamma_3$           | $\Gamma_3$            | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а},$<br>$\Gamma_{2б}, \Gamma_{2в},$<br>$\Gamma_3$ | $\Gamma_3$                                |
| $L_1$           | $\Gamma_{2б}$ | $\Gamma_{2б}, \Gamma_3$ | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_{2б}$         | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а},$<br>$\Gamma_{2б}, \Gamma_{2в},$<br>$\Gamma_3$ | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а},$<br>$\Gamma_3$ |
| $L_2$           | $\Gamma_{2б}$ | $\Gamma_3$              | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_{2б}$         | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а},$<br>$\Gamma_{2б}, \Gamma_{2в},$<br>$\Gamma_3$ | $\Gamma_{2в},$<br>$\Gamma_3$              |

При  $\gamma = 0.25$  в норме  $C$  лучшим является вариант  $\Gamma_3$  для условий №№ 1, 2, 3, 4, 6. В норме  $L_1$  вариант  $\Gamma_{2б}$  является наилучшим для начальных условий №№ 1, 2, 3, 4, для условия № 6 варианты  $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а}, \Gamma_3$  дают близкие ошибки. В норме  $L_2$  для тестов №№ 1, 3, 4 лучшим оказывается вариант  $\Gamma_{2б}$ , для теста № 2 – вариант  $\Gamma_3$ , для теста № 6 – варианты  $\Gamma_{2в}$  и  $\Gamma_3$ . Для условия № 5 во всех нормах одинаковые ошибки дают все модификации метода, кроме  $\Gamma_{1б}$ .

| $\gamma = 0.5$ | треугольник   | прямоуголь-<br>ник                                     | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх                                     | ступенька<br>вниз                         |
|----------------|---------------|--------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $C$            | $\Gamma_3$    | $\Gamma_3$                                             | $\Gamma_3$           | $\Gamma_3$            | $\Gamma_{1а}$                                          | $\Gamma_3$                                |
| $L_1$          | $\Gamma_{2б}$ | $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2б},$<br>$\Gamma_{2в}, \Gamma_3$ | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_{2б}$         | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а},$<br>$\Gamma_{2в}, \Gamma_3$ | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а},$<br>$\Gamma_3$ |
| $L_2$          | $\Gamma_3$    | $\Gamma_3$                                             | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_{2б}$         | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а},$<br>$\Gamma_3$              | $\Gamma_3$                                |

При  $\gamma = 0.5$  в норме  $C$  лучшие результаты показывает модификация  $\Gamma_3$  для всех тестов, кроме № 5, для которого лучшим оказался вариант  $\Gamma_{1а}$ . В норме  $L_1$  для теста № 1 лучшими является вариант  $\Gamma_{2б}$ , для теста № 2 – все варианты с квадратичной аппроксимацией, для тестов № 3, 4 – вариант  $\Gamma_{2б}$ , для теста № 5 –  $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}, \Gamma_3$ , для теста № 6 –  $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а}, \Gamma_3$ . В норме  $L_2$  вариант  $\Gamma_3$  показывает лучшие результаты для начальных условий №№ 1, 2, 6, вариант  $\Gamma_{2б}$  – для условий 3, 4, для условия № 5 аналогичные ошибки дают варианты  $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а}, \Gamma_3$ .

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | $\Gamma_3$  | $\Gamma_3$         | $\Gamma_3$           | $\Gamma_3$            | $\Gamma_{1а}$      | $\Gamma_3$        |

|       |               |               |               |               |               |                           |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------------------|
| $L_1$ | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{1a}$ | $\Gamma_{2a}, \Gamma_{3}$ |
| $L_2$ | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{3}$  | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{1a}$ | $\Gamma_{2в}$             |

При  $\gamma = 0.9$  вариант  $\Gamma_{3}$  оказывается более эффективным в норме  $C$  для начальных условий №№ 1, 2, 3, 4, 6. В норме  $L_1$  наилучшим образом работает вариант  $\Gamma_{26}$  для условий №№ 1, 2, 3, 4, варианты  $\Gamma_{2a}, \Gamma_{3}$  для условия № 6. В норме  $L_2$  вариант  $\Gamma_{26}$  оказывается лучшим для тестов №№ 1, 3, 4, вариант  $\Gamma_{3}$  – для тестов №№ 2, 6, вариант  $\Gamma_{2в}$  – для теста № 6. Для теста № 5 во всех нормах наименьшие ошибки дает модификация  $\Gamma_{1a}$ .

## 2) Сравнение схем по интегральным (по времени) ошибкам.

|                |               |                    |                      |                       |                            |                                                                            |
|----------------|---------------|--------------------|----------------------|-----------------------|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\gamma = 0.1$ | треугольник   | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх         | ступенька<br>вниз                                                          |
| $C$            | $\Gamma_{3}$  | $\Gamma_{3}$       | $\Gamma_{3}$         | $\Gamma_{3}$          | $\Gamma_{3}$               | $\Gamma_{3}$                                                               |
| $L_1$          | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$      | $\Gamma_{26}$        | $\Gamma_{26}$         | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{26}$ | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2a},$<br>$\Gamma_{26}, \Gamma_{2в},$<br>$\Gamma_{3}$ |
| $L_2$          | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$      | $\Gamma_{26}$        | $\Gamma_{26}$         | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$                                                              |

При  $\gamma = 0.1$  в норме  $C$  для всех начальных профилей лучшие результаты показывает вариант  $\Gamma_{3}$ . В норме  $L_1$  для тестов №№ 1, 2, 3, 4 лучшим оказывается вариант  $\Gamma_{26}$ , для теста № 5 – варианты  $\Gamma_{1a}, \Gamma_{26}$ , для теста № 6 – все варианты, кроме  $\Gamma_{16}$ . В норме  $L_2$  для тестов №№ 1, 2, 3, 6 лучшим является вариант  $\Gamma_{26}$ , для теста № 5 – варианты  $\Gamma_{1a}, \Gamma_{26}$ .

|                 |               |                    |                      |                       |                                             |                                             |
|-----------------|---------------|--------------------|----------------------|-----------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\gamma = 0.25$ | треугольник   | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх                          | ступенька<br>вниз                           |
| $C$             | $\Gamma_{3}$  | $\Gamma_{3}$       | $\Gamma_{3}$         | $\Gamma_{3}$          | $\Gamma_{3}$                                | $\Gamma_{3}$                                |
| $L_1$           | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$      | $\Gamma_{26}$        | $\Gamma_{26}$         | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2a},$<br>$\Gamma_{3}$ | $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2a},$<br>$\Gamma_{3}$ |
| $L_2$           | $\Gamma_{26}$ | $\Gamma_{26}$      | $\Gamma_{26}$        | $\Gamma_{26}$         | $\Gamma_{1a}$                               | $\Gamma_{2a}, \Gamma_{2в}$                  |

При  $\gamma = 0.25$  в норме  $C$  модификация метода Галеркина  $\Gamma_{3}$  оказывается более эффективной для всех тестов. В норме  $L_1$  для тестов №№ 1, 2, 3, 4 лучшим является вариант  $\Gamma_{26}$ , для тестов №№ 5, 6 – варианты  $\Gamma_{1a}, \Gamma_{2a}, \Gamma_{3}$ . В норме  $L_2$  вариант  $\Gamma_{26}$  дает лучшие результаты для тестов №№ 1, 2, 3, 4, вариант  $\Gamma_{1a}$  – для теста № 5, варианты  $\Gamma_{2a}, \Gamma_{2в}$  – для теста № 6.

| $\gamma = 0.5$ | треугольник   | прямоуголь-<br>ник         | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз          |
|----------------|---------------|----------------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|----------------------------|
| $C$            | $\Gamma_3$    | $\Gamma_3$                 | $\Gamma_3$           | $\Gamma_3$            | $\Gamma_3$         | $\Gamma_3$                 |
| $L_1$          | $\Gamma_{2б}$ | $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}$ | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_{2а}$         | $\Gamma_{1а}$      | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2а}$ |
| $L_2$          | $\Gamma_{2б}$ | $\Gamma_{1а}$              | $\Gamma_{2б}$        | $\Gamma_{1а}$         | $\Gamma_{1а}$      | $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}$ |

При  $\gamma = 0.5$  в норме  $C$  лучшие результаты показывает вариант  $\Gamma_3$ . В норме  $L_1$  для условий №№ 1, 3 наименьшие ошибки дает вариант  $\Gamma_{2б}$ , для условия № 2 – варианты  $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}$ , для условия № 4 –  $\Gamma_{2а}$ , для условия № 5 –  $\Gamma_{1а}$ , для условия № 6 – варианты  $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}$ . В норме  $L_2$  для тестов №№ 1, 3 наиболее эффективным оказывается вариант  $\Gamma_{2б}$ , для тестов №№ 2, 4, 5 – вариант  $\Gamma_{1а}$ , для теста № 6 – варианты  $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}$

| $\gamma = 0.9$ | треугольник   | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник       | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз          |
|----------------|---------------|--------------------|----------------------------|-----------------------|--------------------|----------------------------|
| $C$            | $\Gamma_3$    | $\Gamma_3$         | $\Gamma_3$                 | $\Gamma_3$            | $\Gamma_3$         | $\Gamma_3$                 |
| $L_1$          | $\Gamma_{1а}$ | $\Gamma_{1а}$      | $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2б}$ | $\Gamma_{2а}$         | $\Gamma_{1а}$      | $\Gamma_{2а}$              |
| $L_2$          | $\Gamma_{2в}$ | $\Gamma_{1а}$      | $\Gamma_{2в}$              | $\Gamma_{1а}$         | $\Gamma_{1а}$      | $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}$ |

При  $\gamma = 0.9$  в норме  $C$  вариант  $\Gamma_3$  является лучшим для всех начальных условий. В норме  $L_1$  для условий № 1, 2, 5 лучшие результаты дает вариант  $\Gamma_{1а}$ , для условия №3 – варианты  $\Gamma_{1а}, \Gamma_{2б}$ , для условий № 4, 6 – вариант  $\Gamma_{2а}$ . В норме  $L_2$  минимальную ошибку для условий №№ 2, 4, 5 дает вариант  $\Gamma_{1а}$ , для условий №№ 1, 3 – вариант  $\Gamma_{2в}$ , для условия № 6 – варианты  $\Gamma_{2а}, \Gamma_{2в}$ .

## 2. Сравнение разрывного метода Галеркина со схемами из [2].

### 1) Сравнение схем по локальным (при $t = T$ ) ошибкам.

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | $\Gamma$    | $\Gamma$           | $\Gamma$             | $\Gamma$              | $\Gamma$           | $\Gamma$          |
| $L_1$          | $\Gamma$    | $\Gamma$           | $\Gamma$             | $\Gamma$              | $\Gamma$           | $\Gamma, \Gamma$  |
| $L_2$          | $\Gamma$    | $\Gamma$           | $\Gamma$             | $\Gamma, \Gamma$      | $\Gamma$           | $\Gamma$          |

При  $\gamma = 0.1$  в норме  $C$  лучшие результаты показал разрывный метод Галеркина для начальных условий №№ 1, 2, 3, 4, 5, для условия № 6 – схема К.И.Бабенко. В нормах  $L_1$  и  $L_2$  для всех тестов лучшим оказался

метод Галеркина, а также схема К.И.Бабенко для теста № 6 и явная схема с левой разностью для теста № 4.

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | Г           | Г                  | Г                    | Г, НЛ                 | Г                  | Б                 |
| $L_1$           | Г           | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Б, Г              |
| $L_2$           | Г           | Г                  | Г                    | Г, НЛ                 | Г                  | Б, Г              |

При  $\gamma = 0.25$  в норме  $C$  для начального условия № 6 лучшие результаты получены с использованием схемы К.И.Бабенко. Для остальных тестов во всех нормах наиболее эффективным оказался рассмотренный метод Галеркина. Для условия № 4 похожие результаты в нормах  $C$  и  $L_1$  дала неявная схема с левой разностью, для условия № 6 в нормах  $L_1, L_2$  – схема К.И.Бабенко.

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | Г           | Г                  | Г                    | Г, ЯЛ                 | Г                  | Б                 |
| $L_1$          | Г           | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Б, Г              |
| $L_2$          | Г           | Г                  | Г                    | Г, ЯЛ                 | Г                  | Б, Г              |

При  $\gamma = 0.5$  разрывный метод Галеркина дал наименьшие ошибки для всех начальных условий во всех нормах, кроме условия № 6 в норме  $C$ , где лучше оказалась схема К.И.Бабенко. Для теста № 4 аналогичные результаты в нормах  $C, L_2$  дала явная схема с левой разностью, для теста № 6 в нормах  $L_1, L_2$  – схема К.И.Бабенко.

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | Б           | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Б                 |
| $L_1$          | Б, Г        | Г                  | Г                    | Г                     | Б, Г               | Г                 |
| $L_2$          | Б, Г        | Г                  | Г                    | Г, ЯЛ                 | Г                  | Б, Г              |

При  $\gamma = 0.9$  в норме  $C$  для начальных профилей №№ 1, 6 лучшие результаты показала схема К.И.Бабенко, а для условий №№ 2, 3, 4, 5 – разрывный метод Галеркина. В норме  $L_1$  для условий №№ 1, 5 лучшими были схема К.И.Бабенко и метод Галеркина, для условий №№ 2, 3, 4, 6 – метод Галеркина. В норме  $L_2$  для тестов №№ 1, 6 наименьшие ошибки



дали схема К.И.Бабенко и метод Галеркина, для теста № 4 – метод Галеркина и явная схема с левой разностью.

## 2) Сравнение схем по интегральным (по времени) ошибкам.

| $\gamma = 0.1$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | Б, Г, ЯЛ    | Г, ЯЛ              | Г, НЛ                | Б                     | Г                  | Г                 |
| $L_1$          | Г           | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Г, ПП             |
| $L_2$          | Б, Г        | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Г                 |

При  $\gamma = 0.1$  в норме  $C$  для начального условия № 1 лучшие результаты дали схема К.И.Бабенко, метод Галеркина и явная схема с левой разностью, для условия № 2 – метод Галеркина и явная схема с левой разностью, для условия № 3 – неявная схема с левой разностью и метод Галеркина, для условия № 4 – схема К.И.Бабенко, для условий №№ 5, 6 – метод Галеркина. В норме  $L_1$  лучшим оказался метод Галеркина, а также метод прыжкового переноса для теста № 6. В норме  $L_2$  наименьшие ошибки дал метод Галеркина, а для условия № 1 также схема К.И.Бабенко.

| $\gamma = 0.25$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|-----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$             | ЯЛ          | ЛВ                 | Г                    | Б, Г                  | Г                  | Б, ЛВ             |
| $L_1$           | Г           | Г                  | Г, ПП                | Г                     | Г                  | Г, ПП             |
| $L_2$           | Б, Г        | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Г                 |

При  $\gamma = 0.25$  в норме  $C$  для теста № 1 лучшей оказалась явная схема с левой разностью, схема Лакса-Вендрофа для тестов № 2 и № 6, схема К.И.Бабенко для условий №№ 4, 6, разрывный метод Галеркина для условий №№ 3, 4, 5. В норме  $L_1$  лучшие результаты показал метод Галеркина, а также метод прыжкового переноса для начальных условий №№ 3, 6. В норме  $L_2$  наиболее эффективным оказался разрывный метод Галеркина и схема К.И.Бабенко для условия № 1.

| $\gamma = 0.5$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | Г, ЯЛ       | Г, ЛВ              | Г                    | Б                     | Г, НЛ              | ЛВ                |
| $L_1$          | Г           | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Г                 |
| $L_2$          | Б, Г        | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Г                 |

При  $\gamma = 0.5$  в норме  $C$  для начального условия № 4 лучшей является схема К.И.Бабенко, для условий №№ 2, 6 – схема Лакса-Вендрофа, явная схема с левой разностью для условия № 1, метод Галеркина для условий №№ 1, 2, 3, 5. В норме  $L_1$  наименьшие ошибки дал метод Галеркина для всех начальных профилей. В норме  $L_2$  лучшим оказался метод Галеркина, а также схема К.И.Бабенко для начального условия № 1.

| $\gamma = 0.9$ | треугольник | прямоуголь-<br>ник | левый<br>треугольник | правый<br>треугольник | ступенька<br>вверх | ступенька<br>вниз |
|----------------|-------------|--------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| $C$            | Б           | Г, НЛ              | Г                    | Б                     | Г, НЛ              | НЛ                |
| $L_1$          | Г           | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Г                 |
| $L_2$          | Б, Г        | Г                  | Г                    | Г                     | Г                  | Г                 |

При  $\gamma = 0.9$  метод Галеркина оказался наиболее эффективным в норме  $L_1$  для всех тестов. В норме  $C$  схема К.И.Бабенко является лучшей для условий №№ 1, 4, неявная схема с левой разностью – для условий №№ 2, 5, 6, разрывный метод Галеркина – для условий №№ 2, 3, 5. В норме  $L_2$  лучшие результаты показал метод Галеркина, а также схема К.И.Бабенко для начального условия №1.

### Заключение

Рассмотренный в данной работе RKDG метод в большинстве случаев обеспечивает более высокое качество решения квазилинейного уравнения переноса по сравнению с другими известными методами [2]. Размазывание разрывов происходит на 2-3 шага.

Проведенное исследование показывает, что наиболее оптимальным монотонизатором является TVDM лимитер  $\Lambda \Pi_h^1$ .

Следует отметить, что аппроксимация решения кусочно-линейными функциями оказывается в целом более эффективной, чем кусочно-квадратичная аппроксимация, т.к. она обеспечивает монотонность получаемой схемы.

**Литература.**

1. Bernardo Cockburn. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems. SIAM J. Sci. Comput. Vol. 16, pp. 173-261
2. Александрикова Т. А., Галанин М. П. Нелинейная монотонизация схемы К. И. Бабенко для численного решения квазилинейного уравнения переноса. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2003 г., № 62, 35 с.
3. Галанин М. П., Еленина Т. Г. Сравнительный анализ разностных схем для линейного уравнения переноса. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1998 г., № 52, 33 с.
4. Галанин М. П., Еленина Т. Г. Нелинейная монотонизация разностных схем для линейного уравнения переноса. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1999 г., № 44, 33 с.
5. Галанин М. П., Еленина Т. Г. Нелинейная монотонизация схемы К. И. Бабенко (“квадрат”) для уравнения переноса. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2002 г., № 4, 26 с.
6. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001г., 608 с.