РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

В.А. Сарычев, С.А. Мирер, А.А. Дегтярев

Равновесия и устойчивость спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции спутника.

Москва - 2005

В.А. Сарычев, С.А. Мирер, А.А. Дегтярев. **Равновесия и устойчивость спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции спутника.** Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005, 31 страница, 15 рисунков, библиография: 5 наименований.

Исследуется динамика спутника-гиростата, движущегося в центральном ньютоновом силовом поле на круговой орбите. В частном случае, когда вектор гиростатического момента лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции спутника, определены все положения равновесия и получены условия их существования в зависимости от трех безразмерных параметров системы. Проведено полное исследование областей существования различного числа решений. Определены бифуркационные значения параметров, при которых происходит изменение количества положений равновесия. Для каждой равновесной ориентации получены достаточные условия устойчивости в результате анализа обобщенного интеграла энергии. Исследована эволюция областей выполнения достаточных условий устойчивости положений равновесия гиростата при изменении безразмерных параметров системы.

Ключевые слова: спутник-гиростат, положения равновесия, достаточные условия устойчивости, точки бифуркации.

V.A. Sarychev, S.A. Mirer, A.A. Degtyarev. **Relative equilibria and stability of a gyrostat-satellite when the vector of the gyrostatic moment is parallel to the principal central plane of inertia of the satellite.** Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2005, 31 Pages, 15 Figures, 5 References.

Dynamics of a gyrostat-satellite moving in central Newtonian force field in a circular orbit is investigated. In the particular case when the vector of the gyrostatic moment is parallel to one of the satellite’s principal central planes of inertia, all equilibrium orientations are determined. Conditions of equilibriums existence are obtained depending on three dimensionless parameters of the system. Detailed investigation of existence domains of various numbers of solutions is carried out. All bifurcational values of parameters at which there is a change of quantity of equilibrium orientations are determined. For each equilibrium orientation sufficient conditions of stability are obtained as a result of the generalized energy integral analysis. Evolution of domains of validity for the stability conditions are studied depending on parameters of the system.

Key words: gyrostat-satellite, equilibria, sufficient conditions of stability, bifurcational points.

1. Введение

Препринт является продолжением серии работ, посвященных анализу равновесных конфигураций спутника-гиростата на круговой орбите. В [1,2] показано, что в случае, когда вектор внутреннего гиростатического момента коллинеарен одной из главных центральных осей инерции спутника, на круговой орбите существует от 8 до 24 изолированных положений равновесия. Найдены шесть групп изолированных решений, каждая из которых описывает четыре положения равновесия спутника. Получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости каждого из решений. Исследована эволюция областей устойчивости в плоскости двух безразмерных инерционных параметров спутника при изменении величины безразмерного гиростатического момента. Найдены все бифуркационные значения безразмерного гиростатического момента, при которых области выполнения необходимых и (или) достаточных условий устойчивости изменяют свой качественный вид.

В настоящей работе рассматривается более общая ситуация, когда вектор внутреннего гиростатического момента лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции. Задача в такой постановке решалась в работе [3], где основное внимание уделено рассмотрению равновесий, когда ни одна из связанных осей спутника не совпадает с орбитальными осями.

В препринте предложен новый способ определения всех положений равновесия и получены условия существования этих равновесий в зависимости от трех безразмерных параметров системы. Численно-аналитическим методом проведен детальный анализ эволюции областей существования различного числа решений. Определены все бифуркационные значения параметров, при которых происходит изменение числа положений равновесия. Получены в виде простых неравенств достаточные условия устойчивости всех найденных равновесий. Проведен численный анализ эволюции областей выполнения достаточных условий устойчивости положений равновесия гиростата при изменении безразмерных параметров системы.

2. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о вращательном движении спутника-гиростата (далее спутник или гиростат), представляющего собой твердое тело с расположенными внутри него статически и динамически уравновешенными роторами. Считаем, что угловая скорость вращения роторов относительно корпуса спутника постоянна и центр масс спутника движется по круговой орбите.

Введем две правые декартовы системы координат с началом в центре масс *O* спутника.

$OX_1X_2X_3$ – орбитальная система координат. Ось OX_3 направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось OX_1 направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс *O*.

$Ox_1x_2x_3$ – связанная со спутником система координат; Ox_i $(i=1, 2, 3)$ суть главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной системы самолетными углами α, β, γ (рис. 1).

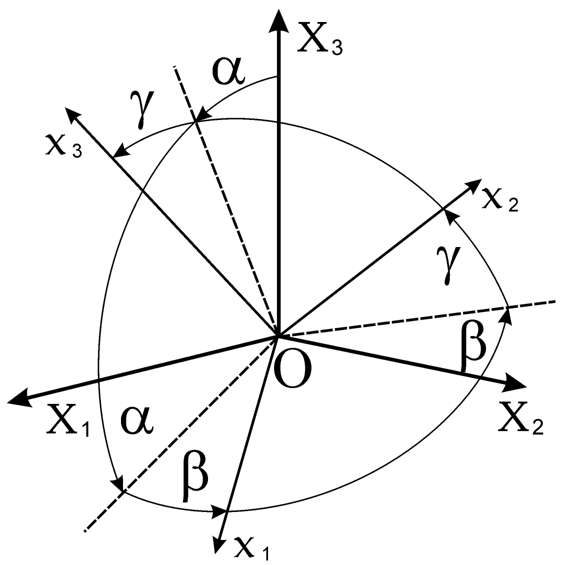


Рис. 1

Тогда направляющие косинусы $a_{ij} = \cos\left(X_i\,,\,x_j\right)$ задаются выражениями

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = \cos\alpha\cos\beta, && a_{23} = -\cos\beta\sin\gamma,\\
&a_{12} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma, && a_{31} = -\sin\alpha\cos\beta,\\
&a_{13} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma, && a_{32} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\\
&a_{21} = \sin\beta, && a_{33} = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\
&a_{22} = \cos\beta\cos\gamma,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

а уравнения движения спутника-гиростата относительно его центра масс записываются в виде [4]

$$
\begin{aligned}
&A\dot{p} + \left(C - B\right)qr - 3\omega_0^2\left(C - B\right)a_{32}a_{33} - \bar{h}_2 r + \bar{h}_3 q = 0,\\
&B\dot{q} + \left(A - C\right)rp - 3\omega_0^2\left(A - C\right)a_{33}a_{31} - \bar{h}_3 p + \bar{h}_1 r = 0,\\
&C\dot{r} + \left(B - A\right)pq - 3\omega_0^2\left(B - A\right)a_{31}a_{32} - \bar{h}_1 q + \bar{h}_2 p = 0;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&p = \left(\dot{\alpha} + \omega_0\right)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + \omega_0 a_{21}\,,\\
&q = \left(\dot{\alpha} + \omega_0\right)a_{22} + \dot{\beta}\sin\gamma = \bar{q} + \omega_0 a_{22}\,,\\
&r = \left(\dot{\alpha} + \omega_0\right)a_{23} + \dot{\beta}\cos\gamma = \bar{r} + \omega_0 a_{23}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь *A*, *B*, *C* – главные центральные моменты инерции гиростата; *p*, *q*, *r*, $\bar{h}_i\ \left(i = 1,\,2,\,3\right)$ - проекции абсолютной угловой скорости гиростата и проекции вектора гиростатического момента на оси Ox_i; ω_0 - угловая скорость движения центра масс гиростата по круговой орбите. Точкой обозначено дифференцирование по времени *t*.

Для системы (2), (3) справедлив обобщенный интеграл энергии [4]

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2\right) + \frac{3}{2}\omega_0^2\left[\left(A - C\right)a_{31}^2 + \left(B - C\right)a_{32}^2\right] +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\omega_0^2\left[\left(B - A\right)a_{21}^2 + \left(B - C\right)a_{23}^2\right] - \omega_0\left(\bar{h}_1 a_{21} + \bar{h}_2 a_{22} + \bar{h}_3 a_{23}\right) = \mathrm{const}\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

3. Положения равновесия спутника-гиростата

В [5] после введения обозначений $\bar{h}_i / \omega_0 = h_i$ получена система уравнений

$$
\begin{aligned}
&4\left(Aa_{21}a_{31}+Ba_{22}a_{32}+Ca_{23}a_{33}\right)+h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33}=0,\\
&Aa_{11}a_{31}+Ba_{12}a_{32}+Ca_{13}a_{33}=0,\\
&Aa_{11}a_{21}+Ba_{12}a_{22}+Ca_{13}a_{23}+h_1a_{11}+h_2a_{12}+h_3a_{13}=0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

позволяющая определить все положения равновесия гиростата в орбитальной системе координат. При этом a_{ij}, как элементы ортогональной матрицы, удовлетворяют условиям

$$
\begin{aligned}
&a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1, \quad a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,\\
&a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1, \quad a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0,\\
&a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1, \quad a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

При $A\neq B\neq C$ систему уравнений (5), (6) можно разрешить относительно a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}. В результате получим [5]

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=4(C-B)a_{32}a_{33}/F, \quad a_{12}=4(A-C)a_{33}a_{31}/F, \quad a_{13}=4(B-A)a_{31}a_{32}/F,\\
&a_{21}=4(I_3-A)a_{31}/F, \quad a_{22}=4(I_3-B)a_{32}/F, \quad a_{23}=4(I_3-C)a_{33}/F.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Здесь $F=h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33}$, $I_3=Aa_{31}^2+Ba_{32}^2+Ca_{33}^2$, а направляющие косинусы a_{31}, a_{32}, a_{33} определяются из трех уравнений

$$
\begin{aligned}
&16\left[(B-C)^2a_{32}^2a_{33}^2+(C-A)^2a_{33}^2a_{31}^2+(A-B)^2a_{31}^2a_{32}^2\right]=\left(h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33}\right)^2,\\
&4(B-C)(C-A)(A-B)a_{31}a_{32}a_{33}+\left[h_1(B-C)a_{32}a_{33}+h_2(C-A)a_{33}a_{31}+\right.\\
&\qquad\left.+h_3(A-B)a_{31}a_{32}\right]\left(h_1a_{31}+h_2a_{32}+h_3a_{33}\right)=0,\\
&a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

После решения системы (8) формулы (7) позволяют определить оставшиеся шесть направляющих косинусов. Отметим, что решения (7) существуют лишь в том случае, когда из трех направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} никакие два одновременно не обращаются в нуль. Случаи $a_{31}=a_{32}=0$, $a_{32}=a_{33}=0$, $a_{33}=a_{31}=0$ являются особыми и их следует рассматривать непосредственно обращаясь к системам (5) и (6).

В предыдущей работе [2] был рассмотрен частный случай, когда вектор гиростатического момента коллинеарен одной из главных центральный осей инерции спутника ($h_1 = 0, h_2 \neq 0, h_3 = 0$). Далее исследуем более общий случай, когда вектор гиростатического момента лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции спутника. Пусть, например, $h_1 \neq 0, h_2 = 0, h_3 \neq 0.$ Тогда система (8) после введения безразмерных параметров

$$H_1 = \frac{h_1}{C-A}, \quad H_3 = \frac{h_3}{C-A}, \quad \nu = \frac{A-B}{C-A} \tag{9}$$

принимает вид

$$\begin{aligned}
&16\left[(1+\nu)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + a_{33}^2 a_{31}^2 + \nu^2 a_{31}^2 a_{32}^2\right] = \left(H_1 a_{31} + H_3 a_{33}\right)^2, \\
&a_{32}\left\{4\nu(\nu+1) a_{31} a_{33} + \left[H_1 (1+\nu) a_{33} - H_3 \nu a_{31}\right]\left(H_1 a_{31} + H_3 a_{33}\right)\right\} = 0, \\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что безразмерный параметр ν, являясь по существу инерционным параметром спутника, сам по себе форму его эллипсоида инерции не определяет. Однако можно указать на связь ν с безразмерными инерционными параметрами $\theta_A = A/B$ и $\theta_C = C/B$

$$\nu = \frac{A-B}{C-A} = \frac{\theta_A - 1}{\theta_C - \theta_A}.$$

При исследовании системы (10) необходимо рассмотреть два случая: $a_{32} \neq 0$ и $a_{32} = 0$. При $a_{32} \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&16\left[(1+\nu)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + a_{33}^2 a_{31}^2 + \nu^2 a_{31}^2 a_{32}^2\right] = \left(H_1 a_{31} + H_3 a_{33}\right)^2, \\
&4\nu(\nu+1) a_{31} a_{33} + \left[H_1 (1+\nu) a_{33} - H_3 \nu a_{31}\right]\left(H_1 a_{31} + H_3 a_{33}\right) = 0, \\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{11}$$

Из второго уравнения системы (11) следует, что если $a_{31} = 0$, то и $a_{33} = 0$, и наоборот. Существование решения, для которого

$$a_{31} = a_{33} = 0, \tag{12}$$

исследуем путем анализа исходных уравнений (5), (6). При этом уравнения (5) после перехода к безразмерным параметрам (9) и условия ортогональности (6) сводятся к системе

$$\begin{aligned}
&a_{13} a_{23} + H_1 a_{11} + H_3 a_{13} = 0, \\
&a_{32}^2 = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 0, \\
&a_{11}^2 + a_{13}^2 = 1, \quad a_{11} a_{21} + a_{13} a_{23} = 0, \\
&a_{21}^2 + a_{23}^2 = 1,
\end{aligned}$$

откуда следует уравнение четвертого порядка относительно a_{23}

$$a_{23}^4 + 2H_3 a_{23}^3 + a_{23}^2\left(H_1^2 + H_3^2 - 1\right) - 2H_3 a_{23} - H_3^2 = 0. \tag{13}$$

В результате получаем положения равновесия

$$\begin{aligned} &a_{11} = -x_1 a_{32}, \quad && a_{12} = 0, \quad && a_{13} = a_{21} a_{32}, \\ &a_{21} = \frac{H_1 x_1}{H_3 + x_1}, && a_{22} = 0, && a_{23} = x_1, \\ &a_{31} = 0, && a_{32} = \pm 1, && a_{33} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где x_1 - действительный корень уравнения (13). Равновесия (14), число которых может доходить до 8, образуют группу решений I.

Если переписать уравнение (13) в виде $f(x_1) = g(x_1)$, где

$$f(x_1) = 1 - x_1^2, \qquad g(x_1) = \frac{H_1^2}{(x_1 + H_3)^2 + H_1^2},$$

то становится очевидным, что оно может иметь либо 2, либо 4 действительных корня (см. рис. 2, где показан типичный вид функций f и g).

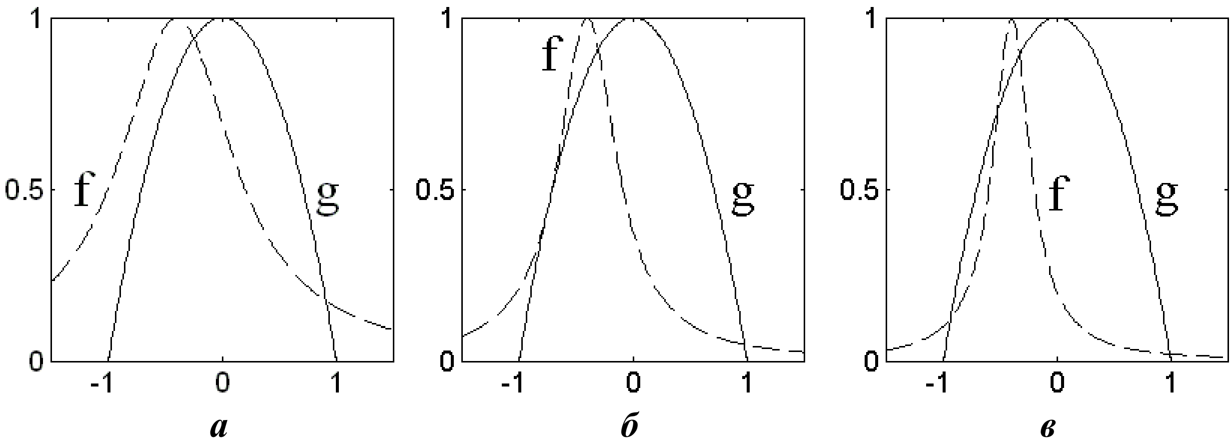


Рис. 2: *(а)* $H_1 = 0.6,\ H_3 = 0.4$; *(б)* $H_1 = 0.31,\ H_3 = 0.4$; *(в)* $H_1 = 0.2,\ H_3 = 0.4$.

Изменение числа корней происходит на поверхности, определяемой условиями

$$f(x_1) = g(x_1), \quad f'(x_1) = g'(x_1),$$

которые могут быть переписаны в виде

$$\frac{H_1^2}{(x_1 + H_3)^2 + H_1^2} = 1 - x_1^2, \quad \frac{H_1^2 (x_1 + H_3)}{\left[(x_1 + H_3)^2 + H_1^2\right]^2} = x_1 . \tag{15}$$

При этом уравнение (13) имеет три корня, один из которых кратности 2 (рис. 2б).

Записав первое уравнение (15) в виде

$$x_1^2 = \frac{(x_1 + H_3)^2}{(x_1 + H_3)^2 + H_1^2}$$

и разделив его на второе уравнение, получим

$$\left(x_1 + H_3\right)^3 = H_1^2 H_3 ,$$

откуда $x_1 = \left(H_1^2 H_3\right)^{1/3} - H_3$. Подставляя найденное x_1 во второе уравнение (15), получим

$$H_1^{2/3} + H_3^{2/3} = 1. \qquad (16)$$

Таким образом, уравнение (13) имеет четыре корня при $H_1^{2/3} + H_3^{2/3} < 1$ и два корня при $H_1^{2/3} + H_3^{2/3} > 1$. Следовательно, общее число равновесных ориентаций для случая (12) в зависимости от соотношения между безразмерными параметрами H_1 и H_3 может быть 8 или 4.

Теперь рассмотрим систему (11) при $a_{31} \neq 0$ и $a_{33} \neq 0$. Разделив второе уравнение системы на a_{33}^2 и обозначая $x_2 = a_{31}/a_{33}$, перепишем его в виде

$$H_1 H_3 \nu x_2^2 + x_2\left[H_3^2 \nu - H_1^2(1+\nu) - 4\nu(\nu+1)\right] - H_1 H_3 (1+\nu) = 0 . \qquad (17)$$

Решение уравнения (17) имеет вид

$$x_2 = \frac{\left[H_3^2 \nu - H_1^2(1+\nu) - 4\nu(\nu+1)\right] \pm \sqrt{\Delta}}{2 H_1 H_3 \nu}, \qquad (18)$$

где

$$\Delta = \left[H_3^2 \nu - H_1^2(1+\nu) - 4\nu(\nu+1)\right]^2 + 4 H_1^2 H_3^2 \nu (1+\nu). \qquad (19)$$

Первое и третье уравнения системы (11) при подстановке в них $a_{31} = x_2 a_{33}$ приводят к системе

$$a_{32}^2\left[(1+\nu)^2 + \nu^2 x_2^2\right] + x_2^2 a_{33}^2 = \frac{\left(H_1 x_2 + H_3\right)^2}{16}, \quad a_{32}^2\left(1 + x_2^2\right) + a_{33}^2 = 1,$$

разрешая которую относительно a_{32}^2 и a_{33}^2, получим

$$a_{32}^2 = \frac{\left(H_1 x_2 + H_3\right)^2\left(1 + x_2^2\right) - 16 x_2^2}{16\left[(1+\nu) \ \ + \nu \ \ x_2^2\right]^2},$$

$$a_{33}^2 = \frac{16\left[(1+\nu)^2 + \nu^2 x_2^2\right] - \left(H_1 x_2 + H_3\right)^2}{16\left[(1+\nu) \ \ + \nu \ \ x_2^2\right]^2}. \qquad (20)$$

Поскольку a_{32} и a_{33} являются элементами матрицы направляющих косинусов, то должны выполняться условия $0 \le a_{32}^2 \le 1$ и $0 \le a_{33}^2 \le 1$. Однако, если

$$a_{32}^2 \ge 0, \quad a_{33}^2 \ge 0, \qquad (21)$$

то условия $a_{32}^2 \le 1$, $a_{33}^2 \le 1$, в силу третьего уравнения системы (11), выполняются автоматически.

Таким образом, для того, чтобы решения (18), (20) отвечали положению равновесия спутника-гиростата, должны выполняться условия (21), и, кроме того, детерминант (19) должен быть неотрицателен.

Проанализируем знак детерминанта. Очевидно, что $\Delta \ge 0$, если $\nu(\nu+1) \ge 0$, т.е. при $\nu \le -1$, либо при $\nu \ge 0$. Для того, чтобы определить знак Δ на интервале $-1 < \nu < 0$, запишем его в виде

$$\Delta = \left[H_1^2(1+\nu) + \left(H_3 + 2\sqrt{1+\nu}\right)^2 \nu \right] \left[H_1^2(1+\nu) + \left(H_3 - 2\sqrt{1+\nu}\right)^2 \nu \right].$$

Тогда становится очевидным, что $\Delta \ge 0$ при

$$\begin{cases} H_1^2(1+\nu) \ge -\left(H_3 + 2\sqrt{1+\nu}\right)^2 \nu, \\ H_1^2(1+\nu) \ge -\left(H_3 - 2\sqrt{1+\nu}\right)^2 \nu; \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} H_1^2(1+\nu) \le -\left(H_3 + 2\sqrt{1+\nu}\right)^2 \nu, \\ H_1^2(1+\nu) \le -\left(H_3 - 2\sqrt{1+\nu}\right)^2 \nu. \end{cases} \tag{22}$$

На рис. 3 соответствующие области в плоскости (H_3, H_1) заштрихованы.

Теперь перейдем к анализу условий (21). С учетом (20) и соотношения

$$\left(H_1 x_2 + H_3\right) = -\frac{4\nu(\nu+1)x_2}{H_1(1+\nu) - H_3 \nu x_2},$$

справедливого в силу второго уравнения (11), условия (21) принимают вид

$$\begin{aligned} &16\left[(1+\nu)^2 + \nu^2 x_2^2\right] - \left(H_1 x_2 + H_3\right)^2 \ge 0, \\ &\nu^2(\nu+1)^2\left(1+x_2^2\right) - \left[H_1(1+\nu) - H_3 \nu x_2\right]^2 \ge 0. \end{aligned} \tag{23}$$

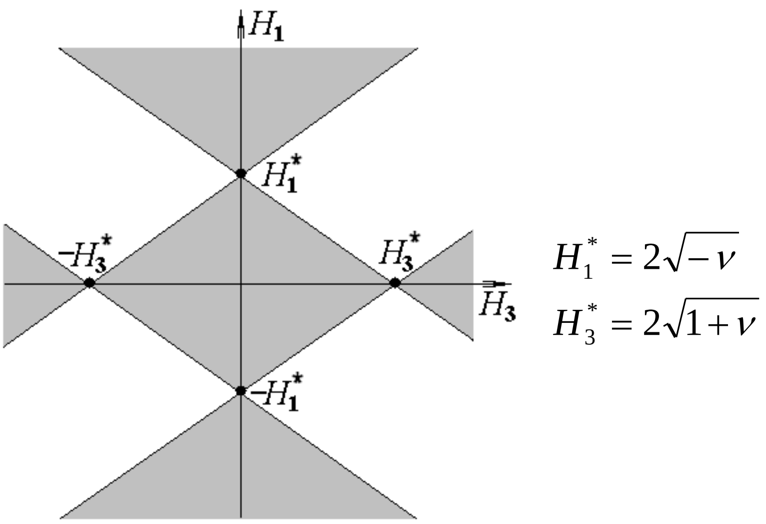


Рис. 3

Левые части (23) представляют собой квадратные полиномы относительно x_2. Запишем их в виде

$$a_0 x_2^2 + a_1 x_2 + a_2 \geq 0, \qquad b_0 x_2^2 + b_1 x_2 + b_2 \geq 0, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= 16\nu^2 - H_1^2, & b_0 &= \nu^2\left[(\nu+1)^2 - H_3^2\right],\\
a_1 &= -2H_1 H_3, & b_1 &= 2H_1 H_3 \nu(1+\nu),\\
a_2 &= 16(\nu+1)^2 - H_3^2; & b_2 &= (\nu+1)^2\left(\nu^2 - H_1^2\right).
\end{aligned}$$

Введем также следующие обозначения коэффициентов уравнения (17):

$$\begin{aligned}
c_0 &= H_1 H_3 \nu,\\
c_1 &= H_3^2 \nu - H_1^2 (1+\nu) - 4\nu(\nu+1),\\
c_2 &= -H_1 H_3 (1+\nu).
\end{aligned}$$

Тогда подставляя

$$x_2 = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0 c_2}}{2c_0}$$

в неравенства (24), получим

$$\begin{aligned}
&\left(-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0 c_2}\right)(a_1 c_0 - a_0 c_1) + 2c_0 (a_2 c_0 - a_0 c_2) \geq 0,\\
&\left(-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0 c_2}\right)(b_1 c_0 - b_0 c_1) + 2c_0 (b_2 c_0 - b_0 c_2) \geq 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Таким образом, решения системы (11) при $a_{31} \neq 0,\ a_{33} \neq 0$ существуют и отвечают равновесным ориентациям спутника-гиростата, если выполняются неравенства (25) и $\Delta = c_1^2 - 4c_0 c_2 \geq 0$.

Вообще говоря, неравенства (25) могут выполняться для обоих или только для одного знака перед радикалом, что означает существование положений равновесия, отвечающих обоим корням (18), или только одному корню $x_{2,1}$ или $x_{2,2}$. При этом, $a_{31} = x_2 a_{33}$, направляющие косинусы a_{32} и a_{33} определяются из (20), а остальные направляющие косинусы с учетом (7) и (9) принимают вид

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{4(1+\nu)a_{32}a_{33}}{H_1a_{31}+H_3a_{33}}, & a_{21} &= 4a_{31}\frac{a_{33}^2-\nu a_{32}^2}{H_1a_{31}+H_3a_{33}},\\
a_{12} &= -\frac{4a_{31}a_{33}}{H_1a_{31}+H_3a_{33}}, & a_{22} &= 4a_{32}\frac{(1+\nu)a_{33}^2+\nu a_{31}^2}{H_1a_{31}+H_3a_{33}},\\
a_{13} &= -\frac{4\nu a_{31}a_{32}}{H_1a_{31}+H_3a_{33}}, & a_{23} &= -4a_{33}\frac{a_{31}^2+(1+\nu)a_{32}^2}{H_1a_{31}+H_3a_{33}}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Очевидно, что и в этом случае число возможных равновесных ориентаций не превышает восьми. Далее будем называть эту группу решений – группа II.

Рассмотрим, наконец, систему (10) в случае $a_{32}=0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&a_{32}=0,\\
&16a_{33}^2a_{31}^2=\left(H_1a_{31}+H_3a_{33}\right)^2,\\
&a_{31}^2+a_{33}^2=1.
\end{aligned} \tag{27}$$

Из второго уравнения (27) следует, что если $a_{31}=0$, то и $a_{33}=0$ (и наоборот, если $a_{33}=0$, то и $a_{31}=0$), что противоречит третьему уравнению системы.

Домножив правую часть второго уравнения (27) на $a_{31}^2+a_{33}^2=1$, получим

$$H_1^2a_{31}^4+a_{31}^2a_{33}^2\left(H_1^2+H_3^2-16\right)+2H_1H_3a_{31}^3a_{33}+2H_1H_3a_{31}a_{33}^3+H_3^2a_{33}^4=0.$$

Разделим полученное уравнение на a_{33}^4 и обозначим $x_3=a_{31}/a_{33}$. Тогда получим уравнение

$$H_1^2x_3^4+2H_1H_3x_3^3+\left(H_1^2+H_3^2-16\right)x_3^2+2H_1H_3x_3+H_3^2=0, \tag{28}$$

определив из которого x_3 и подставив его в третье уравнение (27), записанное в виде

$$a_{33}^2\left(1+x_3^2\right)=1,$$

найдем два значения a_{33}, а затем соответствующие значения $a_{31}=x_3a_{33}$. Остальные направляющие косинусы можно получить, используя формулы (26) с учетом равенства $a_{32}=0$. Окончательный вид матрицы направляющих косинусов будет иметь вид

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 0, & a_{12} &= \pm 1, & a_{13} &= 0,\\
a_{21} &= \frac{H_1x_3+H_3}{4x_3}, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= -\frac{H_1x_3+H_3}{4},\\
a_{31} &= -\frac{H_1x_3+H_3}{4}a_{12}, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= -\frac{H_1x_3+H_3}{4x_3}a_{12}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Так как число действительных корней уравнения (28) не превышает четырех, то система уравнений (27) определяет не более восьми равновесных ориентаций спутника-гиростата. Далее будем называть эту группу решений – группа III.

Уравнение (28) четвертого порядка и аналогично (13) может иметь 4 или 2 действительных корня. Перепишем (28) в виде $f_1(x_3) = g_1(x_3)$, где

$$f_1(x_3) = 16 - (H_1 x_3 + H_3)^2, \qquad g_1(x_3) = \frac{16}{x_3^2 + 1}.$$

На рис. 4 показано типичное поведение функций $f_1(x_3)$ и $g_1(x_3)$.

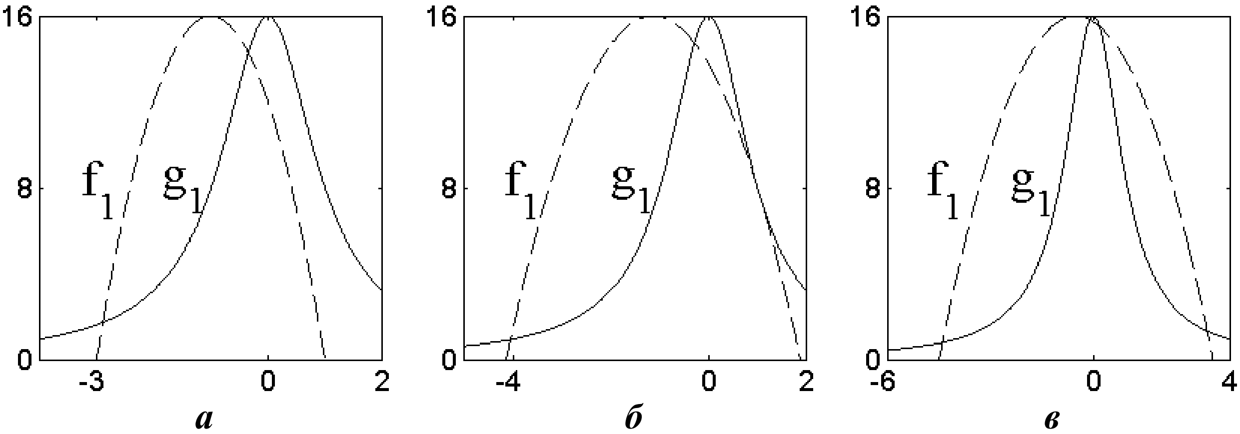


Рис. 4: *(а)* $H_1 = 2, H_3 = 2$; *(б)* $H_1 = 1.33, H_3 = 1.5$; *(в)* $H_1 = 1, H_3 = 0.5$.

Изменение числа корней происходит на поверхности, определяемой условиями

$$f_1(x_3) = g_1(x_3), \quad f_1'(x_3) = g_1'(x_3),$$

или

$$(H_1 x_3 + H_3)^2 = \frac{16x_3^2}{x_3^2 + 1}, \qquad H_1 x_3 + H_3 = \frac{16x_3}{H_1(1 + x_3^2)^2},$$

откуда, исключая x_3, после несложных преобразований получаем

$$H_1^{2/3} + H_3^{2/3} = 4^{2/3}. \tag{30}$$

Таким образом, уравнение (28) имеет 4 корня при $H_1^{2/3} + H_3^{2/3} < 4^{2/3}$ и два корня при $H_1^{2/3} + H_3^{2/3} > 4^{2/3}$.

4. Анализ эволюции равновесий

Результаты анализа числа корней уравнений четвертого порядка (13) и (28) можно суммировать следующим образом. Кривые (16) и (30) делят плоскость (H_3, H_1) на три подобласти (рис. 5).

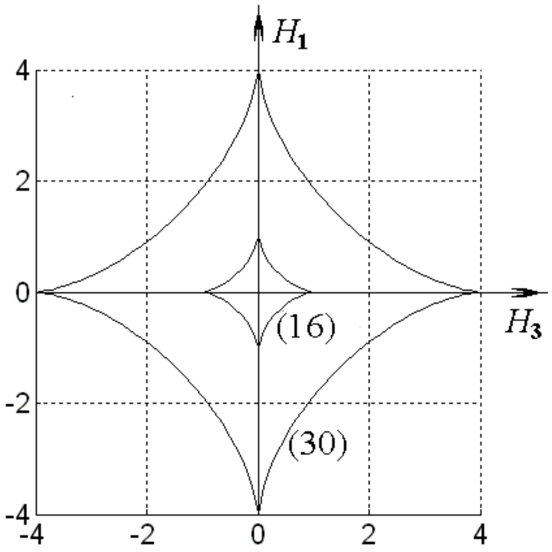
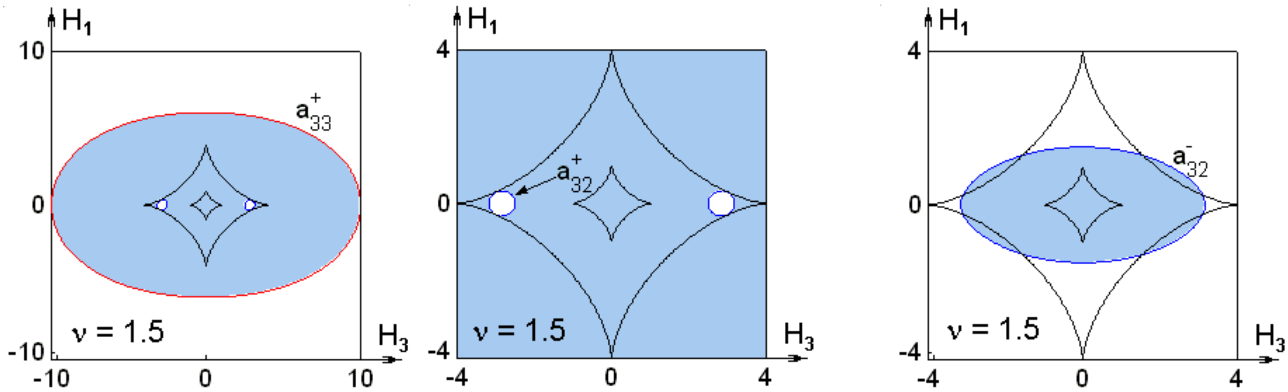


Рис. 5

Если $H_1^{2/3} + H_3^{2/3} < 1$, то оба уравнения имеют по четыре корня и, следовательно, существует по 8 решений групп I и III; если $1 < H_1^{2/3} + H_3^{2/3} < 4^{2/3}$, то (13) имеет два корня, а (28) – четыре, т.е. существуют 4 решения группы I и 8 решений группы III; если $H_1^{2/3} + H_3^{2/3} > 4^{2/3}$, то оба уравнения имеют по два корня, т.е. существует по 4 решения групп I и III.

Рассмотрим теперь решения группы II, для которых должны выполняться неравенства (25). Как отмечалось ранее, неравенства (25) могут выполняться для обоих или только для одного знака перед радикалом, что означает существование восьми положений равновесия, отвечающих корням x_2, или четырех, соответствующих $x_{2,1}$ или $x_{2,2}$. Условия (25) обращаются в равенства на кривых $a_{32} = 0$ и $a_{33} = 0$. В зависимости от знака перед радикалом в (25) кривые будем обозначать a_{32}^+, a_{32}^- и a_{33}^+, a_{33}^-. В области, ограниченной кривыми a_{32}^+, a_{33}^+, существуют 4 решения группы II, а в области, ограниченной кривыми a_{32}^-, a_{33}^-, другие 4 решения этой группы. На пересечении этих областей существуют все 8 решений группы II. Пример областей выполнения неравенств (25) при $\nu = 1.5$ представлен на рис. 6. Отметим, что в данном случае дискриминант (19) всегда положителен и не требуется выполнение условий (22). Рис. 6.1 соответствует положительному знаку перед радикалом, а рис. 6.2 отрицательному. В заштрихованных областях существуют по четыре решения. На левом рис. 6.1 случай положительного радикала представлен в более мелком масштабе, что позволяет полностью показать область выполнения (25). На рисунках также показаны границы (16) и (30).



1) *2)*

Рис. 6

Результаты анализа числа решений группы II в этом случае можно суммировать следующим образом. Кривые a_{32}^{-}, a_{33}^{-} и a_{32}^{+}, a_{33}^{+} делят плоскость (H_3, H_1) на ряд подобластей, представленных на рис. 7 (граница a_{33}^{+} находится вне поля рисунка). В области, выделенной голубым цветом (объединение областей выполнения (25) для положительного и отрицательного знаков), существуют 4 решения группы II, а в розовой области (пересечение областей выполнения (25) для положительного и отрицательного знаков) существуют все 8 решений группы II. Вне границы a_{33}^{+} (рис. 6.1) нет решений группы II.

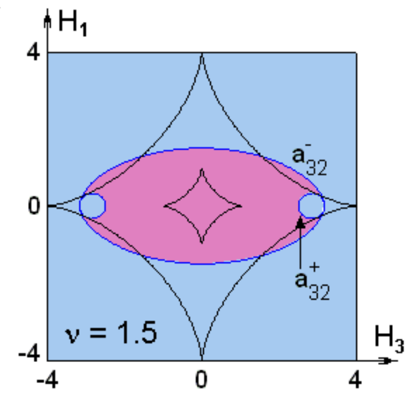


Рис. 7

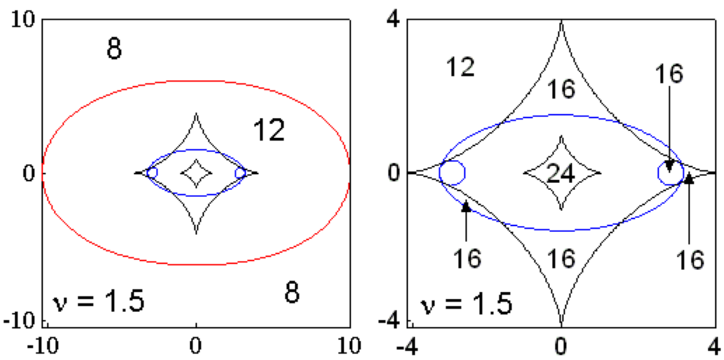


Рис.8

На рис. 8 показано финальное разбиение плоскости (H_3, H_1) кривыми (16), (30) и a_{32}^{-}, a_{33}^{-}, a_{32}^{+}, a_{33}^{+} на подобласти, в каждой из которых существует определенное число равновесий (справа центральная часть разбиения увеличена). Отметим, что кривые a_{32}, a_{33} симметричны относительно координатных осей, что непосредственно следует из (18), (20).

Интересно проследить эволюцию найденных положений равновесия при изменении параметров системы. Например, рассмотрим поведение решений при смещении в плоскости (H_3, H_1) из начала координат вдоль прямой T $(H_1 = H_3)$ при фиксированном $\nu = 1.5$ (рис. 9). Каждое положение равновесия группы I (группы III) определяется выбором одного из корней уравнения (13) (уравнения (28)) и выбором знака направляющего косинуса a_{32} (a_{12}). Каждое положение равновесия группы II определяется выбором одного из корней уравнения (17) и выбором знаков направляющих косинусов a_{32} и a_{33}. В соответствии с этим проиндексируем равновесия (табл. 1) и построим зависимости отвечающих им углов α, β, γ от $T = |H_1| = |H_3|$ (рис. 10).

Таблица 1

Группа I			**Группа II**				**Группа III**		
Корень (13)	Знак a_{32}	Индекс	Корень (17)	Знак a_{32}	Знак a_{33}	Индекс	Корень (28)	Знак a_{12}	Индекс
1	-	1.1	1	-	-	2.1	1	-	3.1
	+	1.2		-	+	2.2		+	3.2
2	-	1.3		+	-	2.3	2	-	3.3
	+	1.4		+	+	2.4		+	3.4
3	-	1.5	2	-	-	2.5	3	-	3.5
	+	1.6		-	+	2.6		+	3.6
4	-	1.7		+	-	2.7	4	-	3.7
	+	1.8		+	+	2.8		+	3.8

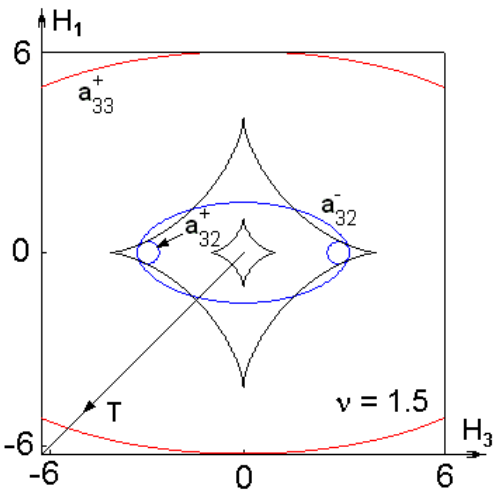


Рис.9

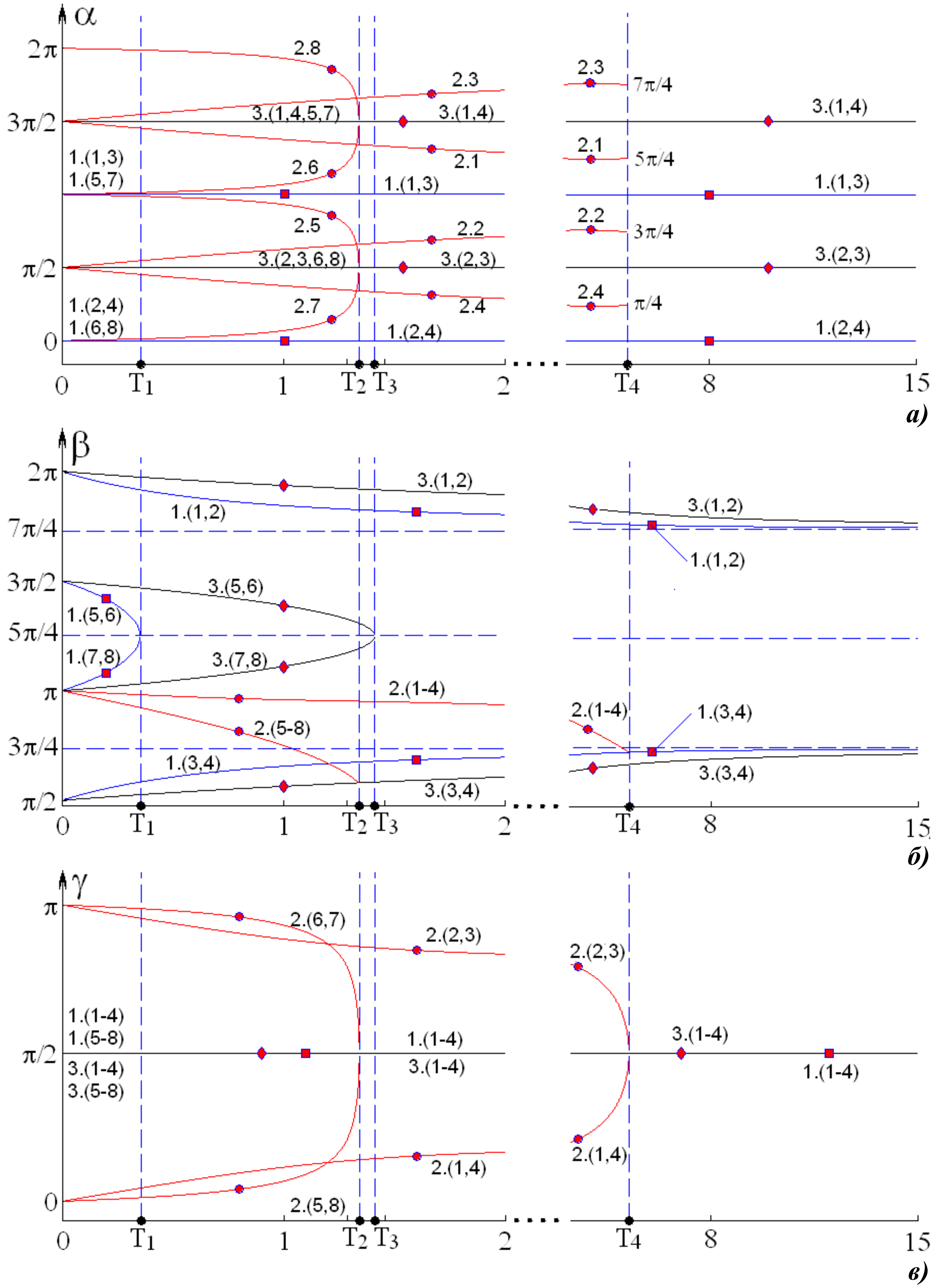


Рис. 10: Эволюция положений равновесий

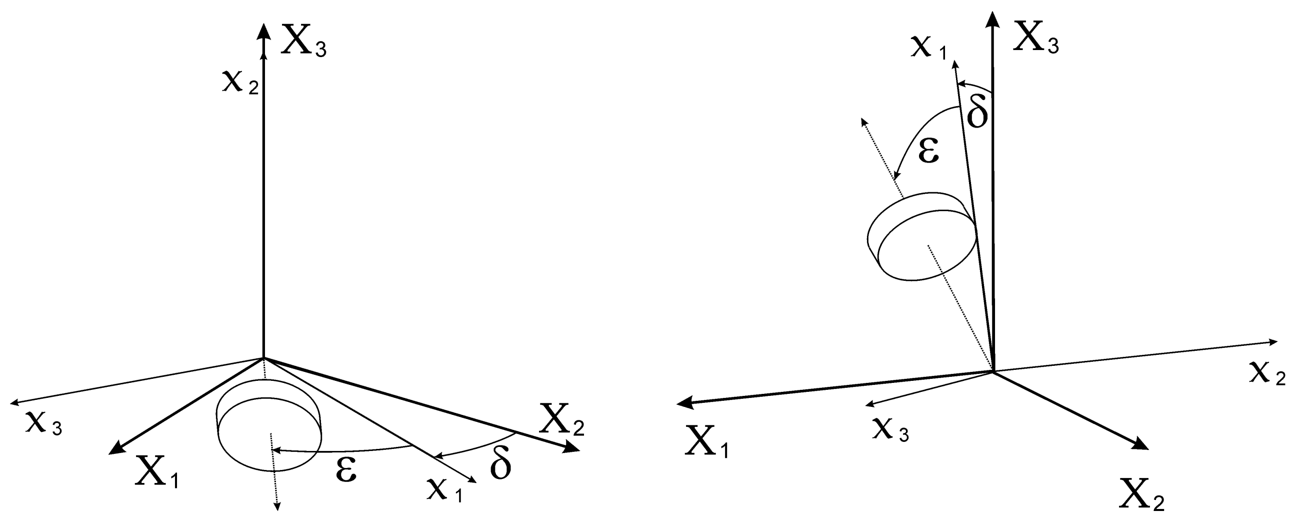
Каждая кривая на рисунках снабжена индексом соответствующего ей решения и маркером. Маркер «квадрат» соответствует решениям группы I, маркер «круг» - решениям группы II и маркер «ромб» - решениям группы III.

Как видно из рис. 10, существуют 4 значения параметра T, при которых происходит смена общего числа решений. При $T \in (0, T_1)$ существуют все 24 решения. Значение $T = T_1$, соответствует пересечению прямой T и кривой (16). В этом случае 4 решения группы I перестают существовать (угол β, соответствующий этим решениям, принимает значение $5\pi/4$). При $T \in (T_1, T_2)$ существуют 20 решений (равновесий), а при $T = T_2$ (пересечение прямой T и кривой a_{32}^{-}) 4 решения группы II переходят в 4 решения группы III, а именно $2.(5,7) \Rightarrow 3.3$, $2.(6,8) \Rightarrow 3.4$. При $T \in (T_2, T_3)$ существуют 16 равновесий. Значение $T = T_3$ соответствует пересечению прямой T и кривой (30) и 4 решения группы III (решения 3.(5-8)) перестают существовать (угол β, соответствующий этим решениям, принимает значение $5\pi/4$). При $T \in (T_3, T_4)$ существуют 12 решений, а при $T = T_4$ (пересечение прямой T и кривой a_{33}^{+}) 4 оставшихся решения группы 2, а именно 2.(1-4), также исчезают. При $T > T_4$ существуют только 8 решений (решения 1.(1-4) и 3.(1-4)), причем, углы α, γ для этих решений имеют постоянные значения, а углы β с ростом T стремятся к постоянным значениям.

На рис.11 схематично представлена геометрическая интерпретация положений равновесия первой и третьей групп. Для группы I оси X_3 и x_2 параллельны или антипараллельны друг другу, угол между осями X_2 и x_1 определяется из соотношения $\cos\delta = H_1 x_1/(H_3 + x_1)$, а положение вектора гиростатического момента в плоскости (x_1, x_3) определяется углом ε, для которого $tg\varepsilon = H_3/H_1$. Для группы III оси X_1 и x_2 параллельны или антипараллельны друг другу, угол между осями X_3 и x_1 определяется из соотношения $\cos\delta = \mp(H_1 x_3 + H_3)/4$, а положение вектора гиростатического момента определяется также, как и для группы I.

Таким образом, для всех решений группы I кинетический момент повернут вокруг радиуса-вектора (по рысканью), а для решений группы III – относительно трансверсали (по крену). В обоих случаях в положении равновесия гироскопический момент, обусловленный несовпадением вектора кинетического момента и нормали к плоскости орбиты, уравновешивается гравитационным моментом, действующим на отклоненный от орбитального трехгранника спутник.

Для решений группы II ни одна ось связанной системы координат не совпадает ни с одной осью орбитальной системы координат, положение вектора гиростатического момента в плоскости (x_1, x_3) так же как и для других двух групп определяется из соотношения $tg\varepsilon = H_3/H_1$.



1) 2)

Рис. 11: (1) группа I, (2) группа III.

Теперь рассмотрим эволюцию областей выполнения условий (25) при изменении параметра ν. Отметим тот факт, что достаточно ограничиться рассмотрением ситуаций, когда $\nu \in (\infty, -0.5]$. Из уравнения (17) следует, что при замене $(H_3, H_1, \nu) \rightarrow (H_1, -H_3, -(\nu+1))$ $x_2 \rightarrow -1/x_2$. А, согласно (20), при замене $(H_3, H_1, \nu, x_2) \rightarrow (H_1, -H_3, -(\nu+1), -1/x_2)$ величины a_{32}^2, a_{33}^2 не изменяются. То есть, значение параметра $\nu = -0.5$ является «центром симметрии» данной задачи. Для того чтобы получить картину областей, описывающих различное число равновесий, при $\nu^* < -0.5$, достаточно повернуть области выполнения (25) при $\nu = -(1+\nu^*) > -0.5$ на $\pi/2$ в плоскости (H_3, H_1). Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением интервала $\nu \in [-0.5, +\infty)$.

При анализе эволюции областей выполнения условий (25) особый интерес представляют ситуации, когда кривые a_{32}, a_{33} проходят через характерные точки $(\pm 1,\ 0)$, $(0,\ \pm 1)$, $(\pm 4,\ 0)$ и $(0,\ \pm 4)$, так как в этих случаях происходит качественная смена вида областей существования различного числа решений групп I-III. Из (25) следует, что на прямых $H_3 = 0, H_1 = 0$ неравенства в случае положительного знака перед радикалом обращаются в тождества, т.е. (25) выполняются для любого значения ν. Рассмотрим случай отрицательного знака. Неравенства (25) принимают вид

$$c_1^2 a_0 \geq 0, \quad c_1^2 b_0 \geq 0, \tag{31}$$

и все определяется знаками a_0 и b_0.

На прямой $H_1 = 0$

$$a_0 = 16\nu^2, \quad b_0 = \nu^2\left[(1+\nu)^2 - H_3^2\right].$$

Первое неравенство (31) выполняется для любого значения ν. Второе неравенство (31) верно, когда $H_3 \in \left[-(\nu+1),\ (\nu+1)\right]$. Кривая a_{33}^- проходит через точку (1, 0), когда $\nu = 0$ и $\nu = -3/4$, а кривая a_{32}^- проходит через эту точку, если $\nu = 0$ и $\nu = -2$. Напомним, что значения $\nu < -0.5$ нас не интересуют. Кривая a_{32}^- проходит через точку (4, 0) в случаях, когда $\nu = 0$ и $\nu = 3$, а кривая a_{33}^- проходит через эту точку при $\nu = 0$.

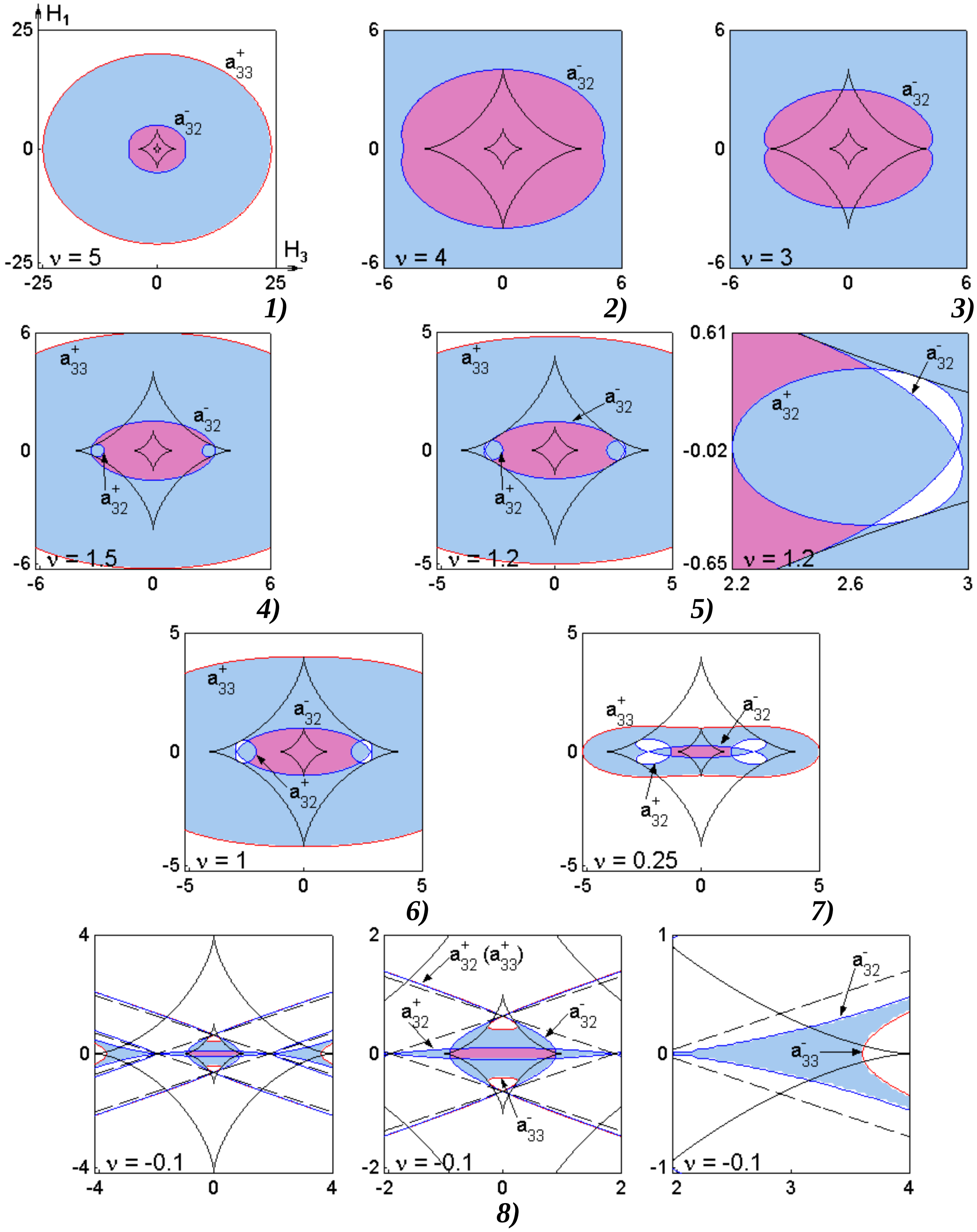
На прямой $H_3 = 0$

$$a_0 = 16\nu^2 - H_1^2, \quad b_0 = \nu^2(1+\nu)^2.$$

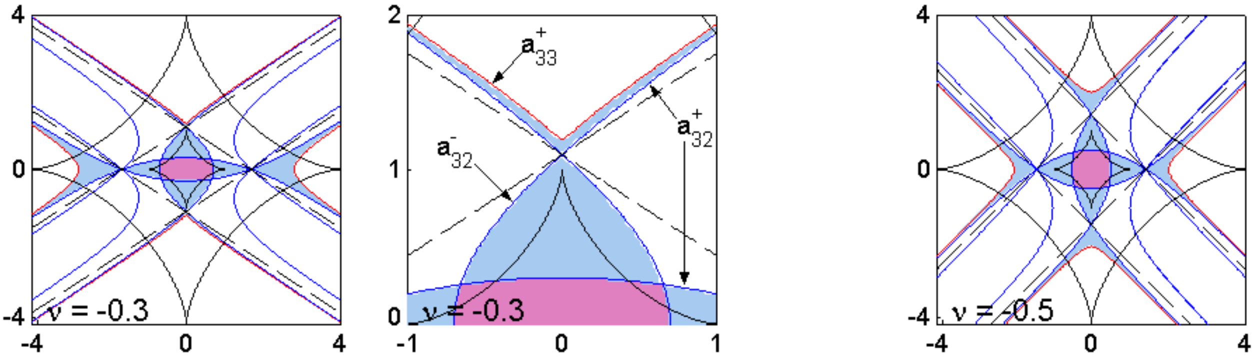
Первое неравенство (31) выполняется, когда $H_1 \in [-4\nu,\ 4\nu]$. Второе неравенство (31) верно для любого значения ν. Кривая a_{33}^- проходит через точку (0, 1), когда $\nu = \pm 1/4$, а кривая a_{33}^- проходит через эту точку, когда $\nu = 0$, $\nu = -1/4$. Кривая a_{33}^- проходит через точку (0, 4), если $\nu = 1$, а кривая a_{33}^- проходит через эту точку, если $\nu = 0$. Таким образом, можно выделить следующие значения параметра ν, при которых происходит качественное изменение вида областей существования различного числа решений групп I-III:

$$\nu = -1/4, \quad 0, \quad 1/4, \quad 1, \quad 3.$$

Примеры областей выполнения (25) представлены на рис. 12. Приведены характерные ситуации, при которых происходит качественная смена областей существования различного числа решений.



H1
H3
25
0
-25
a_{33}^{+}
a_{32}^{-}
$\nu = 5$
1)
$\nu = 4$
2)
$\nu = 3$
3)
a_{32}^{+}
$\nu = 1.5$
4)
$\nu = 1.2$
0.61
-0.02
-0.65
2.2
2.6
3
5)
$\nu = 1$
6)
$\nu = 0.25$
7)
a_{32}^{+} (a_{33}^{+})
a_{33}^{-}
$\nu = -0.1$
8)



9) *10)*

Рис. 12: Эволюция областей выполнения (25)

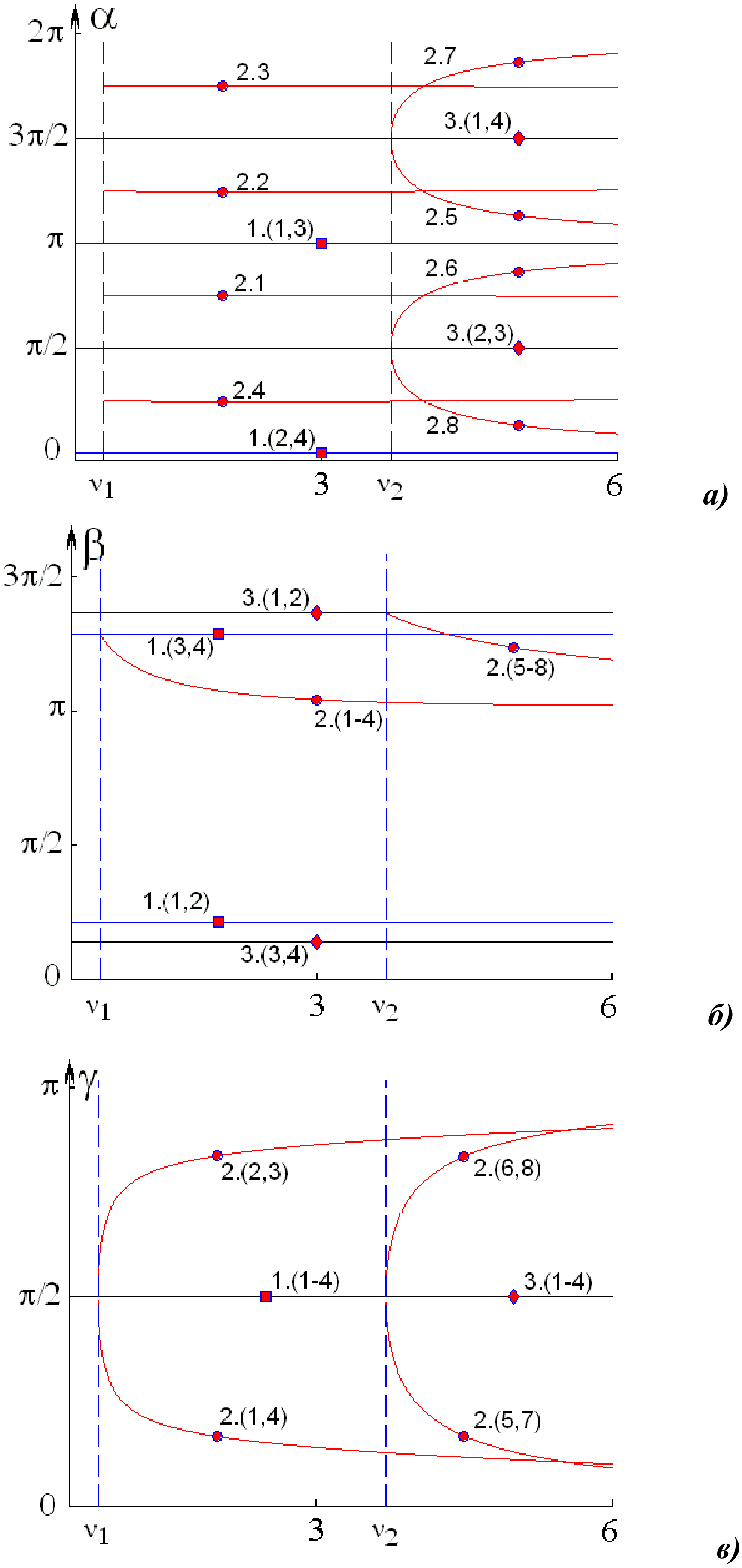
При $\nu = 4$ (рис. 12.2) происходит пересечение кривых a_{32}^{-} и (30) в точках $(0, \pm 4)$. При $\nu = 3$ (рис. 12.3), также происходит пересечение кривых a_{32}^{-} и (30), но уже в точках $(\pm 4, 0)$. Кроме этого, при $\nu = 3$ происходит зарождение новых областей, ограниченных кривыми a_{32}^{+}, в которых условия (25) не выполняются для положительного знака перед радикалом. Эти области при $\nu = 1.5$ показаны на рис. 12.4. На рисунках 12.2-3 граница a_{33}^{+} находится вне поля рисунка и не показана, так как не претерпевает никаких качественных изменений. Дальнейшее уменьшение параметра ν приводит к тому, что кривые a_{32}^{-} и a_{32}^{+} пересекаются, вследствие чего появляются области, в которых условия (25) не выполняются. Пример таких областей представлен на втором рисунке 12.5. При $\nu = 1.2$ (рис. 12.5) происходит касание кривых a_{32}^{-} и (30). При $\nu = 1$ (рис. 12.6) кривые a_{33}^{+} и (30) пересекаются в точках $(0, \pm 4)$ а кривые a_{32}^{-} и (16) в точках $(0, \pm 1)$. При $\nu = 0.25$ (рис.12.7) происходит касание кривых a_{33}^{+} и (16). Дальнейшее уменьшение параметра ν ведет к «сужению» областей выполнения условий (25). При $\nu = 0$ все области выполнения условий (25) вырождаются в прямую $H_1 = 0$.

После прохождения нуля необходимо учитывать неравенства (22). На рис. 12.8 показана ситуация, когда $\nu = -0.1$ (приведен общий рисунок и два его фрагмента в увеличенном масштабе). Пунктирные линии – границы областей выполнения условий (22). При $\nu = -0.25$ кривая a_{32}^{-} проходит через точки $(0, \pm 1)$, а области, ограниченные кривыми a_{33}^{-}, вырождаются в эти точки и перестают существовать. Рис. 12.10 симметричен относительно прямых $H_3 = 0, \quad H_1 = 0$.

Теперь построим картину эволюции углов α, β, γ каждого из 24-х положений равновесия вдоль прямой $H_3 = H_3^* = const,\quad H_1 = H_1^* = const$ в пространстве (H_3, H_1, ν). В качестве примера рассмотрим прямую $H_3^* = -3$, $H_1^* = 3$. На рис. 13(а,б,в) показана эволюция углов α, β, γ. При этом используется прежняя индексация равновесий (см. табл. 1). Понятно, что в рассматриваемой точке (H_3^*, H_1^*) решения 1.5-8 группы I и решения 3.5-8 группы III не существуют. Отметим, что в точке (H_3^*, H_1^*) при $\nu \in [-0.5, 0)$ условия (22) не выполняются.

Как видно из рис. 13, для случая $\nu \in [0, +\infty)$ существует два бифуркационных значения параметра ν, при которых происходит изменение общего числа решений. При $\nu = \nu_1$ через точку (H_3^*, H_1^*) проходит кривая a_{32}^- и четыре решения группы II переходят в решения группы III, а именно $2.(5,7) \Rightarrow 3.1$ и $2.(6,8) \Rightarrow 3.2$. При $\nu = \nu_2$ через точку (H_3^*, H_1^*) проходит кривая a_{33}^+ и оставшиеся четыре решения группы II также перестают существовать.

Таким образом, проведенный анализ показал, что на границах a_{32}^- и a_{32}^+ решения 2.(5-8) группы II переходят в решения 3.(1-4) группы III. На границах a_{33}^- и a_{33}^+ решения 2.(1-4) исчезают. Также исчезают решения 1.(5-8) группы I на границе (16) и решения 3.(5-8) группы III на границе (30).



2π
α
3π/2
π
π/2
0
2.3
2.2
1.(1,3)
2.1
2.4
1.(2,4)
2.7
3.(1,4)
2.5
2.6
3.(2,3)
2.8
ν1
3
ν2
6
а)
β
3π/2
π
π/2
0
3.(1,2)
1.(3,4)
2.(5-8)
2.(1-4)
1.(1,2)
3.(3,4)
ν1
3
ν2
6
б)
π
γ
π/2
0
2.(2,3)
2.(6,8)
1.(1-4)
3.(1-4)
2.(1,4)
2.(5,7)
ν1
3
ν2
6
в)

Рис. 13

5. Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Для получения достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата воспользуемся обобщенным интегралом энергии (4). Представим α, β, γ в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \bar{\beta}, \quad \gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma},$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ - малые отклонения от положения равновесия спутника $\alpha = \alpha_0 = const$, $\beta = \beta_0 = const$, $\gamma = \gamma_0 = const$. Тогда интеграл энергии может быть записан в виде [2]

$$\begin{aligned} &A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2 + \omega_0^2 \big(A_{\alpha\alpha}\bar{\alpha}^2 + A_{\beta\beta}\bar{\beta}^2 + A_{\gamma\gamma}\bar{\gamma}^2 + 2A_{\alpha\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta} + \\ &\qquad + 2A_{\beta\gamma}\bar{\beta}\bar{\gamma} + 2A_{\gamma\alpha}\bar{\gamma}\,\bar{\alpha} \big) + \Sigma = const, \end{aligned}$$

где Σ обозначает члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= 3\left[(A-C)\left(\bar{a}_{11}^2 - \bar{a}_{31}^2\right) + (B-C)\left(\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{32}^2\right)\right], \\ A_{\beta\beta} &= \left[(B-A) - (B-C)\sin^2\gamma_0\right]\left(1 + 3\sin^2\alpha_0\right)\cos 2\beta_0 - \\ &\quad - \frac{3}{4}(B-C)\sin 2\alpha_0 \sin\beta_0 \sin 2\gamma_0 + h_1\bar{a}_{21} + h_3\bar{a}_{23}, \\ A_{\gamma\gamma} &= (B-C)\left[\left(\bar{a}_{22}^2 - \bar{a}_{23}^2\right) - 3\left(\bar{a}_{32}^2 - \bar{a}_{33}^2\right)\right] + h_3\bar{a}_{23}, \\ A_{\alpha\beta} &= -\frac{3}{2}(A-C)\sin 2\alpha_0 \sin 2\beta_0 + 3(B-C)\left(\bar{a}_{32}\cos\alpha_0 - \bar{a}_{12}\sin\alpha_0\right)\bar{a}_{22}, \\ A_{\beta\gamma} &= -\frac{1}{2}(B-C)\sin 2\beta_0 \sin 2\gamma_0 - 3(B-C)\left(\bar{a}_{33}\cos\gamma_0 - \bar{a}_{32}\sin\gamma_0\right)\bar{a}_{31} - \\ &\quad - h_3\bar{a}_{21}\cos\gamma_0, \\ A_{\gamma\alpha} &= -3(B-C)\left(\bar{a}_{12}\bar{a}_{33} + \bar{a}_{13}\bar{a}_{32}\right); \\ \bar{a}_{ij} &= a_{ij}\left(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Из теоремы Ляпунова следует, что решение $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$ устойчиво, если квадратичная форма

$$A_{\alpha\alpha}\bar{\alpha}^2 + A_{\beta\beta}\bar{\beta}^2 + A_{\gamma\gamma}\bar{\gamma}^2 + 2A_{\alpha\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta} + 2A_{\beta\gamma}\bar{\beta}\bar{\gamma} + 2A_{\gamma\alpha}\bar{\gamma}\,\bar{\alpha}$$

является определенно-положительной, т.е. при

$$A_{\alpha\alpha} > 0, \quad A_{\alpha\alpha}A_{\beta\beta} - A_{\alpha\beta}^2 > 0,$$

$$A_{\alpha\alpha}A_{\beta\beta}A_{\gamma\gamma} + 2A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}A_{\alpha\gamma} - A_{\alpha\alpha}A_{\beta\gamma}^2 - A_{\beta\beta}A_{\alpha\gamma}^2 - A_{\gamma\gamma}A_{\alpha\beta}^2 > 0.$$

Заметим, что для решений (14) и (29) $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\gamma} = 0$ и достаточные условия устойчивости упрощаются:

$$A_{\alpha\alpha} > 0, \quad A_{\beta\beta} > 0, \quad A_{\alpha\alpha}A_{\gamma\gamma} - A_{\alpha\gamma}^2 > 0.$$

Таким образом, для решений (14) они принимают вид

$$\begin{gathered}
(A-C)x_1^2 + (C-B) > 0, \\
(C-A)(2x_1^2 - 1) + \frac{h_1^2 x_1}{(C-A)x_1 + h_3} + h_3 x_1 > 0, \\
\left[(A-C)x_1^2 + (C-B)\right]\left[(C-B)(3+x_1^2) + h_3 x_1\right] - \frac{3(C-B)^2 h_1^2 x_1^2}{\left[(C-A)x_1 + h_3\right]^2} > 0.
\end{gathered} \tag{33}$$

Для решений (29) имеем

$$\begin{gathered}
\frac{(C-A)x_3^2}{1+x_3^2} + (B-C) > 0, \\
\frac{(C-A)(h_3 - h_1 x_3^3)}{(x_3^2+1)(h_1 x_3 + h_3)} > 0, \\
(B-C)^2(3-x_3^2) + 4\frac{(A-C)(B-C)h_3 x_3^2}{h_1 x_3 + h_3} - \frac{(A-C)(B-C)(3-x_3^2)x_3^2}{x_3^2+1} - \\
-4\frac{(A-C)^2 h_3 x_3^4}{(x_3^2+1)(h_1 x_3 + h_3)} - 48\frac{(A-C)^2(B-C)^2 x_3^2}{(x_3^2+1)(h_1 x_3 + h_3)^2} > 0.
\end{gathered} \tag{34}$$

Исследование устойчивости стационарных решений группы II оказывается значительно более трудоемким. При этом должны использоваться соотношения (18)-(20) для определения a_{31}, a_{32}, a_{33} и (26) для оставшихся элементов матрицы направляющих косинусов. Затем однозначно определяются углы $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, вычисляются коэффициенты квадратичной формы (32) и условия ее положительной определенности.

Рассмотрим достаточные условия устойчивости решений (14) и (29) более подробно. Условия (33) в зависимости от соотношения между моментами инерции спутника A и C и с использованием безразмерных параметров (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
A > C: &\quad y_1^1 > 0,\; y_2^1 < 0,\; y_3^1 > 0; \\
A < C: &\quad y_1^1 < 0,\; y_2^1 > 0,\; y_3^1 > 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь

$$y_1^1 = x_1^2 - 1 - \nu\,;$$

$$y_2^1 = H_3\, x_1 + \frac{H_1^2 x_1}{H_3 + x_1} + 2\, x_1^2 - 1;$$

$$y_3^1 = \left[1 + \nu - x_1^2\right]\left[(1+\nu)\left(3 + x_1^2\right) + H_3\, x_1\right] - \frac{3(1+\nu)^2 H_1^2 x_1^2}{\left(x_1 + H_1\right)^2}.$$

Напомним, что $x_1 = a_{23}$ является вещественным корнем уравнения (13), причем в области, ограниченной кривой (16) существуют четыре таких корня, а в остальной части плоскости (H_3, H_1) только два. Также нетрудно показать, что области выполнения достаточных условий устойчивости (35) антисимметричны в плоскости (H_3, H_1) относительно координатных осей.

Аналогичным образом можно записать условия (34). Имеем

$$\begin{aligned} A > C: &\quad y_1^3 < 0,\ y_2^3 < 0,\ y_3^3 > 0; \\ A < C: &\quad y_1^3 > 0,\ y_2^3 > 0,\ y_3^3 > 0, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$y_1^3 = \frac{x_3^2}{1 + x_3^2} - 1 - \nu\,;$$

$$y_2^3 = \frac{H_1\, x_3^3 - H_3}{H_1\, x_3 + H_3}\,;$$

$$y_3^3 = (1+\nu)^2\left(3 - x_3^2\right) + \frac{4(1+\nu) H_3\, x_3^2}{H_1\, x_3 + H_3} - \frac{(1+\nu) x_3^2 \left(3 - x_3^2\right)}{1 - x_3^2} -$$

$$- \frac{4 H_3\, x_3^4}{\left(1 + x_3^2\right)\left(H_1\, x_3 + H_3\right)} - \frac{48(1+\nu)^2 x_3^2}{\left(1 + x_3^2\right)\left(H_1\, x_3 + H_3\right)^2}.$$

Здесь $x_3 = a_{31}/a_{33}$ - один из действительных корней уравнения (28). Как и в предыдущем случае, уравнение (28) имеет четыре корня в области, ограниченной кривой (30), и два корня в остальной части плоскости (H_3, H_1). Кроме того, легко показать, что области выполнения достаточных условий устойчивости (36) симметричны в плоскости (H_3, H_1) относительно координатных осей.

Для иллюстрации полученных результатов построим области выполнения достаточных условий устойчивости для решения группы I, соответствующего одному из корней (13), существующему на всей плоскости (H_3, H_1).

Условия $y_i^1 = 0$ определяют на плоскости (H_3, H_1) различные кривые. Некоторые из этих кривых являются границами областей выполнения достаточных условий устойчивости. Будем считать, что $y_1^1 = 0$ определяет набор кривых $a_i = 0$, $y_2^1 = 0$ - набор кривых $b_i = 0$ и $y_3^1 = 0$ - набор кривых $c_i = 0$. Условие $y_2^1 = 0$ не зависит от ν и для рассматриваемого корня определяет на плоскости (H_3, H_1) три кривые b_1, b_2, b_3 (рис. 14).

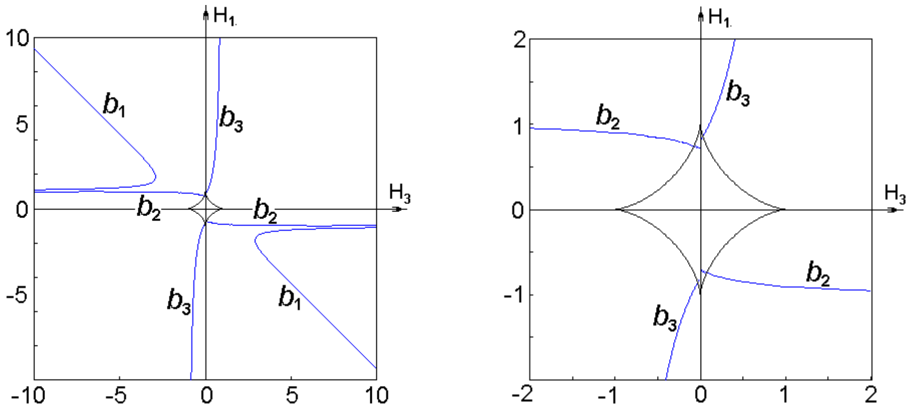
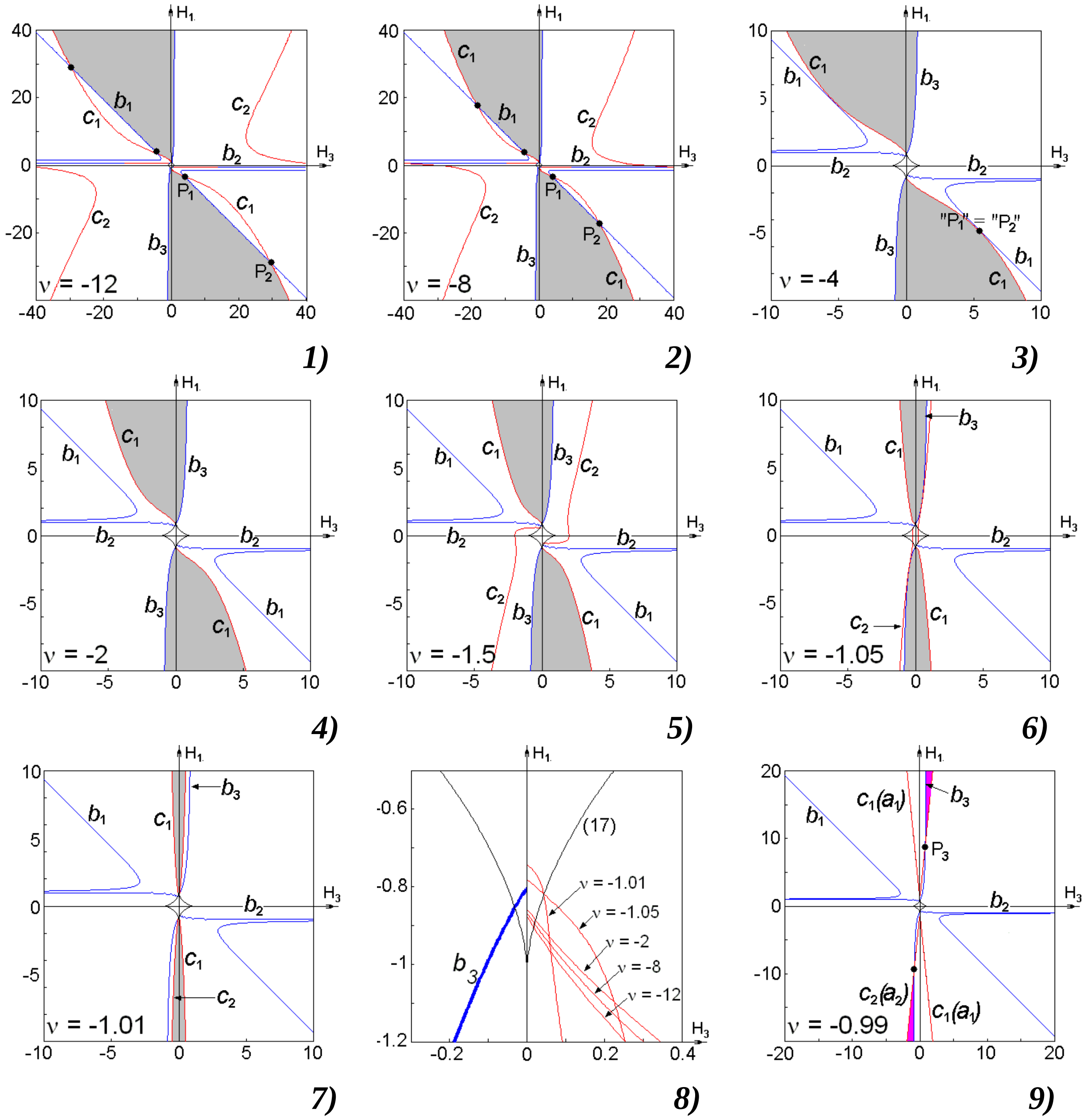


Рис. 14

Эволюция областей выполнения достаточных условий устойчивости в зависимости от величины параметра ν представлена на рис.15. Как уже отмечалось ранее, следует различать два случая $A < C$ и $A > C$. Для первого случая используется серая окраска областей, а для второго - розовая. При больших по модулю отрицательных значениях ν области устойчивости (для случая $A < C$) ограничены кривыми b_1, b_3, c_1. Кривые b_1, c_1 пересекаются в точках P_1 и P_2, причем расстояние между этими точками уменьшается с ростом ν (рис. 15.1, 15.2). При $\nu \approx -4$ прямые b_1, c_1 касаются (рис. 15.3) и при дальнейшем увеличении ν области устойчивости ограничены только кривыми b_3, c_1 (рис. 15.4, 15.5). При $\nu \approx -1.05$ происходит касание кривых b_3, c_2, вследствие чего границами областей устойчивости становятся кривые b_3, c_1, c_2 (рис. 15.6, 15.7). При $\nu = -1$ кривые c_1, c_2 вырождаются в $H_3 = 0$. Эволюция областей устойчивости в области (16) при изменении ν от $-\infty$ до -1 не претерпевает серьезных изменений, что иллюстрирует рис.15.8. На нем приведены кривая b_3 и кривые c_1 для различных значений ν.

Дальнейшее увеличение параметра ν ведет к появлению областей устойчивости для случая $A > C$. Данные области ограничены кривыми b_3, c_2, причем их точка пересечения P_3 приближается к области ограниченной (16) (рис. 15.9, 15.10), при $\nu \approx -0.616$ P_3 ложится на (16), а при $\nu \approx -0.595$ ложится на $H_3 = 0$. При $\nu \approx -0.5$ кривые b_1, c_1 параллельны на бесконечности и дальнейший рост ν приводит к их пересечению и, как следствие, к появлению новых областей устойчивости, ограниченных ими (рис. 15.11). Дальнейшая эволюция областей устойчивости обусловлена эволюцией кривых b_1, c_1 и b_3, c_2 (рис. 15.12 – 15.14). Как показал численный анализ, при дальнейшем увеличении параметра ν новых взаимопересечений этих кривых не происходит.



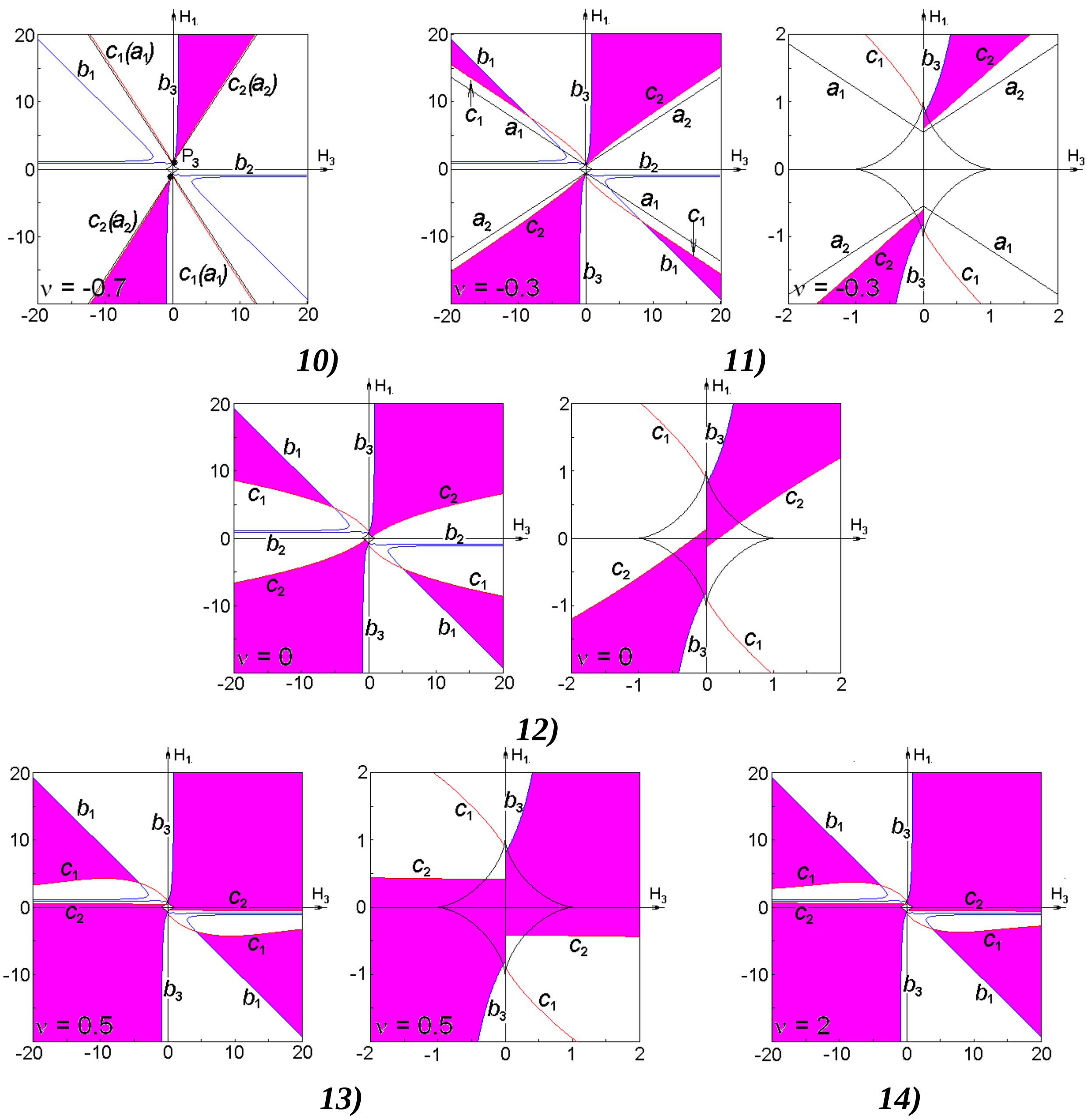


Рис. 15: Эволюция областей устойчивости

6. Заключение

В настоящей работе проведено исследование движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента на круговой орбите. В частном случае, когда $h_1 \neq 0$, $h_2 = 0$, $h_3 \neq 0$, определены три группы изолированных стационарных решений, каждая из которых описывает до восьми равновесных ориентаций гиростата. Представлены в явном виде выражения для направляющих косинусов в зависимости от параметров H_1, H_3 и ν для всех найденных равновесий гиростата. Получены условия существования этих равновесий в зависимости от безразмерных параметров задачи. Численно-аналитическим методом проведен детальный анализ эволюции областей существования различного числа решений в плоскости параметров (H_3, H_1) при различных значениях параметра ν. Определены все бифуркационные значения параметров, при которых происходит изменение количества положений равновесия. С использованием теоремы Ляпунова получены в виде неравенств достаточные условия устойчивости положений равновесия. Численно-аналитическим методом подробно исследована эволюция областей выполнения достаточных условий устойчивости в плоскости параметров (H_3, H_1) при различных значениях параметра ν.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00652) и Португальского Фонда по науке и технике.

Литература

1. V.A. Sarychev, S.A. Mirer. Relative equilibria of a gyrostat satellite with internal angular momentum along a principal axis, *Acta Astronautica*, 2001, Vol. 49, №11, 641-644.
2. В.А. Сарычев, С.А.Мирер, А.А. Дегтярев. Динамика спутника-гиростата с одной ненулевой компонентой вектора гиростатического момента, *Космич. исслед.*, 2005, т. 43, №4, 283-294.
3. R. Longman. Gravity-gradient stabilization of gyrostat satellite with rotor axes in principal planes, *Celestial Mechenics*, 1970, 169-188.
4. В.А. Сарычев. *Вопросы ориентации искусственных спутников*, Итоги науки и техники. Серия “Исследование космического пространства”, ВИНИТИ, т. 11, 1978.
5. В.А. Сарычев, С.А. Гутник. К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата, *Космич. исслед.*, 1984, т.22, №3, 323-326.