РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Ордена Ленина Институт прикладной математики
имени М.В.Келдыша

В.Е.Павловский, Н.В.Петровская

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЦЕПОЧКИ «РОБОПОЕЗД». УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Москва, 2005

УДК 531.1

В.Е.Павловский, Н.В.Петровская.
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЦЕПОЧКИ «РОБОПОЕЗД». УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ.

АННОТАЦИЯ.

Дано описание каждого элемента цепочки подвижных роботов и модели в целом. Построены уравнения Воронца, которые используются для вывода уравнений цепочки мобильных роботов для произвольного числа элементов цепочки. Рассмотрены некоторые частные решения полученных уравнений.

Ключевые слова и выражения: цепочка подвижных роботов, неголономная система, уравнения движения.

V.E.Pavlovskiy, N.V.Petrovskaya.
RESEARCH OF DYNAMICS OF MOVEMENT OF A CHAIN OF “ROBOTRAIN”. EQUATIONS OF MOVEMENT, PARTICULAR SOLUTIONS.

ABSTRACT.

The description of model of a chain of mobile robots is given. Voronec equations, which are used for a conclusion of the equations of the chain of mobile robots for any number of elements of the chain, are constructed. Some particular solutions of the received equations are considered.

Key words and phrases: chain of mobile robots, nonholonomic system, equations of movement.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ: 01-01-00079, 02-01-00750, 04-01-00065, а также гранта по программе «Государственная поддержка ведущих научных школ» НШ-1835.2003.1

Содержание

Введение

Цепочка мобильных объектов «робопоезд» – это сложная неголономная система. Задача об управлении движением такой системы имеет важное теоретическое и прикладное значение. Исследования в этой области стимулируются многочисленными прикладными задачами, возникающими в процессе жизнедеятельности человека. К ним можно отнести, например, задачу автоматизированной транспортировки грузов (аэропорты, вокзалы, гипермаркеты, склады) или работу в опасной среде или в среде с заранее неизвестными свойствами (доставка в опасную зону многомодульного состава для выполнения различных операций, связанных с риском для жизни человека).

В настоящее время активно развивается целый класс задач, в которых рассматриваются различные многозвенные, змееподобные системы [1-3]. К ним же относится рассматриваемая в данной работе модель.

Успешное функционирование любой робототехнической системы невозможно без построения математической модели и изучения её свойств. Данная работа посвящена описанию математической модели цепочки мобильных систем «робот-тягач с прицепом» и выводу уравнений движения такой системы. Построены частные решения полученных уравнений.

1. Описание механической системы и постановка задачи.

Рассматривается система, состоящая из объектов, которые мы будем называть «тележками». Каждая тележка представляет собой невесомую ось L длины $2b$ и перпендикулярную ей невесомую ось длины $2a$, на которую насажены два одинаковых колеса. Каждое колесо является плоским однородным диском массы m, радиуса r, перпендикулярным оси тележки. Кузов тележки имеет массу m_i и может перемещаться только параллельно плоскости движения. Вообще говоря, массы кузова у разных тележек могут быть различными. Будем считать, что центр масс тележки совпадает с центром оси колес. Тележки соединены друг с другом при помощи шарнира. Активной назовем тележку, вращением колес которой можно управлять при помощи электродвигателей. Пассивной назовем тележку без управления. Тележки движутся по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости в однородном поле силы тяжести.

Пусть OXYZ - неподвижная система координат, плоскость OXY совпадает с горизонтальной плоскостью; $C_1 \dots C_n$ - соответственно центры осей тележек; C_1xyz … C_nxyz - системы координат, жестко связанные с тележками (осями тележек), θ_1, $\theta_2,...,\theta_n$ - углы поворота осей L соответствующих тележек вокруг вертикали, в дальнейшем кроме углов $\theta_2,...,\theta_n$ будем рассматривать углы поворота оси L i-й тележки ($i=1,2,...,n$) относительно оси L предыдущей тележки $\psi_2,...,\psi_n$, где

$\psi_2 = \theta_2 - \theta_1, ..., \psi_n = \theta_n - \theta_{n-1}$, x_1, y_1 ,…,x_n, y_n - координаты точек $C_{1,\dots,}C_n$ соответственно, φ_{11}, φ_{12}, … , φ_{n1}, φ_{n2}- углы поворота колес соответствующих тележек относительно их осей, отсчитываемые от проекции положительного направления оси Cz на плоскость колеса против часовой стрелки (если смотреть в сторону вектора $\vec{e}_y$).

На рис.1 изображена проекция описанной системы на горизонтальную плоскость.

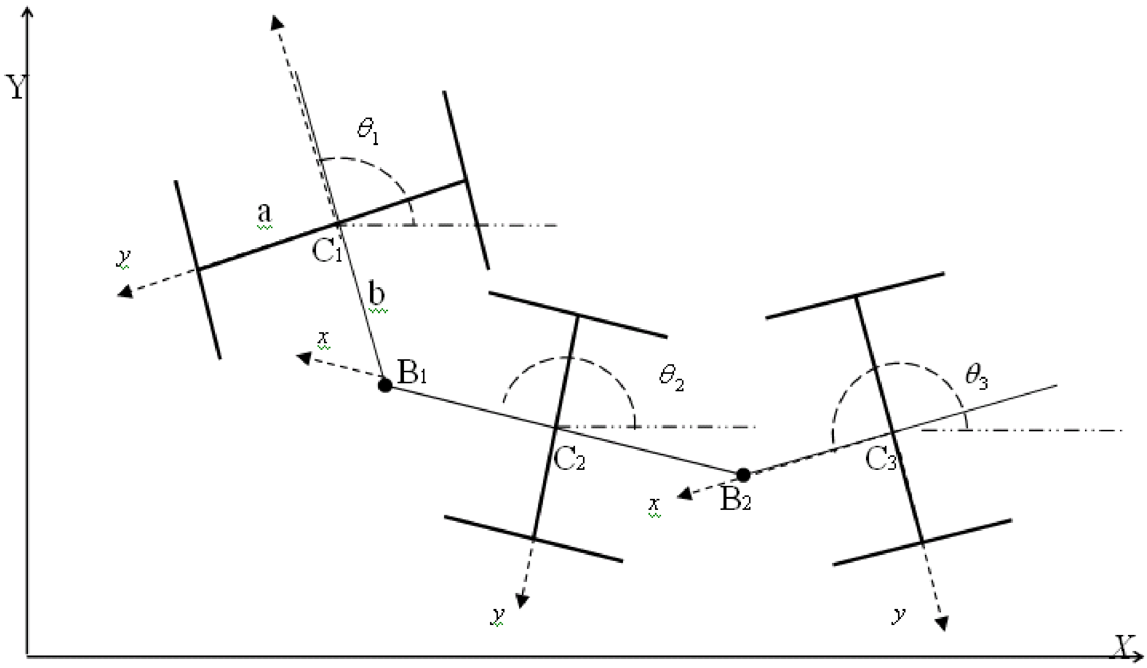

Рис.1.Проекция на горизонтальную плоскость.

На *i-ю* тележку в точках B_{i-1}, B_i действуют неизвестные силы реакции соответственно -$\vec{F}_{i-1}(F_{i-1,x}, F_{i-1,y})$ и $\vec{F}_i(F_{i,x}, F_{i,y})$. Условие качения без проскальзывания обуславливает наличие неинтегрируемых связей.

Обобщенные координаты q = (x_1, y_1,…, x_n, y_n; $\theta_1, \psi_2, ..., \psi_n$; φ_{11}, φ_{12},…, φ_{n1}, φ_{n2}) определяют положение механической системы в каждый момент времени.

Рассмотрим связи, наложенные на одну тележку, как на элемент цепочки тележек. Так как плоскость абсолютно шероховатая, то скорость точек K_1, K_2 контакта соответствующих колес с плоскостью должна быть равна нулю. Используя теорему Эйлера для расчета скорости точки контакта, получаем уравнения дифференциальных связей:

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - a\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_1 = 0 \\ \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + a\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_2 = 0 \\ -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x} = (a\dot{\theta} + r\dot{\varphi}_1)\cos\theta \\ \dot{y} = (a\dot{\theta} + r\dot{\varphi}_1)\sin\theta \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{2a}{r}\dot{\theta} + \dot{\varphi}_1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Из полученных уравнений видно, что эти связи, наложенные на систему, неголономны [5].

Кроме того, на тележку в цепи наложены связи, определяемые сцепкой с соседними тележками. А именно, условие что любые две соседние тележки имеют одну общую точку - точку сцепки. Это условие из простых геометрических соображений для двух тележек i и i+1 имеет вид:

$$\begin{cases} x_{i+1} + b\cos\theta_{i+1} = x_i - b\cos\theta_i \\ y_{i+1} + b\sin\theta_{i+1} = y_i - b\sin\theta_i \end{cases},$$

или в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_i + b\dot{\theta}_i\sin\theta_i = \dot{x}_{i+1} - b\dot{\theta}_{i+1}\sin\theta_{i+1} \\ \dot{y}_i - b\dot{\theta}_i\cos\theta_i = \dot{y}_{i+1} + b\dot{\theta}_{i+1}\cos\theta_{i+1} \end{cases} \qquad (1.2)$$

Для описания движения системы в общем случае будем использовать уравнения движения неголономных систем в виде уравнений Воронца. В случае одной тележки, как показывается ниже, можно применить уравнения Чаплыгина.

Рассмотрим движение одной свободной тележки. Найдем её кинетическую энергию *T*. Очевидно, $T = T_0 + T_1 + T_2$, где T_0 - кинетическая энергия кузова, T_1, T_2 - кинетические энергии правого и левого колес соответственно. Пусть A_1, A_2 – центр масс левого и правого колес (если смотреть в сторону вектора $\vec{e}_x$). Кинетическая энергия кузова тележки определяется выражением:

$$T_0 = \frac{m_0^1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + k_0^2\dot{\theta}^2\right),$$

где m_0^1 - масса кузова, k_0- радиус инерции кузова относительно вертикали, проходящей через точку (x, y).

Составим выражение для кинетической энергии колес. Известно, что $T_i = \frac{1}{2}m\bar{v}_i^2 + \frac{1}{2}J\bar{\omega}_i^2$, где $\vec{v}_i$- абсолютная скорость точки A_i, $\vec{\omega}_i$- абсолютная угловая скорость *i*-го колеса, *J* - тензор инерции колеса, построенный для его центра. Тогда для первого колеса получим

$$T_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}^2 - 2a\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\left(C\dot{\varphi}_1^2 + A\dot{\theta}^2\right)$$

где $C = \frac{1}{2}mr^2, A = \frac{1}{4}mr^2$ - моменты инерции относительно оси колеса и вертикали соответственно.

Аналогично для второго колеса:

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}^2 - 2a\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\left(C\dot{\varphi}_2^2 + A\dot{\theta}^2\right)$$

Следовательно, кинетическая энергия одной тележки равна:

$$T = \frac{m^1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \frac{1}{2}\left(m_0^1 k_0^2 + 2ma^2 + 2A\right)\dot{\theta}^2 \tag{1.3}$$

где $m^1 = m_0^1 + 2m$. Обозначим $M_1 = \frac{1}{2}\left(m_0^1 k_0^2 + 2ma^2 + 2A\right)$

Тогда, учитывая соотношения (1.2), получаем

$$T^* = \left(\frac{m^1 a^2}{2} + ma^2 + M_1\right)\dot{\theta}^2 + \left(m^1 + m\right)ar\dot{\varphi}_1\dot{\theta} + \frac{\left(m^1 + m\right)}{2}r^2\dot{\varphi}_1^2 \tag{1.4}$$

Для того чтобы написать уравнения движения, перепишем уравнения связей (1.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_{11}\dot{\theta} + \alpha_{12}\dot{\varphi}_1,\\ \dot{y} &= \alpha_{21}\dot{\theta} + \alpha_{22}\dot{\varphi}_1,,\\ \dot{\varphi}_2 &= \alpha_{31}\dot{\theta} + \alpha_{32}\dot{\varphi}_1\end{aligned} \qquad \text{где} \qquad \begin{aligned}&\alpha_{11} = a\cos\theta, \alpha_{12} = r\cos\theta,\\ &\alpha_{21} = a\sin\theta, \alpha_{22} = r\sin\theta,\\ &\alpha_{31} = \frac{2a}{r}, \alpha_{32} = 1.\end{aligned}$$

Так как коэффициенты уравнений связей и кинетическая энергия тележки не зависят от координат $x,\ y, \varphi_2$, то рассматриваемая система является системой Чаплыгина и можно написать соответствующие уравнения, которые для данной системы имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}A_{12}^2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}A_{12}^3\right)\dot{\varphi}_1, \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}A_{21}^2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}A_{21}^3\right)\dot{\theta},$$

где

$$A_{12}^2 = \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial \theta} = r\sin\theta, A_{21}^2 = \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial \theta} - \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \varphi_1} = -r\sin\theta,$$

$$A_{12}^3 = \frac{\partial \alpha_{31}}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \alpha_{32}}{\partial \theta} = -r\cos\theta, A_{21}^3 = \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \theta} - \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \varphi_1} = r\cos\theta.$$

Поскольку

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mc\cos\theta, \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = mc\sin\theta,$$

где $c = a\dot{\theta} + r\dot{\varphi}_1$,

то имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}A_{12}^2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}A_{12}^3 = mc\cos\theta \cdot r\sin\theta - mc\sin\theta \cdot r\cos\theta = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}A_{21}^2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}A_{21}^3 = mc\cos\theta \cdot (-r\sin\theta) + mc\sin\theta \cdot r\cos\theta = 0.$$

Окончательно получаем, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = Q_1 + \sum_{i=1}^{3} a_{i1} Q_{i+2}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1} = Q_2 + \sum_{i=1}^{3} a_{i2} Q_{i+2} \tag{1.5}$$

Поскольку в данном случае рассматривается свободная тележка и все обобщенные силы равны нулю, то, используя (1.2), получаем следующие динамические уравнения движения свободной тележки:

$$\begin{cases} M\ddot\theta + (m^1+m)ar\ddot\varphi_1 = 0 \\ (m^1+m)ar\ddot\theta + (m^1+m)r^2\ddot\varphi_1 = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

где $M = m^1a^2 + m_0^1k_0^2 + m\left(4a^2 + \frac{r^2}{2}\right)$,

или

$$A\begin{pmatrix}\ddot\theta \\ \ddot\varphi_1\end{pmatrix} = 0, \quad \text{где} \qquad A = \begin{pmatrix} M & (m^1+m)ar \\ (m^1+m)ar & (m^1+m)r^2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (1.1) и (1.6) образуют замкнутую систему уравнений. При этом уравнения (1.6) отделяются от уравнений связей (1.1). Так как $\det A = m_0^1k_0^2 + m\left(3a^2 + \frac{r^2}{2}\right) > 0$, то система (1.6) имеет лишь тривиальное решение:

$$\begin{cases}\ddot\theta = 0 \\ \ddot\varphi_1 = 0\end{cases}, \text{ т.е. } \quad \begin{cases}\dot\theta = \omega \\ \dot\varphi_1 = \psi\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\theta = \omega t + \omega_0 \\ \varphi_1 = \psi t + \psi_1^0\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}\dot x = (a\omega + r\psi)\cos(\omega t + \omega_0) \\ \dot y = (a\omega + r\psi)\sin(\omega t + \omega_0) \\ \dot\varphi_2 = \frac{2a}{r}\omega + \psi\end{cases}$$

Очевидно, выделяются два различных случая: $\omega = 0$ и $\omega \neq 0$.

1. Если $\omega = 0$, то $\dot\theta = 0$ и $\theta = const = \omega_0$,

$$\begin{cases}\dot x = r\psi\cos\omega_0 \\ \dot y = r\psi\sin\omega_0 \\ \dot\varphi_2 = \psi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = (r\psi\cos\omega_0)t + x_0 \\ y = (r\psi\sin\omega_0)t + y_0 \\ \varphi_2 = \psi t + \varphi_2^0\end{cases}$$

где x_0, y_0 - начальные значения x, y.

В этом случае центр масс тележки движется по прямой, угол между осью катушки и осью ОХ остается постоянным.

2. Если $\omega \neq 0$, то $\theta = \omega t + \omega_0$ и, следовательно, имеем

$$\begin{cases} x = \dfrac{(a\omega + r\psi)}{\omega}\sin(\omega t + \omega_0) + x_0 \\ y = -\dfrac{(a\omega + r\psi)}{\omega}\cos(\omega t + \omega_0) + y_0 \\ \varphi_2 = \left(\dfrac{2a}{r}\omega + \psi\right)t + \psi_2^0 \end{cases}$$

Если $a\omega + r\psi = 0$, то $\varphi_1 = -\varphi_2$, т.е. колеса тележки вращаются в противоположных направлениях, $x = x_0, y = y_0$ - центр масс тележки остается неподвижным, тележка вращается вокруг него.

Если $a\omega + r\psi \neq 0$, то центр масс тележки движется по некоторой окружности.

2. Уравнения движения двух тележек.

Рассмотрим систему из двух тележек. Тогда уравнения связей можно записать в следующем виде:

$$\dot{x}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12} + \dot{\varphi}_{11}}{2}\cos\theta$$

$$\dot{y}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12} + \dot{\varphi}_{11}}{2}\sin\theta_1$$

$$\dot{\theta}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12} - \dot{\varphi}_{11}}{2}$$

$$\dot{x}_2 = r\frac{\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_{22}}{2}\cos(\theta_1 + \psi_2)$$

$$\dot{y}_2 = r\frac{\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_{22}}{2}\sin(\theta_1 + \psi_2)$$

$$\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_2 = r\frac{\dot{\varphi}_{22} - \dot{\varphi}_{21}}{2a}$$

$$\dot{x}_1 + b\dot{\theta}_1\sin\theta_1 = \dot{x}_2 - b(\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_2)\sin(\theta_1 + \psi_2)$$

$$\dot{y}_1 - b\dot{\theta}_1\cos\theta_1 = \dot{y}_2 + b(\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_2)\cos(\theta_1 + \psi_2)$$

Где первые шесть уравнений – условия «непроскальзывания» колес, а последние два – условие сцепки. Преобразуя полученную систему, получим:

$$\dot{x}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12} + \dot{\varphi}_{11}}{2}\cos\theta$$

$$\dot{y}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12} + \dot{\varphi}_{11}}{2}\sin\theta_1$$

$$\dot{\theta}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12} - \dot{\varphi}_{11}}{2}$$

$$\dot{x}_2 = r\frac{(a\cos\psi_2 - b\sin\psi_2)\dot{\varphi}_{12} + (a\cos\psi_2 + b\sin\psi_2)\dot{\varphi}_{11}}{2a}\cos(\theta_1+\psi_2) \qquad (2.1)$$

$$\dot{y}_2 = r\frac{(a\cos\psi_2 - b\sin\psi_2)\dot{\varphi}_{12} + (a\cos\psi_2 + b\sin\psi_2)\dot{\varphi}_{11}}{2a}\sin(\theta_1+\psi_2)$$

$$\dot{\psi}_2 = -r\frac{(b\cos\psi_2 + a\sin\psi_2 + b)\dot{\varphi}_{12} + (a\sin\psi_2 - b\cos\psi_2 - b)\dot{\varphi}_{11}}{2ab}$$

$$\dot{\varphi}_{21} = \frac{(2ab\cos\psi_2 + (a^2-b^2)\sin\psi_2)\dot{\varphi}_{12} + (a^2+b^2)\sin\psi_2\dot{\varphi}_{11}}{2ab}$$

$$\dot{\varphi}_{22} = -\frac{(a^2+b^2)\sin\psi_2\dot{\varphi}_{12} + (-2ab\cos\psi_2 + (a^2-b^2)\sin\psi_2)\dot{\varphi}_{11}}{2ab}$$

Тогда коэффициенты связей будут иметь вид:

$$\alpha_{11} = r\frac{\cos\theta_1}{2};\alpha_{12} = r\frac{\cos\theta_1}{2}$$

$$\alpha_{21} = r\frac{\sin\theta_1}{2};\alpha_{22} = r\frac{\sin\theta_1}{2}$$

$$\alpha_{31} = \frac{r}{2a};\alpha_{32} = -\frac{r}{2a};$$

$$\alpha_{41} = r\frac{(a\cos\psi_2 - b\sin\psi_2)}{2\alpha}\cos(\theta_1+\psi_2);\alpha_{42} = r\frac{(a\cos\psi_2 + b\sin\psi_2)}{2\alpha}\cos(\theta_1+\psi_2)$$

$$\alpha_{51} = r\frac{(a\cos\psi_2 - b\sin\psi_2)}{2\alpha}\sin(\theta_1+\psi_2);\alpha_{52} = r\frac{(a\cos\psi_2 + b\sin\psi_2)}{2\alpha}\sin(\theta_1+\psi_2)$$

$$\alpha_{61} = \frac{(2ab\cos\psi_2 + (a^2-b^2)\sin\psi_2)}{2\alpha b};\alpha_{62} = \frac{(\alpha^2+b^2)\sin\psi_2}{2\alpha b}$$

$$\alpha_{71} = -\frac{(\alpha^2+b^2)\sin\psi_2}{2\alpha b};\alpha_{72} = \frac{(2ab\cos\psi_2 - (a^2-b^2)\sin\psi_2)}{2\alpha b}$$

$$\alpha_{81} = -r\frac{(b\cos\psi_2 + \alpha\sin\psi_2 + b)}{2\alpha b};\alpha_{82} = -r\frac{(\alpha\sin\psi_2 - b\cos\psi_2 - b)}{2\alpha b} \qquad (2.2)$$

Из полученных уравнений видно, что в рассматриваемой системе две координаты являются независимыми, в данном случае положим, что это $\varphi_{12},\varphi_{11}$. Так как коэффициенты α_{ki} $(k=1...8, i=1,2)$ в уравнениях связей зависят от обобщенной координаты ψ_2, то система не является системой Чаплыгина, как в случае одной тележки. Тогда будем использовать уравнения Воронца для неголономных систем [4-6] со связями вида:

$$\sum b_{\beta j}(q_1,...q_m,t)q_j + b_\beta(q_1,...q_m,t) = 0.$$

Уравнения Воронца имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s}\alpha_{k,i-s}\left(Q_k + \frac{\partial T^*}{\partial q_k}\right) + \sum_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{i-s,j}^{(k)}\dot{q}_{j+s}\right) \qquad (2.3)$$

$(i = s+1,...,s+n)$,

где

n – число степеней свободы,

s - кол-во наложенных связей,

T^*- функция, получающаяся в результате исключения при помощи равенств (2.1), величин $\dot{q}_k\,(k=1,...,s)$ из выражения для кинетической энергии T:

$$T(q_1,...,q_m,\dot{q}_1,...,\dot{q}_m,t)=T^*(q_1,...,q_m,\dot{q}_{s+1},...,\dot{q}_{s+n},t),$$

$\Theta_k=\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},(k=1..s)$ - импульсы системы,

Q_i - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i,

$$A_{i-s,j}^{(k)}=\left(\frac{\partial\alpha_{k,i-s}}{\partial q_{j+s}}+\sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\alpha_{k,i-s}}{\partial q_\mu}\alpha_{\mu j}\right)-\left(\frac{\partial\alpha_{k,j}}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\alpha_{k,j}}{\partial q_\mu}\alpha_{\mu,i-s}\right).$$

Полученные уравнения должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (2.1). Полученная система содержит n+s уравнений, что совпадает с числом обобщенных координат.

В случае двух тележек уравнения Воронца примут вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial\dot{\varphi}_{21}}-\dfrac{\partial T^*}{\partial\varphi_{21}}=Q_9+\sum\limits_{k=1}^{s}\alpha_{k,1}\left(Q_k+\dfrac{\partial T^*}{\partial q_k}\right)+\sum\limits_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum\limits_{j=1}^{n}A_{12}^{(k)}\dot{\varphi}_{11}\right)\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial\dot{\varphi}_{11}}-\dfrac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}}=Q_{10}+\sum\limits_{k=1}^{s}\alpha_{k,2}\left(Q_k+\dfrac{\partial T^*}{\partial q_k}\right)+\sum\limits_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum\limits_{j=1}^{n}A_{21}^{(k)}\dot{\varphi}_{12}\right)\end{cases}\tag{2.4}$$

Для составления уравнений движения системы необходимо выписать все вышеприведенные величины. Сначала выпишем выражение для кинетической энергии системы из двух тележек. Кинетическая энергия двух тележек есть сумма кинетических энергий первой и второй тележек. Учитывая выражение для кинетической энергии одной тележки (1.3), для двух тележек получаем:

$$\begin{aligned}T=T^1+T^2&=\frac{m^1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}C(\dot{\varphi}_{11}^2+\dot{\varphi}_{12}^2)+M_1\dot{\theta}_1^2+\\&+\frac{m^2}{2}(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+\frac{1}{2}C(\dot{\varphi}_{21}^2+\dot{\varphi}_{22}^2)+M_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\psi}_2\right)^2\end{aligned}\tag{2.5}$$

где $M_i=\dfrac{1}{2}\left(m_0^ik_0^2+2ma^2+2A\right),\ i=1,2$.

После исключения зависимых скоростей с помощью уравнений связей (2.1), будем иметь:

$$T^*=C_1\dot{\varphi}_{12}^2+C_2\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11}+C_3\dot{\varphi}_{11}^2\tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}C_1=\frac{r^2}{8a^2b^2}&\Big(\left(b^2-a^2\right)\left(\left(2M_2+ma^2\right)-b^2\left(m+m^2\right)\right)\cos^2\psi_2+\\&+2ab(\left(2M_2+ma^2\right)-b^2(m+m^2))\cos\psi_2\sin\psi_2+\\&+a^2b^2(m+m^1)+b^2(2M_1+ma^2)+a^2(2M_2+ma^2)+b^4(m+m^2)\Big)\end{aligned}$$

$$C_2=\frac{r^2}{4a^2b^2}\left(\left(a^2+b^2\right)\left(-\left(2M_2+ma^2\right)+b^2\left(m+m^2\right)\right)\cos^2\psi_2+\right.$$
$$\left.+b^2(m^1a^2-2M_1)+a^2(2M_2+ma^2)-b^4(m+m^2)\right)$$

$$C_3=\frac{r^2}{8a^2b^2}\left(\left(b^2-a^2\right)\left(\left(2M_2+ma^2\right)-b^2\left(m+m^2\right)\right)\cos^2\psi_2+\right.$$
$$-2ab(\left(2M_2+ma^2\right)-b^2(m+m^2))\cos\psi_2\sin\psi_2+$$
$$\left.+a^2b^2(m+m^1)+b^2(2M_1+ma^2)+a^2(2M_2+ma^2)+b^4(m+m^2)\right)$$

Используя (2.5), можно записать выражения для импульсов $\Theta_k=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}$:

$$\Theta_1=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1$$
$$\Theta_2=\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_1}=m_1\dot{y}_1$$
$$\Theta_3=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=2\left(M_1+M_2\right)\dot{\theta}_1+2M_2\dot{\psi}_2$$
$$\Theta_4=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2$$
$$\Theta_5=\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_2}=m_2\dot{y}_2$$
$$\Theta_6=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_{21}}=C\dot{\varphi}_{21}$$
$$\Theta_7=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_{22}}=C\dot{\varphi}_{22}$$
$$\Theta_8=\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}_2}=2M_2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\psi}_2\right)$$

Или, учитывая (2.1), имеем

$$\Theta_1=r\frac{m_1\cos\theta_1}{2}\dot{\varphi}_{12}+r\frac{m_1\cos\theta_1}{2}\dot{\varphi}_{11}$$
$$\Theta_2=r\frac{m_1\sin\theta_1}{2}\dot{\varphi}_{12}+r\frac{m_1\sin\theta_1}{2}\dot{\varphi}_{11}$$
$$\Theta_3=r\frac{bM_1-bM_2\cos\psi_2-aM_2\sin\psi_2}{ab}\dot{\varphi}_{12}-r\frac{bM_1-bM_2\cos\psi_2aM_2\sin\psi_{21}}{ab}\dot{\varphi}_{11}$$
$$\Theta_4=r\frac{m_2\left(a\cos\psi_2-b\sin\psi_2\right)\cos\left(\theta_1+\psi_2\right)}{2a}\dot{\varphi}_{12}+r\frac{m_2\left(a\cos\psi_2+b\sin\psi_2\right)\cos\left(\theta_1+\psi_2\right)}{2a}\dot{\varphi}_{11}$$
$$\Theta_5=r\frac{m_2\left(a\cos\psi_2-b\sin\psi_2\right)\sin\left(\theta_1+\psi_2\right)}{2a}\dot{\varphi}_{12}+r\frac{m_2\left(a\cos\psi_2+b\sin\psi_2\right)\sin\left(\theta_1+\psi_2\right)}{2a}\dot{\varphi}_{11}$$
$$\Theta_6=\frac{mr\left(2ab\cos\psi_2-\left(b^2-a^2\right)\sin\psi_2\right)}{4ab}\dot{\varphi}_{12}+\frac{mr\left(b^2+a^2\right)\sin\psi_2}{4ab}\dot{\varphi}_{11}$$

$$\Theta_7 = -\frac{mr\left(b^2+a^2\right)\sin\psi_2}{4ab}\dot{\varphi}_{12} + \frac{mr\left(2ab\cos\psi_2+\left(b^2-a^2\right)\sin\psi_2\right)}{4ab}\dot{\varphi}_{11}$$

$$\Theta_8 = -r\frac{M_2\left(b\cos\psi_2+a\sin\psi_2\right)}{ab}\dot{\varphi}_{12} + r\frac{M_2\left(b\cos\psi_2-a\sin\psi_2\right)}{2a}\dot{\varphi}_{11}$$

(2.7)

Запишем выражения для величин $A_{ij}^{(k)}$. Так как $A_{ij}^{(k)} = -A_{ji}^{(k)}$, то достаточно записать выражения для: $A_{12}^{(k)}$:

$$A_{12}^{(k)} = \left(\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\varphi_{11}} + \frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\theta_1}\alpha_{32} + \frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\psi_2}\alpha_{82}\right) - \left(\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\varphi_{12}} + \frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\theta_1}\alpha_{31} + \frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\psi_2}\alpha_{81}\right)$$

Так как все коэффициенты α_{ki} не зависят от $\varphi_{11}, \varphi_{12}$, т.е. $\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\varphi_{11}} = 0$ и $\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\varphi_{12}} = 0$, то для величины $A_{12}^{(k)}$ окончательно имеем:

$$A_{12}^{(k)} = \left(\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\theta_1}\alpha_{32} + \frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\psi_2}\alpha_{82}\right) - \left(\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\theta_1}\alpha_{31} + \frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\psi_2}\alpha_{81}\right)$$

И, следовательно,

$$A_{12}^{(1)} = \frac{\sin\theta_1}{2a}$$

$$A_{12}^{(2)} = -\frac{\cos\theta_1}{2a}$$

$$A_{12}^{(3)} = 0$$

$$A_{12}^{(4)} = -\frac{\cos\left(\theta_1+\psi_2\right)\sin\psi_2 + \sin\left(\theta_1+\psi_2\right)}{2a} \qquad (2.8)$$

$$A_{12}^{(5)} = -\frac{\sin\left(\theta_1+\psi_2\right)\sin\psi_2 - \cos\left(\theta_1+\psi_2\right)}{2a}$$

$$A_{12}^{(6)} = \frac{a - b\sin\psi_2 + a\cos\psi_2}{2ab}$$

$$A_{12}^{(7)} = -\frac{a + b\sin\psi_2 + a\cos\psi_2}{2ab}$$

$$A_{12}^{(8)} = -\frac{1+\cos\psi_2}{2ab}.$$

Обозначим: $S = \sum_{k-1}^{s}\Theta_k A_{12}^{(k)}$, тогда выражения $\sum_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot{\varphi}_{11}\right)$ примут соответственно вид:

$$\sum_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{12}^{(k)}\dot{\varphi}_{11}\right) = S\dot{\varphi}_{11}, \text{ и } \sum_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{21}^{(k)}\dot{\varphi}_{12}\right) = -S\dot{\varphi}_{12}.$$

Используя (2.7) и (2.8), получим выражение для S:

$$S = P_1\dot{\varphi}_{12} + P_2\dot{\varphi}_{11} \qquad (2.9)$$

где P_1 и P_2 соответственно равны:

$$P_1=\frac{\left(2M_2+ma^2r^2\right)-b^2\left(mr^2+m^2\right)}{4a^2b}\cos^2\psi_2+$$
$$+\left(\frac{\left(\left(2M_2+ma^2r^2\right)-b^2\left(mr^2+m^2\right)\right)\sin\psi_2}{4ab^2}+\frac{2M_2+ma^2r^2{}_2}{4a^2b}\right)\cos\psi_2+$$
$$+\left(\frac{\left(2M_2+ma^2r^2\right)\sin\psi_2}{4ab^2}+\frac{b^2\left(mr^2+m^2\right)}{4a^2b}\right)$$
$$=\frac{1}{4a^2b^2}\left(\left(2M_2+ma^2r^2\right)\left(\cos\psi_2+1\right)\left(b\cos\psi_2+a\sin\psi_2\right)+b^2\left(mr^2+m^2\right)\left(b\sin\psi_2-a\cos\psi_2\right)sin\psi_2\right)$$

$$P_2=-\frac{\left(2M_2+ma^2r^2\right)-b^2\left(mr^2+m^2\right)}{4a^2b}\cos^2\psi_2+$$
$$+\left(\frac{\left(\left(2M_2+ma^2r^2\right)-b^2\left(mr^2+m^2\right)\right)\sin\psi_2}{4ab^2}-\frac{2M_2+ma^2r^2{}_2}{4a^2b}\right)\cos\psi_2+$$
$$+\left(\frac{\left(2M_2+ma^2r^2\right)\sin\psi_2}{4ab^2}-\frac{b^2\left(mr^2+m^2\right)}{4a^2b}\right)$$
$$=\frac{1}{4a^2b^2}\left(\left(2M_2+ma^2r^2\right)\left(\cos\psi_2+1\right)\left(a\sin\psi_2-b\cos\psi_2\right)-b^2\left(mr^2+m^2\right)\left(b\sin\psi_2+a\cos\psi_2\right)sin\psi_2\right).$$

Теперь найдем выражения для $\frac{\partial T^*}{\partial q_k}$. Так как T^* зависит только от координаты ψ_2, то все $\frac{\partial T^*}{\partial q_k}=0$, кроме $\frac{\partial T^*}{\partial \psi_2}$. Найдем это выражение:

$$\frac{\partial T^*}{\partial\psi_2}=R_1\varphi_{12}^2+R_2\varphi_{12}\varphi_{11}+R_3\varphi_{11}^2 \tag{2.10}$$

где коэффициенты R_i соответственно равны:

$$R_1=r^2\,\frac{\left(2M_2+ma^2\right)-b^2\left(m+m^2\right)}{4a^2b^2}\left(ab\cos 2\psi_2+\frac{a^2-b^2}{2}\sin 2\psi_2\right)$$
$$R_2=r^2\,\frac{\left(2M_2+ma^2\right)-b^2\left(m+m^2\right)}{4a^2b^2}\left(a^2+b^2\right)\sin 2\psi_2$$
$$R_3=-r^2\,\frac{\left(2M_2+ma^2\right)-b^2\left(m+m^2\right)}{4a^2b^2}\left(ab\cos 2\psi_2-\frac{a^2-b^2}{2}\sin 2\psi_2\right)$$

Используя (2.6), найдем выражения для $\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{21}}$ и $\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}}$:

$$\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{12}}=2C_1\dot{\varphi}_{12}+C_2\dot{\varphi}_{11},\ \frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}}=C_2\dot{\varphi}_{12}+2C_3\dot{\varphi}_{11}\,. \tag{2.11}$$

Для нахождения обобщенных сил рассмотрим силы, действующие в системе. В случае двух тележек в системе действуют неизвестные силы реакции $\vec{F}_1$ и $-\vec{F}_1$ приложенные в точке B_1, равные по модулю и противоположные по направлению. Пусть $\vec{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y})$, Действительное перемещение точки B_1, к которой приложена сила, имеет вид:

$$d\vec{r}_{B_1} = d\vec{r}_{C_1} + d\theta_1 \vec{e}_z \times C_1\vec{B}_1, \text{ где } d\vec{r}_{C_1} = dx_1\vec{e}_X + dy_1\vec{e}_Y.$$

Тогда

$$d\vec{r}_{B_1} = (dx_1 + bd\theta_1 \sin\theta_1)\vec{e}_X + (dy_1 - bd\theta_1 \cos\theta_1)\vec{e}_Y$$

С другой стороны действительное перемещение точки B_1, к которой приложена сила $-\vec{F}_1 = (-F_{1,x}, -F_{1,y})$, имеет вид:

$$d\vec{r}_{B_1} = (dx_2 - bd(\theta_1 + \psi_2)\sin(\theta_1 + \psi_2))\vec{e}_X + (dy_2 + bd(\theta_1 + \psi_2)\cos(\theta_1 + \psi_2))\vec{e}_Y.$$

и элементарная работа действующей силы имеет вид

$$dA = F_{1x}(dx_1 + b\sin\theta_1 d\theta_1)e_x + F_{1y}(dy_1 - b\cos\theta_1 d\theta_1)e_y -$$
$$- F_{1x}(dx_1 + b\sin\theta_1 d\theta_1)e_x - F_{1y}(dy_1 - b\cos\theta_1 d\theta_1)e_y = 0$$

и, следовательно, все обобщенные силы равны нулю: $Q_i = 0$.

Используя все предыдущие преобразования и выводы, можно записать динамические уравнения движения (2.4) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial\varphi_{21}} = \alpha_{8,1}\dfrac{\partial T^*}{\partial\psi_2} + S\dot{\varphi}_{11} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}} = \alpha_{8,2}\dfrac{\partial T^*}{\partial\psi_2} - S\dot{\varphi}_{12} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2C_1\ddot{\varphi}_{12} + C\ddot{\varphi}_{11}, = \alpha_{8,1}\left(R_1\dot{\varphi}_{12}^2 + R_2\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + R_3\dot{\varphi}_{11}^2\right) + \left(P_1\dot{\varphi}_{12} + P_2\dot{\varphi}_{11}\right)\dot{\varphi}_{11} \\ C_2\ddot{\varphi}_{12} + 2C_3\ddot{\varphi}_{11} = \alpha_{8,2}\left(R_1\dot{\varphi}_{12}^2 + R_2\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + R_3\dot{\varphi}_{11}^2\right) - \left(P_1\dot{\varphi}_{12} + P_2\dot{\varphi}_{11}\right)\dot{\varphi}_{12} \end{cases} \quad (2.12)$$

Преобразуя (2.12), получим:

$$\begin{cases} 2C_1\ddot{\varphi}_{12} + C_2\ddot{\varphi}_{11}, = K_1\dot{\varphi}_{12}^2 + K_2\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + K_3\dot{\varphi}_{11}^2 \\ C_2\ddot{\varphi}_{12} + 2C_3\ddot{\varphi}_{11} = K_4\dot{\varphi}_{12}^2 + K_5\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + K_6\dot{\varphi}_{11}^2 \end{cases} \quad (2.13)$$

где

$K_1 = R_1\alpha_{81}$

$K_2 = R_2\alpha_{81} + P_1$

$K_3 = R_3\alpha_{81} + P_2$

$K_4 = R_1\alpha_{82} - P_1$

$K_5 = R_2\alpha_{82} - P_2$

$K_6 = R_3\alpha_{82}$.

Приведем систему к форме Коши. Для этого из (2.13) явно выразим $\ddot{\varphi}_{12}$ и $\ddot{\varphi}_{11}$, преобразуя (2.4) к виду:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{12} = \dfrac{(C_2K_4 - 2C_3K_1)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}^2 + \dfrac{(C_2K_5 - 2C_3K_2)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + \dfrac{(C_2K_6 - 2C_3K_3)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{11}^2 \\ \ddot{\varphi}_{11}, = \dfrac{(C_2K_1 - 2C_1K_4)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}^2 + \dfrac{(C_2K_2 - 2C_1K_5)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + \dfrac{(C_2K_3 - 2C_1K_6)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{11}^2 \end{cases}$$

Теперь, произведя замену вида $\varphi'_{11} = \dot{\varphi}_{11}$, $\varphi'_{12} = \dot{\varphi}_{12}$ получим систему уравнений в форме Коши:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi}_{11} = \varphi'_{11} \\
&\dot{\varphi}_{12} = \varphi'_{12} \\
&\dot{\varphi}'_{12} = \frac{(C_2K_4 - 2C_3K_1)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\varphi'^2_{12} + \frac{(C_2K_5 - 2C_3K_2)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\varphi'_{12}\varphi'_{11} + \frac{(C_2K_6 - 2C_3K_3)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\varphi'^2_{11} \\
&\dot{\varphi}'_{11}, = \frac{(C_2K_1 - 2C_1K_4)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\varphi'^2_{12} + \frac{(C_2K_2 - 2C_1K_5)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\varphi'_{12}\varphi'_{11} + \frac{(C_2K_3 - 2C_1K_6)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\varphi'^2_{11} \\
&\dot{x}_1 = r\frac{\varphi'_{12} + \varphi'_{11}}{2}\cos\theta \\
&\dot{y}_1 = r\frac{\varphi'_{12} + \varphi'_{11}}{2}\sin\theta_1 \\
&\dot{\theta}_1 = r\frac{\varphi'_{12} - \varphi'_{11}}{2} \\
&\dot{x}_2 = r\frac{(a\cos\psi_2 - b\sin\psi_2)\varphi'_{12} + (a\cos\psi_2 + b\sin\psi_2)\varphi'_{11}}{2a}\cos(\theta_1 + \psi_2) \\
&\dot{y}_2 = r\frac{(a\cos\psi_2 - b\sin\psi_2)\varphi'_{12} + (a\cos\psi_2 + b\sin\psi_2)\varphi'_{11}}{2a}\sin(\theta_1 + \psi_2) \\
&\dot{\psi}_2 = -r\frac{(b\cos\psi_2 + a\sin\psi_2 + b)\varphi'_{12} + (a\sin\psi_2 - b\cos\psi_2 - b)\varphi'_{11}}{2ab} \\
&\dot{\varphi}_{21} = \frac{(2ab\cos\psi_2 + (a^2 - b^2)\sin\psi_2)\varphi'_{12} + (a^2 + b^2)\sin\psi_2\varphi'_{11}}{2ab} \\
&\dot{\varphi}_{22} = -\frac{(a^2 + b^2)\sin\psi_2\varphi'_{12} + (-2ab\cos\psi_2 + (a^2 - b^2)\sin\psi_2)\varphi'_{11}}{2ab}
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

3. Частные решения уравнений движения для двух тележек. Свободные (баллистические) движения.

Рассмотрим частные решения системы (2.14). Пусть угол между тележками ψ_2 остается постоянным, т.е. $\psi_2 = \Psi$, тогда $\dot{\psi}_2 = 0$. Следовательно, выполняется следующее условие:

$$-\frac{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)\dot{\varphi}_{12} + (a\sin\Psi - b\cos\Psi - b)\dot{\varphi}_{11}}{2ab} = 0$$

Или, справедливо следующее соотношение:

$$\dot{\varphi}_{12} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\dot{\varphi}_{11} \qquad (3.1)$$

на угловые скорости вращения правого и левого колеса ведущей тележки. Тогда, возможны 2 случая:

1. $\Psi = \pi k, k \in Z$, тогда $\dot{\varphi}_{12} = \dot{\varphi}_{11}$ и система движется по прямой. Найдем решение системы, если $\Psi = 0$, и $\dot{\varphi}_{12} = \dot{\varphi}_{11}$. Тогда решение системы (2.14) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{12} = \omega t + \varphi_{12}^0 \\
&\varphi_{11} = \omega t + \varphi_{11}^0 \\
&x_1 = \omega r \cos \Omega t + x_1^0 \\
&y_1 = \omega r \sin \Omega t + y_1^0 \\
&\theta_1 = \Omega \\
&x_2 = \omega r \cos \Omega t + x_2^0 \\
&y_2 = \omega r \sin \Omega t + y_2^0 \\
&\psi_2 = 0 \\
&\varphi_{22} = \omega t + \varphi_{22}^0 \\
&\varphi_{21} = \omega t + \varphi_{21}^0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

2. $\Psi \neq \pi k, k \in Z$, тогда соотношение $\dot{\varphi}_{12} = \dfrac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\dot{\varphi}_{11}$ постоянно и система движется по окружности фиксированного радиуса. Покажем это. Запишем систему (2.14), учитывая эти условия, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varphi}_{11} = \varphi_{11}' \\
&\dot{\varphi}_{12} = \varphi_{12}' \\
&\dot{\varphi}'_{12} = D_1 \varphi'^2_{11} \\
&\dot{\varphi}'_{11}, = D_2 \varphi'^2_{11} \\
&\dot{x}_1 = r\frac{\varphi'_{12} + \varphi'_{11}}{2}\cos\theta \\
&\dot{y}_1 = r\frac{\varphi'_{12} + \varphi'_{11}}{2}\sin\theta_1 \\
&\dot{\theta}_1 = r\frac{\varphi'_{12} - \varphi'_{11}}{2} \\
&\dot{x}_2 = r\frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\varphi'_{11}\cos\theta_1 \\
&\dot{y}_2 = r\frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\varphi'_{11}\sin\theta_1 \\
&\dot{\psi}_2 = -\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\varphi'_{11} \\
&\dot{\varphi}_{21} = \varphi'_{11} \\
&\dot{\varphi}_{22} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\varphi'_{11}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где

$$D_1 = \frac{\left(C_2 K_4 - 2C_3 K_1\right)}{C_2^2 - 4C_1 C_3} \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)^2}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)^2} +$$
$$+ \frac{\left(C_2 K_5 - 2C_3 K_2\right)}{C_2^2 - 4C_1 C_3} \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)} + \frac{\left(C_2 K_6 - 2C_3 K_3\right)}{C_2^2 - 4C_1 C_3}$$
$$D_2 = \frac{\left(C_2 K_1 - 2C_1 K_4\right)}{C_2^2 - 4C_1 C_3} \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)^2}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)^2} +$$
$$+ \frac{\left(C_2 K_2 - 2C_1 K_5\right)}{C_2^2 - 4C_1 C_3} \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)} + \frac{\left(C_2 K_3 - 2C_1 K_6\right)}{C_2^2 - 4C_1 C_3}$$

Подставив в коэффициенты D_1 и D_2 выражения для C_i, K_i, получим, что $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$. Тогда $\ddot{\varphi}_{11} = \ddot{\varphi}_{12} = 0$ и, следовательно, $\dot{\varphi}_{11} = \omega$, $\dot{\varphi}_{12} = \dfrac{(\cos\Psi - \sin\Psi + 1)}{(\cos\Psi + \sin\Psi + 1)}\omega$. Тогда решение системы (3.3) выглядит следующим образом:

$$\varphi'_{12} = \frac{(\cos\Psi - \sin\Psi + 1)}{(\cos\Psi + \sin\Psi + 1)}\omega$$
$$\varphi'_{11} = \omega$$
$$\dot{\varphi}'_{12} = 0$$
$$\dot{\varphi}'_{11} = 0$$
$$x_1 = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0\right) + x^0$$
$$y_1 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0\right) + y^0$$
$$\theta_1 = \left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0$$
$$x_2 = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + \Psi\right) + x^0$$
$$y_2 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + \Psi\right) + y^0$$
$$\psi_2 = \Psi$$
$$\dot{\varphi}_{21} = \omega$$
$$\dot{\varphi}_{22} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\omega$$

где $\begin{cases} x_2^0 = x_1^0 - b\cos\theta_1^0 - b\cos\left(\theta_1^0 + \Psi\right) \\ y_2^0 = y_1^0 - b\sin\theta_1^0 - b\sin\left(\theta_1^0 + \Psi\right) \end{cases}$ - начальные координаты центра второй тележки.

Из полученных уравнений видно, что траекторией данного движения является окружность заданного радиуса $R = \dfrac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}$ с центром в точке $\left(x^0, y^0\right)$. Найдем координаты центра установившейся окружности.

Пусть в начальный момент координаты первой тележки - $x_1^0, y_1^0, \theta_1^0, \Psi$, тогда справедливо

$$x_1^0 = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\theta_1^0 + x^0$$

$$y_1^0 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\theta_1^0 + y^0$$

откуда выражаем x^0, y^0

$$x^0 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\theta_1^0 + x_1^0$$

$$y^0 = y_1^0 - \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\theta_1^0$$

Следовательно, координаты центра окружности зависят от начальных координат центра первой тележки, начального угла поворота оси первой тележки относительно оси OX и угла между тележками. Из формулы для радиуса видно, что он зависит только от угла между тележками.

Итак, получены два частных решения для системы из двух тележек: движение по прямой и окружности. Из выведенных формул видно, что движение по прямой осуществляется при любых начальных условиях и параметрах системы, если угол между тележками $\Psi = \pi k, k \in Z$ (следует заметить, что для общности решение допускается и при $k = 2p + 1$ - нечетном) и угловые скорости вращения правого и левого колес совпадают.

Движение по окружности же возможно только при определенных соотношениях угловых скоростей вращения первого и второго колес ведущей тележки: $\dot{\varphi}_{12} = \dfrac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\dot{\varphi}_{11}$. При этом радиус описываемой окружности зависит только от угла между тележками, а положение ее центра от начальных координат центра первой тележки, начального угла поворота оси первой тележки относительно оси OX и угла между тележками.

Следует заметить, что приведенные выше частные решения не являются единственно возможными. На рис. 2 приведены траектории баллистических движений для различных начальных условий (начальные скорости вращения колес одинаковы и равны единице, меняется лишь начальный угол между тележками). На первом подграфике приведены семейства траекторий для $\psi_0 = 10^\circ$, $\psi_0 = 1^\circ$, $\psi_0 = 0.1^\circ$, $\psi_0 = -0.1^\circ$, $\psi_0 = -1^\circ$, $\psi_0 = -10^\circ$ (слева на право). На втором подграфике для $\psi_0 = 10^\circ$, $\psi_0 = 20^\circ$, $\psi_0 = 30^\circ$, $\psi_0 = 45^\circ$, $\psi_0 = 60^\circ$, $\psi_0 = 90^\circ$.

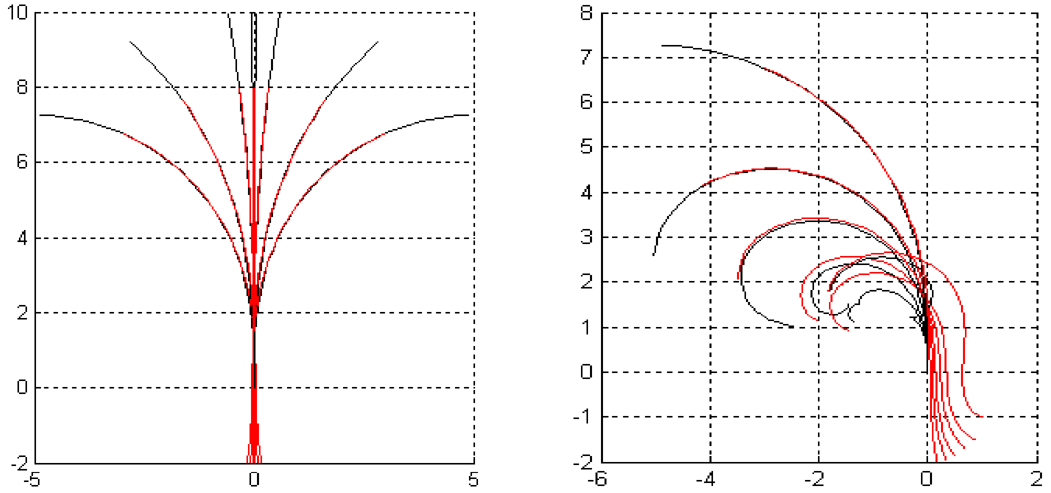

Рис2. Примеры траекторий баллистических движений

Из первого графика видно, что при небольших начальных отклонениях система совершает движение по дугам кривых с достаточно большим радиусом кривизны. С ростом угла отклонения одной тележки от другой, радиус кривизны дуги, по которой система совершает движение, уменьшается, при этом тележки могут «складываться».

На рис. 3 приведены траектории баллистических движений в случае, если начальный угол между тележками остается постоянным ($\psi_0 = 20^\circ$), а меняются начальные скорости вращения колес. Начальные скорости вращения колес приведены в Таблице 1.

φ_{11}^0	1	1	1	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.8	2
φ_{12}^0	1.3	1.2	1.1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 1.

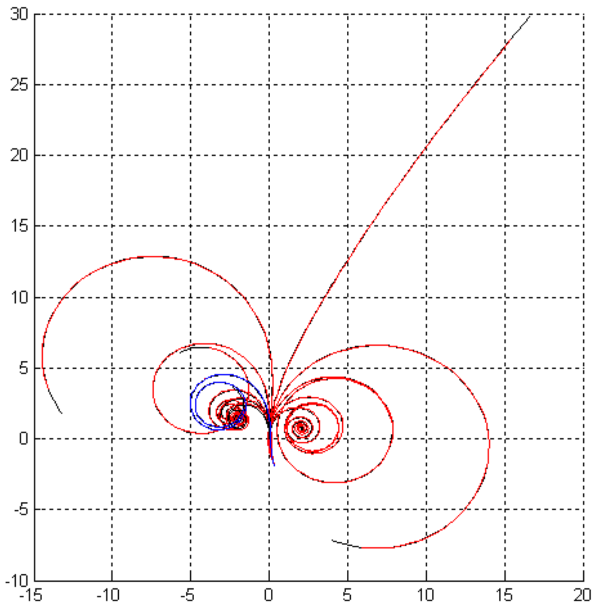

Рис.3 Примеры траекторий баллистических движений

Следует заметить, что при равных начальных скоростях вращения колес ведущей тележки система начнет двигаться относительно начального направления оси ведущей тележки в полуплоскости, отличной от той, в которой лежал центр второй тележки в начальный момент.

4. Уравнения движения для системы из *n* тележек.

В данном параграфе будем рассматривать «робопоезд», состоящий из n. Уравнения связей можно записать в следующем виде:

$$\dot{x}_i = r\left(\frac{\dot{\varphi}_{i2}+\dot{\varphi}_{i1}}{2}\right)\cos\left(\theta_1+\sum_{k=2}^{i}\psi_k\right)$$

$$\dot{y}_i = r\left(\frac{\dot{\varphi}_{i2}+\dot{\varphi}_{i1}}{2}\right)\sin\left(\theta_1+\sum_{k=2}^{i}\psi_k\right)$$

$$\dot{\theta}_1+\sum_{k=2}^{i}\dot{\psi}_k = r\frac{\dot{\varphi}_{i2}+\dot{\varphi}_{i1}}{2a} \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_{i-1}+b\dot{\theta}_1\sin\theta_1 = \dot{x}_i-b\left(\dot{\theta}_1+\sum_{k=2}^{i}\dot{\psi}_k\right)\sin\left(\theta_1+\sum_{k=2}^{i}\psi_k\right)$$

$$\dot{y}_{i-1}-b\dot{\theta}_1\cos\theta_1 = \dot{y}_i+b\left(\dot{\theta}_1+\sum_{k=2}^{i}\dot{\psi}_k\right)\cos\left(\theta_1+\sum_{k=2}^{i}\psi_k\right)$$

где $i=1...n$

Первые три уравнения – условия «непроскальзывания» колес для каждой тележки, а последние – условия сцепки ($i-1$)-й и i–й тележки. Преобразуя полученную систему, получим:

$$\dot{x}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12}+\dot{\varphi}_{11}}{2}\cos\theta$$

$$\dot{y}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12}+\dot{\varphi}_{11}}{2}\sin\theta_1$$

$$\dot{\theta}_1 = r\frac{\dot{\varphi}_{12}-\dot{\varphi}_{11}}{2}$$

для $i=2...n$

$$\dot{x}_i = \frac{r}{2a}\left((a\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k - b\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{12}+\right.$$
$$\left.+(a\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k + b\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{11}\right)\cos\left(\theta_1+\sum_{k=2}^{i}\psi_k\right)$$

$$\dot{y}_i = \frac{r}{2a}\left((a\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k - b\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{12}+\right.$$
$$\left.+(a\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k + b\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{11}\right)\sin\left(\theta_1+\sum_{k=2}^{i}\psi_k\right) \tag{4.2}$$

$$\dot{\varphi}_{i1}=\begin{cases}\dfrac{(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{12}+\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}_{11}}{2ab}, \\ i=2p \\ \dfrac{-\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}_{12}+(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k-\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{11}}{2ab}, \\ i=2p+1\end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_{i2}=\begin{cases}\dfrac{-\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}_{12}+(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k-\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{11}}{2ab}, \\ i=2p \\ \dfrac{(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}_{12}+\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}_{11}}{2ab}, \\ i=2p+1\end{cases}$$

$$\dot{\psi}_i=(-1)^{i+1}\frac{r}{2ab}\left[\left(b\left(\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\cos\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)+a\left(\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\sin\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)\right)\dot{\varphi}_{12}-\right.$$
$$\left.-\left(b\left(\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\cos\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)-a\left(\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\sin\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)\right)\dot{\varphi}_{11}\right]$$

Из полученных уравнений видно, что в рассматриваемой системе две координаты являются независимыми, в данном случае положим, что это $\varphi_{12}, \varphi_{11}$. Таким образом, можно сделать вывод, что число степеней свободы не зависит от количества тележек в системе и всегда равно двум. Так как коэффициенты α_{ki} $(k=1..n, i=1,2)$ в уравнениях связей зависят от обобщенных координат ψ_k, то система не является системой. Тогда, как и в случае двух тележек будем писать уравнения Воронца для неголономных систем.

В случае *n* тележек уравнения Воронца примут вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial\phi_{21}}-\dfrac{\partial T^*}{\partial\varphi_{12}}=Q_{\varphi_{21}}+\sum\limits_{k=1}^{s}\alpha_{k,1}\left(Q_k+\dfrac{\partial T^*}{\partial q_k}\right)+\sum\limits_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum\limits_{j=1}^{n}A_{12}^{(k)}\dot{\varphi}_{11}\right)\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial\phi_{11}}-\dfrac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}}=Q_{\varphi_{11}}+\sum\limits_{k=1}^{s}\alpha_{k,2}\left(Q_k+\dfrac{\partial T^*}{\partial q_k}\right)+\sum\limits_{k-1}^{s}\Theta_k\left(\sum\limits_{j=1}^{n}A_{21}^{(k)}\dot{\varphi}_{12}\right)\end{cases}\tag{4.3}$$

Кинетическая энергия *n* тележек есть сумма кинетических энергий каждой из тележек. Учитывая выражение для кинетической энергии одной тележки (1.3), для *n* тележек получаем:

$$T=\sum_{i=1}^{n}T^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{m^i}{2}(\dot{x}_i^{\,2}+\dot{y}_i^{\,2})+\frac{1}{2r^2}C(\dot{\varphi}_{i1}^{\,2}+\dot{\varphi}_{i2}^{\,2})+M_i\left(\dot{\theta}_1+\sum_{k=2}^{i}\dot{\psi}_k\right)^2\tag{4.4}$$

где $M_i = \frac{1}{2}\left(m_0^i k_0^2 + 2ma^2 + 2A\right),\ i = 1{,}2$.

После исключения зависимых скоростей с помощью уравнений связей (4.2), будем иметь:

$$T^* = C_1 \dot{\varphi}_{12}^2 + C_2 \dot{\varphi}_{12} \dot{\varphi}_{11} + C_3 \dot{\varphi}_{11}^2 \qquad (4.5)$$

Где

$$C_1 = \frac{r^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2a}\left(a\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k - b\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)\right)^2 m^i +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2ab}\left(b\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k + a\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)\right)^2 M_i +$$

$$+\frac{C}{2}\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{2a^2b^2}\left(2a^2b^2 + ab\left(a^2-b^2\right)\sin 2\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k + \left(a^2-b^2\right)\sin^2\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)\right)+1\right)$$

$$C_2 = r^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4a^2}\left(a^2 - \left(a^2+b^2\right)\sin^2\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)m^i -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a^2b^2}\left(b^2 - \left(a^2+b^2\right)\sin^2\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)M_i +$$

$$+C\frac{a^4-b^4}{2a^2b^2}\sin^2\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k$$

$$C_3 = \frac{r^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2a}\left(a\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k + b\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)\right)^2 m^i +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2ab}\left(b\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k - a\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)\right)^2 M_i +$$

$$+\frac{C}{2}\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{2a^2b^2}\left(2a^2b^2 - ab\left(a^2-b^2\right)\sin 2\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k + \left(a^2-b^2\right)\sin^2\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\right)\right)+1\right)$$

Используя выражение для кинетической энергии (4.4), можно записать выражения для импульсов $\Theta_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$:

$$\Theta_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$$

$$\Theta_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1$$

$$\Theta_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = 2\left(M_1 + M_2\right)\dot{\theta}_1 + 2M_2\dot{\psi}_2$$

$$\Theta_{5(i-1)-1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = rm_i\left(a_{5(i-1)-1,1}\dot{\varphi}_{12} + a_{5(i-1)-1,2}\dot{\varphi}_{11}\right)$$

$$\Theta_{5(i-1)} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i = rm_i\left(a_{5(i-1),1}\dot{\varphi}_{12} + a_{5(i-1),2}\dot{\varphi}_{11}\right)$$

$$\Theta_{5(i-1)+1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{i1}} = C\left(a_{5(i-1)+1,1}\dot{\varphi}_{12} + a_{5(i-1)+1,2}\dot{\varphi}_{11}\right)$$

$$\Theta_{5(i-1)+2}=\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_{i2}}=C\left(a_{5(i-1)+2,1}\dot\varphi_{12}+a_{5(i-1)+2,2}\dot\varphi_{11}\right)$$

$$\Theta_{5(i-1)+3}=\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_i}=2M_i\left(\sum_{k=1}^{i}a_{5(k-1)+3,1}\dot\varphi_{12}+\sum_{k=1}^{i}a_{5(k-1)+3,2}\dot\varphi_{11}\right)$$

Запишем выражения для величин $A_{ij}^{(k)}$. Так как $A_{ij}^{(k)}=-A_{ji}^{(k)}$, то достаточно записать выражения для $A_{12}^{(k)}$:

$$A_{12}^{(k)}=\left(\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\varphi_{11}}+\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\theta_1}\alpha_{32}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\psi_i}\alpha_{5i-2,2}\right)-\left(\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\varphi_{12}}+\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\theta_1}\alpha_{31}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\psi_i}\alpha_{5i-2,1}\right)$$

Так как все коэффициенты α_{ki} не зависят от $\varphi_{11},\varphi_{12}$, т.е. $\dfrac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\varphi_{11}}=0$ и $\dfrac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\varphi_{12}}=0$, то для величины $A_{12}^{(k)}$ окончательно имеем:

$$A_{12}^{(k)}=\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\theta_1}\alpha_{32}-\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\theta_1}\alpha_{31}+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{k1}}{\partial\psi_i}\alpha_{5i-2,2}-\frac{\partial\alpha_{k2}}{\partial\psi_i}\alpha_{5i-2,1}\right)\qquad(4.6)$$

Обозначим : $S=\sum_{k-1}^{s}\Theta_k A_{12}^{(k)}$, тогда общий вид S таков:

$$S=P_1\dot\varphi_{12}+P_2\dot\varphi_{11}\qquad(4.7)$$

где P_1 и P_2 соответственно равны:

$$P_1=\sum_{i-1}^{n}\Big(m_ia_{5(i-1)-1,1}A_{12}^{(5(i-1)-1)}+m_ia_{5(i-1),1}A_{12}^{(5(i-1))}+Ca_{5(i-1)+1,1}A_{12}^{(5(i-1)+1)}+$$
$$+Ca_{5(i-1)+2,1}A_{12}^{(5(i-1)+2)}+2M_iA_{12}^{(5(i-1)+3)}\sum_{k=1}^{i}a_{5(k-1)+3,1}\Big)$$

$$P_2=\sum_{i=1}^{n}\Big(m_ia_{5(i-1)-1,2}A_{12}^{(5(i-1)-1)}+m_ia_{5(i-1),2}A_{12}^{(5(i-1))}+Ca_{5(i-1)+1,2}A_{12}^{(5(i-1)+1)}+Ca_{5(i-1)+2,2}A_{12}^{(5(i-1)+2)}+$$
$$+2M_i\sum_{k=1}^{i}a_{5(k-1)+3,2}A_{12}^{(5(i-1)+3)}\Big)$$

где $a_{i,1},a_{i,2},A_{12}^{i}$ - известные функции ψ_i.

Теперь найдем выражения для $\dfrac{\partial T^*}{\partial q_k}$. Так как T^* зависит только от координат ψ_i, то все $\dfrac{\partial T^*}{\partial q_k}=0$, кроме $\dfrac{\partial T^*}{\partial\psi_i}$. Найдем это выражение:

$$\frac{\partial T^*}{\partial\psi_i}=\frac{\partial C_1}{\partial\psi_i}\dot\varphi_{12}^2+\frac{\partial C_2}{\partial\psi_i}\dot\varphi_{12}\dot\varphi_{11}+\frac{\partial C_3}{\partial\psi_i}\dot\varphi_{11}^2\qquad(4.8)$$

или

$$\frac{\partial T^*}{\partial\psi_i}=R_{i1}\dot\varphi_{12}^2+R_{i2}\dot\varphi_{12}\dot\varphi_{11}+R_{i3}\dot\varphi_{11}^2$$

где коэффициенты соответственно равны:

$$R_{i1}=\frac{\partial C_1}{\partial\psi_i}=\frac{(-1)^i r^2}{8a^2b^2}\sum_{k=i}^{n}\left(\left(2M_k+ma^2\right)-b^2\left(m+m^k\right)\right)\times$$
$$\times\left(2ab\cos 2\sum_{m=2}^{k}(-1)^m\psi_m+\left(a^2-b^2\right)\sin 2\sum_{m=2}^{k}(-1)^m\psi_m\right)$$
$$R_{i2}=\frac{\partial C_2}{\partial\psi_i}=\frac{(-1)^i r^2}{4a^2b^2}\sum_{k=i}^{n}\left(\left(2M_k+ma^2\right)-b^2\left(m+m^k\right)\right)\left(a^2+b^2\right)\sin 2\sum_{m=2}^{k}(-1)^m\psi_m$$
$$R_{i3}=\frac{\partial C_3}{\partial\psi_i}=\frac{(-1)^i r^2}{8a^2b^2}\sum_{k=i}^{n}\left(\left(2M_k+ma^2\right)-b^2\left(m+m^k\right)\right)\times$$
$$\times\left(-2ab\cos 2\sum_{m=2}^{k}(-1)^m\psi_m+\left(a^2-b^2\right)\sin 2\sum_{m=2}^{k}(-1)^m\psi_m\right)$$

Используя (4.5), найдем выражения для $\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{21}}$ и $\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}}$:

$$\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{21}}=2C_1\dot\varphi_{12}+C_2\dot\varphi_{11},\ \frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}}=C_2\dot\varphi_{12}+2C_3\dot\varphi_{11}. \qquad (4.9)$$

Все обобщенные силы, как и в случае двух тележек равны нулю.

Используя все предыдущие преобразования и выводы, можно записать динамические уравнения движения (4.3) в следующем виде:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{21}}=\sum_{i=2}^{n}\alpha_{(5i-2),1}\frac{\partial T^*}{\partial\psi_i}+S\dot\varphi_{11}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\varphi_{11}}=\sum_{i=2}^{n}\alpha_{(5i-2),2}\frac{\partial T^*}{\partial\psi_i}-S\dot\varphi_{12}\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}2C_1\ddot\varphi_{12}+C\ddot\varphi_{11},=\sum_{i=2}^{n}\alpha_{(5i-2),1}\left(R_{i1}\dot\varphi_{12}^2+R_{i2}\dot\varphi_{12}\dot\varphi_{11}+R_{i3}\dot\varphi_{11}^2\right)+\left(P_1\dot\varphi_{12}+P_2\dot\varphi_{11}\right)\dot\varphi_{11}\\ C_2\ddot\varphi_{12}+2C_3\ddot\varphi_{11}=\sum_{i=2}^{n}\alpha_{(5i-2),2}\left(R_{i1}\dot\varphi_{12}^2+R_{i2}\dot\varphi_{12}\dot\varphi_{11}+R_{i3}\dot\varphi_{11}^2\right)-\left(P_1\dot\varphi_{12}+P_2\dot\varphi_{11}\right)\dot\varphi_{12}\end{cases} \qquad (4.10)$$

Преобразуя (4.10), получим:

$$\begin{cases}2C_1\ddot\varphi_{12}+C\ddot\varphi_{11},=K_1\dot\varphi_{12}^2+K_2\dot\varphi_{12}\dot\varphi_{11}+K_3\dot\varphi_{11}^2\\ C_2\ddot\varphi_{12}+2C_3\ddot\varphi_{11}=K_4\dot\varphi_{12}^2+K_5\dot\varphi_{12}\dot\varphi_{11}+K_6\dot\varphi_{11}^2\end{cases} \qquad (4.11)$$

где

$$K_1=\sum_{i=2}^{n}R_{i1}\alpha_{(5i-2),1}$$
$$K_2=\sum_{i=2}^{n}R_{i2}\alpha_{(5i-2),1}+P_1$$
$$K_3=\sum_{i=2}^{n}R_{i3}\alpha_{(5i-2),1}+P_2$$
$$K_4=\sum_{i=2}^{n}R_{i1}\alpha_{(5i-2),2}-P_1$$

$$K_5 = \sum_{i=2}^{n} R_{i2}\alpha_{(5i-2),2} - P_2$$

$$K_6 = \sum_{i=2}^{n} R_{i3}\alpha_{(5i-2),2} .$$

Приведем систему к форме Коши. Для этого из (4.11) явно выразим $\dot{\varphi}_{12}$ и $\dot{\varphi}_{11}$:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{12} = \dfrac{\left(C_2K_4 - 2C_3K_1\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}^2 + \dfrac{\left(C_2K_5 - 2C_3K_2\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + \dfrac{\left(C_2K_6 - 2C_3K_3\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{11}^2 \\ \ddot{\varphi}_{11}, = \dfrac{\left(C_2K_1 - 2C_1K_4\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}^2 + \dfrac{\left(C_2K_2 - 2C_1K_5\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{12}\dot{\varphi}_{11} + \dfrac{\left(C_2K_3 - 2C_1K_6\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\dot{\varphi}_{11}^2 \end{cases}$$

Теперь, произведя замену вида $\dot{\varphi}_{11} = \varphi'_{11}$, $\dot{\varphi}_{12} = \varphi'_{12}$ получим систему уравнений в форме Коши:

$$\dot{\varphi}_{11} = \varphi'_{11}$$

$$\dot{\varphi}_{12} = \varphi'_{12}$$

$$\dot{\varphi}'_{12} = \frac{\left(C_2K_4 - 2C_3K_1\right)}{C_2^2 - C_1C_3}\varphi'^2_{12} + \frac{\left(C_2K_5 - 2C_3K_2\right)}{C_2^2 - C_1C_3}\varphi'_{12}\varphi'_{11} + \frac{\left(C_2K_6 - 2C_3K_3\right)}{C_2^2 - C_1C_3}\varphi'^2_{11}$$

$$\dot{\varphi}'_{11}, = \frac{\left(C_2K_1 - 2C_1K_4\right)}{C_2^2 - C_1C_3}\varphi'^2_{12} + \frac{\left(C_2K_2 - 2C_1K_5\right)}{C_2^2 - C_1C_3}\varphi'_{12}\varphi'_{11} + \frac{\left(C_2K_3 - 2C_1K_6\right)}{C_2^2 - C_1C_3}\varphi'^2_{11}$$

$$\dot{x}_1 = r\,\frac{\dot{\varphi}'_{12} + \dot{\varphi}'_{11}}{2}\cos\theta$$

$$\dot{y}_1 = r\,\frac{\dot{\varphi}'_{12} + \dot{\varphi}'_{11}}{2}\sin\theta_1$$

$$\dot{\theta}_1 = r\,\frac{\dot{\varphi}'_{12} - \dot{\varphi}'_{11}}{2}$$

…

$$\dot{x}_i = \frac{r}{2a}\Bigg((a\cos\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k - b\sin\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{12} + $$
$$+ (a\cos\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k + b\sin\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{11}\Bigg)\cos\left(\theta_1 + \sum_{k=2}^{i}\psi_k\right)$$

$$\dot{y}_i = \frac{r}{2a}\Bigg((a\cos\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k - b\sin\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{12} + $$
$$+ (a\cos\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k + b\sin\sum_{k=2}^{i}\left(-1\right)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{11}\Bigg)\sin\left(\theta_1 + \sum_{k=2}^{i}\psi_k\right) \qquad (4.12)$$

$$\dot{\varphi}_{i1}=\begin{cases} r\dfrac{(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{12}+\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}'_{11}}{2ab}, \\ i=2p \\ r\dfrac{-\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}'_{12}+(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k-\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{11}}{2ab}, \\ i=2p+1 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_{i2}=\begin{cases} r\dfrac{-\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}'_{12}+(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k-\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{11}}{2ab}, \\ i=2p \\ r\dfrac{(2ab\cos\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\left(a^2-b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k)\dot{\varphi}'_{12}+\left(a^2+b^2\right)\sin\sum\limits_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k\,\dot{\varphi}'_{11}}{2ab}, \\ i=2p+1 \end{cases}$$

$$\dot{\psi}_i=(-1)^{i+1}\frac{1}{2ab}\left[\left(b\left(\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\cos\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)+a\left(\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\sin\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)\right)\dot{\varphi}'_{12}-\right.$$
$$\left.-\left(b\left(\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\cos\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)-a\left(\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\sin\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)\right)\dot{\varphi}'_{11}\right]$$

5. Частные решения уравнений движения для *n* тележек.

Рассмотрим частные решения системы (4.12). Пусть угол между тележками ψ_i остается постоянным, т.е. $\psi_2=...=\psi_n=\Psi$, тогда $\dot{\psi}_i=0$. Следовательно, выполняются следующие условия:

$$\dot{\psi}_2=-r\frac{(b\cos\Psi+a\sin\Psi+b)\dot{\varphi}_{12}+(a\sin\Psi-b\cos\Psi-b)\dot{\varphi}_{11}}{2ab}=0$$

…..

$$\dot{\psi}_i=(-1)^{i+1}\frac{r}{2ab}\left[\left(b\left(\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\cos\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)+a\left(\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\sin\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)\right)\dot{\varphi}_{12}-\right.$$
$$\left.-\left(b\left(\cos\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\cos\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)-a\left(\sin\sum_{k=2}^{i}(-1)^k\psi_k+\sin\sum_{k=2}^{i-1}(-1)^k\psi_k\right)\right)\dot{\varphi}_{11}\right]=0$$

или, используя условие $\psi_2=...=\psi_n=\Psi$, получим :

$$\dot{\varphi}_{12}=\frac{(b\cos\Psi-a\sin\Psi+b)}{(b\cos\Psi+a\sin\Psi+b)}\dot{\varphi}_{11}$$

- соотношение на угловые скорости вращения правого и левого колеса первой тележки.

Тогда, возможны 2 случая:

1. Пусть $\Psi = \pi k, k \in Z$, тогда $\dot{\varphi}_{12} = \dot{\varphi}_{11}$ и частное решение системы будет таким:

$$
\begin{cases}
\varphi_{12} = \omega t + \varphi_{12}^{0} \\
\varphi_{11} = \omega t + \varphi_{11}^{0} \\
x_1 = \omega \cos \Omega t + x_1^{0} \\
y_1 = \omega \sin \Omega t + y_1^{0} \\
\qquad \theta_1 = \Omega \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_i = \omega \cos \Omega t + x_i^{0} \\
y_i = \omega \sin \Omega t + y_i^{0} \\
\qquad \psi_i = 0 \\
\varphi_{i2} = \omega t + \varphi_{i2}^{0} \\
\varphi_{i1} = \omega t + \varphi_{i1}^{0}
\end{cases}
$$

Из уравнений видно, что система движется по прямой, сохраняя постоянный угол относительно оси OX.

2. Пусть $\Psi \neq \pi k, k \in Z$, тогда, как было показано выше соотношение $\dot{\varphi}_{12} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\dot{\varphi}_{11}$ постоянно. Запишем систему (4.12), учитывая эти условия:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varphi}_{11} = \varphi'_{11} \\
&\dot{\varphi}_{12} = \varphi'_{12} \\
&\dot{\varphi}'_{12} = D_1 \varphi'^{2}_{11} \\
&\dot{\varphi}'_{11}, = D_2 \varphi'^{2}_{11} \\
&\dot{x}_1 = \frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\varphi'_{11}\cos\theta_1 \\
&\dot{y}_1 = \frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\varphi'_{11}\sin\theta_1 \\
&\dot{\theta}_1 = -\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\varphi'_{11} \\
&\ldots \\
&\dot{x}_i = \frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\cos\left(\theta_1 + \sum_{k=2}^{i}\Psi_k\right) \\
&\dot{y}_i = \frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\sin\left(\theta_1 + \sum_{k=2}^{i}\Psi_k\right) \qquad (5.1) \\
&\dot{\psi}_i = 0 \\
&\dot{\varphi}_{i1} = \varphi_{11} \\
&\dot{\varphi}_{i2} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\varphi_{11}
\end{aligned}
$$

…

$$\dot{x}_n = \frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\cos\left(\theta_1 + \sum_{k=2}^{n}\Psi_k\right)$$

$$\dot{y}_n = \frac{b\cos\Psi + b}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\sin\left(\theta_1 + \sum_{k=2}^{n}\Psi_k\right)$$

$$\dot{\psi}_n = 0$$

$$\dot{\varphi}_{n1} = \varphi_{11}$$

$$\dot{\varphi}_{n2} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\varphi_{11}$$

где

$$D_1 = \frac{\left(C_2K_4 - 2C_3K_1\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)^2}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)^2} + \\ + \frac{\left(C_2K_5 - 2C_3K_2\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)} + \frac{\left(C_2K_6 - 2C_3K_3\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}$$

$$D_2 = \frac{\left(C_2K_1 - 2C_1K_4\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)^2}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)^2} + \\ + \frac{\left(C_2K_2 - 2C_1K_5\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}\frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)} + \frac{\left(C_2K_3 - 2C_1K_6\right)}{C_2^2 - 4C_1C_3}$$

Подставив в эти коэффициенты выражения для C_i, K_i получим что, $D_1 = 0$ $D_2 = 0$. Тогда $\ddot{\varphi}_{11} = \ddot{\varphi}_{12} = 0$ и, следовательно,

$$\dot{\varphi}_{11} = \omega, \dot{\varphi}_{12} = \frac{(\cos\Psi - \sin\Psi + 1)}{(\cos\Psi + \sin\Psi + 1)}\omega,$$

Тогда решение системы (4.12) выглядит следующим образом:

$$\varphi'_{12} = \frac{(\cos\Psi - \sin\Psi + 1)}{(\cos\Psi + \sin\Psi + 1)}\omega$$

$$\varphi'_{11} = \omega$$

$$\dot{\varphi}'_{12} = 0$$

$$\dot{\varphi}'_{11} = 0$$

$$x_1 = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0\right) + x^0$$

$$y_1 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0\right) + y^0$$

$$\theta_1 = \left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0$$

$$x_2 = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + \Psi\right) + x^0$$

$$y_2 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + \Psi\right) + y^0$$

$\psi_2 = \Psi$

$\dots$

$$x_i = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + (i-1)\Psi\right) + x^0$$

$$y_i = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + (i-1)\Psi\right) + y^0$$

$\psi_i = \Psi$

$\dot{\varphi}_{i1} = \omega$

$$\dot{\varphi}_{i2} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\omega$$

$\dots$

$$x_n = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + (n-1)\Psi\right) + x^0$$

$$y_n = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\left(\left(-\frac{\sin\Psi}{b\cos\Psi + a\sin\Psi + b}\omega\right)t + \theta_1^0 + (n-1)\Psi\right) + y^0$$

$\psi_n = \Psi$

$\dot{\varphi}_{n1} = \omega$

$$\dot{\varphi}_{n2} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\omega$$

где $\begin{cases} x_i^0 = x_{i-1}^0 - b\cos\theta_1^0 - b\cos\left(\theta_1^0 + (i-1)\Psi\right) \\ y_i^0 = y_{i-1}^0 - b\sin\theta_1^0 - b\sin\left(\theta_1^0 + (i-1)\Psi\right) \end{cases}$ - начальные координаты центра i – й тележки.

Из полученных уравнений видно, что траекторией данного движения является окружность заданного радиуса $R = \dfrac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}$ с центром в точке $\left(x^0, y^0\right)$. Найдем координаты центра установившейся окружности. Пусть в начальный момент координаты первой тележки - $x_1^0, y_1^0, \theta_1^0, \Psi$, тогда справедливо

$$x_1^0 = -\frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\theta_1^0 + x^0$$

$$y_1^0 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\theta_1^0 + y^0$$

откуда выражаем x^0, y^0

$$x^0 = \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\sin\theta_1^0 + x_1^0$$

$$y^0 = y_1^0 - \frac{b\cos\Psi + b}{\sin\Psi}\cos\theta_1^0$$

Следовательно, координаты центра окружности зависят от начальных координат центра первой тележки, начального угла поворота оси первой тележки относительно оси ОХ и угла между тележками. Из формулы для радиуса видно, что он зависит только от угла между тележками.

Итак, получены два частных решения для системы из n тележек: движение по прямой и окружности. Из выведенных формул видно, что движение по прямой осуществляется при любых начальных условиях и параметрах системы, если угол между тележками $\Psi = \pi k, k \in Z$ и угловые скорости вращения правого и левого колес совпадают. Движение по окружности же возможно только при определенных угловых скоростей вращения первого и второго колес первой тележки ($\varphi_{12} = \frac{(b\cos\Psi - a\sin\Psi + b)}{(b\cos\Psi + a\sin\Psi + b)}\varphi_{11}$). При этом радиус описываемой окружности зависит только от угла между тележками, а положение ее центра от начальных координат центра первой тележки, начального угла поворота оси первой тележки относительно оси ОХ и угла между тележками.

Заключение.

В работе построены уравнения движения системы «робопоезд», состоящей из n тележек для свободного движения. В частности, приведен вывод уравнений для n=2. Показано, что изменение числа объектов в системе не влечет изменения числа степеней свободы, которое всегда равно двум. Получены базовые решения уравнений. Показано, что такие частные решения как «прямая» и «окружность» существуют для любого n.

После вывода уравнений движения цепочки мобильных роботов можно рассматривать задачи управления такой системой: исследовать условия, обеспечивающие реализацию программных движений и предлагать алгоритмы управления при движении в заданную точку плоскости.

Список литературы

1. Y. Nakamura, H.Ezaki, Y.Tan, W.Chung. «Design of Steering Mechanism and Control of Nonholonomic Trailer Systems» in Proc. 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 247-254, 2000.
2. M.Vendittelli, G.Oriolo. “Stabilization of the general two-trailer system” in Proc. 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 1817-1823, 2000.
3. K.-U. Scholl, V. Kepplin, K. Berns, R. Dillmann “Controlling a Multijoint Robot for Autonomous Sewer Inspection” in Proc. 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 1701-1706, 2000.
4. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. − М.: Наука, 1967.−520 с.
5. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. М.: Изд-во Моск. Ун-та., 2000.-719с.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебное пособие. М.: Наука, 1990.-416с.