

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша

М.П.Галанин, А.С.Родин

**Исследование обусловленности системы линейных
алгебраических уравнений для задачи определения
электромагнитного поля в системе длинных
проводников**

Москва, 2005

Аннотация

Работа посвящена численному моделированию электромагнитного поля в системе длинных проводников. Приведено аналитическое решение одномерной задачи для интегро-дифференциального уравнения. Проведено доказательство положительной определенности оператора как дифференциальной, так и разностной задачи. Выполнен расчет собственных значений систем линейных алгебраических уравнений, характеризующих поставленную задачу, и числа обусловленности решаемой системы.

M.P.Galanin, A.S.Rodin

The Investigation of Conditioning Number of Linear Algebraic Equation System for the Problem of Finding of Electromagnetic Field in the System of Long Conductors.

Abstract

The paper is dedicated to the numerical modelling of electromagnetic field in the system of long conductors. The analytical solution of 1d problem for integro-differential equation is presented. The proof of positive conditionality of operator is executed for differential as well for difference problem. The calculation of eigenvalues for linear algebraic system characterizing the stated problem and conditioning number of system under solution is made.

Содержание

1	Постановка задачи и физическая модель	3
2	Математическая модель	5
3	Аналитическое решение одномерных уравнений	7
4	О численном решении задачи	16
5	Исследование знакоопределенности оператора задачи	17
6	Нахождение максимального и минимального собственных значений	25
7	Заключение	30
8	Литература	

1 Постановка задачи и физическая модель

Настоящая работа посвящена исследованию математической модели процесса движения проводящего лайнера в устройстве обострения мощности (см.[1]). Данный обостритель является элементом установки МОЛ для проектируемой системы Байкал (см.[13]). Схема обострителя приведена на рис.1.

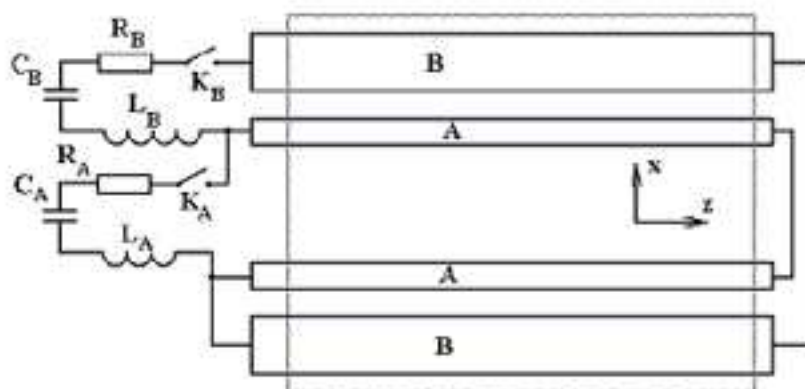


Рис. 1. Характерная схема сечения пространственной области, в которой решается задача, плоскостью $y=\text{const}$. Здесь А - лайнер, В - индуктор

В нулевой момент времени конденсатор в цепи индуктора заряжен до некоторого начального напряжения. После замыкания цепи по индуктору (и лайнеру) начинает течь разрядный ток. Созданное им в канале ускорителя магнитное поле взаимодействует с протекающим по лайнеру током, ускоряя лайнер в направлении от индуктора. В некоторый момент времени (возможно, нулевой) замыкается и цепь лайнера. Ток этой цепи протекает по лайнеру и создает внутри полости лайнера дополнительное магнитное поле. Ускорившись, лайнер сжимает это поле, которое окончательно и выводится из системы в виде импульса тока в цепи лайнера. Требуется по начальным и граничным данным, физическим характеристикам сред

рассчитать скорость и положение ускоряемого лайнера, напряженности электрического и магнитного полей, токи и напряжения во внешних электрических цепях.

Будем использовать математическую модель [1,10,11,12]. В ней задача рассматривается в пространственно-двумерном приближении, в котором все величины зависят только от координат x и y . Это означает формально бесконечную протяженность системы в направлении оси z . Однако в модели должна учитываться и некая "эффективная" длина системы в z - направлении, в значительной степени определяющая процесс перекачки энергии из внешней электрической цепи в кинетическую энергию лайнера. Индуктор предполагается неподвижным. Его форма остается неизменной, материал индуктора является проводником. Лайнер является подвижным. Его положение подлежит расчету в зависимости от протекающих процессов. Считается, что материал лайнера представляет собой несжимаемую электропроводную вязкую жидкость или упругое твердое тело. На каждую элементарную частицу лайнера действует сила Лоренца, гидродинамическое и вязкое давление или соответствующие упругие напряжения. Лайнер и индуктор располагаются в области, ограниченной идеально проводящим кожухом, находящимся от проводников на достаточно большом расстоянии с тем, чтобы его влияние было не слишком существенным.

Целью данной работы является исследование свойств как исходной интегро-дифференциальной задачи для определения электромагнитного поля в системе, так и ее конечномерной аппроксимации.

Авторы благодарны С.С.Уразову за помощь в реализации программных алгоритмов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 03-01-00461).

2 Математическая модель

2.1 Электродинамическая часть

После перехода к безразмерным величинам (более подробно см. [6]), система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении имеет вид(см. [1]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot}([\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \mathbf{E}), \\ \text{rot} \mathbf{H} &= 4\pi\sigma \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь σ - электропроводность, \mathbf{E} и \mathbf{H} - напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{j} -плотность тока, \mathbf{v} -скорость движения вещества. Все величины в системе (2.1) заданы в лабораторной системе отсчета (см.[4]), использованы эйлеровы координаты.

Для решения задачи в [1,10,11,12] использованы смешанные эйлерово-лагранжевые (СЭЛ) переменные. Под ними понимаются начальные координаты точек данной области. Тогда $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}, \text{grad})$, где $\partial/\partial t$ - производная при фиксированных эйлеровых переменных, D/Dt - при фиксированных СЭЛ координатах. Отметим, что в явном виде СЭЛ координаты не используются, все производные по-прежнему записаны в эйлеровых координатах. В уравнениях фигурируют только производные по времени при фиксированных СЭЛ координатах.

Тогда задача нахождения электромагнитного поля в системе, обеспечивающая протекание по каждому проводнику заданного полного тока, сводится к решению следующей системы:

$$4\pi\sigma \left[\frac{DA}{Dt} - \frac{\int_{S_k} \sigma \frac{DA}{Dt} dS + I_k}{\int_{S_k} \sigma dS} \right] = \Delta A, \quad \mathbf{x} \in S_k, \quad k = 1, 2..N, \tag{2.2}$$

$$\Delta A = 0 \text{ в } G_2,$$

$$\text{с условиями } A|_{t=0} = 0, [A] = 0 \text{ на } \partial S_k, A|_{\partial G} = 0.$$

Здесь приняты следующие обозначения: введен векторный потенциал $\mathbf{A} = (0, 0, A)$ такой, что $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$, S_k - область k -го проводника, G_1 - вся область,

занимаемая проводниками, G_2 - область, занимаемая диэлектриком, ∂S_k - граница k -го проводника.

Чтобы обеспечить протекание через проводники заданных токов, потребуем скачка E_z при переходе через ∂S_k на величину $\chi_k(t)$, для которой имеем соотношение:

$$\chi_k(t) = \frac{-\int_{S_k} \sigma \frac{DA}{Dt} dS - I_k}{\int_{S_k} \sigma dS}. \quad (2.3)$$

Учет этого слагаемого и приводит к появлению в (2.2) интегрального члена.

2.2 Уравнения внешних электрических цепей.

Параметры внешних электрических цепей предполагаются сосредоточенными, так что для описания цепей можно применять уравнения Кирхгоффа. Они имеют вид (см. [1]):

$$\begin{aligned} L_A \frac{dI_A}{dt} + R_A I_A - U_A - 2\chi_A l_z &= 0, \\ C_A \frac{dU_A}{dt} &= -I_A, \\ L_B \frac{dI_B}{dt} + R_B I_B - U_B - 2(\chi_B - \chi_A) l_z &= 0, \\ C_B \frac{dU_B}{dt} &= -I_B. \end{aligned}$$

Здесь индексами А и В помечены величины, относящиеся к лайнеру и индуктору соответственно. L, R, C - индуктивность, сопротивление и емкость в цепи, I и U - сила тока и напряжение на обкладках конденсатора. Величина χ дает скачок напряженности электрического поля (см. [1]). В качестве I_k , упоминавшихся в формулах (2.2) и (2.3), стоят значения токов, протекающих по определенному проводнику. По индуктору - это I_B , а по лайнеру - $(I_A - I_B)$. Коэффициент 2 в уравнениях цепей появился из-за существования прямых и обратных направляющих для протекающего тока, l_z - эффективная длина системы в направлении оси z.

Уравнения цепей дополнены очевидными начальными данными:

$$I_A(0) = I_{A0}, U_A(0) = U_{A0}, I_B(0) = I_{B0}, U_B(0) = U_{B0}.$$

3 Аналитическое решение одномерных уравнений

Представим аналитические решения уравнений, соответствующих нашей математической модели (с некоторыми вариациями) в одномерном случае с постоянным σ в G_1 .

3.1 Первый случай

Задача состоит в нахождении решения $A=A(x, t)$ уравнения

$$4\pi\sigma \left[\frac{\partial A}{\partial t} - \left(\int_S \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS + I \right) / \int_S \sigma dS \right] = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (3.1.1)$$

в $S = [0, l]$, где $S : \{x : \sigma = const \neq 0\}$ - область, в которой находится проводник, с нулевыми начальными и граничными условиями

$$A(x, 0) = 0, \quad A(0, t) = 0, \quad A(l, t) = 0.$$

В такой постановке задачи $G_1 = S$, $G_2 = \emptyset$. Ток $I(t)$ считается заданным.

Введем обозначение $a^2 = \frac{1}{4\pi\sigma}$. Будем искать решение в виде

$$A(x, t) = u(x, t) + V(x, t),$$

где $V = 2\pi(x - \frac{x^2}{l})I(t)$. Тогда для $u(x, t)$ получаем задачу:

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{l} \int_0^l u_t dx + 2\pi(x - \frac{x^2}{l} - \frac{l}{6})I' &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= -2\pi(x - \frac{x^2}{l})I(0). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Отметим, что задача (3.1.2) не изменится, если заменить x на $x_1 = l - x$. Значит, решение однородного уравнения (3.1.2) должно быть симметричным относительно точки $x = \frac{l}{2}$ (начальные и граничные условия тоже удовлетворяют этому условию).

Решим однородное уравнение методом разделения переменных, используя представление:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.1.3)$$

В результате подстановки получим уравнение:

$$T'(X - c) = a^2 X'' T, \quad (3.1.4)$$

где $c = \frac{1}{l} \int_0^l X dx = \text{const}$. Равенство (3.1.4) справедливо, если

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X - c} = \text{const} = -\lambda. \quad (3.1.5)$$

Тогда для X имеем:

$$\begin{cases} X'' = -\lambda(X - c), \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Интегрирование (3.1.6) по $[0, l]$ с учетом значения постоянной c дает условие:

$$X'(0) = X'(l) = \text{const} = c_1.$$

Тогда, если продифференцировать (3.1.6) по x и обозначить $X'(x) = Y(x)$, получим систему:

$$\begin{cases} Y'' = -\lambda Y, \\ Y(0) = Y(l) = c_1. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид:

$$Y = B_1 \cos \sqrt{\lambda} x + B_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Из граничных условий получаем

$$B_1 = c_1, \quad c_1 \cos \sqrt{\lambda} l + B_2 \sin \sqrt{\lambda} l = c_1.$$

Можно показать, что случай $c_1 \neq 0$ дает решение, которое не удовлетворяет требованию симметрии, поэтому рассмотрим случай $c_1 = 0$. Тогда имеем решение задачи Штурма-Лиувилля (см. [8]):

$$Y_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Из граничных условий для X_k получаем, что

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2, \quad X_n = a_n \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1.7)$$

Эти функции удовлетворяют требованию симметрии, поэтому в дальнейшем будем использовать именно этот набор функций.

Совокупность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является ортогональной в L_2 , но она ортогональна в пространстве функций, для которых $\frac{1}{l} \int_0^l Lf f dx < \infty$, где

$$Lf = f - \frac{1}{l} \int_0^l f dx,$$

а "скалярное произведение" и "норма" заданы следующим образом:

$$(f, g) = \frac{1}{l} \int_0^l Lf g dx, \|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (3.1.8)$$

Данная система функций X_n не является полной в таком пространстве, но в совокупности с системой

$$X_n^1 = \sin \frac{2\pi n x}{l} \quad (3.1.9)$$

она будет полной в факторе данного пространства по отношению эквивалентности

$$f \sim g \iff f(x) \equiv g(x) + c, c = const. \quad (3.1.10)$$

В этом пространстве выполнены все аксиомы для скалярного произведения (3.1.8), включая аксиому о равенстве нулю скалярного квадрата (он равен нулю для любой константы, однако относительно введенного отношения (3.1.10) константа эквивалентна нулю). Можно показать, что элемент, ортогональный всем функциям из систем (3.1.7) и (3.1.9), тоже является константой, эквивалентной нулевому элементу, откуда и следует (см. [14]) полнота совокупности указанных функций.

В каждом классе эквивалентности, порождаемом отношением (3.1.10), содержится функция \tilde{f} , которая раскладывается по рассматриваемой системе X_n и X_n^1 . В этом случае любой другой элемент f из данного класса представляется в виде

$$f(x) = \tilde{f}(x) + c(f),$$

где $c(f)$ - константа, зависящая только от самой f .

Введем обозначение:

$$evenf(x) = \frac{f(x) + f(l-x)}{2}$$

функция, четная относительно точки $x = \frac{l}{2}$. Тогда легко установить, что $c(f) = evenf(0) = evenf(l)$, так как $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(l) = 0$.

Если сама функция f тоже является симметричной (то есть $f(x) = evenf(x)$), то она представима в виде:

$$f(x) = f(0) + \tilde{f}(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{f}, X_n)}{\|X_n\|^2} X_n(x). \quad (3.1.11)$$

Теперь вернемся к выражению (3.1.7) и найдем T :

$$\frac{T'}{a^2 T} = -\lambda_n \implies T_n = \tilde{c} e^{-\left(\frac{2\pi n a}{l}\right)^2 t}. \quad (3.1.12)$$

Если учесть (3.1.11), (3.1.12) и ввести обозначение

$$c_n = \frac{2\tilde{c}(X, X_n)}{a_n} = const,$$

то решение однородной задачи (3.1.2) можно записать так:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right) e^{-\left(\frac{2\pi n a}{l}\right)^2 t}. \quad (3.1.13)$$

Найдем решение исходной неоднородной задачи (3.1.2), взяв $c_n = c_n(t)$. Для c_n получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right) e^{-\left(\frac{2\pi n a}{l}\right)^2 t} - \\ - \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right) dx e^{-\left(\frac{2\pi n a}{l}\right)^2 t} + 2\pi \left(x - \frac{x^2}{l} - \frac{l}{6}\right) I'(t) = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right) = -2\pi \left(x - \frac{x^2}{l}\right) I(0). \end{array} \right.$$

Обозначим

$$- \sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-\left(\frac{2\pi n a}{l}\right)^2 t} - 2\pi \frac{l}{6} I'(t) = q(t).$$

Тогда получим уравнение:

$$q(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n (1 - \cos \frac{2\pi nx}{l}) e^{-\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 t} + 2\pi(x - \frac{x^2}{l}) I'(t) = 0. \quad (3.1.14)$$

Разложим $g(x) = \text{even } g = x - \frac{x^2}{l}$ по X_n в рассматриваемом пространстве:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi^2 n^2} (1 - \cos \frac{2\pi nx}{l}). \quad (3.1.15)$$

Подставим (3.1.15) в (3.1.14):

$$q(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 t} + \frac{2l}{\pi n^2} I'(t) \right) (1 - \cos \frac{2\pi nx}{l}) = 0.$$

Так как $0 = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 * X_n$, то это означает, что :

$$q(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 t} - 2\pi \frac{l}{6} I'(t) = 0. \quad (3.1.16)$$

$$c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 t} + \frac{2l}{\pi n^2} I'(t) = 0, n = 1, 2, \dots$$

$$\implies c_n = - \frac{2l}{\pi n^2} \int_0^t I'(\tau) e^{\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 \tau} d\tau + c.$$

Постоянную c найдем из начального условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n(0) + \frac{2l}{\pi n^2} I(0)) (1 - \cos \frac{2\pi nx}{l}) = 0,$$

$$c = c_n(0) = - \frac{2l}{\pi n^2} I(0).$$

$$c_n = - \frac{2l}{\pi n^2} \left(I(0) + \int_0^t I'(\tau) e^{\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 \tau} d\tau \right).$$

Легко убедиться, что (3.1.16) действительно выполняется. Выпишем полностью найденное решение:

$$A(x, t) = u + V = 2\pi\left(x - \frac{x^2}{l}\right)I(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{\pi n^2} * \\ * \left(I(0)e^{-\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 t} + \int_0^t I'(\tau)e^{-\left(\frac{2\pi na}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \left(\cos \frac{2\pi nx}{l} - 1\right).$$

Рассмотрим вопрос о единственности классического решения задачи (3.1.1). Предположим, что существуют два решения. Тогда для их разности A_r имеем тождество вида

$$4\pi \frac{\partial}{\partial t} \int_S \sigma \left[A_r - \frac{\int_S \sigma A_r dS}{\int_S \sigma dS} \right] dS + \int_S (\nabla A_r)^2 dS = 0.$$

Отсюда получаем, что A_r есть функция времени, равная нулю при $t = 0$. Но в силу граничных условий она равна нулю тождественно.

3.2 Второй случай

Теперь рассмотрим случай, когда электропроводность равна нулю на участке $x \in [0, l_0] \cup [l - l_0, l]$. На границе раздела подобластей выполнено условие непрерывности потенциала A и его производной.

Если представить потенциал в виде:

$$A(x, t) = \begin{cases} A_1(x, t), & x \in [0, l_0], \\ A_2(x, t), & x \in [l_0, l - l_0], \\ A_3(x, t), & x \in [l - l_0, l], \end{cases}$$

то можно сформулировать задачу (2.2) для данного случая:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{1xx} = 0, \\ A_1(0, t) = 0, \\ A_1(l_0, t) = A_2(l_0, t), \\ A_{1x}(l_0, t) = A_{2x}(l_0, t), \\ A_{2t} - \frac{1}{l_1} \int_{l_0}^{l-l_0} A_{2t} dx - \frac{I}{l_1 \sigma} = a^2 A_{2xx}, \\ A_2(l-l_0, t) = A_3(l-l_0, t), \\ A_{2x}(l-l_0, t) = A_{3x}(l-l_0, t), \\ A_{3xx} = 0, \\ A_3(l, t) = 0, \\ A(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

где $l_1 = l - 2l_0$.

Если сделать замену: $x \longrightarrow l - x$, то легко видеть, что

$$A_3(x, t) = A_1(l - x, t).$$

Представим A_1, A_3 в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = X_1(x) f(t), \\ A_3 = X_1(l - x) f(t). \end{array} \right.$$

Решая систему (3.2.1), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = cx f(t), \\ A_3 = c(l - x) f(t), \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

где функция $f(t)$ должна удовлетворять начальному условию $f(0) = 0$.

Удобно сделать замену $y = x - l_0$. Тогда для A_2 задача формулируется так:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{2t} - \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} A_{2t} dy - \frac{I}{l_1 \sigma} = a^2 A_{2yy}, \\ A_2(0, t) = A_2(l_1, t) = cl_0 f(t), \\ A_{2y}(0, t) = cf(t), \\ A_{2y}(l_1, t) = -cf(t), \\ A_2(y, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

Решение ищем в виде

$$A_2(y, t) = u(y, t) + V(y, t) + W(y, t),$$

где

$$V = c\left(y - \frac{y^2}{l_1} + l_0\right)f(t),$$

$$W = \frac{c}{l_1^3}y^2(y - l_1)^2f(t).$$

Тогда для $u(y, t)$ задача принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{yy} = u_t - \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} u_t dy + c\left(y - \frac{y^2}{l_1} - \frac{l_1}{6}\right)f'(t) + \frac{2a^2c}{l_1}f(t) + \\ + \frac{c}{l_1^3}\left(y^4 - 2y^3l_1 + y^2l_1^2 - \frac{l_1^4}{30}\right)f'(t) + \frac{12a^2c}{l_1^3}\left(y^2 - yl_1 + \frac{l_1^2}{6}\right)f(t) - \frac{I}{\sigma l_1}, \quad (3.2.4) \\ u(0, t) = u(l_1, t) = 0, \\ u_y(0, t) = u_y(l_1, t) = 0, \\ u(y, 0) = 0. \end{array} \right.$$

Если свести систему (3.2.4) к однородной задаче, то получим уравнения, уже решенные в первой части. Значит, решение однородной задачи выглядит аналогично (3.1.13):

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(1 - \cos \frac{2\pi ny}{l_1}\right) e^{-\left(\frac{2\pi na}{l_1}\right)^2 t}.$$

Тогда решение неоднородной задачи (3.2.9) может быть получено из соотношения:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l_1}\right)^2 t} + \frac{cl_1 f'(t)}{\pi^2 n^2} + \frac{3cl_1 f'(t)}{\pi^4 n^4} + \frac{12ca^2 f(t)}{\pi^2 n^2 l_1} \right) X_n(y) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l_1}\right)^2 t} - \frac{cl_1 f'(t)}{6} + \frac{2a^2 c}{l_1} f(t) - \\ & - \frac{cl_1 f'(t)}{30} - \frac{2ca^2 f(t)}{l_1} - \frac{I}{\sigma l_1} = 0. \end{aligned}$$

Здесь используются функции $X_n(y)$, аналогичные функциям (3.1.7). Представление правой части в виде $0 = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 * X_n$ дает равенства

$$-\sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l_1}\right)^2 t} - \frac{cf'(t)l_1}{6} + \frac{2a^2c}{l_1}f(t) - \frac{cl_1f'(t)}{30} - \frac{2ca^2f(t)}{l_1} - \frac{I}{\sigma l_1} = 0, \quad (3.2.5)$$

$$c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l_1}\right)^2 t} + \frac{cl_1}{\pi^2 n^2} f'(t) + \frac{3cl_1 f'(t)}{\pi^4 n^4} + \frac{12ca^2 f(t)}{\pi^2 n^2 l_1} = 0, \quad (3.2.6)$$

откуда

$$c_n = -c \int_0^t \left(\frac{l_1}{\pi^2 n^2} f'(\tau) + \frac{3l_1}{\pi^4 n^4} f'(\tau) + \frac{12a^2}{\pi^2 n^2 l_1} f(\tau) \right) e^{-\left(\frac{2\pi na}{l_1}\right)^2 \tau} d\tau + const.$$

Из нулевого начального условия следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \left(1 - \cos \frac{2\pi ny}{l_1}\right) = 0, \\ const = c_n(0) = 0.$$

Функция $f(t)$ определяется из (3.2.5) с использованием (3.2.6) и соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{13\pi^4}{720} :$$

(эти суммы можно получить, если разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$, соответственно, x и x^2 , а затем воспользоваться равенством Парсеваля)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} c'_n e^{-\left(\frac{2\pi na}{l_1}\right)^2 t} = \frac{cl_1 f'}{6} + \frac{13cl_1 f'}{240} + \frac{2ca^2 f}{l_1}.$$

Введем обозначение

$$\tilde{f} = fc.$$

Тогда

$$\tilde{f}(t) = \frac{48}{\sigma l_1^2} \int_0^t I(s) e^{-\frac{96a^2}{l_1^2}(t-s)} ds.$$

Значит

$$c_n = - \int_0^t \left(\frac{l_1}{\pi^2 n^2} \tilde{f}'(\tau) + \frac{3l_1}{\pi^4 n^4} \tilde{f}'(\tau) + \frac{12a^2}{\pi^2 n^2 l_1} \tilde{f}(\tau) \right) e^{\left(\frac{2\pi n a}{l_1} \right)^2 \tau} d\tau.$$

Тогда решение (3.2.3) принимает вид:

$$\begin{aligned} A_2(y, t) = u + V + W = & (y - \frac{y^2}{l_1} + l_0) \tilde{f}(t) + \frac{1}{l_1^3} y^2 (y - l_1)^2 \tilde{f}(t) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \left(\frac{l_1}{\pi^2 n^2} \tilde{f}'(\tau) + \frac{3l_1}{\pi^4 n^4} \tilde{f}'(\tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{12a^2}{\pi^2 n^2 l_1} \tilde{f}(\tau) \right) e^{-\left(\frac{2\pi n a}{l_1} \right)^2 (t-\tau)} d\tau \right] \left(\cos \frac{2\pi n y}{l_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

А из (3.2.2) находятся

$$A_1(x, t) = x \tilde{f}(t),$$

$$A_3(x, t) = (l - x) \tilde{f}(t).$$

4 О численном решении задачи

Для численного решения поставленной задачи в [1, 10, 11, 12] используется метод конечных элементов.

При аппроксимации уравнений электродинамики одновременно производилась дискретизация уравнений внешних электрических цепей, так что явления внутри ускорителя и в цепях описывались совместно. Учет уравнений цепи привел к необходимости численного решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Особенностью такой задачи является плохая обусловленность соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из-за наличия интегральных членов. Кроме того, в полученной СЛАУ матрица системы не будет симметричной.

Это в значительной степени затрудняет работу с системой. Поэтому применен такой прием: число неизвестных разностной задачи расширяется на N штук, то есть на количество проводников (в данном случае $N=2$). При этом новые переменные (см. [2]) с точностью до множителя равны

$$Y_k = \frac{\int_{S_k} \sigma \frac{DA}{Dt} dS + I_k}{\left(\int_{S_k} \sigma dS \right)^{1/2}}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Полученная после этого преобразования СЛАУ, соответствующая уравнениям электродинамики и внешних электрических цепей, и исследуется в дальнейшем. Именно о ней пойдет речь в следующем разделе.

5 Исследование знакоопределенности оператора задачи

В расчетной области фигурируют 2 проводника, однако в этом разделе доказываем положительную определенность оператора задачи при наличии 1 проводника. Это сделано для упрощения записи. Добавление второго проводника не вносит ничего существенно нового в доказательство, а только делает его более громоздким. В этом разделе ток, текущий по проводникам, считается заданным. Это соответствует отсутствию уравнений цепи в исходной модели.

5.1 Интегро-дифференциальный оператор

В соответствии с задачей (2.2) он задан соотношениями

$$LA = \frac{4\pi\sigma}{\tau} \left(A - \frac{1}{S_\Theta} \int_{S_k} \sigma A dS \right) - \Delta A \text{ в } S_k, \text{ где } S_\Theta = \int_{S_k} \sigma dS,$$

$$LA = -\Delta A \text{ в } G \setminus \bigcup_k S_k.$$

Введем обозначение:

$$A^* = \begin{cases} A - \frac{1}{S_\Theta} \int_{S_k} \sigma AdS, & \mathbf{x} \in S_k, \\ 0, & \mathbf{x} \in G \setminus \bigcup_k S_k. \end{cases}$$

Будем использовать стандартное скалярное произведение в пространстве $L_2(G)$

$$(u, v) = \int_G uv dS.$$

Тогда можно записать:

$$(LA, A) = (-\Delta A, A) + \left(\frac{4\pi\sigma}{\tau} A^*, A\right),$$

$$(-\Delta A, A) = (\nabla A, \nabla A) - \int_{\partial G} A \frac{\partial A}{\partial n} dS = (\nabla A, \nabla A).$$

Последнее выполнено в силу граничных условий. Далее получим

$$\left(\frac{4\pi\sigma}{\tau} A^*, A\right) = \left(\frac{4\pi\sigma}{\tau} A^*, A^*\right) + \left(\frac{4\pi\sigma}{\tau} A^*, \frac{1}{S_\Theta} \int_{S_k} \sigma AdS\right) = \left(\frac{4\pi\sigma}{\tau} A^*, A^*\right).$$

Тогда

$$(LA, A) = (\nabla A, \nabla A) + \left(\frac{4\pi\sigma}{\tau} A^*, A^*\right) \geq \|\nabla A\|^2 \geq c\|A\|^2$$

в силу неравенства Фридрикса (см.[7]).

Значит, оператор L является строго положительно определенным.

5.2 Разностный оператор

5.2.1 Одномерный случай без замены.

Проведем дискретизацию интегро-дифференциальной задачи (2.2) в одномерном случае. На множестве G (в данном случае $[0, l]$ и $[0, t_0]$) введем сетки $\omega_h = \{x_i\}_{i=0}^n$ и $\omega_\tau = \{t_j\}_{j=0}^p$. Точки $(x_i, t_j), i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, p$, образуют узлы пространственно-временной сетки $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$.

Непрерывную функцию A заменим сеточной функцией y , определенной на сетке $\omega_{h,\tau}$. Для нее введем обозначения y_i^j - значение y в точке $x = x_i, t = t_j$.

Проведем стандартную разностную аппроксимацию дифференциальных частей уравнений.

В дальнейшем для облегчения формы записи индекс по времени опущен, при этом $y_i^j = y_i$, $y_i^{j-1} = \check{y}_i$ (см. [9], [15]).

Электропроводность не равна нулю на отрезке $[l_0, l - l_0]$. Пусть концам этого отрезка соответствуют узлы сетки с номерами m и k . Интеграл аппроксимируем с помощью квадратурной формулы прямоугольников:

$$\int_{l_0}^{l-l_0} \sigma A_t dx \longrightarrow \int_{l_0}^{l-l_0} \sigma \frac{A(x, t_j) - A(x, t_{j-1})}{\tau} dx \longrightarrow \sum_{i=m}^k \frac{y_i - \check{y}_i}{\tau} h_i \sigma_i.$$

В данном разделе считается, что пространственная сетка является равномерной, то есть $h_i = h = const$.

Тогда разностная схема для уравнения (она будет полностью неявной) примет вид:

$$\begin{cases} 4\pi\sigma_i \left(\frac{y_i - \check{y}_i}{\tau} - \frac{1}{S_\sigma} \sum_{j=m}^k \frac{y_j - \check{y}_j}{\tau} h \right) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{4\pi\sigma_i I}{S_\sigma}, \\ \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, k+1, \dots, n-1 \\ y_0 = y_n = 0, \end{cases}$$

где $S_\sigma = \sum_{j=m}^k \sigma_j h$.

Домножим все слагаемые в разностной схеме на h .

Если собрать все слагаемые, относящиеся к верхнему временному слою, в левой части уравнения, то из коэффициентов, стоящих перед ними, можно составить матрицу - обозначим ее \hat{A} . Все остальные слагаемые перенесем в правую часть уравнений и обозначим f_i . При исследовании знакоопределенности они не используются.

Тогда можно записать разностную схему в матричном виде:

$$\hat{A}y = F,$$

где $F = (0, 0, 0, \dots, f_k, \dots, f_m, 0, \dots, 0)^T$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1})^T$.

Рассмотрим более подробно оператор разностной задачи. Он задан соотношениями:

$$(\widehat{A}y)_i = -h(y_{x\bar{x}})_i, i = 1, \dots, m-1, k+1, \dots, n-1$$

$$(\widehat{A}y)_i = \frac{4\pi}{\tau} \sigma_i h [y_i - \frac{1}{S_\sigma} \{ \sum_{j=m}^k \sigma_j h y_j \}] - h(y_{x\bar{x}})_i, i = m, \dots, k$$

Скалярное произведение и норма определяются следующим образом (см.[9]):

$$\|y\|^2 = \sum_{j=0}^n h y_j^2, (u, v) = \sum_{j=0}^n h u_j v_j,$$

$$(\widetilde{A}u, v) = \sum_{j=0}^n h (\widetilde{A}u)_j v_j, \text{ где } \widetilde{A} = \frac{1}{h} \widehat{A}.$$

Используем далее известные соотношения: первую разностную формулу Грина и разностную теорему вложения (см.[9]).

Для удобства введем обозначения:

$$B_0 = \begin{pmatrix} \frac{h\sigma_m}{S_\sigma} & \dots & \frac{h\sigma_k}{S_\sigma} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{h\sigma_m}{S_\sigma} & \dots & \frac{h\sigma_k}{S_\sigma} \end{pmatrix}, B = E - B_0, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(размерность матриц B, B_0, E равна $(k-m) \times (k-m)$, $C - (n-1) \times (n-1)$). Также считаем, что вектор y имеет размерность $(n-1)$ (значение решения на границе известно заранее). Тогда можно записать:

$$(\widetilde{A}y, y) = \frac{4\pi}{\tau} (\sigma C y, y) - (y_{x\bar{x}}, y) = \frac{4\pi}{\tau} (\sigma C y, y) + \|y_{x\bar{x}}\|^2.$$

$$(\sigma C y, y) = (\sigma B \widetilde{y}, \widetilde{y}) = (\sigma B \widetilde{y}, B \widetilde{y}) + (\sigma B \widetilde{y}, B_0 \widetilde{y}),$$

где $\widetilde{y} = (y_m, \dots, y_k)^T$.

$$(\sigma B \widetilde{y}, B_0 \widetilde{y}) = (\sigma \widetilde{y}, B_0 \widetilde{y}) - (\sigma B_0 \widetilde{y}, B_0 \widetilde{y}) = 0.$$

Тогда

$$(\widetilde{A}y, y) = \frac{4\pi}{\tau} (\sigma C y, y) + \|y_{x\bar{x}}\|^2 \geq \frac{4\pi}{\tau} (\min_i \sigma_i) (B \widetilde{y}, \widetilde{y}) + c \|y\|^2 \geq c \|y\|^2.$$

Значит, матрица \widehat{A} является строго положительно определенной.

5.2.2 Одномерный случай с заменой

Если сделать замену (аналогичную (4.1) для симметризации матрицы)

$$y_\sigma = \frac{\sum_{j=m}^k \sigma_j h y_j}{\beta},$$

то оператор, описанный в предыдущей части, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\widehat{A}\bar{y})_i &= -h(y_{x\bar{x}})_i, \quad i = 1, \dots, m-1, k+1, \dots, n-1, \\ (\widehat{A}\bar{y})_i &= \frac{4\pi}{\tau} \sigma_i h y_i - \alpha \beta h \sigma_i y_\sigma - h(y_{x\bar{x}})_i, \quad i = m, \dots, k, \\ (\widehat{A}\bar{y})_n &= h_{n+1} y_\sigma - \frac{\sum_{j=m}^k \sigma_j h h_{n+1} y_j}{\beta}, \end{aligned}$$

где $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_\sigma)^T$, $\alpha = \frac{4\pi}{\tau S_\sigma}$, h_{n+1} - длина фиктивной ячейки сетки, возникающей из-за расширения оператора. Значение h_{n+1} произвольно, обычно оно принимается равным 1. Коэффициент β находится из условия симметричности матрицы \widehat{A} :

$$\frac{h_{n+1}}{\beta} = \alpha \beta \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{\alpha}}.$$

Для удобства введем обозначения:

$$C_1 = \left(\frac{\beta}{S_\sigma}, \dots, \frac{\beta}{S_\sigma} \right)^T, \quad C_2 = \left(\frac{\beta \sigma_m h}{h_{n+1} S_\sigma}, \dots, \frac{\beta \sigma_k h}{h_{n+1} S_\sigma} \right) -$$

вектора размерности $(k-m)$;

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{k-m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tau}{4\pi} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \bar{E} - \bar{B},$$

(размерность матриц B, \bar{E}, \bar{B} равна $n \times n$); $\sigma_{n+1} = 1$ (обозначено для удобства).

Тогда можно записать:

$$(\tilde{A}\bar{y}, \bar{y}) = \frac{4\pi}{\tau} (\sigma B\bar{y}, \bar{y}) - (y_{x\bar{x}}, y) = \frac{4\pi}{\tau} (\sigma B\bar{y}, \bar{y}) + \|y_{x\bar{x}}\|^2.$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned}
(\sigma B\bar{y}, \bar{y}) &= \sum_{j=m}^k (y_j - \frac{\beta}{S_\sigma} y_\sigma) \sigma_j h y_j + h_{n+1} (\frac{\tau}{4\pi} y_\sigma - \sum_{j=m}^k \sigma_j h y_j \frac{\beta}{h_{n+1} S_\sigma}) y_\sigma = \\
&= \sum_{j=m}^k h \sigma_j (y_j - \frac{\beta}{S_\sigma} y_\sigma)^2 - \frac{\beta^2}{S_\sigma^2} S_\sigma y_\sigma + \frac{\beta}{S_\sigma} y_\sigma \sum_{j=m}^k h \sigma_j y_j + \frac{\tau h_{n+1}}{4\pi} y_\sigma^2 - \frac{\beta}{S_\sigma} y_\sigma \sum_{j=m}^k \sigma_j h y_j.
\end{aligned}$$

Если учесть, что

$$\frac{\beta^2}{S_\sigma} = \frac{h_{n+1}}{\alpha S_\sigma} = \frac{\tau h_{n+1}}{4\pi},$$

то

$$(\sigma B\bar{y}, \bar{y}) = \sum_{j=m}^k h \sigma_j y_j^2 + \frac{\beta^2}{S_\sigma} y_\sigma^2 - 2 \frac{\beta}{S_\sigma} \sum_{j=m}^k (y_\sigma \sqrt{h \sigma_j}) (\sqrt{h \sigma_j} y_j).$$

Используя неравенство Гельдера для рядов, получим:

$$\begin{aligned}
(\sigma B\bar{y}, \bar{y}) &\geq \sum_{j=m}^k h \sigma_j y_j^2 + \frac{\beta^2}{S_\sigma} y_\sigma^2 - 2 \frac{\beta}{S_\sigma} (y_\sigma^2 \sum_{j=m}^k h \sigma_j)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=m}^k h \sigma_j y_j)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_{j=m}^k h \sigma_j y_j^2 + \frac{\beta^2}{S_\sigma} y_\sigma^2 - 2 \frac{\beta}{\sqrt{S_\sigma}} |y_\sigma| (\sum_{j=m}^k h \sigma_j y_j)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$2|ab| \leq \frac{a^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 b^2.$$

Тогда для $\varepsilon > 1$ можно записать:

$$\begin{aligned}
(\sigma B\bar{y}, \bar{y}) &\geq \frac{\beta^2 y_\sigma^2}{S_\sigma} (1 - \frac{1}{\varepsilon^2}) + (1 - \varepsilon^2) \sum_{j=m}^k h \sigma_j y_j^2 \geq \\
&\geq \frac{\tau}{4\pi} c_1 h_{n+1} y_\sigma^2 - (\varepsilon^2 - 1) \max_j \sigma_j \sum_{j=m}^k h y_j^2.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}\bar{y}, \bar{y}) &\geq \frac{4\pi}{\tau} (\sigma B\bar{y}, B\bar{y}) + \left(\frac{3}{l}\right)^2 \|y\|^2 \geq c_1 h_{n+1} y_\sigma^2 + \frac{9}{l^2} \sum_{i=1}^{m-1} h y_i^2 + \\
&+ \frac{9}{l^2} \sum_{i=k+1}^{n-1} h y_i^2 + \left(\frac{9}{l^2} - \frac{4\pi}{\tau} (\varepsilon^2 - 1) \max_i \sigma_i\right) \sum_{i=m}^k h y_i^2.
\end{aligned}$$

Существует такое $\varepsilon > 1$, что

$$c_2 = \frac{9}{l^2} - \frac{4\pi}{\tau}(\varepsilon^2 - 1) \max_i \sigma_i > 0.$$

Если обозначить $c = \min(c_1, c_2)$, то

$$(\tilde{A}\bar{y}, \bar{y}) \geq c\|\bar{y}\|^2.$$

Значит, матрица \hat{A} является строго положительно определенной.

5.2.3 Двумерный случай

Рассмотрим интегро-дифференциальную задачу:

$$\frac{4\pi\sigma}{\tau} \left(A - \frac{1}{S_\Theta} \int_{S_k} \sigma AdS \right) = \Delta A + f, \quad \mathbf{x} \in S_k,$$

$$0 = \Delta A, \quad \mathbf{x} \in G \setminus \bigcup_k S_k.$$

Для получения разностной схемы используем метод Галеркина (см.[7]) (для системы узлов, образовавшихся после триангуляции области) со следующими изменениями: правая часть уравнений домножается на базисную функцию φ_i , а левая - на ψ_i . Функции φ_i отличны от нуля только в треугольниках, примыкающих к i -й вершине, где они равны $\varphi_i = a_i + b_i x + c_i y$, а ψ_i - характеристические функции ячейки Дирихле, ассоциированные с i -ой точкой:

$$\frac{4\pi}{\tau} \left(\int_{F_i} \sigma A \psi_i dS - \frac{1}{S_\Theta} \int_{S_k} \sigma AdS \int_{F_i} \sigma \psi_i dS \right) = - \int_{G_i} \nabla \varphi_i \nabla AdS + \int_{G_i} \varphi_i f dS,$$

$$0 = - \int_{G_i} \nabla \varphi_i \nabla AdS. \quad i = 1, \dots, m - 1, \dots, k + 1 \dots N.$$

Затем векторный потенциал A , стоящий в правой части уравнений, раскладывается по базисным функциям φ_j , а в левой - по базисным

функциям ψ_j . После подстановки получается система:

$$\frac{4\pi}{\tau} \left(y_i \int_{F_i} \sigma dS - \frac{1}{S_\Theta} \sum_{j=1}^N y_j \int_{F_j} \sigma \psi_j dS \int_{F_i} \sigma \psi_i dS \right) = - \sum_{j=1}^N y_j \int_{G_{ij}} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dS + f_i,$$

$$\sum_{j=1}^N y_j \int_{G_{ij}} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dS = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \dots, k+1 \dots N,$$

где y_j - значение A в соответствующем узле сетки, F_i - область, где не равна нулю функция ψ_i , G_i - область, где не равна нулю функция φ_i , G_{ij} - область, где не равны нулю и φ_i и φ_j .

Если выполнить следующую аппроксимацию $\int_{F_i} \sigma dS = \int_{F_i} \sigma \psi_i dS = \sigma_i s_i$, где s_i - площадь соответствующей ячейки Дирихле, то возникает ситуация, весьма напоминающая одномерный случай, поэтому оператор разностной задачи можно записать в виде:

$$(\widehat{A}y)_i = \sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, m-1, k+1, \dots N$$

$$(\widehat{A}y)_i = \frac{4\pi}{\tau} \sigma_i s_i [y_i - \frac{1}{S_\sigma} \{ \sum_{j=m}^k \sigma_j s_j y_j \}] + \sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} y_j, \quad i = m, \dots, k$$

где $S_\sigma = \sum_{j=m}^k \sigma_j s_j$,

$$C_{ij} = \int_{G_{ij}} \varphi_i \Delta \varphi_j dS = -(\nabla \varphi_j) \varphi_i |_{G_{ij}} + \int_{G_{ij}} (\nabla \varphi_i) (\nabla \varphi_j) dS = \int_{G_{ij}} (\nabla \varphi_i) (\nabla \varphi_j) dS.$$

Учитывая значение функции φ_i , получаем $C_{ij} = (a_i a_j + b_i b_j) s_j$.

Как показано в [7], оператор, заданный соотношениями $(Ay)_i = \sum_{j=1}^{N_i} C_{ij} y_j$, является строго положительно определенным. Значит, как и в одномерном случае, оператор \widehat{A} тоже является положительно определенным. Аналогичные рассуждения можно провести и в случае с заменой (см. раздел 5.2.2).

6 Нахождение максимального и минимального собственных значений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\widehat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Максимальное и минимальное собственные значения позволяют оценить обусловленность матрицы СЛАУ, то есть устойчивость решения по отношению к изменениям правой части уравнений и самой матрицы коэффициентов. Для симметричной и положительно определенной матрицы ее число обусловленности равно отношению (см.[9]):

$$M_A = \|\widehat{A}\|_s \|\widehat{A}^{-1}\|_s = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}.$$

($\|\cdot\|_s$ - спектральная норма)

Кроме того, положительность минимального собственного значения является необходимым условием положительной определенности матрицы \widehat{A} , а отрицательное минимальное собственное значение является достаточным условием того, что матрица не является положительно определенной.

6.1 Степенной метод

Для нахождения максимального собственного значения используем степенной метод без сдвига (см.[5]). Предполагаем, что собственные значения матрицы удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Суть метода заключается в построении последовательности векторов $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ и приближений $\{\lambda^k\}_{k=0}^{\infty}$, используя формулы

$$z_k = \widehat{A}z_{k-1}, \quad \lambda^k = (z_k, z_{k-1}),$$

где все z_k являются нормированными (используется евклидова норма) (более подробно см.[5]). В качестве начального вектора z_0 выберем единичный вектор, а затем его нормируем. Таким образом находится λ_1 . Для определения λ_n используется степенной метод со сдвигом.

6.2 Метод градиентного спуска

Рассмотрим функционал

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{(\widehat{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Легко видеть, что

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{(\widehat{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{(\widehat{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

(при этом предполагается, что матрица \widehat{A} является симметричной).

Таким образом, задача сводится просто к нахождению экстремумов заданного функционала. Для этого применяются некоторые методы градиентного спуска (см. [5]).

Нетрудно убедиться, что градиентом функционала $\mu(\mathbf{x})$ будет вектор

$$\frac{2}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} [\widehat{A}\mathbf{x} - \mu(\mathbf{x})\mathbf{x}] = \frac{2}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \xi,$$

где $\xi = \widehat{A}\mathbf{x} - \mu(\mathbf{x})\mathbf{x}$.

Можно устроить следующий итерационный процесс: пусть \mathbf{x}_0 - некоторый начальный вектор, отличный от нулевого; далее строим последовательность векторов

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \gamma_{k-1} \xi_{k-1},$$

где γ_{k-1} - некоторое положительное число, выбираемое так, чтобы во всяком случае μ_k было бы больше μ_{k-1} (при максимизации функционала, при минимизации - наоборот). Рассмотрим 2 частных случая:

Метод постоянного коэффициента с дроблением шага. Выбираем какое-нибудь начальное значение γ_0 и на каждой итерации принимаем $\gamma_k = \gamma_0$. Если данное значение коэффициента обеспечивает нужное возрастание или убывание функции, то делаем следующий шаг, если нет, то оно домножается на заранее определенное число и снова исследуется поведение функционала. Дробление шага происходит до тех пор, пока промежуточное значение функционала не станет приемлемым.

Метод наискорейшего спуска. В этом случае коэффициент выбирается

так:

$$\gamma_k = \frac{\mu(\mathbf{x}_k) - \mu(\mathbf{x}_{k-1})}{t_{k-1}^2}.$$

А в качестве первого коэффициента принимается выражение

$$\gamma_0 = \frac{2}{\sqrt{s_0^2 + 4t_0^2} + s_0}$$

-при поиске максимума,

$$\gamma_0 = -\frac{2}{\sqrt{s_0^2 + 4t_0^2} - s_0}$$

-при поиске минимума, где

$$t_k^2 = \frac{(\xi_0, \xi_0)}{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k)}, \quad s_k = \mu(\mathbf{x}_k) - \mu(\xi_k).$$

Более подробно эти методы и доказательство их сходимости изложены в [5].

6.3 Сравнение результатов и выводы

Для проверки качества оценок рассмотрим простейшую задачу Штурма-Лиувилля (с нулевыми граничными условиями первого рода), для которой известны точные собственные значения:

$$\lambda_i = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi i h}{2l}.$$

Запишем разностную задачу, проведя дискретизацию оператора Лапласа аналогично случаю, описанному в разделе 5.2.1, и найдем собственные значения, используя эти методы.

Все результаты приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

Размерность	Границы спектра	Точные значения	степенной метод	с дроблением шага	наискор. спуск
n=10	λ_{min}	9.7887	9.7887	9.7887	9.7887
h=0.1	λ_{max}	390.2113	390.21138	390.21125	390.21128
n=100	λ_{min}	$9.868 \cdot 10^{-2}$	$9.869 \cdot 10^{-2}$	$9.8707 \cdot 10^{-2}$	$9.8703 \cdot 10^{-2}$
h=0.1	λ_{max}	399.9013	399.9013	399.9012	399.90129
n=1000	λ_{min}	$9.8659 \cdot 10^{-4}$	$9.996 \cdot 10^{-4}$	$1.0074 \cdot 10^{-3}$	$1.0022 \cdot 10^{-3}$
h=0.1	λ_{max}	399.9990	399.999	399.9984	399.9989

Как видно из этой таблицы, все 3 метода дают результаты, близкие к правильным. В дальнейшем использовался степенной метод.

Вернемся к исходной задаче: интерес представляет случай, когда внутри индуктора существует диэлектрическая подобласть (вырез, занятый диэлектриком), размеры которой будут задавать 2 параметра α, β , изменяющиеся от 0 до 1 (когда они оба равны 0 - подобласти нет, когда они равны 1 - подобласть занимает всю область индуктора). Дело в том,

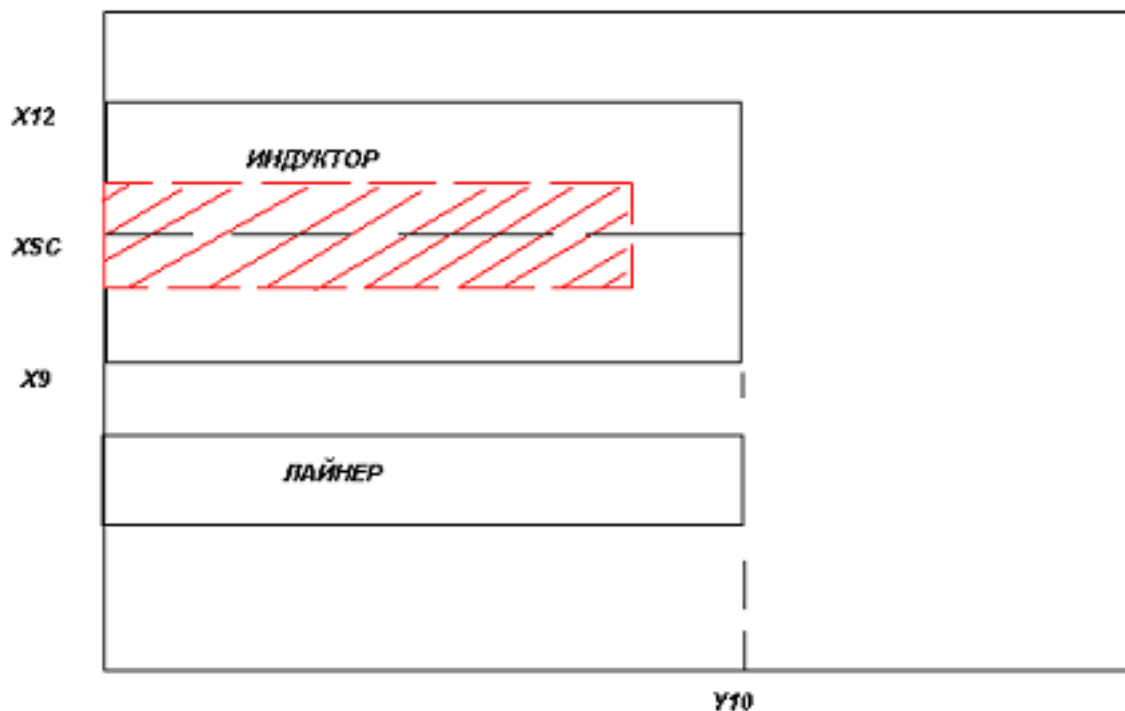


Рис. 2. Схема расположения диэлектрической подобласти (выделена штриховкой) в четверти сечения пространственной области, в которой решается задача, плоскостью $z=\text{const}$.

что реальное значение тока в центральной части индуктора очень мало и, в принципе, им можно пренебречь, считая, что там существует вырез, заполненный диэлектриком. Но это имеет смысл, если в результате такого допущения получается лучшая (в смысле обусловленности) СЛАУ. В Таблице 2 приведены собственные числа при разных значениях параметров. Как видно из этой таблицы, число обусловленности действительно уменьшается с ростом размеров выреза, но эти изменения не так значительны, чтобы радикально изменить ситуацию.

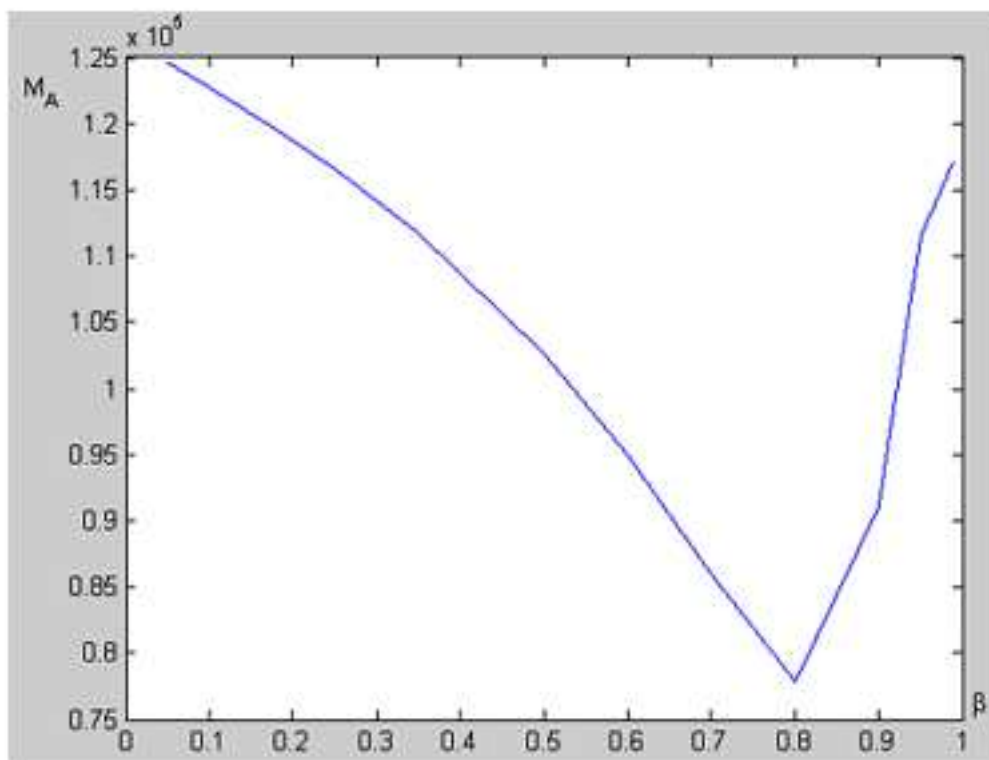


Рис. 3. Зависимость числа обусловленности от размера выреза в индукторе.

Для большей наглядности на рисунке 3 представлен график изменения числа обусловленности от параметра β при фиксированном значении $\alpha = 0.5$.

Таблица 2. Число обусловленности при разных размерах выреза.

α	β	max	min	M_A
0	0	1.1476	$7.8947 \cdot 10^{-6}$	$1.454 \cdot 10^5$
0.25	0.25	1.1492	$8.2147 \cdot 10^{-6}$	$1.399 \cdot 10^5$
0.5	0.25	1.1513	$8.6125 \cdot 10^{-6}$	$1.337 \cdot 10^5$
0.25	0.5	1.15075	$8.6276 \cdot 10^{-6}$	$1.334 \cdot 10^5$
0.25	0.75	1.15075	$9.16952 \cdot 10^{-6}$	$1.254 \cdot 10^5$
0.5	0.5	1.1562	$9.8543 \cdot 10^{-5}$	$1.173 \cdot 10^5$
0.5	0.75	1.1663	$1.1603 \cdot 10^{-5}$	$1.005 \cdot 10^5$
0.99	0.99	1.1573	$1.1168 \cdot 10^{-5}$	$1.036 \cdot 10^5$

Зависимость собственных значений оператора от шага по времени представлена в Таблице 3.

Таблица 3. Зависимость числа обусловленности от шага по времени

τ	max	min	M_A
$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.1526	$4.8536 \cdot 10^{-6}$	$2.3747 \cdot 10^5$
$1.0 \cdot 10^{-5}$	1.1526	$5.4499 \cdot 10^{-6}$	$2.1149 \cdot 10^5$
$1.5432 \cdot 10^{-4}$	1.1526	$9.1695 \cdot 10^{-6}$	$1.2570 \cdot 10^5$
$1.0 \cdot 10^{-3}$	1.1527	$1.5351 \cdot 10^{-5}$	$0.7509 \cdot 10^5$
0.01	2.2317	$6.5211 \cdot 10^{-5}$	$0.3422 \cdot 10^5$
0.1	22.282	$5.1732 \cdot 10^{-4}$	$0.4307 \cdot 10^5$
1	222.78	$3.5252 \cdot 10^{-3}$	$0.6320 \cdot 10^5$
10	2227.8	$1.7513 \cdot 10^{-2}$	$1.2720 \cdot 10^5$

Как видно из таблицы, с увеличением τ число обусловленности M_A уменьшается. Но матрица остается плохо обусловленной. Для наглядности на рисунке 4 представлен график зависимости числа обусловленности от шага по времени при τ , меняющемся от 0.0001 до 0.01.

7 Заключение

В работе представлена математическая модель процесса электродинамического ускорения пластинчатого металлического лайнера. Основными ее характеристиками являются пространственная двумерность и нестационарность во времени. Проанализирован одномерный случай системы длинных проводников с аналогичной математической моделью. Данная задача решена аналитически методом разделения переменных. Составлены разностные схемы: для одномерного случая - методом разностной аппроксимации, для двумерного - методом Галеркина с применением триангуляции исходной области. Проведено исследование положительной определенности оператора задачи в обоих случаях и исследование границ спектра этих матриц с использованием степенного и градиентных методов нахождения собственных значений. Основной вывод из проведенных расчетов

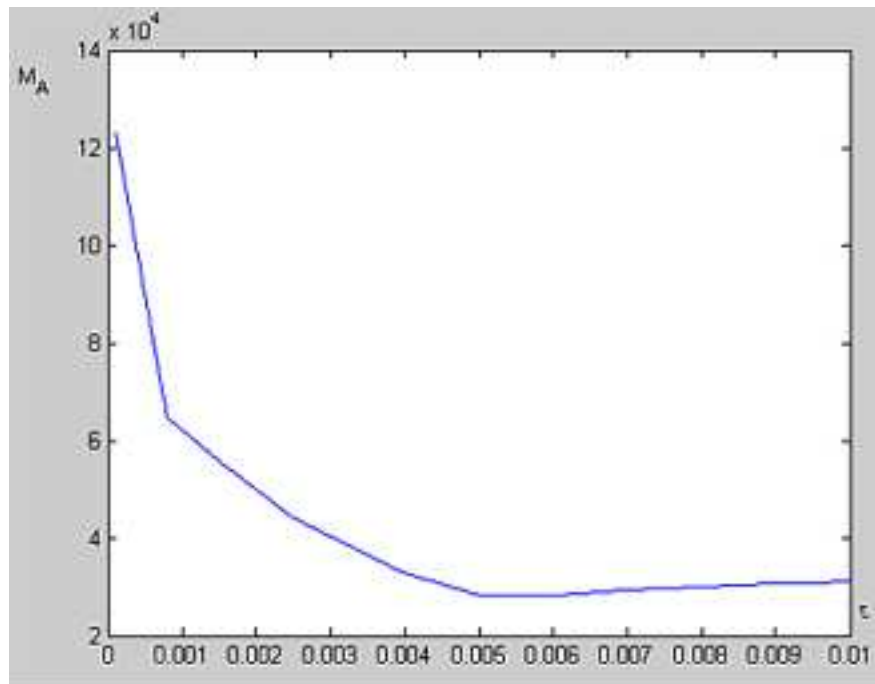


Рис. 4. Зависимость числа обусловленности от шага по времени.

состоит в том, что данные матрицы плохо обусловлены, что затрудняет решение численной задачи.

Список литературы

- [1] Галанин М.П., Лотоцкий А. П., Левашов В. Ф. Расчет электродинамического ускорения плоских пластин в лабораторном магнитокумулятивном генераторе.// Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М. В. Келдыша РАН, 2001, N3, 30 с.
- [2] Галанин М.П., Храмцовский С.С. Решение пространственно трехмерных задач электромагнитного ускорения в системе длинных проводников.// Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М. В. Келдыша РАН, 1998, N29, 20 с.
- [3] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. - М.: Физматлит, 2002. - 168 с.
- [4] Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Станкевич И.В. Элементы механики взаимодействия сплошной среды с электромагнитным полем. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 48 с.

- [5] Фаддеев Д.К., Фаддева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматлит, 1962. - 655 с.
- [6] Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. - М.: Наука. Физматлит, 1995. - 320 с.
- [7] Агошков В.К., Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука. Физматлит, 1981. - 416 с.
- [8] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. - 368 с.
- [9] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 438 с.
- [10] Галанин М.П., Лотоцкий А.П. Моделирование разгона и торможения лайнера в устройствах обострения мощности. // Радиотехника и электроника. 2005, Т. 50, N2, с.256-264.
- [11] Галанин М.П., Лотоцкий А.П. Математическое моделирование электродинамического ускорения плоских пластин в лабораторном магнитокумулятивном генераторе. // Математическое моделирование. 2003. Т. 15. N 3, 29 с.
- [12] Галанин М.П., Лотоцкий А.П. Математическое моделирование электродинамического ускорения лайнера в лабораторном магнитокумулятивном генераторе в различных приближениях. // Теоретические и экспериментальные исследования, выполненные в 2003 году. Сб. трудов. Вып. 3. – Троицк, ГНЦ РФ ТРИНИТИ, 2004. - 103с.
- [13] Азизов Э.А., Алиханов С. Г., Велихов Е.П. и др. Проект «Байкал». - Отработка схемы генерации электрического импульса. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2001. N3, 3 с.
- [14] Власова Е.А. Ряды. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. - 612 с.
- [15] Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983. - 428 с.