РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.КЕЛДЫША

А.С.Воронцов, Н.И.Козлов, М.Б.Марков

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА В СОБСТВЕННОМ ВРЕМЕНИ

МОСКВА 2005

А.С.Воронцов, Н.И.Козлов, М.Б.Марков

АННОТАЦИЯ

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА В СОБСТВЕННОМ ВРЕМЕНИ

Представлен вывод уравнений Максвелла в четырехмерном виде для системы координат, включающей собственное время фронта электромагнитной волны. Определен вид уравнений, показана корректность замены переменных в уравнениях для 3-векторов напряженности электрического и магнитного поля. Показана положительная определенность плотности энергии электромагнитного поля, доказана единственность решения задачи Гурса для уравнений Максвелла в собственном времени.

A.S.Vorontsov, N.I.Kozlov, M.B.Markov

ABSTRACT

ON THE MAXWELL'S EQUATIONS IN THE SELF-TIME

The conclusion of the 4-D Maxwell's equations in coordinate system including self-time of an electromagnetic wave front is represented. The kind of equations is determined, the correctness of variables replacement in the 3-equations is shown. The positive definiteness of electromagnetic field's energy density is shown, the uniqueness of the decision of Gursa problem for the Maxwell's equations is proved.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задач для уравнений Максвелла с начальными данными на фронте электромагнитной волны, в ряде практически важных задач требует перехода от лабораторного времени к так называемому собственному [1]. Фронт электромагнитной волны имеет сферическую форму, поэтому уравнения Максвелла записываются в переменных $(t-r,x,y,z)$, где t $(t\equiv ct)$ – лабораторное время, c – скорость света в вакууме (x,y,z) – пространственные координаты, а $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Уравнения Максвелла не обязаны быть инвариантны относительно такой замены переменных, поскольку она не входит в группу Лоренца.

Построение численных алгоритмов для уравнений Максвелла сталкивается с проблемой обоснования свойств разностных схем, которые должны отражать свойства дифференциальной задачи. Основным здесь является закон изменения энергии электромагнитного поля, позволяющий в лабораторной системе координат обосновывать единственность решения задачи Коши и доказывать сходимость разностных схем в энергетической норме. В собственном времени структура плотности энергии электромагнитного поля существенно изменяется, что затрудняет исследование разностных схем.

Данная работа ставит своей целью вывод уравнений Максвелла в собственном времени и установление соответствий некоторых величин, характеризующих электромагнитное поле в лабораторном и собственном времени. Вывод основан на исследовании преобразований тензоров электромагнитного поля и энергии-импульса. С помощью такого вывода можно однозначно определить вид энергии электромагнитного поля в произвольной системе координат и попытаться выявить дополнительные свойства уравнений Максвелла и их решений.

1. Замена координат

Уравнения Максвелла для зарядов в вакууме, получаемые путем вариации функционала действия, представляют собой соотношения, связывающие компоненты тензора электромагнитного поля и 4-вектора плотности электрического тока. Тензор электромагнитного поля F_{ij} является кососимметричным тензором второго ранга типа $(0,2)$. В лабораторной системе координат t,x,y,z, он имеет следующий вид [2]:

$$F_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Наборы компонент $\left(E_x, E_y, E_z\right)$и $\left(H_x, H_y, H_z\right)$ тензора F_{ij} составляют 3-векторы электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей соответственно.

Лабораторные координаты в дальнейшем будем обозначать x^i, $i=0,\ldots,3$. Введем координаты $\widehat{x}^i$, соответствующие собственному времени:

$$\widehat{x}^0 = x^0 - r,\ \widehat{x}^1 = x^1,\ \widehat{x}^2 = x^2,\ \widehat{x}^3 = x^3. \qquad (2)$$

Рассмотрим $\widehat{F}_{ij}$ – тензор электромагнитного поля в координатах $\widehat{x}^i$.

$$\widehat{F}_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \widehat{E}_x & \widehat{E}_y & \widehat{E}_z \\ -\widehat{E}_x & 0 & -\widehat{H}_z & \widehat{H}_y \\ -\widehat{E}_y & \widehat{H}_z & 0 & -\widehat{H}_x \\ -\widehat{E}_z & -\widehat{H}_y & \widehat{H}_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Установим соответствие между компонентами тензоров F_{ij} и $\widehat{F}_{ij}$. Для этого построим матрицы Якобы замены координат x^i на $\widehat{x}^i$:

$$\left(\frac{\partial \widehat{x}^i}{\partial x^j}\right)=\begin{pmatrix} 1 & -x/r & -y/r & -z/r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial \widehat{x}^j}\right)=\begin{pmatrix} 1 & x/r & y/r & z/r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

и вычислим явно, как преобразуются тензор электромагнитного поля [4]:

$$\widehat{F}_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \widehat{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \widehat{x}^j}F_{\alpha\beta},$$

откуда

$$\widehat{F}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z + \dfrac{xE_y - yE_x}{r} & H_y + \dfrac{xE_z - zE_x}{r} \\ -E_y & H_z + \dfrac{yE_x - xE_y}{r} & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y + \dfrac{zE_x - xE_z}{r} & H_x + \dfrac{zE_y - yE_z}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Первая пара уравнений Максвелла в тензорном виде записывается следующим образом [2]:

$$dF = 0. \tag{5}$$

Здесь d – внешнее дифференцирование кососимметрического тензора

$$\left(dF\right)_{ijk} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} = 0.$$

Эта операция является тензорной [4], то есть ее координатная запись не зависит от выбора системы координат. Поэтому

$$\left(d\widehat{F}\right)_{ijk} = \frac{\partial \widehat{F}_{ij}}{\partial \widehat{x}^k} + \frac{\partial \widehat{F}_{ki}}{\partial \widehat{x}^j} + \frac{\partial \widehat{F}_{jk}}{\partial \widehat{x}^i} = 0.$$

В силу этого первая пара трехмерных уравнений Максвелла в собственном времени имеет вид:

$$d\widehat{i}v\vec{\widehat{H}} = 0, \quad r\widehat{o}t\vec{\widehat{E}} = -\partial\vec{\widehat{H}}\big/\partial\tau$$

где $\vec{\widehat{H}} = \vec{H} - \left[\vec{e}_r, \vec{E}\right]$, $\vec{\widehat{E}} = \vec{E}$, $d\widehat{i}v$ и $r\widehat{o}t$ обозначают дивергенцию и ротор в координатах $\widehat{x}^i$, а $\vec{e}_r = \left(x/r, y/r, z/r\right)$.

Рассмотрим преобразование 4-вектора плотности электрического тока j^i при переходе (2) из координат x^i в координаты $\widehat{x}^i$. Пусть в координатах x^i $j^i = \left(\rho, j^1, j^2, j^3\right)$, где ρ – плотность заряда, $\vec{j} = \left(j^1, j^2, j^3\right) \equiv \left(j^x, j^y, j^z\right)$ – 3-плотность электрического тока. Тогда в координатах $\widehat{x}^i$

$$\hat{j}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^\alpha} j^\alpha = \left(\rho - \left(\vec{e}_r, \vec{j}\right), j^x, j^y, j^z\right). \tag{6}$$

Вторая пара уравнений Максвелла с помощью тензора электромагнитного поля и 4-вектора плотности тока записывается в следующем виде:

$$\nabla_i F^{in} = j^n, \tag{7}$$

где ∇_i обозначает ковариантное дифференцирование, а

$$F^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

где g_{ij} – метрический тензор в координатах x^i,

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В координатах $\hat{x}^i$

$$\hat{F}^{ij} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x + \dfrac{zH_y - yH_z}{r} & -E_y + \dfrac{xH_z - zH_x}{r} & -E_z + \dfrac{xH_y - yH_x}{r} \\ E_x + \dfrac{yH_z - zH_y}{r} & 0 & -H_z & H_y \\ E_y + \dfrac{zH_x - xH_z}{r} & H_z & 0 & -H_x \\ E_z + \dfrac{xH_y - yH_x}{r} & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Ковариантное дифференцирование является тензорной операцией. Уравнение (7) в произвольных координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial F^{in}}{\partial \widehat{x}^i} + \Gamma^i_{\alpha i} F^{\alpha n} + \Gamma^n_{i\alpha} F^{i\alpha} = j^n, \qquad (8)$$

где Γ^i_{jk} – символы Кристоффеля.

Рассмотрим второе слагаемое. Вычислим символы Кристоффеля в координатах $\widehat{x}^i$ [4]:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial \widehat{x}^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \widehat{x}^j \partial \widehat{x}^k}$$

Среди всех комбинаций, возможных в правой части данного соотношения отлична от нуля только следующая:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial \widehat{x}^i}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial \widehat{x}^j \partial \widehat{x}^k}$$

Величина $\partial \widehat{x}^i / \partial t$ отлична от нуля, только если $i = 0$. $\Gamma^0_{jk} \neq 0$ при не равных нулю нижних индексах. Таким образом, во второе слагаемое (8) входят только те символы Кристоффеля, которые равны нулю. Третье слагаемое представляет собой свертку символов Кристоффеля, симметричных по нижним индексам i, α с тензором, кососимметрическим по тем же индексам. Значит, в координатах $\widehat{x}^i$ уравнение (8) имеет вид:

$$\frac{\partial \widehat{F}^{in}}{\partial x^i} = \widehat{j}^n \qquad (8)$$

Отсюда вторая пара трехмерных уравнений Максвелла записывается следующим образом:

$$d\widehat{i}v\vec{\vec{E}} = \widehat{\rho}, \quad r\widehat{o}t\vec{\vec{H}} = \partial\vec{\vec{E}} / \partial\tau ,$$

где $\vec{\vec{E}} = \vec{E} + \left[\vec{e}_r, \vec{H}\right]$, $r\widehat{o}t\vec{\vec{H}} = \vec{H}$, $\widehat{\rho} = \rho - \left(e_r, \vec{j}\right)$.

Таким образом, полная система уравнений Максвелла в собственном времени, то есть в координатах $\widehat{x}^i$ имеет следующий вид:

$$div\left(\vec{E} + \left[\vec{e}_r, \vec{H}\right]\right) = \rho - \left(\vec{e}_r, \vec{j}\right), \quad rot\vec{H} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{E} + \left[\vec{e}_r, \vec{H}\right]\right) + \vec{j} ,$$

$$div\left(\vec{H}-\left[\vec{e}_r,\vec{E}\right]\right)=0, \qquad rot\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{H}-\left[\vec{e}_r,\vec{E}\right]\right) \quad . \tag{9}$$

Обратимся к энергетическим соотношениям. Выпишем с точностью до коэффициента 4π тензор энергии-импульса электромагнитного поля [2]:

$$T_k^i=g^{i\alpha}\left(-g^{pq}F_{\alpha p}F_{kq}+\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{\alpha k}\right).$$

В координатах x^i для тензора T_k^i имеет место соотношение [2,4]:

$$\nabla_i T_k^i=\frac{\partial T_k^i}{\partial x^i}=0. \tag{10}$$

В координатах $\widehat{x}^i$ данное соотношение приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial\widehat{T}_k^i}{\partial\widehat{x}^i}+\Gamma^i_{\beta i}\widehat{T}_k^\beta+\Gamma^\beta_{ik}\widehat{T}_\beta^i=0 \tag{11}$$

Символы Кристоффеля Γ^i_{jk} могут быть отличны от нуля только при $i=0,\ j\neq 0, k\neq 0$. Поэтому в соотношении (11) $\Gamma^i_{\beta i}=0$. При этом Γ^β_{ik}, вообще говоря, отличны от нуля. Рассмотрим соотношение (11) при $k=0$. Если $k=0$, то все Γ^β_{ik} в этом соотношении равны нулю, а само соотношение можно записать так:

$$\frac{\partial\widehat{T}_0^i}{\partial\widehat{x}^i}=0 \tag{12}$$

Соотношение (12) представляет собой закон сохранения энергии электромагнитного поля в координатах $\widehat{x}^i$. Соотношение (10) при $k=0$представляет собой этот закон в координатах x^i, причем $T_0^0\equiv W=E^2+H^2$ – плотность энергии, а $T_0^\alpha=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ ($\alpha=1,2,3$) – вектор Пойнтинга.

Рассмотрим, как преобразуются плотность энергии и вектор Пойнтинга при переходе в координаты $\widehat{x}^i$.

$$\widehat{W}\equiv\widehat{T}_0^0=\frac{\partial\tau}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial\tau}T_j^i=T_0^0-\frac{x}{r}T_0^1-\frac{y}{r}T_0^2-\frac{z}{r}T_0^3=W-\left(\vec{e}_r,\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right),$$

$$\widehat{T}_0^\alpha = \frac{\partial \widehat{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \tau}T_j^i = T_0^\alpha .$$

Таким образом, закон сохранения электромагнитной энергии, имеющий в координатах x^i вид:

$$-div\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{2}\right), \tag{13}$$

в координатах $\widehat{x}^i$ записывается так:

$$-div\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{E^2+H^2}{2} - \left(e_r,\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right)\right). \tag{14}$$

Заметим, что все результаты остаются верными для произвольной замены координат $x^0 \to x^0 - \psi\left(x^1,x^2,x^3\right)$, где $\psi\left(x^1,x^2,x^3\right)$ – произвольная дифференцируемая функция. Очевидно, что совокупность таких преобразований составляет группу.

Уравнения Максвелла (9) и закон сохранения энергии электромагнитного поля (14) могут быть получены, минуя тензорное рассмотрение. Достаточно выполнить замену переменных $x^i \to \widehat{x}^i$ в уравнениях Максвелла в лабораторном времени, используя инвариантность полного дифференциала скалярной функции. Однако при этом теряется однозначность понятия электромагнитной энергии и вектора Пойнтинга. Тензорное рассмотрение позволяет однозначно определить эти величины. Заметим, что компоненты электромагнитного поля преобразуются по-разному для различных пар уравнений Максвелла. Простая замена переменных выявить этот факт не способна.

2. О единственности решения задачи Гурса

Энергия электромагнитного поля в лабораторной системе координат является положительно определенной величиной, то есть она положительна, если отлична от нуля хотя бы одна из компонент электромагнитного поля и обращается в ноль только в том случае, когда все компоненты электромагнитного поля равны нулю. Этот факт используется при доказательстве единственности решения различных задач для уравнений Максвелла. Рассмотрим пример.

Пусть уравнения Максвелла в лабораторном времени

$$rot\vec{H} = \partial\vec{E}/\partial t + \vec{j}\ , \qquad rot\vec{E} = -\partial\vec{H}/\partial t \tag{15}$$

решаются в области D с границей ∂D, причем задано произвольное начальное условие при $t = 0$ и одно из двух граничных условий:

$$\left[\vec{e},\vec{H}\right]\Big|_{\partial D} = \vec{H}_0 \ \left(\left[\vec{e},\vec{E}\right]\Big|_{\partial D} = \vec{E}_0\right) \qquad\qquad \left(\vec{n},\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right)\Big|_{\partial D} \geq 0 \tag{16}$$

Соотношение (13) может быть получено из уравнений (15) с однородной правой частью. Интегрируя (13) по области D, пользуясь положительной определенностью плотности энергии легко показать, что однородная задача имеет только тривиальное решение, что и доказывает единственность решения задачи (15-16) с произвольными начальными данными.

Ситуация изменяется, если необходимо исследовать единственность решения задачи Гурса. Пусть начальное условие задано при $t = r$. Выполним замену координат $x^i \to \widehat{x}^i$, в результате чего уравнения (15) превратятся в уравнения (9). Вектор Пойнтинга и формулировка граничных условий не изменятся. Энергия преобразуется к виду

$$\widehat{W} = \frac{E^2 + H^2}{2} - \left(e_r,\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right)$$

Положительная определенность такой конструкции не очевидна, поэтому рассмотрим ее более подробно. Во-первых, эта величина неотрицательна. Действительно:

$$2\widehat{W} = E^2 + H^2 - 2\left(\vec{e}_r,\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right) \geq \left(\vec{E} - \vec{H}, \vec{E} - \vec{H}\right) \geq 0\,.$$

Во-вторых, определим условия, которым должны удовлетворять $\vec{E}$ и $\vec{H}$, для того, чтобы $\widehat{W}$ равнялось нулю, то есть

$$E^2 + H^2 - 2\left(\vec{e}_r,\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right) = \left(\vec{E} + \left[\vec{e}_r,\vec{H}\right]\right)^2 + \left(\vec{e}_r,\vec{H}\right)^2 = 0$$

Отсюда следуют искомые условия:

$$\vec{E} + \left[\vec{e}_r,\vec{H}\right] = 0, \quad \left(\vec{e}_r,\vec{H}\right) = 0\,. \tag{17}$$

Заметим, что из (17) следует, что

$$\vec{H} - \left[\vec{e}_r,\vec{E}\right] = 0, \quad \left(\vec{e}_r,\vec{E}\right) = 0\,. \tag{18}$$

Подставим $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющие условиям (17) и (18), в уравнения Максвелла (9). Получим:

$$rot\vec{H} = 0, \qquad rot\vec{E} = 0 \quad . \tag{19}$$

Заметим, что уравнения, содержащие дивергенции, обратятся в тождества типа $0 = 0$.

Если $rot\vec{H} = 0$, то $\vec{H}$ представимо в виде градиента скалярной функции:

$$\vec{H} = grad\phi,$$

причем $(\vec{e}_r, grad\phi) = 0$ в силу $(\vec{e}_r, \vec{H}) = 0$. Из того, что $\vec{H} - [\vec{e}_r, \vec{E}] = 0$ следует $div\vec{H} = 0$. Значит, в шаре любого радиуса R с центром в точке $x = y = z = 0$ скаляр ϕ является гармонической функцией и доставляет решение однородной задаче Неймана:

$$\Delta\phi = 0, \quad r \le R, \quad \partial\phi/\partial r = 0, \quad r = R. \tag{20}$$

Задача (20) имеет своим решением произвольную функцию переменной τ, не зависящую от переменных x, y, z [5]. В силу этого ее градиент, представляющий собой магнитное поле $\vec{H}$, равен нулю. Равенство нулю электрического поля $\vec{E}$ доказывается аналогично.

Таким образом, плотность энергии электромагнитного поля $\widehat{W}$ в координатах $\widehat{x}^i$ является величиной, положительно определенной на решениях уравнений Максвелла.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тензорный вывод уравнений Максвелла в собственном времени сферического фронта электромагнитной волны подтвердил вид уравнений и позволил однозначно определить преобразование плотности энергии поля и вектора Пойнтинга.

Инвариантность вектора Пойнтинга относительно замены координат $x^i \to \widehat{x}^i$ подтверждает возможность использования традиционных граничных условий.

Исследование плотности энергии электромагнитного поля в собственном времени показало ее положительную определенность на функциях $\vec{E}$ и

$\vec{H}$, являющихся решениями уравнений Максвелла в координатах $\hat{x}^i$. Следствием этого является единственность решения.

Последний факт был неоднократно использован Б.Д. Плющенковым при построении и анализе полностью консервативных разностных схем для уравнений Максвелла в собственном времени. Авторы благодарны Борису Даниловичу за соответствующие разъяснения и указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турчанинов В.И. Численная методика решения трехмерных уравнений Максвелла в сферических переменных в неоднородной диссипативной среде с выделением переднего фронта. М. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1993 №18

2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. – М.:Наука, 1976.

3. В.В. Киселев. Классическая электродинамика. – Семинары по курсу «Теория поля». – Изд. ГНЦ РФ «Институт физики высоких энергий», Протвино, 2004.

4. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. – М.: Наука, 1986.

5. Р. Курант. Уравнения с частными производными. – М.: МИР, 1964.