О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин

МОДЕЛИ КОЛЛАПСА И ФОРМИРОВАНИЕ ГОРИЗОНТА СОБЫТИЙ ЧЁРНОЙ ДЫРЫ

Москва
2005

МОДЕЛИ КОЛЛАПСА И ФОРМИРОВАНИЕ ГОРИЗОНТА СОБЫТИЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Н.Н. Фимин, В.А. Чечеткин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

В работе рассмотрена модель коллапса пылевидной материи (модель Толмана). Показана связь метрики Толмана с другими метриками, используемыми при изучении черных дыр. Проанализирован случай возникновения каустик в решении задачи пылевого коллапса. Рассмотрены некоторые свойства горизонта событий, возникающего в данной задаче.

MODELS OF COLLAPSE AND FORMING OF BLACK HOLE EVENT HORIZON

N.N. Fimin, V.M. Chechetkin

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

In the present work the model of collapse of dust (Tolman model) is considered. The coupling of Tolman metric with other metrics used for invesigating of black holes is demonstrated. The case of caustics origin in solution of dust collapse problem is analyzed. The properties of event horizon arising in this problem are considered.

1. Введение

Вопросу описания возникновения "чёрных дыр" посвящена обширная литература, начиная с классических работ Толмана [1], Оппенгеймера и Снайдера [2] до обширных монографий последних лет [3-7]. Отдельно следует отметить публикации К. Лейка [8-9], Дж. Эллиса [10-12], К.Ф. Кларка [13-14] и некоторых других авторов, посвященные изучению особенностей решений уравнений Эйнштейна, возникающих при анализе процесса коллапса. Стандартные представления о полном и адекватном его описании с помощью прямого интегрирования — вплоть до квадратур — тиражируемые в весьма авторитетных источниках (например, таких, как [15], [17]), к сожалению, относятся лишь к простейшим случаям, физически корректным, но не полностью трактующим всю полноту явления коллапса.

Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с возникновением иррегулярных решений системы уравнений для коэффициентов метрики и связи различных метрик при коллапсе. Следует отметить, что данная задача непосредственно контактирует с задачей о распространении в окрестности горизонта и взаимодействии с ним нелокального пакета скалярного поля [18], поскольку полученные там результаты требуют интерпретации с использованием альтернативного математического аппарата.

Рассматриваемые ниже вопросы могут трактоваться с различных точек зрения, и поэтому концептуальные аспекты предлагаемого подхода к процессу коллапса следует рассматривать как гипотезы, возможно, в чем-то неполные.

2. Модель Толмана и ее связь с другими моделями

Рассмотрим систему уравнений Эйнштейна для гравитационного поля в центрально–симметричном случае при условии пренебрежения давлением вещества (уравнение состояния $p = 0$ — "пылевидная среда"). Как указывается в работе [19], в данном случае существует возможность выбрать систему отсчета, являющуюся одновременно синхронной и сопутствующей. Обозначим выбранные именно таким образом время и радиальную координату посредством τ и R; тогда квадрат элемента интервала может быть представлен как

$$ds^2 = -d\tau^2 + \exp(\lambda(\tau, R))dR^2 + r^2(\tau, R)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (1)$$

где функция $r(\tau, R)$ представляет собой обобщенный радиус в искривленном пространстве, определяемый так, что $2\pi r$ есть длина окружности (с центром в начале координат).

Система уравнений поля:

$$-\exp(-\lambda)\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 + 2r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2}\right) + \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 + 1 = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{\exp(-\lambda)}{r}\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial R^2} - \frac{\partial r}{\partial R}\frac{\partial \lambda}{\partial R} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau^2}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial \tau}\right) = 0, \tag{3}$$

$$-\frac{\exp(-\lambda)}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial R^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 - r\frac{\partial r}{\partial R}\frac{\partial \lambda}{\partial R}\right) + \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 + 1\right) = 8\pi\varepsilon, \tag{4}$$

$$2\frac{\partial^2 r}{\partial \tau \partial R} - \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\frac{\partial r}{\partial R} = 0, \tag{5}$$

где ε — плотность энергии. Здесь выбрана система единиц, где гравитационная постоянная $G = 1$ и скорость света $c = 1$, так что плотность материи $\rho = \varepsilon$. Интегрирование последнего уравнения по времени дает

$$\exp(\lambda) = \frac{1}{1 + f(R)}\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2, \tag{6}$$

где $f(R)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $f(R) \geqslant -1$. Подстановка этого выражения в уравнение (2) и последующее интегрирование даёт

$$2r\frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 - f(R) = 0, \tag{7a}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}. \tag{7b}$$

откуда

$$\tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{f(R) + F(R)/r}}, \tag{7c}$$

где $F(R)$ — вторая произвольная функция ($F(R) \geq 0$). Таким образом, метрика (1) может быть быть записана как

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{1}{1 + f(R)}\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 dR^2 + r^2(\tau, R)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1'}$$

причем для $r(\tau, R)$ после интегрирования (7b) получаем три вида параметрической зависимости [20, 21] (полагаем $F > 0$):
гиперболический случай, $f(R) > 0$:

$$r(\tau, R) = \frac{F}{2f}(ch\ \eta - 1), \qquad \tau_0(R) - \tau = -\frac{F}{2f^{3/2}}(sh\ \eta - \eta),$$

эллиптический случай, $f(R) < 0$:

$$r(\tau, R) = -\frac{F}{2f}(1 - cos\ \eta), \qquad \tau_0(R) - \tau = -\frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta - sh\ \eta),$$

параболический случай, $f(R) = 0$:

$$r(\tau, R) = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3}(-\tau_0(R) + \tau)^{2/3},$$

где $0 < \eta < 2\pi$, $\tau_0(R)$ — третья произвольная функция ($\tau(R) \leq \tau_0(R)$). При $f(R) > 0$, $F = 0$ имеем $r(\tau, R) = \sqrt{f}(\tau - \tau_0(R))$. Поскольку система отсчета сопутствует материи, то каждой частице вещества отвечает определенное значение R; функция $r(\tau, R)$ при этом значении R определяет закон движения данной частицы, а производная $\partial r/\partial\tau$ есть ее радиальная скорость.

Подставляя выражение (6) в уравнение (4) и исключая $f(R)$, получаем:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dF}{dR}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^{-1}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \left(\frac{1}{F}\frac{dF}{dR} - \frac{1}{f}\frac{df}{dR}\right)r - \left(\frac{d\tau_0}{dR} + \left(\frac{1}{F}\frac{dF}{dR} - \frac{3}{2f}\frac{df}{dR}\right)(\tau - \tau_0)\right)\frac{\partial r}{\partial\tau}. \tag{8$'$}$$

Будем пока считать, что $\partial r/\partial R \neq 0$.

Для случая, когда $F = 0$, метрика (1) может быть преобразована к метрике Минковского

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{9}$$

используя выражение (6) и преобразование

$$T(\tau, R) = \varrho_1(R)\tau + \varrho_2(R), \tag{10}$$

$$\varrho_1(R) = \sqrt{1+f}, \quad \varrho_1 = \varrho_1^{(0)} - \int \frac{1}{2\sqrt{1+f}}\left(\tau_0\frac{df}{dR} + 2f\frac{d\tau_0}{dR}\right)dR.$$

Метрика Робертсона–Уокера [15] может быть получена из (1), если положить $\tau_0 = 0, F \sim f^{3/2}$. Если $F = F_0 = const \geq 0$, то метрика (1), вообще говоря, может быть преобразована к метрике Гильберта [16]:

$$ds^2 = -(1 - r_g/r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1$''$}$$

где $r_g = 2kM/c^2$ — гравитационный радиус коллапсировавшего объекта с массой M, $t = t(\tau, R)$ — соответствующим образом выбранная временная координата. Так как

$$d\tau = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial t}{\partial R}dr - \frac{\partial r}{\partial R}dt\right), \qquad dR = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}dt - \frac{\partial t}{\partial \tau}dr\right),$$

$$\Delta = \frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial t}{\partial R} - \frac{\partial r}{\partial R}\frac{\partial t}{\partial \tau},$$

то

$$\Delta^2 ds^2 = \left(\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 - \exp(\lambda)\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2\right)dt^2 + \left(\left(\frac{\partial t}{\partial R}\right)^2 - \exp(\lambda)\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2\right)dr^2 +$$

$$+2\left(\exp(\lambda)\frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{\partial t}{\partial R}\frac{\partial r}{\partial R}\right)drdt - \Delta^2 r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2).$$

Если член при $drdt$ равен 0:

$$\exp(\lambda)\frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{\partial t}{\partial R}\frac{\partial r}{\partial R} = 0, \tag{11}$$

то метрика становится ортогональной и принимает вид:

$$ds^2 = -\frac{1 + f(R)}{(1 - F(R)/r)(\partial t/\partial \tau)^2}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - F(R)/r} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2). \tag{12}$$

Для определения зависимости $t = t(\tau, R)$ решаем уравнение (11) с использованием метода характеристик:

$$\frac{d\tau}{\exp(\lambda)\partial r/\partial \tau} = -\frac{dR}{\partial r/\partial R} \tag{13}$$

или, в координатах r, R:

$$\frac{1 + f(R)}{\partial r/\partial R} = \left(1 - \frac{F(R)}{r}\right)dR. \tag{14}$$

Непосредственное интегрирование дает $(F = r_g)$:

$$t(\tau, R) = \Xi\left(\tau_0(R) \pm (1 + f)\int_0^r \frac{dx}{(1 - r_g/x)\sqrt{f + r_g/x}}\right), \tag{14$'$}$$

где $\Xi(x)$ — некоторая соответствующая функция своего аргумента. Степень ее произвольности определяется требованием преобразования метрики к гильбертовскому типу. Имеем

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \pm\frac{1 + f}{1 - r_g/r}\frac{d\Xi}{dx},$$

откуда получаем $\Xi(x) = x/\sqrt{1+f}$. Тогда окончательно получаем из (12) метрику (1").

Однако следует отметить, что уравнения характеристик (13) и (14) содержат в знаменателях величину $\partial r/\partial R$ (определяемую в (8')), которая может привносить в процесс трансформации метрики особенность (возникновение каустик). Поэтому требуется детальный анализ последствий данного факта.

3. Нарушение однозначности преобразования метрик

Поставим задачу Коши для уравнения (7a) путем определения начальных данных для "пылевого слоя" на R_0:

$$r(R,\tau=0) = r_0(R) = \left(\frac{3}{4\pi}\int_0^R \frac{F(x)}{\rho(x,\tau=0)}dx\right)^{1/3}, \quad \frac{\partial r(R,0)}{\partial \tau} = \frac{\partial r_0}{\partial \tau}, \qquad (15)$$

где по-прежнему $r(R,\tau)$ — радиальная координата частицы слоя во внешней системе координат, $\rho(R,0)$ — плотность в начальный ($\tau=0$) момент в точке с лагранжевой координатой R и $\partial r_0/\partial\tau$ — скорость частицы в начальный момент.

Решение начальной задачи дается формулой (7c) с учетом начального условия (15):

$$\tau_0 - \tau = \int_{r_0(R)}^{r(R,\tau)} \frac{dr}{\sqrt{f(R)+F(R)/r}}, \quad \tau_0 = \int_0^{r_0(R)} \frac{dr}{\sqrt{f(R)+F(R)/r}}. \qquad (16)$$

Формула (8), определяющая плотность пылевидной материи при коллапсе, удовлетворяется тождественно на множестве начальных данных (15). На гиперповерхностях, определяемых равенствами

$$\partial r(R,\tau_{sc})/\partial R = 0 \qquad (17)$$

("sc" — от "shell crossing") и

$$r(R,\tau_c) = 0 \qquad (18)$$

("c" — от "center") соответственно обращается в нуль метрический коэффициент g_{RR} (условие (17)) и возникает физическая сингулярность (условие (18)).

Уравнение (18) дает граничное условие к уравнению движения (7a). Вторым ("естественным" в том смысле, что продолжение решения исходного уравнения через гиперповерхность (17) в общем случае неоднозначно, но само условие (17) корректно в этом смысле) граничным условием может служить равенство (17), которое можно преобразовать к более прозрачному виду, используя формулу (16):

$$(\tau_0(R)-\tau)\sqrt{F(R)}=\int_{r_0}^{r(R,\tau)}\Big(f(R)/F(R)+1/r\Big)^{-1/2}dr. \qquad (19)$$

Данное уравнение неявно определяет $r(R,\tau)$. Дифференцируя его по R и используя (18), получаем второе граничное условие в виде уравнения для $r(R,\tau_{sc})$:

$$\frac{\partial r(R,\tau_{sc})}{\partial R}/\sqrt{f(R)/F(R)+1/r(R,\tau_{sc})}=$$
$$=\frac{\partial r_0(R)}{\partial R}/\sqrt{f(R)/F(R)+1/r_0(R)}-\frac{\tau_{sc}(R)}{2\sqrt{F}}=0. \qquad (20)$$

Таким образом, образованию сингулярной гиперповерхности отвечает равенство нулю как левой, так и средней части цепочки равенств (20). Рассмотрим равенство нулю средней части — очевидно, вполне определим момент времени $\tau_{sc}\neq 0$, что, согласно (8), $\rho=\varepsilon\to\infty$. Заметим, что существует однозначное соответствие между начальной и граничной задачей для уравнения движения (7a), описывающего пылевой коллапс; тем самым, существует множество начальных условий таких, что задача имеет решение, приобретающее сингулярные свойства за конечное время. Например, для модели Толмана с $f=0$ (плоское пространство): $\tau_{sc}(R)=\dfrac{\partial r_0(R)}{\partial R}2(F(R)r_0(R))^{1/2}$.

Для момента времени $\tau=\tau_{sc}$, очевидно, $(\partial r/\partial R)|_{\tau_{sc}}=0$; проинтегрируем (2) (первое уравнение системы Эйнштейна). Получим:

$$\partial r/\partial\tau=\pm(2\widetilde{M}/r-1)^{1/2},\quad \widetilde{M}=const>0. \qquad (21)$$

Повторное интегрирование (в предположении $0<r\leq 2\widetilde{M}$ — в противном случае $(\partial r/\partial\tau)^2<0$, то есть член, отвечающей кинетической энергии в законе сохранения (7b), отрицателен) дает:

$$r=\widetilde{M}(1-cos\eta),\quad \eta-sin\eta=\widetilde{M}^{-1}(\tau-\widetilde{T}),\quad \widetilde{T}=const,\quad 0<\eta<2\pi$$

Подставляя r отсюда в 3-е уравнение системы Эйнштейна, получаем:

$$\frac{\partial^2(\exp(\lambda))}{\partial\eta^2}+\frac{\exp\lambda}{cos\eta-1}=0. \qquad (22)$$

Это уравнение можно преобразовать [22] без потери общности и привнесения произвола решений $(\exp(\lambda)\to(\exp(\lambda)^{-1})\partial_\eta\exp(\lambda))$ к виду уравнения Риккати и далее — к линейному ОДУ 2-го порядка. Общее решение:

$$\exp(\lambda)=A(R)\frac{sin\eta}{1-cos\eta}+B(R)\Big(1-\frac{\eta sin\eta}{2(1-cos\eta)}\Big).$$

Плотность энергии в этом случае имеет вид:

$$\varepsilon = B(R)\cdot\left(8\pi\widetilde{M}^2(1-cos\eta)(Asin\eta+B(1-cos\eta-0.5\eta sin\eta))\right)^{-1}.$$

Метрика, которая соответствует данному случаю:

$$ds^2 = -\exp(2\nu)d\bar{\tau}^2+\exp(2\lambda)d\bar{R}^2+\bar{\tau}^2d\Omega^2, \quad \exp(2\nu)=\bar{\tau}/(2\widetilde{M}-\bar{\tau}),$$

$$\exp(\lambda)=\exp(-\nu)\left(\int^{\exp\nu}\frac{2x^2dx}{1+x^2}+2A(\bar{R})/B(\bar{R})\right),$$

причем $\bar{\tau}=r$, $\partial\bar{R}/\partial r = B/2$, $\partial\bar{R}/\partial\tau = 0$.

Таким образом, решение начальной задачи для уравнения (7а), описывающего коллапс пылевидной материи, с граничным условием, приводящим к явлению "пересечения характеристик", можно интерпретировать и продолжать следующим образом — место возникновения каустик можно принять в качестве (особой) гиперповерхности граничных условий, что приводит к формированию горизонта $2\widetilde{M}$, с возникновением соответствующей метрики нового типа.

4. Образование горизонта событий при коллапсе

Утверждение об "особой роли" метрики Толмана при рассмотрении процесса коллапса и падения на черную дыру некоторого объекта (волнового пакета, материальной точки и т.д.), имеющее широкое распространение, в действительности имеет не один уровень смысловой нагрузки. Модельность данной метрики и практическая "очевидность" решения системы уравнений поля приводят к заключению об отсутствии особых (сингулярных) состояний вещества при коллапсе, за исключением точки $r=0$. Естественно, при этом не принимается во внимание рассмотренный выше случай образования каустик.

Момент образования горизонта событий в задаче о пылевом коллапсе Толмана ничем не выделен, и движение под горизонтом (до сингулярности) принципиально ничем не отличается от "надгоризонтного".

Насколько это правомерно с точки зрения детального анализа? Возможно ли выявить особенности образования горизонта не при помощи формальных математических выкладок, а с точки зрения внешнего или сопутствующего наблюдателя?

Заметим, что под горизонтом событий интервал $ds^2 < 0$ (отсутствие причинно-следственной связи между событиями в различных точках) — тем самым, модель Толмана обладает возможностью лишь формального описания движения частиц пыли, не учитывающего изменение взаимодействия "частица — коллектив частиц".

Рассмотрим процесс коллапса в классической постановке задачи Оппенгеймера и Снайдера: $\rho = const$ при $R < R_b$; $\rho = 0$ при $R > R_b$, где R_b — начальный радиус пылевого шара (R — координата в сопутствующей системе).

Производя переход к новой системе координат: $(\tau, R) \to (t, r)$, в соответствии с формулой (36) работы [2] имеем (r_g — гравитационный радиус):

$$t = t(\tau, R) = \frac{2}{3\sqrt{r_g}}(R_b^{3/2} - r_g^{3/2}y^{3/2}) - 2r_g\sqrt{y} + r_g \ln|\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}|,$$

$$y = \frac{1}{2}((R/R_b)^2 - 1) + \frac{R_b r}{R r_g}. \tag{23}$$

Полагаем, что при $R > R_b$ линейный элемент имеет гильбертовскую форму (в координатах t, r) [22]. Связь между координатами τ, R и t, r дается уравнением (23) и соотношением:

$$r = (R^{3/2} + \tau\chi(R))^{2/3}, \quad \chi(R) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\sqrt{r_g}(\frac{R}{R_b})^{3/2}, & \text{если } R < R_b, \\ -\frac{3}{2}\sqrt{r_g}, & \text{если } R > R_b. \end{cases} \tag{24}$$

Для больших значений $t \to \infty$:

$$t \sim -r_g \ln\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{R}{R_b}\right)^2 - 3\right) + \frac{R_b}{r_g}\left(1 - \frac{3\tau\sqrt{r_g}}{2R_b^{3/2}}\right)\right). \tag{25}$$

Метрические коэффициенты принимают вид:

$$|\exp(-\lambda(t,R))| \backsimeq 1-(R/R_b)^2\left(\exp(-t/r_g)+\frac{1}{2}(3-(R/R_b)^2)\right)^{-1} > 0 \text{ при } R < R_b,$$

$$|\exp(-\lambda(t,R_b))| \to \ 0 \text{ при } t \to \infty, \tag{26}$$

$$|\exp(\nu(t,R))| \backsimeq \exp(\lambda(t,R) - 2t/r_g)\left(\exp(-t/r_g) + \frac{1}{2}(3 - (R/R_b)^2)\right) \ \to$$

$$\to \ \exp(-2t/r_g) \text{ при } R < R_b, \tag{27}$$

$$|\exp(\nu(t,R_b))| \to \exp(-t/r_g) < \infty.$$

Из соотношения (23) видно, что $t \to \infty$, если выполняется одно из двух условий: $r_g \to 0$ или $y \to 1$. Первое условие означает, что гиперповерхность горизонта событий совпадает с физической сингулярностью; это предположение обычно неявно обходят и предполагают a priori, что горизонт отделен от центральной сингулярности некоторым ненулевым "расстоянием"; следовательно, из (23) получаем $y > 1$. С другой стороны, при достаточно малых $R < R_b$ справедливо $y < 0$, что следует из определения y (см. (23)). Этого можно избежать только полагая $R = R_b$. Если $y < 1$ (прохождение горизонта), то время t начинает убывать, что в качестве физической интерпретации предполагает замену на горизонте роли пространственной координаты временной (несмотря на то, что оснований для такой трансформации с точки зрения алгебраического анализа (23) просто нет).

Заметим, что для гильбертовской модели при $r \to 0$ справедливо (ср. с (26), (27)):

$$\lim_{r\to 0} |\exp(\nu)| \to \lim_{r\to 0} |1 - r_g/r| \to \infty, \quad \lim_{r\to 0} |\exp(\lambda)| = 0.$$

Это говорит о динамической природе задачи Оппенгеймера–Снайдера, и неполной эквивалентности описания процесса коллапса Гильбертовской метрикой и метрикой синхронно–сопутствующей системы координат.

Обобщение на рассмотрения пылевого коллапса на неоднородный случай не представляет особого труда. Введем непосредственно в постановке задачи о коллапсе Толмана следующие обозначения: $v := \partial r/\partial\tau$, $2GM(R) := F(R)$, $\xi^2 := 1 + f(R)$. Тогда соотношение (7c) принимает вид:

$$\tau = \int \frac{dr}{\sqrt{\xi^2 - 1 + 2GM/r}}, \tag{7d}$$

откуда

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{1-\xi^2}} arctg \sqrt{\frac{\xi^2 - 1 + 2GM/r}{1-\xi^2}}. \tag{7e}$$

Физическая скорость (измеренная в локальной системе координат) : $v_o = v/\xi$; далее, $2GM/r = c_0 = const$ (при $r > 0$). Поэтому $v_o^2 = v^2/\xi^2 = (\xi^2 - 1 + c_0)/\xi^2$ есть постоянная, не зависящая от τ. Кроме того, поскольку $v_o^2 \le c^2 = 1$, то необходимо $2GM/r \le 1$, что означает следующее: даже при $r \to 0$ выражение $2GM/r$ конечно, откуда $M = 0$ и $c_0 = 0$. Покажем, что физическая скорость пылевой частицы $v_o = 0$. Действительно, задача о коллапсе Толмана распадается на множество независимых задач для каждой отдельной частицы (взаимодействие между ними в силу условия "пылевидности материи" считается элиминированным). Таким образом, мы имеем обобщенную "двухчастичную задачу". В классическом (ньютоновском) случае описание взаимодействия массивного сферического тела (массы m_1) и тела малого размера и массы $m_2 \ll m_1$ сводится к двухчастичной задаче, так как тело m_1 создает такой же гравитационный потенциал, как и точка такой же массы, помещенная в центр инерции тела. В ОТО можно такое допущение делать на основании теоремы Биркгоффа (говорящей о том, что геометрия пространства–времени, являющаяся сферически-симметричной и представляющая собой решение эйнштейновских уравнений поля в вакууме, представляет собой гильбертовскую) [22]; однако имеется различие, состоящее в том, что ньютоновская двухчастичная задача может рассматриваться как статическая, поскольку там полная энергия системы сохраняется, а в ОТО в общем случае это не так: в уравнении (7b) полная энергия $f = f(R)$ (то есть зависит от сопутствующей координаты) и наличествует излучение гравитационных волн (см. [19], сс. 470-476). — и задача не может быть рассмотрена как статическая. Но в исходной постановке задачи коллапса для сферически–симметричного рассматриваемого случая поле статично и гравитационное излучение отсутствует — отсюда необходимо $v_o = 0$. Следовательно, для пылевидной материи $\xi = 1$. Таким образом, получаем: для любого $r \in]0; r_g[\ \tau = \infty$.

Рассмотрим вопрос о возможности перехода к задаче Толмана от задачи для коллапса шара идеальной жидкости ($p \neq 0$). Итак, рассмотрим метрику вида:

$$ds^2 = -\exp(2\nu(r))dt^2 + \exp(2\lambda(r))dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta^d\varphi^2). \qquad (28)$$

Уравнения поля Эйнштейна запишем в виде:

$$(8\pi G/c^4)\rho r^2 = \frac{\partial}{\partial r}(r(1-\exp(-2\lambda))), \qquad (29)$$

$$(8\pi G/c^4)pr^2 = -1 + \exp(-2\lambda)(1 + 2r\frac{\partial\nu}{\partial r}), \qquad (30)$$

$$(8\pi G/c^4)p = \exp(-2\lambda)(\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + (\frac{\partial\nu}{\partial r})^2 - \frac{\partial\nu}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial r} + (\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r})/r). \qquad (31)$$

Уравнение состояния вещества зададим в виде $\epsilon(p, \rho) = 0$ (предполагается невырожденной функцией, то есть возможно установить однозначное соответствие между давлением и плотностью жидкости).

Первый интеграл (29):

$$\exp(-2\lambda) = 1 - 2M(r)/r, \quad 2M(r) = (8\pi/c^4)\int \rho(r)r^2dr. \qquad (32)$$

Соответственно, подставляя эти выражения в (30), получаем

$$2r(r-2M)\frac{\partial\nu}{\partial r} = (8\pi G/c^4)r^3p + 3M. \qquad (33)$$

Выражая из

$$(\rho + p)\partial\nu/\partial r = -\partial p/\partial r \tag{34}$$

величину $\partial\nu/\partial r$, получаем:

$$2r(r - 2M)\partial p/\partial r = -(\rho + p)((8\pi G/c^4)r^3 p + 2M). \tag{35}$$

Произведем замену переменных: $x = r^2$, $s = \exp(\nu)$, $q = M/r^3$. Тогда уравнения (32–35) принимают вид:

$$\exp(-2\lambda) = 1 - 2xq, \quad (8\pi G/c^4)\rho = 6q + 4x\frac{dq}{dx},$$

$$(8\pi G/c^4)p = -2q + (4 - 8qx)\frac{ds}{sdx},$$

$$(2 - 4xq)\frac{d^2s}{dx^2} - (2w + 2x\frac{dq}{dx})\frac{ds}{dx} - \frac{dq}{dx}s = 0. \tag{36}$$

Данное уравнение — в предположении известности зависимости $q = q(x)$ — относится к классу конфлюэнтных гипергеометрических уравнений, и обладает двумя линейно независимыми решениями $s_1(x)$, $s_2(x)$. Зная решение последнего уравнения (s, q), можно линейным преобразованием получить новое решение.

Соответственно, исходная задача (28)–(31) приводится к паре метрик, связанных с коллапсирующей материей. Для Толмановской задачи с $p = 0$ свести уравнение (36) к уравнению (7a) не представляется возможным. Тем самым, меняется общая структура решения задачи о коллапсе.

Следует отметить, что горизонт событий является весьма неоднозначным понятием. Даже в "наиболее физически адекватной"[15] системе координат Крускала при использовании "физически полной" метрики Крускала–Шекереса, имеют место парадоксальные ситуации.

Метрика Крускала–Шекереса:

$$ds^2 = (32M^3/r)\exp(-r/2M)(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + d\phi^2 sin^2\theta),$$

где

$$u = f_1(r)ch(t/4M),\ v = f_1 sh(t/4M),\ f_1 = (r/2M - 1)^{1/2}\exp(r/4M)$$

при $r \geq 2M$, ("над горизонтом", I квадрант),

$$u = f_2(r)sh(t/4M),\ v = f_2 ch(t/4M),\ f_2 = (-r/2M + 1)^{1/2}\exp(r/4M)$$

при $r \leq 2M$ ("под горизонтом", II квадрант).

В квадранте I имеем:

$$du/dr = \partial u/\partial r + \partial u/\partial t \cdot dt/dr = (ru/8M^2) \cdot (r/2M - 1)^{-1} + (v/4M) \cdot (dt/dr),$$

$$dv/dr = (rv/8M^2) \cdot (r/2M - 1)^{-1} + (u/4M) \cdot (dt/dr).$$

Таким образом:

$$du/dv = (ru/2M + v \cdot (dt/dr) \cdot (r/2M - 1))/(rv/2M + u \cdot (dt/dr) \cdot (r/2M - 1))$$

(для $r < 2M$ результат точно такой же).

Отсюда имеем при $r \to 2M$ или, что то же, при $u = \pm v$:

$$du/dv = (\pm r/2M + (dt/dr) \cdot (r/2M - 1))/(r/2M + (dt/dr) \cdot (r/2M - 1)) \to \pm 1.$$

Радиальная часть метрики на горизонте:

$$ds^2 = (32M^3/r) \exp(-r/2M) dv^2 (1 - (du/dv)^2)|_{u=\pm v} = 0.$$

Следовательно, происходит вырождение метрики, соответствующее "центральной сингулярности".

Здесь можно привести некоторые соображения, усиливающие полученный вывод. Согласно [15], имеем для времени падения частицы на черную дыру:

$$t/2M = ln|((r_\infty/2M - 1)^{1/2} + \mathrm{tg}(\eta/2))/((r_\infty/2M - 1)^{1/2} - \mathrm{tg}(\eta/2))| +$$

$$+2M(r_\infty/2M - 1)^{1/2})^{1/2} \cdot (\eta + (r_\infty/4M)(\eta + sin\eta)),$$

где частица имеет нулевую скорость на r_∞ при $t = 0$,

$$r = (r_\infty/2) \cdot (1 + cos\eta).$$

При $r \to 2M$ $t \to \infty$, но t продолжает расти, так что $t = \infty$ при $r < 2M$. Тогда $ch(t/4M) = sh(t/4M) \to \exp(t/4M) \to \infty$, откуда $u/v \to \pm 1$ в этой области. Поэтому при $r \leqslant 2M$ имеем $du/dv \to \pm 1$, следовательно там же $ds^2 = 0$.

В некотором смысле это согласуется с идеей А. Эйнштейна [23], что горизонт событий является "непреодолимым барьером" для любой материальной частицы или волны, падающей на горизонт (в квадранте I).

Необходимо заметить, что горизонт ("геометрическая особенность") является следствием рассмотрения метрики Гильберта (1") (см. [16]), в действительности не отвечающей полю точечной массы. Обычно (1") называют "метрикой Шварцшильда", что исторически неверно. Истинная метрика Шварцшильда введена в работе [24] и имеет вид:

$$ds_S^2 = -(1 - 2M/\varrho)dt^2 + (1 - 2M/\varrho)^{-1} d\varrho^2 + \varrho^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (37)$$

где $\varrho = (r^3+(2M)^3)^{1/3}$. В то время как метрика Гильберта терпит вырождение при $r = 2M$, образуя 2–мерную гиперповерхность горизонта, обладающего весьма специфическим набором свойств (в частности, нехаусдорфовость [27], наличие односторонних мембранных свойств, информационные парадоксы при наличии отражения), для метрики (37) "геометрической сингулярности" горизонта не существует. Более того — нет необходимости вводить в рассмотрение координаты Эддингтона–Финкельштейна, Крускала–Шекереса и пр. [25], отвечающие "максимально расширенному по времени пространству" (с включением точек "бесконечного прошлого" и "бесконечного будущего"). С другой стороны, как указано в [26], в случае слабой гравитации (малой кривизны) решение Гильберта, в отличие от решения Шварцшильда, переходит в ньютоновский предел поля точечной массы. В качестве возможного решения этого парадокса можно предложить следующее объяснение: в формулах (1") и (37) $M = 0$. Это допущение вовсе не указывает на условие $N_b = 0$ (N_b — число барионов, принявших участие в процессе коллапса). Величина M, входящая в вышеуказанные соотношения является аддитивной:

$$M = M_0 + E_g + E_{in} + E_{kin},$$

где $M_0 = N_b m$ — барионная масса (отвечающая началу коллапса), $E_g,\ E_{in},\ E_{kin}$ — соответственно гравитационная, внутренняя и кинетическая энергия коллапсирующего вещества. Гравитационный дефект, равный по модулю барионной массе, приводит к значению $M = 0$, то есть топологически слипшиеся "горизонт" и "истинная сингулярность" представляют собой точечный объект, определяемый условием $ds^2 = 0$, но имеющий сложную структуру. Действительно, в работе [27] отмечалось, что даже в крускаловской системе координат горизонт представляет собой нехаусдорфову поверхность [27, 28], характеризующуюся топологической когерентностью точек, фактически лежащих на световом конусе. Соображения, приведенные выше (при $r \leqslant 2M\ ds^2 = 0$) и условие $\varrho \geqslant 2M$ (неопределимость переменной ϱ в "подгоризонтной области" — в то же время при $M = 0$ физические изъяны определения данной переменной отсутствуют), приводят к возможности рассмотрения "черной дыры" как точечного объекта (аналогичные предположения, но с других позиций, сделаны, например, в работе [29]). Тогда, в частности, становятся более ясными многие аспекты модели Толмана и задачи о коллапсе Оппенгеймера–Снайдера и связь соответствующих метрик.

В работе рассматривались некоторые вопросы, связанные с решением Толмана задачи о коллапсе пылевидной материи, принимаемой за методологический эталон. Показано, что полная постановка упомянутой задачи отличается далеко не очевидными аспектами и требует для своего изучения понимания вопросов, связанных с особыми решениями систем дифференциальных уравнений и структуры горизонта событий и сингулярности. Задача моделирования взаимодействия частицы/слоя с горизонтом событий (и формирование последнего), основой для которой служит настоящая работа, требует детального анализа с привлечением теории особых точек многообразий различной структуры, базирующегося на некоммутативной геометрии и теории обобщенных функций Коломбо, в отличие от распространенного подхода, основанного на линейном анализе уравнения типа Шредингера [30,31]. С физической точки зрения, структура "черной дыры" и падение на нее (возможно, неточечных) материальных объектов, как предполагается, сопровождается возникновением значительного дефекта массы (со всеми сопутствующими последствиями), что может быть использовано в целях детектирования подобных явлений.

Авторы выражают искреннюю признательность Б.Э. Мейеровичу за согласие на публикацию в работе разработанной им методики преобразования метрики Толмана к метрике Гильберта и плодотворные дискуссии.

Литература

1. Tolman R.C., Proc. Nat. Acad. Sci. US, V. 20, p.169, 1934.

2. Oppenheimer J.R., Snyder H., Phys. Rev., V. 56, p.455, 1939.

3. Melia F., The Edge of Infinity: Supermassive Black Holes in the Universe, Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

4. Taylor E.F., Wheeler J.A., Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity , N.Y., Addison Wesley, 2000.

5. Al-Khalili J., Black Holes, Wormholes and Time Machines, Bristol, IOP Publishing Ltd., 1999.

6. Heusler M., Goddard P., Yeomans J., Black Hole Uniqueness Theorems, Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

7. Frolov V.P., Novikov I.D, Black Hole Physics — Basic Concepts and New Developments, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1998.

8. Lake K., Phys. Rev. D, V. 19, p.2847, 1979.

9. Lake K., Phys. Rev. D, V. 29, p.771, 1984.

10. Ellis G.F.R., Ann. N.Y. Acad. Sci., V. 262, p.231, 1975.

11. Ellis G.F.R, Schmidt B.G, Gen. Rel. Grav., V. 8, p.915, 1977.

12. Ellis G.F.R, Schmidt B.G, Gen. Rel. Grav., V. 12, p.989, 1979.

13. Clarke C.J.S., O'Donnell, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, V. 50, N 1, p.39–60, 1992.

14. Clarke C.J.S., Commun. Math. Phys., V.49, p.17, 176.

15. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, т.3, М., Мир, 1977.

16. Hilbert D., Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, Math. Phys. Kl., 1917, 53.

17. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия, М., Наука, 1979.

18. Фимин Н.Н., К вопросу о динамике нелокальной частицы,ЖЭТФ, в печати.

19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, изд. 8, М., Физматлит, 2001.

20. Hellaby C., Lake K., Astrophys. Journ., V.282, p.1, 1984.

21. Hellaby C., Lake K., Astrophys. Journ., V.290, p.381, 1985.

22. Kramer D., Stephani H., MacCallum M. (eds.), Exact solutions of Einstein field equations, Cambridge, Cambridge University Press, 1988.

23. Einstein A., Ann. Math., V.40, p.922, 1939.

24. Schwarzschild K., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl., 189–194, 1916.

25. Abrams L.S., Canadian J. Phys., V.67, p.919, 1989.

26. Antoci S., Dierk-Ekkehard L., REINSTATING SCHWARZSCHILD'S ORIGINAL MANIFOLD AND ITS SINGULARITY, gr-qc/0406090.

27. Larsen F., Wilczek F., RESOLUTION OF COSMOLOGICAL SINGULARITIES, hep-th/9610252.

28. Clarke C.J.S., THE ANALYSIS OF SPACE-TIME SINGULARITIES, Cambridge, Cambridge University Press, 1994.

29. Petrov A.N., THE SCHWARZSCHILD BLACK HOLE AS A POINT PARTICLE, gr-qc/0503082.

30. Futterman J.A., Handler F.A., Matzner R.A., SCATTERING FROM BLACK HOLES, Cambridge – New York, Cambridge University Press, 1988.

31. Anderson N., PHYS. REV. D, V.55, N 2, p.468, 1997