Российская Академия Наук
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

А.А Петрин

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ РОБОТОТЕХНИКИ. НЕЧЕТКИЕ МЕТОДЫ. (ОБЗОР)

Москва, 2005 г.

УДК 681.5

Петрин А.А. Основы теоретической робототехники и нечеткие методы (обзор).

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены основные определения и понятия нечетких множеств, используемых для преобразования информации, свойства нечетких отношений и операторы нечетких преобразований. Обсуждаются вопросы измерения нечеткости и нечеткого дополнения, которые выражаются в терминах метрического расстояния.

Petrin A.A. The fundamentals of the theoretical robotics and the fuzzy methods (review).

ABSTRACT

General definitions, concepts, properties of fuzzy relations and operators for fuzzy transformations were treated. The measure of fuzziness and fuzzy complement which are expressed in distance-based measures are discussed.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ:
00-01-00403, 00-15-96135, 02-01-00750, 02-07-90-425, 02-61-00-671.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Мультисенсорная обработка предполагает синергетическое использование информации, произведенной сенсорами. Эта обработка производится с помощью методов, использующих состояние интеграционного процесса, в котором актуальная комбинация различных источников сенсорной информации преобразуется в один представительный формат. Данный подход описан в работе [1], где рассматривалась задача разделения в виртуальной системе сенсорной информации по различным внешним уровням интеграции, включающим физический, логический и виртуальный уровни.

Чтобы обеспечить виртуальной системе информацию от каждого сенсора, рассмотрим сначала, как в ней интегрированы n сенсоров. Для этого для наглядности воспользуемся рис.1.

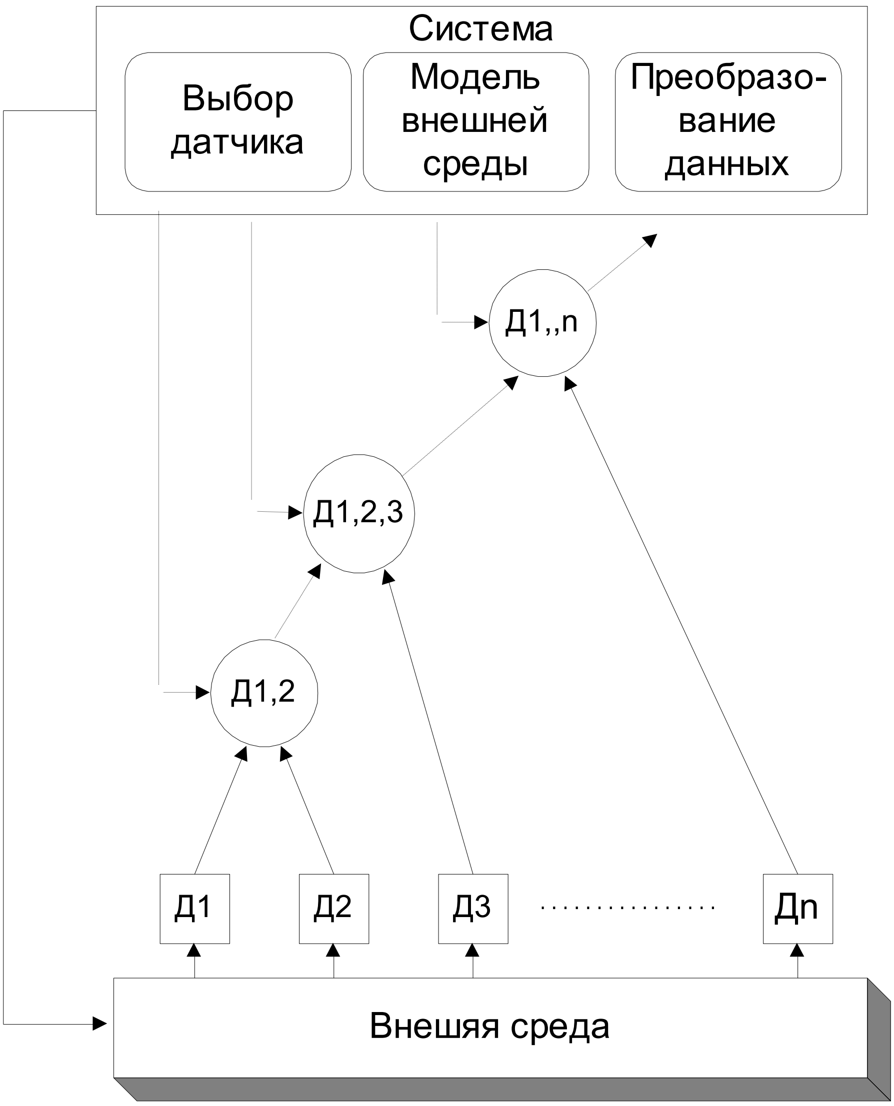

Рис.1

На этом рисунке показан уровень представления информации, соответствующий виртуальной сенсорной сети [2]. На нижнем уровне необработанные сенсорные данные преобразуются в информацию в форме сигнала. В результате пошаговой обработки сигнал преобразуется в абстрактное числовое или символьное представление. Как видно из рис.1, выходы $Д_1$ и $Д_2$ от первых двух сенсоров обрабатываются в точке пересечения в новое представление $Д_{1,2}$. Выход $Д_3$ от третьего сенсора затем комбинируется с $Д_{1,2}$ в следующей точке пересечения, результатом представления чего является выход $Д_{1,2,3}$, который затем обрабатывается на верхних уровнях. Результатом первого уровня обработки является значение сигнала $Д_{1,2}$, что может быть числовым значением, в то время как результат от второй обработки - $Д_{1,2,3}$ - должен быть символьным представлением объекта. В результате, выход от всех n сенсоров интегрируется в верхнюю структуру виртуальной сенсорной сети (ВСС).

Таким образом, информация с физических сенсоров обрабатывается на нижнем уровне представления, затем сравнивается с дополнительной информацией на символьном уровне и далее непосредственно обрабатывается в различных частях виртуальной системы с использованием специальных методов обработки. Особенностью такой обработки информации является то, что система может принимать состояния, которые не могут быть измерены традиционными методами. Кроме того, по своей природе оценка является приближением. Источниками неопределенности такого представления являются: невозможность сколь угодно точного измерения реальных величин; невозможность полного и четкого описания многих физических объектов и ситуаций; принципиальные ограничения по точности и большие погрешности выполнения сенсорных действий и др. Все это позволяет в виртуальной системе считать моделирование нечетким и кодировать информацию, достаточную для решения задач, элементами нечетких множеств, которые приближенно описывают исходные данные. В результате приходим к использованию в качестве состояний модели нечеткого множества в исходных пространствах, а в качестве действий (в управлении) или операторов (в моделях) – нечетких преобразований над этими пространствами. Рассмотрим специальный математический аппарат, который позволяет обрабатывать информацию, формализованную с помощью нечетких множеств.

1. Основные определения и понятия теории нечетких множеств, используемые для обработки сенсорной информации

Рассмотрим множество E, конечное или счетное, и x - элемент E. Тогда нечетким подмножеством A множества E называют [3, 4] совокупность упорядоченных пар

$$\underset{\sim}{A} = \{(x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\} ,$$

где $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ называется функцией принадлежности x в нечетком подмножестве A. Значение функции принадлежности $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ для элемента $x \in E$ называется степенью принадлежности.

Степень принадлежности Л. Заде [3] предложил оценивать числами из интервала [0,1]. Фиксирование конкретных значений носит субъективный характер. С одной стороны, важен характер измерений (первичный или производный) и тип шкалы, в которой получают информацию и которая определяет допустимый вид операций, применяемой к информации. С другой стороны, имеется два типа свойств: те, которые можно непосредственно измерить, и те, которые являются качественными и требуют парного сравнения объектов, обладающих рассматриваемым свойством, чтобы определить их относительное место по отношению к рассматриваемому понятию. Как правило, функция принадлежности либо непосредственно задается таблицей, либо задается аналитической функцией, совпадающей с функцией принадлежности. Результатом процедуры обработки должна быть функция принадлежности, удовлетворяющая условиям интервальной шкалы; при парном сравнении объектов, если один объект оценивается в α раз сильнее, чем другой, то второй объект оценивается только в $1/\alpha$ раз сильнее, чем первый и т.д.

Нечеткое решение определяется как результат операции следующих отношений: включение, равенство, дополнение, пересечение, разность, дизъюнктивная сумма, а также комбинацией этих отношений.

<u>Включение</u>. Пусть E - множество, M - множество принадлежностей и $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ - два нечетких подмножества E; считают, что $\underset{\sim}{A}$ содержится в $\underset{\sim}{B}$, если

$$\forall x \in E : \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad \text{и обозначать} \quad \underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}.$$

Пример. Пусть

$$E = \{x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4\}, \quad M = [0, 1].$$

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1| \ 0{,}4), \ (x_2| \ 0{,}2), \ (x_3| \ 0), \ (x_4| \ 1)\}.$$

$$\underset{\sim}{B} = \{(x_1| \ 0{,}3), \ (x_2| \ 0), \ (x_3| \ 0), \ (x_4| \ 0)\}.$$

Имеем

$$\underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A}, \quad \text{так как} \quad 0{,}3 < 0{,}4, \quad 0 < 0{,}2, \quad 0 = 0, \quad 0 < 1.$$

<u>Равенство.</u> Пусть E - множество, M – множество принадлежностей, $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ - два нечетких подмножества E. Утверждается, что $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ равны тогда и только тогда, когда $\forall x \in E: \ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$.

Будем обозначать $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$. Если найдется по крайней мере один такой элемент x из E, что равенство $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ не удовлетворяется, то говорят, что $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ не равны и обозначают $\underset{\sim}{A} \neq \underset{\sim}{B}$.

<u>Дополнение.</u> Пусть E - Множество, M = [0, 1] - множество принадлежностей, $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ - два нечетких подмножества E . Утверждают, что $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ дополняют друг друга, если

$$\forall x \in E: \ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) .$$

Это обозначается так : $\underset{\sim}{B} = \overline{\underset{\sim}{A}}$ или $\overline{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{B}$. Очевидно, что всегда $\overline{(\overline{\underset{\sim}{A}})} = A$.

Пример.

$E = \{ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \}$, $M = [0, 1]$.

$\underset{\sim}{A} = \{(x_1| 0{,}13), (x_2| 0{,}61), (x_3| 0), (x_4| 0), (x_5| 1), (x_6| 0{,}03)\}$,

$\underset{\sim}{B} = \{(x_1| 0{,}87), (x_2| 0{,}39), (x_3| 1), (x_4| 1), (x_5| 0), (x_6| 0{,}97)\}$.

Тогда очевидно $\overline{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{B}$.

<u>Пересечение.</u> Пусть E – множество и M = [0, 1] - соответствующее ему множество принадлежностей, $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ - два нечетких подмножества E; пересечение $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ определяют как наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся в $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ одновременно:

$$\forall x \in E : \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \min (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)).$$

Пример.

$E = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \}$, $M = [0, 1]$.

$\underset{\sim}{A} = \{(x_1| 0{,}2), (x_2| 0{,}7), (x_3| 1), (x_4| 0), (x_5| 0{,}5)\}$.

$\underset{\sim}{B} = \{(x_1| 0{,}5), (x_2| 0{,}3), (x_3| 1), (x_4| 0{,}1), (x_5| 0{,}5)\}$.

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{(x_1| 0{,}2), (x_2| 0{,}3), (x_3 | 1), (x_4| 0), (x_5| 0{,}5)\}$.

Кроме того, используя общее определение, можно записать

$$\forall x \in E : \ x \underset{\mu_{\underset{\sim}{A}}}{\in} \underset{\sim}{A} \ \text{и} \ x \underset{\mu_{\underset{\sim}{B}}}{\in} \underset{\sim}{B} \Rightarrow x \underset{\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}}{\in} \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} .$$

<u>Объединение.</u> Пусть E - множество и M = [0, 1] - соответствующее ему множество принадлежностей, $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$ - два нечетких подмножества E; объединение определяется как наименьшее нечеткое подмножество $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$, которое содержит как $\underset{\sim}{A}$, так и $\underset{\sim}{B}$.

$$\forall x \in E : \ \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \max (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)).$$

Вернувшись к примеру, получим

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \{(x_1| 0{,}5), (x_2| 0{,}7), (x_3| 1), (x_4| 0{,}1), (x_5| 0{,}5)\}.$$

<u>Дизъюнктивная сумма.</u> Дизъюнктивная сумма двух нечетких подмножеств определяется в терминах объединений и пересечений следующим образом:

$$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}) \cup (\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B}).$$

Рассмотрим тот же пример, который иллюстрировал операции объединения и пересечения:

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1| 0{,}2), (x_2| 0{,}7), (x_3| 1), (x_4| 0), (x_5| 0{,}5)\},$$

$$\underset{\sim}{B} = \{(x_1| 0{,}5), (x_2| 0{,}3), (x_3| 1), (x_4| 0{,}1), (x_5| 0{,}5)\}.$$

$$\overline{\underset{\sim}{A}} = \{(x_1| 0{,}8), (x_2| 0{,}3), (x_3| 0), (x_4| 1), (x_5| 0{,}5)\}.$$

$$\overline{\underset{\sim}{B}} = \{(x_1| 0{,}5), (x_2| 0{,}7), (x_3| 0), (x_4| 0{,}9), (x_5| 0{,}5)\}.$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}} = \{(x_1| 0{,}2), (x_2| 0{,}7), (x_3| 0), (x_4| 0), (x_5| 0{,}5)\}.$$

$$\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B} = \{(x_1| 0{,}5), (x_2| 0{,}3), (x_3| 0), (x_4| 0{,}1), (x_5| 0{,}5)\}.$$

$$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = \{(x_1| 0{,}5), (x_2| 0{,}7), (x_3| 0), (x_4| 0{,}1), (x_5| 0{,}5)\}.$$

<u>Разность.</u> Разность определяется соотношением $\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$.

Пример. Используя результаты предыдущего примера, имеем:

$$\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}} = \{(x_1| 0{,}2), (x_2| 0{,}7), (x_3| 0), (x_4| 0), (x_5| 0{,}5)\}.$$

Одно из свойств нечетких отношений заключается в том, что они могут быть представлены в виде совокупности обычных отношений, причем эти отношения могут быть упорядочены по включению, представляя собой иерархическую совокупность отношений. Разложение нечетких отношений на совокупность обыкновенных отношений основано на понятии α - уровня нечеткого отношения. Рассмотрим, как используя функцию принадлежности и понятие обычного подмножества α - уровня, можно нечеткое множество разложить на произведения четких множеств по коэффициентам α_I. Пусть $\alpha\in[0,\ 1]$; подмножеством α - уровня нечеткого подмножества A будет называться обычное подмножество $A_\alpha = \{\, x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha\}$.

Пример. Пусть

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{array}.$$

Имеем

$$A_{0,3} = \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array},$$

$$A_{0,55} = \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} .$$

Рассмотрим теорему о декомпозиции. Всякое нечеткое подмножество $\underset{\sim}{A}$ можно следующим образом разложить на произведения обычных подмножеств по коэффициентам α_I :

$$\underset{\sim}{A} = \max_{\alpha_i} [\, \alpha_1 \cdot A_{\alpha 1} ,\ \alpha_2 \cdot A_{\alpha 2} ,\ \ldots,\ \alpha_n \cdot A_{\alpha n} \,],$$

$$0 < \alpha_i \le 1 ,\ i = 1,2, \ldots, n.$$

Доказательство.

$$\mu_{A\alpha I}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \ge \alpha_i , \\ 0, \text{ если } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < \alpha_i . \end{cases}$$

Таким образом, функцию принадлежности подмножества A можно записать в виде

$$\mu_{\max\limits_{\alpha i}[\alpha_i \cdot A_{\alpha i}]}(x) = \max_{\alpha i} [\, \alpha_i \cdot A_{\alpha i} \,] =$$

$$= \max_{\alpha_i \le \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)} [\, \alpha_i \,] =$$

$$= \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) .$$

Пример.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0,2 & 0 & 0,5 & 1 & 0,7 \end{array} = \max \left((0,2) \cdot \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} ,\quad (0,5) \cdot \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} ,\right.$$

$$\left. (0,7) \cdot \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} ,\quad (1) \cdot \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Формула разложения остается справедливой и в случае, когда универсальное множество имеет мощность континуума (действительных чисел). Рассматривая интервал $[\,\alpha, 1]$, где $0 < \alpha \le 1$, можно записать

$$\mu_{A\alpha}(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{если } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [\,\alpha, 1] , \\ 0, \quad \text{если } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \notin [\alpha, 1] . \end{cases}$$

Таким образом, нечеткое подмножество можно разложить для любых произвольных множеств значений α - уровня в интервале $0 < \alpha \le 1$.

С другой стороны, можно осуществить синтез нечеткого подмножества посредством объединения обычных подмножеств. Если рассмотреть последовательность обычных подмножеств $A_1 \subset\subset A_2 \subset\subset \ldots \subset\subset A_n$ и присвоить значения α_1 для A_1, α_2 для A_2, …, α_n для A_n, причем такие, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, то получим нечеткое подмножество A.

СВОЙСТВА НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ

Теоретически обычное множество состоит из множества X, набора объектов, называемого подмножеством X, двух бинарных операций, определяемых на этих подмножествах, называемых объединение и пересечение, бинарной операции, называемой отрицание, и двух специально означенных множеств, названных в [5,7] X и Ф.

Эти множества вместе с этими операциями строятся с помощью булевой алгебры. Их свойства:

1) объединение и пересечение являются коммутативным,
2) объединение и пересечение являются ассоциативным,
3) объединение и пересечение являются идемпотентным,
4) объединение и пересечение являются поглощением,
5) объединение и пересечение являются дистрибутивным,
6) X и Ф являются соответственно максимальным и минимальным элементами алгебры,
7) отрицание удовлетворяет свойству дополнения так, что $A \cup \bar{A} = X$ и $A \cap \bar{A} = Ф$.

Введем также понятие “отношение доминирования”. Рассмотрим два упорядоченных набора:

$\nu = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$

и

$\nu' = (k'_1, k'_2, \ldots, k'_n)$,

в которых k_i и k'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ принадлежат одному и тому же вполне упорядоченному множеству K. Обозначим отношение порядка на K символом $\geq$. Считается, что ν' доминирует ν, то есть $\nu' \geq \nu$ (отношение нестрогого порядка), тогда и только тогда, когда $k'_1 \geq k_1$, $k'_2 \geq k_2$, …, $k'_n \geq k_n$. Для обозначения отношения строгого порядка используем символы > и $\angle$, тогда говорят, что ν' строго доминирует ν. Очевидно, что $\nu' > \nu$, если $k'_1 \geq k_1$, $k'_2 \geq k_2$, …, $k'_1 \geq k_n$ и имеются по крайней мере одно k'_i и одно k_i, между которыми существует строгое отношение.

Таким образом, если решением практической задачи является получение на множестве некоторого отношения заданного типа, например, эквивалентности или порядка, то построение на множестве соответствующего нечеткого отношения позволяет получать сразу семейство необходимых обычных отношений. Это дает возможность учитывать неоднозначность решений, присущих практическим ситуациям, а также дает возможность оперировать сразу всей совокупностью объектов.

2. Измерение нечеткости

Рассмотрим процедуру построения функции принадлежности, в которой используются парные сравнения объектов и допускается матрица парных сравнений. Рассмотрим понятие " класс S ", которое описывается функцией принадлежности на множестве объектов $A = \{a_0, \dots , a_{n-1}\}$ [10]. В A имеются только два объекта a_0 и a_1, о которых можно сказать, что a_1 - идеальный представитель тех объектов, которые принадлежат классу S, и что a_0 - идеальный представитель тех объектов, которые не принадлежат понятию " класс S ", т.е. $\mu_s(a_1) = 1$, $\mu_s(a_0) = 0$. В этом случае можно проранжировать степень различия объектов в каждой паре объектов в смысле принадлежности понятия классу S. В результате формируется матрица парных сравнений, которая задает порядок пар объектов по степени различия в парах. Далее посредством методов неметрического шкалирования вычисляются в метрическом пространстве X^m координаты n точек $x_i = \{x_i^1, \dots ,x_i^m\}$, порядок расстояний $d(x_i, x_j)$ между которыми совпадает или максимально близок к порядку элементов матрицы парных сравнений. Для полученных расстояний имеют место следующие утверждения: если объекты a_i и a_j неразличимы, то $d_{ij} = 0$, если степень различия объектов a_i, a_j больше чем степень различия объектов a_i, a_k, то $d_{ij} > d_{ik}$; если степень различия объектов a_i, a_j совпадает со степенью различия объектов a_i, a_k, то $d_{ij} = d_{ik}$.

Дальнейшие выводы основываются на следующих предположениях [11].

Предположение 1. Понятие S характеризуется несколькими одномерными признаками, которые определяются при помощи методов шкалирования.

Согласно предположению объекты формально описываются точками в пространстве признаков. Из процедуры формального описания объектов следует, что максимальное расстояние на множестве объектов будет между объектами a_0 и a_1, т.к. их различие в смысле принадлежности к понятию S будет максимально возможным, следовательно, чем дальше объект a_i от объекта a_1 в пространстве признаков, тем в меньшей степени он характеризуется принадлежностью к S.

Предположение 2. Степень различия двух объектов a_i и a_j из A по отношению к понятию "класс S" пропорциональна разности расстояний в пространстве признаков от a_i и a_j до объекта a_1, который с максимально возможной степенью принадлежит S.

Из предположения следует, что степень различия двух объектов a_i и a_j по отношению к понятию S будет пропорциональна разности значений функций принадлежности на этих объектах, т.е. $c\,|\,d_{1i} - d_{1j}\,| = |\,\mu_s (a_i)\,|$, где c - некоторая константа.

Если в качестве объекта a_i рассматривать a_0, затем a_1, то будут иметь место следующие соотношения:

$$c\,|d_{10} - d_{1j}| = \mu_s(a_j), \qquad cd_{1j} = 1 - \mu_s(a_j), \quad \text{т.е. } d_{11} = 0.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\mu_s(a_j) = \frac{d_{10} - d_{1j}}{d_{1j}} = 1 - \frac{d_{1j}}{d_{10}}.$$

Таким образом, функция принадлежности на множестве объектов A, характеризующее понятие S, определяется по расстояниям в пространстве признаков X^m согласно полученному соотношению.

Известно, что в математике термин "расстояние" нельзя использовать произвольно. Если необходимо определить расстояние d между любой парой элементов X, Y множества E, то должны выполняться следующие условия [10]: $\forall X, Y, Z \in E$:

1) расстоянием d(X,Y).
2) $d(X, Y) \geq 0$ - неотрицательность,
3) $d(X, Y) = d(Y, X)$ - симметричность,
4) $d(X, Z) \leq d(X, Y) * d(Y, Z)$ - транзитивность.

Здесь $*$ - оператор, связанный с $d(X, X) = 0$.

Используя эти идеи, можем выбрать некоторые метрики на пространстве n векторов для измерения степени нечеткости нечеткого множества. Можно показать, что между показателями нечеткости, удовлетворяющими условиям 1 - 4, и метриками определенного класса может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

Если A является нечетким подмножеством X, докажем, что f(A) будет измерением нечеткости. Потребуем от функции f удовлетворения $f(A) = f(\bar{A})$.

Рассмотрим несколько метрик измерения нечеткости, основанных на расстоянии между A и $\bar{A}$. Рассмотрим сначала случай, в котором подчеркивается, что множество X является конечным размерности n. В этом случае рассмотрим каждое нечеткое подмножество X как вектор с n компонентами. Так, $A(x_i)$ является i-ой компонентой от вектора, представляющего нечеткое множество A. В этом случае $(1 - A(x_i))$ есть i– ая компонента вектора, представляющего нечеткое подмножество $\bar{A}$. Используя эту структуру, мы можем подсчитать расстояние между A и $\bar{A}$.

Если D является метрикой на n пространстве, то $D(A, \bar{A})$ является измерением расстояния между A и $\bar{A}$. Класс метрик в этом пространстве определяется формулой [5]:

$$D_p(A, \bar{A}) = [\sum_{I=1}^{n} | AC(x_i) - A(x_i)|^p]^{1/p}$$

для p = 1,2,3, … .

В частности, имеем

p = 1: метрика Хемминга, где

$$D_1[A, \bar{A}] = \sum_{i=1}^{n} | A(x_i) - \bar{A}(x_i) | .$$

Однако, так как $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, получаем

$$D_1 [A, \bar{A}] = \sum_{i=1}^{n} | 2A(x_i) - 1 | .$$

p = 2: Евклидова метрика, где

$$D_2 [A, \bar{A}] = (\sum (A(x_i) - \bar{A}(x_i))^2)^{1/2}$$

И так как $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, получим

$$D_2 [A, \bar{A}] = (\sum (2A(x_i) - 1)^2)^{1/2}.$$

p = ∞: бесконечная метрика Sup

$$D_x [A, \bar{A}] = \sup_{i=1,2,\ldots,n} | A(x_i) - \bar{A}(x_i) |$$

$$D_x [A, \bar{A}] = \sum_{i=1,2,\ldots,n} | 2A(x_i) - 1|$$

Отмечаем, что если C является четким множеством, то $\bar{C}$ есть точное дополнение. Может быть доказана следующая теорема.

<u>Теорема 1</u> [5]. Если C является неким четким множеством X и $\bar{C}$ его отрицание, то

$$D_p = D_p[C, \bar{C}] = n^{1/p}$$

В частности,

$$D_1 = n ,$$
$$D_2 = n^{1/2},$$

$$D_\infty = 1.$$

Доказательство. Если C является четким, тогда либо C(x), либо $\bar{C}(x)$ есть 1 и другие есть 0 и, следовательно,

$$|C(x) - \bar{C}(x)| = 1$$

и

$$D_p(C, \bar{C}) = (\sum_{i=1}^{n} 1)^{1/p} = n^{1/p}.$$

<u>Теорема 2</u> [5]. Если C является некоторым четким подмножеством X и A является нечетким подмножеством X, то

$$D_p(A, \bar{A}) \le D_p(C, \bar{C}).$$

Доказательство. $|C(x_i) - \bar{C}(x_i)| = 1$ для всех x_i и
$|2A(x_i) - 1| \le 1$ для всех x_i

Отметим, что определение нечеткости инверсно относительно расстояния между A и $\bar{A}$. Основываясь на этих метриках, можем определить измерение нечеткости от A $f_p(A)$ такое, что

$$f_p(A) = \frac{D_p - D_p(A, \bar{A})}{D_p} = 1 - \frac{D_p(A, \bar{A})}{D_p}.$$

В частности,

$$f_1(A) = 1 - 1/n(\sum_{i=1}^{n} |2A(x_i) - 1|)$$

$$f_2(A) = 1 - 1/n^{1/2} (\sum_{i=1}^{n} |2A(x_i) - 1|^2)^{1/2}$$

$$f\infty(A) = 1 - \sup_{i=1,2,3,\dots} | 2A(x_i) - 1|.$$

Это определение нечеткости удовлетворяет трем условиям, сформулированным De Luca и Termini [9]:

1) Если A является четким подмножеством, $A(x_1) = 1$ или 0 и следовательно $|2A(x_i) - 1| = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$ и следовательно $D_p(A, \bar{A}) = D_p$ и следовательно

$$f_p(A) = 1 - \frac{D_p}{D_p} = 0.$$

2) $f_p(A) = 1 – (D_p(A, \bar{A})) / (D_p)$ является max, когда $D_p(A, \bar{A})$ является min. $D_p(A, \bar{A})$ есть min, когда $|2A(x_i) – 1| = 0$ для всех x_i, так как $|2A(x_i) – 1| = 0$, когда $A(x_i)=1/2$. Очевидно, что $f_p(A)$ есть max, когда $A(x_i)=1/2$ для всех $x \in X$.

3) Принимем $A^*(x) \geq A(x)$ для $A(x) \geq 1/2$,

$A^*(x) \leq A(x)$ для $A(x) \leq 1/2$.

Тогда

$$|2A^*(x_i) – 1| \geq |2A(x_i) – 1| \quad \text{для всех } x_i$$

и, следовательно, $D_p(A^*, \bar{A}^*) \geq D_p(A, \bar{A})$ и $f_p(A^*) \leq f_p(A)$.

Если лежащее в основе множество X является непрерывным, в частности некоторым интервалом (a, b) реальной линии, тогда можем определить нечеткость, используя интегральное измерение расстояния. Так, если $X = [a, b] \in R$, то если A есть нечеткое подмножество от X и $\bar{A}$ его отрицание, то

$$D_p(A, \bar{A}) = [\int_a^b | A(x) - \bar{A}(x)|^p dx]^{1/p} \qquad (p=1,2,\ldots, \infty).$$

Так как $\bar{A}(x) = 1 – A(x)$, мы имеем

$$D_p(A, \bar{A}) = [\int_a^b | 2A(x) – 1|^p dx]^{1/p}.$$

Когда p = 1, получаем

$$D_1(A, \bar{A}) = \int_a^b | 2A(x) – 1| dx,$$

когда p = 2,

$$D_2(A, \bar{A}) = [\int_a^b (2A(x) – 1)^2 dx]^{1/2}.$$

Если C есть четкое множество от X, тогда

$$|2C(x) – 1| = 1 \text{ для всех } x$$

и следовательно

$$D_p(C, \bar{C}) = [\int_a^b dx]^{1/p} = (b – a)^{1/p}.$$

Так, для четких множеств получаем

$$D_1 = b – a$$
$$D_2 = (b – a)^{1/2}$$
$$D_p = (b – a)^{1/p}.$$

Как в последнем случае, может быть показано, что если А является нечетким подмножеством от X

$$D_p \ge D_p(A, \bar{A}).$$

Следовательно, в этом случае имеем следующее измерение нечеткости:

$$f_p(A) = 1 - \frac{1}{(b-a)^{1/p}} \left[\int_a^b \left| 2A(x) - 1 \right|^p dx \right]^{1/p}.$$

3. Нечеткие операторы

Важным вопросом исследования нечеткого множества является построение соответствующих операторов агрегирования нечеткой информации с учетом изменчивости ситуационных данных. В работе [3] показано, что для любых нечетких множеств из F(X) операторы $F = \min$ и $G = \max$ являются единственно возможными операторами пересечения и объединения при выполнении следующих условий:

1) $F(\mu_A, \mu_B) = F(\mu_B, \mu_A)$; $G(\mu_A, \mu_B) = G(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность) ;
2) $F(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(F(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$;
$G(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(G(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$; (ассоциативность) ;
3) $F(\mu_A, \mu_B) \le F(\mu_C, \mu_D)$; $G(\mu_A, \mu_B) \le G(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \le \mu_C$, $\mu_B \le \mu_D$ (монотонность) ;
4) $F(\mu_A, \mu_A) < F(\mu_B, \mu_B)$; $G(\mu_A, \mu_A) < G(\mu_B, \mu_B)$, если $\mu_A < \mu_B$;
5) $F(1, 1) = 1$; $G(0, 0) = 0$;
6) $F(\mu_A, \mu_B) \le \min(\mu_A, \mu_B)$; $G(\mu_A, \mu_B) \ge \max(\mu_A, \mu_B)$;
7) F и G - непрерывные функции;
8) $F(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(F(\mu_A, \mu_B), F(\mu_A, \mu_C))$;
$G(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(G(\mu_A, \mu_B), G(\mu_A, \mu_C))$ (дистрибутивность).

Нечеткие операторы дополнения

В теории нечетких множеств оператор дополнения не является единственным. Помимо общеизвестного $\bar{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$ $\forall x \in X$ имеются другие операторы отрицания (дополнения).

Рассмотрим подход к измерению нечеткости в контексте с возможными операторами дополнения. Пусть U обозначает четкое множество, которое принимается за универсальное. Тогда нечеткое подмножество A от U определяется функцией

$$\mu_A : U \to [0,1],$$

где $\mu_A(u)$ характеризует степень принадлежности u в A. Дополнение нечеткого множества A определяется функцией

$$c:[0,1] \to [0,1],$$

где каждому значению $\mu_A(u)$ ставится значение $c(\mu_A)$ и которое должно удовлетворять следующим двум требованиям (аксиомам):

(c1) $c(0) = 1$ и $c(1) = 0$,

т.е. c является обычным дополнением для четких множеств; (c2) если $x_1 < x_2$, то $c(x_1) \geq c(x_2)$, т.е. c монотонно убывает.

Среди аксиом нечетких дополнений добавляют следующие два наиболее важных требования:

(c3) c является непрерывной функцией;

(c4) c является возведением в степень, т.е. $c(c(x)) = x$ для всех $x \in [0,1]$.

В качестве примера класса нечетких дополнений, которые удовлетворяют этим требованиям, являются дополнения порогового типа, которые определяются оператором

$$c(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \leq a \\ 0 & \text{для } x > a, \end{cases}$$

где $a \in [0,1]$.

Каждое нечеткое дополнение c имеет функцию C на множестве P (U) на всех нечетких подмножествах от U,

$$C: P(U) \rightarrow P(U),$$

такое, что для каждого A = P(U), C(A) = B, если $c(\mu_A(u)) = \mu_B(u)$ для всех $u \in U$. Приведенная особенность нечеткого дополнения c функции C может быть условно использована как глобальный оператор изображения c. Чтобы достигнуть связи между нечеткими подмножествами и их дополнениями, согласно работе [7] введем некоторые релевантные свойства.

Оператор равновесия

Определение 1. Пусть c является нечетким дополнением. Тогда существует x, для которого $c(x) = x$, которое называется равновесием c.

Лемма 1 [9]. Каждое нечеткое дополнение имеет максимум одно равновесие.

Доказательство. Пусть c произвольное нечеткое дополнение. Равновесием от c является решение уравнения $c(x) - x = 0$, $x \in [0,1]$. Лемму 1 можно доказать, предполагая, что некое уравнение $c(x) - x = d$, где d есть реальная константа, имеет одно решение.

Предположим, что x_1 и x_2 есть два отличных решений уравнения $c(x) - x = d$, так что $x_1<x_2$. Тогда $c(x_1) - x_1 = d$ и $c(x_2) - x_2 = d$; следовательно,

$$c(x_1) - x_1 = c(x_2) - x_2. \qquad (1a)$$

Пока c по определению является монотонно убывающей, $c(x_1) \geq c(x_2)$ и считая $x_1<x_2$, получаем

$$c(x_1) - x_1 > c(x_2) - x_2.$$

Это неравенство противоречит уравнению (1a). Следовательно, уравнение имеет одно решение.

Лемма 2 [9]. Предположим, что данное нечеткое дополнение c имеет равновесие e_c, которое должно быть единственным (Лемма 1). Тогда

$$x \leq c(x), \text{ если } x \leq e_c$$

и

$$x \geq c(x), \text{ если } x \geq e_c.$$

Доказательство. Пусть $x < e_c$, $x = e_c$ и $x > e_c$, соответственно. Тогда $c(x) \geq c(e_c)$, $c(x) = c(e_c)$ и $c(x) \leq c(e_c)$, соответственно, пока c является монотонно убывающей. При $c(e_c) = e_c$ получаем $c(x) \geq e_c$, $c(x) = e_c$ и $c(x) \leq e_c$, соответственно, и следуя предположению, получаем $c(x) > x$, $c(x) = x$ и $c(x) < x$, соответственно. Следовательно, $x \leq e_c$ предполагает $c(x) \geq x$ и $x \geq e_c$ предполагает $c(x) \leq x$. При этом немедленно за этим следует инверсная импликация.

Лемма 3 [9]. Если c есть непрерывное нечеткое дополнение, то c имеет единственное равновесие.

Доказательство. Данное нечеткое дополнение c, его равновесие e_c является решением уравнения $c(x) - x = 0$. Поскольку это частный случай от более общего уравнения $c(x) - x = a$, где $a \in [-1,1]$ является константой, потребуем (c1), $c(0) - 0 = 1$ и $c(1) - 1 = -1$. Пока c является непрерывным дополнением, оно следует из промежуточного значения теоремы для непрерывных функций, что для каждого $a \in [-1,1]$ есть по крайней мере один x, такой что $c(x) - x = a$. Единственность решения демонстрируется доказательством Леммы 1.

Оператор "дуальная точка"

Определение 2. Данное нечеткое дополнение c и реальное число $x \in [0,1]$, некоторое реальное число ${}^dx \in [0,1]$ такое, что

$$c({}^dx) - {}^dx = x - c(x) \qquad (2a)$$

называется дуальной точкой x по отношению к c. Оно следует непосредственно из доказательства Леммы 1, что уравнение имеет одно решение для неизвестного ${}^dx$ (при данных c и x). Следовательно, здесь имеется одна дуальная точка для каждого в частности c и x. Как следует из доказательства Леммы 3, дуальная точка ${}^dx$ существует для каждого $x \in [0,1]$, когда c является непрерывным дополнением.

Лемма 4 [9]. Если c имеет равновесие e_c, то

$${}^de_c = e_c .$$

Доказательство. Если $x = e_c$, то $x - c(x) = 0$ по Определению 1. Чтобы удовлетворить уравнению Определения 2 мы должны положить ${}^dx = e_c$.

Лемма 5 [9]. Для каждого $x \in [0,1]$, ${}^dx = c(x)$, если $c(c(x)) = x$.

Доказательство. Положим ${}^dx = c(x)$. Тогда $c(c(x)) - c(x) = x - c(x)$; следовательно, $c(c(x)) = x$. Пусть $c(c(x)) = x$. Тогда $c({}^dx) - {}^dx = c(c(x)) - c(x)$; следовательно, ${}^dx = c(x)$.

Лемма 5 означает, что дуальная точка совпадает с точкой дополнения всякий раз, когда дополнение есть возведение в степень. Если дополнение не есть возведение в степень, дуальная точка либо не существует, либо не совпадает с точкой дополнения.

Таким образом, с помощью релевантных свойств, введенных леммами 1–5, достигнуты базисные связи между нечеткими подмножествами и их дополнениями.

4.Измерение нечеткого дополнения

Пусть P(U) обозначает множество всех нечетких подмножеств от U.Тогда измерением нечеткости является функция

$$f:P(U)\rightarrow [0,1],$$

которая для каждого нечеткого подмножества A от U назначает величину f(A). Чтобы принять f(A) как характеристику степени нечеткости от A, функция f должна удовлетворять определенным требованиям. Определим расстояние между нечетким подмножеством и его дополнением, введя такое отношение как «быть острее (резче) чем» на множестве P(U), расстояние которого является максимальным, когда множество острое.

Определение 3. Пусть A, B$\in$P(U) и пусть

$$|\mu_A(u) - c(\mu_A(u))| \geq |\mu_B(u) - c(\mu_B(u))|$$

для всех $u \in U$, где c есть нечеткое дополнение. Тогда, говорят, A круче B; формально $A \angle B$.

Если за измерение нечеткости взято отсутствие расстояния между нечетким подмножеством и его дополнением, то нежелательно допускать f(A) > f(B), если $A \angle B$. Это приводит к следующим требованиям (аксиомам) для измерения нечеткости f:

(f1) f(A) = 0, если A есть четкое множество;

(f2) если $A \angle B$, то $f(A) \leq f(B)$;

(f3) когда c имеет равновесие e_c , f(A) достигает своего мах, если $\mu_A(u) = e_c$ для всех $u \in U$.

Требование (f1), устанавливает, что четкое множество не имеет степени нечеткости.

Требование (f2) основано на главной концепции заострения. Целью этого обобщения является сделать концепцию заострения приемлемой для всего класса общего нечеткого дополнения. Условия

$$|\mu_A(u) - c(\mu_A(u))| \geq |\mu_B(u) - c(\mu_B(u))$$

могут быть преобразованы в виде

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(u) \text{ или } \mu_A(u) - c(\mu_A(u)) \geq c(\mu_B(u)) - \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \leq c(\mu_B(u)),$$

и (a)

$$\mu_A(u) \geq \mu_B(u) \text{ или } \mu_B(u) - c(\mu_A(u)) \leq c(\mu_B(u)) - \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \geq c(\mu_B(u)).$$

Из этой альтернативной формулировки заострения (ссылка?) получаем следующие особые случаи общего понятия заострения:

Непрерывные дополнения. $A \angle B$, если

$$\mu_A(u) \le \mu_B(u) \text{ или } \mu_A(u) \ge \mu_B({}^d u), \text{ когда } \mu_B(u) \le e_c$$
$$\text{и} \qquad \text{(b)}$$
$$\mu_A(u) \ge \mu_B(u) \text{ или } \mu_A(u) \le \mu_B({}^d u), \text{ когда } \mu_B(u) \ge e_c$$

для всех $u \in U$ (по леммам 2 и 3).

1. Дополнения возведения в степень. $A \angle B$, если
$\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ или $\mu_A(u) \le c(\mu_B(u))$, когда $\mu_B(u) \ge e_c$
для всех $u \in U$ (по лемме 5).

2. Особое дополнение $c(x) = 1 – x$. $A \angle B$, если

$$\mu_B(u) \le ½$$
$$\text{и} \qquad \text{(c)}$$
$$\mu_A(u) \ge \mu_B(u) \text{ или } \mu_A(u) \le 1 - \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \ge ½,$$

для всех $u \in U$.

Понятие заострения, представленное различными авторами в литературе [7-9], основано на операции контрастного усиления, предложенного Заде [3]. Оно определяется следующим образом: A является заострением от B, если

$$\mu_A(u) \le \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \le ½$$
$$\text{и} \qquad \text{(A)}$$
$$\mu_A(u) \ge \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \ge ½.$$

Это определение применяется к особому дополнению $c(x) = 1 – x$, но может быть расширено для класса всех дополнений следующим образом:

$$\mu_A(u) \le \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \le c(\mu_B(u))$$
$$\text{и} \qquad \text{(B)}$$
$$\mu_A(u) \ge \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \ge c(\mu_B(u)) .$$

В случае непрерывных дополнений (B) становится равноценным

$$\mu_A(u) \le \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \le e_c$$
$$\text{и} \qquad \text{(C)}$$
$$\mu_A(u) \ge \mu_B(u), \text{ когда } \mu_B(u) \ge e_c.$$

Когда особое дополнение $c(x) = 1 – x$, то используется определение (C), которое становится эквивалентным (A).

Когда определения (A), (B), (C) сравниваются с (c), (в), (a), соответственно, ясно, что определение остроты в этой статье является обобщающим в свете предварительных определений в литературе. Если A является острой версией от B в смысле от (B), тогда $A \angle B$. Следовательно, в (f2) выставляется следующее дополнительное требование:

(f2)′ если A есть заостренная версия (модификация) от B, то $f(A) \le f(B)$.

Требование (f3) обобщает обычные требования максимального значения от f(A) - f(A) и является максимальным, если $\mu_A(u) = ½$ для всех $u \in U$, в которых выдерживается особое нечеткое дополнение $c(x) = 1 - x$. Заметим, что требования становятся бессмысленными, когда используемое нечеткое дополнение не имеет равновесия.

ОПЕРАТОРЫ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ И ДОПОЛНЕНИЯМИ

Во-первых, примем, что универсальное множество U является конечным и принимает значения $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Данному дополнению c и нечеткому множеству $A \in P(U)$ присвоим

$$\delta_{c,A}: U \to [0,1]$$

такую функцию, которая примет значение

$$\delta_{c,A}(u_i) = \left| \mu_A(u_i) - c(\mu_A(u_i)) \right| ; \qquad (3)$$

и положим

$$^f d_c: P(U) \to [0,1]^n$$

такую функцию, что

$$^f d_c(A) = (\delta_{c,A}(u_1), \delta_{c,A}(u_2), \ldots, \delta_{c,A}(u_n));$$

(надписанная функция f используется здесь, чтобы показать, что функция определена для конечного универсума U). Чтобы характеризовать каждое отдельное нечеткое дополнение, положим

$$\delta_c: [0,1] \to [0,1]$$

функцию такую, что $\delta_c(x) = \left| x - c(x) \right|$ и положим

$$\nabla_c = \delta_c(x) \,\middle|\, x \in [0,1];$$

ясно, что $\nabla c \subseteq [0,1]$. Назовем δ_c разностной функцией сходной с нечетким дополнением c.

Лемма 6 [9]. $^f d_c(P(U)) = \nabla_c^n$, когда U является конечной.

Доказательство. Рассмотрим некоторую функцию $A \in P(U)$. Так как $\mu_A(u_i) \in [0,1]$ для любой $u_i \in U$, $\delta_{c,A}(u_i) \in \nabla_c$ для каждого $u_i \in U$ согласно определению $\delta_{c,A}$ и, следовательно, имеется $^f d_c(A) \in \nabla_c^n$. Следовательно, $^f d_c(P(U)) \subseteq \nabla_c^n$.

Рассмотрим теперь некоторую функцию $(\delta_c(x_1), \delta_c(x_2), ..., \delta_c(x_n)) \in \nabla_c^n$.Тогда мы можем найти нечеткое множество $A \in P(U)$ такое, что $^f d_c(A) = (\delta_c(x_1), \delta_c(x_2), \ldots, \delta_c(x_n))$, т.е. A определяется через $\mu_A(u_i) = x_i$ для всех $u_i \in U$. Следовательно, $\nabla_c^n \subseteq {}^f d_c(P(U))$.

Данное нечеткое дополнение C приемлемо в качестве расстояния между A и C(A) как некоторого вида совокупной функции локального различия $\delta_{c,A}(u_i)$ градиента функции принадлежности A и C(A) для каждого элемента U.

Определение 4. Данное нечеткое дополнение c и допущение, что U является конечным, положим

$$g_c: \nabla_c^n \to [0,1]$$

Функция, которая имеет следующие свойства:

(g1) $g_c(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq$ для каждого $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \nabla_c^n$;

(g2) g_c является монотонной возрастающей с соответствующим каждым аргументом;

(g3) $g_c(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ достигает своего максимума при $a_i = 1$ для всех i;

(g4) если $0\in\nabla_c$, то $g_c(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ достигает своего минимума при $a_i = 0$ для всех i.

Тогда g_c называют конечной совокупной функцией, связанной с нечетким дополнением с.

Когда аргументы конечной совокупной функции g_c являются значением $\delta_{c,A}(u_i)$, $u_i \in U$, функции $\delta_{c,A}$, g_c рассматриваются как измерение расстояния между A и C(A). Пусть $D_{c,g}(A, C(A))$ обозначает это расстояние. Тогда

$$D_{c,g}(A,C(A)) = g_c({}^f d_c(A)).$$

Предположим теперь, что U бесконечна. Предыдущие определения могут быть легко модифицированы следующим образом: (3) заменяется следующим уравнением:

$$\delta_{c,A}(u) = |\,\mu_A(u) - c(\mu_A))|\,,\ u\in U;$$

${}^f d_c$ определяется через

$$d_c:P(U) \to [0,1]^U$$

так что $d_c(A) = \delta_{c,A}$, где $\delta_{c,A}$ различие функции A по отношению к с.

<u>Лемма 7.</u> $d_c(P(U)) = \nabla_c^U$ когда U бесконечна.

Доказательство. Тривиальная модификация доказательства Леммы 6.

Лемма 7 означает, что обсуждение произвольной $a \in\nabla_c^U$ эквивалентно обсуждению произвольного отличия функции $\delta_{c,A}\in d_c(P(U))$.

Здесь также необходимо определить согласованную функцию для случая, когда U является бесконечной.

<u>Определение 5.</u> Дано нечеткое дополнение с, принимая, что U является бесконечной, пусть

$$G_c:\nabla_c^U\to[0,1]$$

будет функцией, которая имеет следующие свойства:

(g1)′ $g_c(\alpha)\geq 0$ для некоторых $\alpha\in\nabla_c^U$;

(g2)′ g_c является монотонной возрастающей в смысле, что $g_c(\alpha) \geq g_c(\alpha')$ когда $\alpha(u) \geq \alpha'(u)$ для всех $u\in U$;

(g3)′ $g_c(\alpha)$ достигает своего максимума, если $\alpha(u) = 1$ для всех $u \in U$;

(g4)′ если $0\in\nabla$, то $g(\alpha)$ достигает своего минимума, если $\alpha(u) = 0$ для всех $u\in U$.

Тогда g_c называют непрерывной согласованной функцией, ассоциированной с нечетким дополнением с. Отметим, что определение 5 является более обобщенным, чем определение 4, т.е., что понятие конечной согласованной функции может быть представлено как особый случай понятия бесконечной согласованной функции. Следовательно, когда необходимо различать конечную и бесконечную согласованные функции, мы можем назвать некоторую функцию, которая характеризуется определением 5 как согласованная функция. Когда аргумент бесконечной согласованной функции g_c изображается через согласованную функцию $\delta_{c,A}$, g_c снова определяет, как измерить расстояние A и C(A). Примерами вводимой концепции расстояния между A и C(A) являются индивидуальные члены расстояния, они определяются следующим образом. Если $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, то

$$D_{c,p}[A,C(A)] = [\ \sum \delta^p_{c,A}(u_i)\ ]^{1/p}\ ,$$

где p = 1,2, …, есть параметр, чье значение характеризует индивидуальный тип расстояния (т.е. расстояние Хемминга при p = 1, Эвклидово расстояние при p = 2, неограниченное расстояние при p = ∞). Если U = [a, b], то

$$D_{c,p}[A, C(A)] = [\ \int_a^b \delta^p_{c,A}(u)du\ ]^{1/p}.$$

Некоторое расстояние $D_{c,g}$ [A,C(A)], $A \in P(U)$, удовлетворяет неравенству

$$0 \le D_{c,g}\,[A,C(A)] \le D_{c,g}\,[N,C(N)],$$

где N является произвольным четким множеством в P(U). Нормализованная версия $\hat{D}_{c,g}$ от $D_{c,g}$ определяется по формуле

$$\hat{D}_{c,g}\,[A,C(A)] = \frac{D_{c,g}\,[A,C(A)]}{D_{c,g}\,[N,C(N)]}\ .$$

При этом

$$0 \le \hat{D}_{c,g}\,[A,C(A)] \le 1.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В динамической системе точность каждого сенсора может быть соотнесена со временем. Время измерения, связанное с каждым сенсором, различается, поскольку каждый сенсор имеет особую, только ему присущую характеристику измерения: один сенсор имеет длительное время измерения (много точек) и высокую точность, другой сенсор имеет среднее время измерения и среднюю точность, третий сенсор имеет короткое время измерения (мало точек) и низкую точность. Это позволяет в виртуальной системе считать моделирование обработки асинхронной сенсорной информации нечетким и кодировать информацию, достаточную для решения задач, элементами нечетких множеств, которые приближенно описывают исходные данные.

В результате в качестве состояний использованы модели нечеткого множества, а в качестве действий (в управлении) или операторов (в моделях) – нечетких преобразований над этими пространствами. Рассмотрен специальный математический аппарат, который позволяет обрабатывать и кодировать сенсорную информацию, формализованную с помощью нечетких множеств.

Приведены основные определения и понятия теории нечетких множеств, используемых для преобразования информации, а также свойства нечетких отношений и операторы нечетких преобразований.

Рассмотрены вопросы измерения нечеткости и нечеткого дополнения, которые выражаются в терминах некоторого вида метрического расстояния. При этом каждое измерение нечеткости может быть выражено некоторой функцией $f_{c,g}(A) = 1 - \hat{D}_c[A,C(A)]$, где $D_c[A,C(A)]$ обозначает нормализованное метрическое расстояние между нечетким множеством A и его дополнением C(A). Нормализованное метрическое расстояние где $\hat{D}_c[A,C(A)]$ определяется двумя способами: (1) дополнением c и (2) совокупной функцией g, которая собирает в одно целое индивидуальные различия $|\mu_A(u) - c(\mu_A(u))|$ всех элементов универсального множества U.

6. ЛИТЕРАТУРА

1. Петрин А.А. Организация виртуального очувствления для задач робототехники. // М.: Препринт №42, Ин-т прикл. Матем. им. М.В.Келдыша РАН, 2003, 22с.
2. Loo Ren C., Kay Michael G. Multisensor Integration and Fusion in Intelligent Systems. //IEEE Trans. On Systems, Man, und Cybernetics, 1989, v.19, №5, p.901-931.
3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: Пер. с англ. // М.: Мир, 1976, 167с.
4. Кофман А. //Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1982, 417с.
5. Yager R.R. On the Measure of Fuzziness and Negation. Part 1: Membership in the Unit Interval. // International Journal of General Systems,1979, v.5, p.221-229.
6. Yager R.R. On the measure of fuzziness and negation. Part II: lattices. // Information and Control,1980, v.44, №3, p.236-260.
7. Yager R.R. Robot planning with fuzzy sets. // Robotica, 1983, v.1, №1, p.41-50.
8. DeLuca A. and Termini S. On convergence of entropy measure of a fuzzy set. // Kybernetes, 1977, v.6, p.219-222.
9. Higashi M., and Klir G.J. On Measure of Fuzziness and Fuzzy Complement. // International Journal of General Systems, 1982, v.8, p.169-180.
10. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. Под ред. Д.А. Поспелова. // М.,1986, 312с.
11. А.Н.Борисов, А.В.Алексеев и др. //Обработка нечеткой информации в системах принятия решений .- М.: Радио и связь, 1989, 304с.