



**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**М.-Г. М. Зульпукаров, Г. Г.
Малинецкий, А. В. Подлазов**

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ
БИФУРКАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ С ШУМОМ**

Препринт №

Москва

Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

М.-Г. М. Зильпукаров, Г. Г. Малинецкий, А. В. Подлазов

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ В
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ШУМОМ**

Москва
2005

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются бифуркации в нелинейных системах, испытывающих воздействие слабого шума. Описаны случаи локальных бифуркаций: "седло-узел", транскритическая бифуркация, суперкритическая "вилка", субкритическая "вилка".

На основании известного явления роста и насыщения уровня шума по мере приближения к точке бифуркации поставлена обратная задача – по наблюдаемому изменению шума (характер роста, уровень насыщения, плотность распределения) определить положение точки предстоящей бифуркации и её тип. Предложен алгоритм решения обратной задачи.

Полученные результаты открывают новые возможности построения систем диагностики, обеспечивающих безопасность функционирования сложных систем.

ABSTRACT

Bifurcations in nonlinear systems with weak noise are considered. The local bifurcations are discussed: the saddle-node bifurcation, the transcritical bifurcation, the supercritical and subcritical pitchfork bifurcations.

Basing on the known prebifurcational noise rise and saturation phenomena, the inverse problem is introduced: the problem of the bifurcation detection and determining its type by the observed noise change (noise deviation growth fashion, saturation level, probability density). The inverse problem solution algorithm is suggested.

The results obtained open the new ways for designing complex systems diagnostic solutions.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №04-01-00510, 05-01-00852), гранта Президента РФ НШ-374.2003.1.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время построение и анализ математических моделей нелинейных явлений находят всё более широкое применение в исследовании поведения сложных систем, в том числе и в областях, традиционно не относящихся к точным наукам. К примеру, методы нелинейной динамики всё шире и успешнее используются в медицине, социологии, экономике, истории и т.д. [1].

Одним из важнейших явлений, наблюдаемых в нелинейных системах, является бифуркация. *Бифуркация* определяется как изменение числа и устойчивости решений определённого типа (например, стационарных, описывающих положения равновесия) [2]. Если математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, то говорят о перестройке структуры потока фазовых траекторий [3].

Различают локальные и нелокальные бифуркации. *Локальными* называются бифуркации предельных множеств и отдельных траекторий на предельных множествах, *нелокальные* бифуркации связаны с поведением многообразий предельных седловых множеств, в частности, с образованием сепаратрисных петель и т.д. Важной характеристикой бифуркации является её *коразмерность* – число налагаемых на параметры системы условий, при соблюдении которых происходит данная бифуркация [4].

Представление о бифуркации дают бифуркационные и фазо-параметрические диаграммы. *Бифуркационная диаграмма* представляет собой изображение точек бифуркации в пространстве параметров системы. *Фазо-параметрическая диаграмма* суть график зависимости какой-либо количественной характеристики решения от параметров (см. рис. 1). Наиболее просто и наглядно можно представить зависимость положений равновесия (особых точек) от одного параметра. Если фазовое пространство одномерно, то по оси абсцисс фазо-параметрической диаграммы откладываются значения параметра, а по оси ординат – значения переменной состояния, соответствующие положениям равновесия. Традиционно, в случае когда они образуют линию, устойчивые положения обозначаются сплошной линией (*устойчивая ветвь*), а неустойчивые – пунктирной (*неустойчивая ветвь*).

Определим понятие *продвижения системы*. Допустим, при некотором фиксированном значении параметра система находится в положении равновесия, обозначенном точкой на какой-либо ветви фазо-параметрической диаграммы. Пусть происходит последовательное изменение параметра в определённом направлении, и положение равновесия соответственно сдвигается. Если ветвь является устойчивой, то система переходит в новое, близкое к первоначальному, положение равновесия. В этом случае будем говорить об *устойчивом продвижении*. В противном случае, для удержания системы вблизи положения равновесия необходимы внешние воздействия. Назовём это *неустойчивым продвижением*.

На рис. 1 приведён типичный пример фазо-параметрической диаграммы. Можно видеть, что слева от точки бифуркации λ_0 существует только одна (устойчивая) ветвь. В точке бифуркации ветвь «разделяется» на две различные устойчивые ветви и одну неустойчивую. Если сопоставлять сценарии продвижения ветвям фазо-параметрической диаграммы, то можно сказать, что в точке бифуркации появляется альтернатива, возможность выбора пути развития.

Замечательным свойством нелинейных систем является то, что в простых и в сложных системах возникают бифуркации одного и того же типа. Это даёт возможность свести задачу исследования продвижения исходной системы к изучению более простой (модельной) системы.

Отметим также следующее важное свойство нелинейных систем. Известно, что во время прохождения точки бифуркации снижается устойчивость системы по отношению к вариации начальных данных [1,5]. Это делает систему чувствительной к малым воздействиям. Подчеркнём, что малые воздействия могут носить случайный характер. Из сказанного следует, что выбор конкретного пути развития (продвижения) в точке бифуркации может осуществиться под влиянием малого управляющего воздействия, либо быть вообще случайным.

Отсюда вытекает наличие двух практических задач.

Во-первых, это *задача ретроспективного анализа поведения системы* с целью определения критических моментов (точек бифуркации) в прошлом, а также исследование альтернативных вариантов продвижения. Результаты решения этой задачи, помимо чисто теоретического интереса, могут представлять собой опыт, который стоит учитывать в будущем.

Во-вторых, *задача определения точек бифуркации в будущем* и сосредоточения управляющих усилий в определённом направлении [6]. Исходными данными для этой задачи, как правило, являются наблюдаемое состояние и поведение системы. Примером решения такой задачи является создание устройств, отключающих авиационные и ракетные двигатели при возникновении в них аномальных шумов, чтобы избежать взрыва и катастрофы.

При рассмотрении поведения сложной системы часто принимается во внимание, что на неё действует случайный шум – малое нерегулярное внешнее воздействие неопределённой природы. Также говорят, что в системе присутствуют слабые флуктуации. Например, если математическая модель описывает систему на каком-то конкретном уровне организации, то для учёта влияния других уровней в модель вводятся стохастические составляющие.

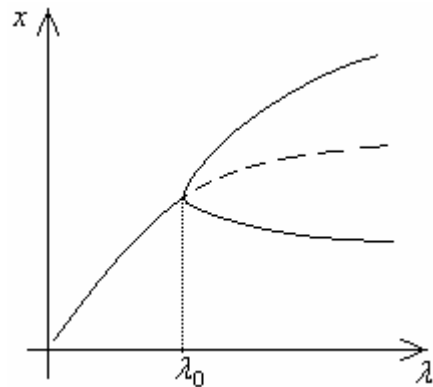


Рис. 1. Пример фазо-параметрической диаграммы.

x – переменная состояния, λ – параметр, λ_0 – точка бифуркации.

Слабые флуктуации не оказывают заметного воздействия на поведение диссипативной системы, отличающейся высокой устойчивостью. Если же система находится вблизи точки бифуркации, то следствием её чувствительности к малым изменениям начальных данных является усиление флуктуаций. Отметим, что усиление флуктуаций может играть конструктивную роль – приводить к образованию упорядоченных структур на макроуровне – так называемых диссипативных структур. Это важное явление известно как *упорядочение через флуктуации* [7,8].

Ранее было выяснено, что приближение системы к точке бифуркации сопровождается появлением характерных особенностей шума – *шумовых предвестников* нелинейных неустойчивостей. Например, в [9] описаны предбифуркационные изменения спектра шума для систем дифференциальных уравнений, имеющих периодические решения. Описание предбифуркационного усиления шума в нелинейных отображениях дано в работах [5,10,11], а в [12] приведён пример экспериментального исследования шумовых предвестников. Нас интересует обратная задача – как по нарастанию шума в системе определить, проходит ли она точку бифуркации.

Суммируя сказанное выше, кратко сформулируем цель данной работы как изучение поведения нелинейных систем с шумом вблизи точки бифуркации и поиск возможностей обнаружения точек бифуркации на основе анализа поведения системы.

СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

На сегодняшний день особенно хорошо изучены предбифуркационные шумы в системах с дискретным временем (системах, моделируемых нелинейными отображениями). В работах [5,10,11,13,14] отмечен ряд следующих интересных и важных явлений.

Явление роста и насыщения уровня шума в окрестности точки бифуркации исследовано в работах [5,10]. В первой из них оно описано на примере отображения

$$x_{n+1} = \mu - x_n^2 + f_n, \quad (1)$$

где μ – параметр, а f_n – стохастическая составляющая модели, описывающая внешний по отношению к системе шум. Шум в данном случае представляет собой случайную последовательность $\{f_n\}$, при этом все f_n – одинаково распределённые случайные величины, независимые в совокупности. Далее будем называть случайную величину f_n *возмущением*, а x_n – *наблюдаемым сигналом*. Математическое ожидание $\langle f_n \rangle = 0$ (также говорят, что случайная последовательность является *центрированной*). Среднеквадратичное отклонение возмущения обозначается $\sigma_f = \sqrt{\langle f_n^2 \rangle}$.

Отображение (1) демонстрирует первую бифуркацию удвоения периода по достижении параметром μ критического значения $\mu_{c1} = 3/4$, при этом неподвижная точка $\bar{x} = \bar{x}(\mu)$ теряет устойчивость. Будем рассматривать центрированную случайную величину $\xi_n = x_n - \bar{x}$. Для ξ_n , используя линейное приближение $\xi_{n+1} = -\gamma\xi_n + f_n$ (где $\gamma \equiv 2\bar{x}(\mu)$), найдена зависимость её среднеквадратичного значения от расстояния до точки бифуркации $\alpha = \mu_{c1} - \mu$:

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{\sigma_f^2}{2\alpha}.$$

Линейное приближение некорректно вблизи точки бифуркации: когда соотношение $\lambda \geq \lambda_{\min} \sim \sigma_f / 2$ перестаёт выполняться, дисперсия наблюдаемого сигнала перестаёт расти и выходит на уровень насыщения. Для коэффициента усиления возмущения $K \equiv \langle \xi^2 \rangle / \sigma_f^2$ максимальное значение оценивается как $K_{\max} \sim 1 / \sigma_f$.

В работах [10,11] эти зависимости обобщены для случая произвольного нелинейного отображения

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu) + f_n \quad (2)$$

следующим образом. Записывается разложение наблюдаемого сигнала в ряд Тейлора: $\xi_{n+1} = \gamma\xi_n + \varepsilon\xi_n^2 + \dots + f_n$, где

$$\gamma \stackrel{def}{=} \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x}, \quad \varepsilon \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\bar{x})}{\partial x^2}$$

– обозначения. Бифуркационное условие в данном случае определяется равенством $|\gamma| = 1$ (например, $\gamma = -1$ является условием бифуркации удвоения периода). Исходя из этого, вводится параметр

$$\alpha \equiv 1 - |\gamma|,$$

имеющий смысл расстояния до точки бифуркации. Сначала рассматривается линейное приближение: в ряде Тейлора для наблюдаемого сигнала пренебрегается членами со степенями ξ_n выше 1. Полученная формула возводится в квадрат и усредняется. С учётом взаимной независимости ξ_n и f_n , получается соотношение

$$\left(\sigma_\xi^2 \right)_{lin} \stackrel{def}{=} \langle \xi_{n lin}^2 \rangle = \frac{\sigma_f^2}{1 - \gamma^2} \cong \frac{\sigma_f^2}{2\alpha}. \quad (3)$$

Линейное приближение корректно, пока выполняется условие

$$\alpha > \alpha_{\min} = \frac{\sqrt{3}\varepsilon\sigma_f}{2}. \quad (4)$$

По мере приближения к точке бифуркации, дисперсия наблюдаемого сигнала ξ перестаёт расти и выходит на уровень насыщения

$$(\sigma_\xi^2)_{nonlin} \approx \frac{\sigma_f}{\sqrt{3\varepsilon}}.$$

Рост и насыщение уровня шума вблизи точки бифуркации удвоения периода можно видеть на рис. 2 (иллюстрация взята из [10]).

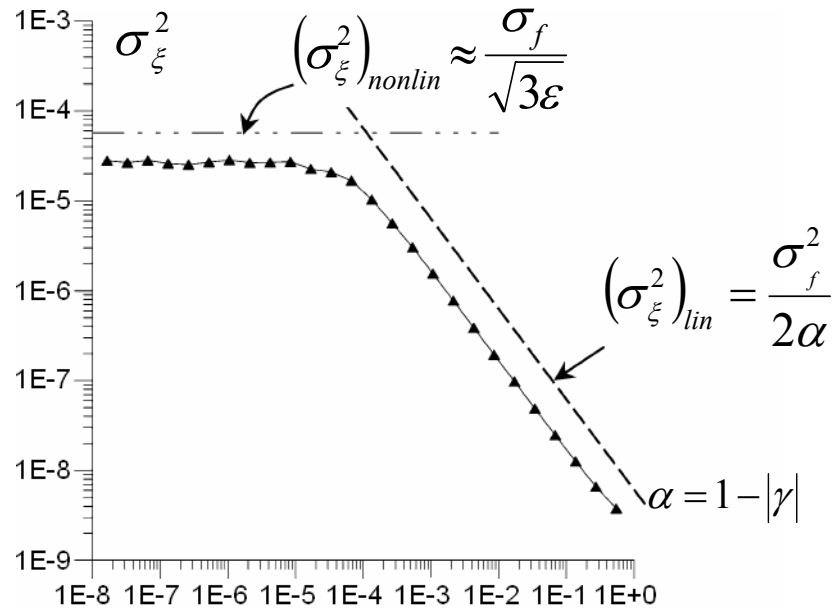


Рис. 2. Дисперсия наблюдаемого сигнала в полукрестности точки бифуркации.

Теоретическая (пунктирные линии) и экспериментальная (сплошная линия) зависимость дисперсии наблюдаемого сигнала от расстояния до точки бифуркации удвоения периода для квадратичного отображения $F(x)=\mu-x^2$, $\sigma_f^2=10^{-8}$, $\varepsilon=1$ [10].

Важное явление роста и выхода на уровень насыщения интервала корреляции последовательности ξ_n описано в [5] для случая отображения (1), и в [13] – в общем виде для (2) (интервалом корреляции случайной последовательности ξ_n называется минимальное число $k=const$, такое, что для любого n случайные величины ξ_n и ξ_{n+k} можно считать некоррелированными). Показано, что в области допустимости линейного приближения интервал корреляции k растёт как $1/\alpha$, а вблизи точки бифуркации выходит на уровень насыщения k_{\max} . С учётом (4),

$$k_{\max} \approx \frac{1}{\alpha_{\min}} \approx \frac{2}{\sqrt{3}\sigma_f|\varepsilon|}.$$

В нелинейных системах с непрерывным временем наблюдаются аналогичные явления. Например, в работах [10,11] рассмотрен частный случай такой системы – нелинейный осциллятор, заданный уравнением

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \frac{\partial U}{\partial \xi} = f(t),$$

где β – коэффициент затухания, U – потенциал

$$U(\xi) = \frac{1}{2}B\xi^2 + \frac{1}{4}A\xi^4,$$

а шум $f(t)$ представляет собой δ -подобный случайный процесс. Интервал корреляции $f(t)$ обозначается τ_f (интервалом корреляции случайного процесса $f(t)$ называется минимальный промежуток времени $\tau = const$, такой, что для любого t случайные величины $f(t)$ и $f(t+\tau)$ можно считать некоррелированными). Считается, что интервал τ_f мал по сравнению с периодом колебаний осциллятора. В данной системе происходит суперкритическая бифуркация типа «вилка» (спонтанное нарушение симметрии) при достижении параметром B критического значения $B_c=0$.

Линейное приближение в этом случае даст зависимость

$$\left(\sigma_{\xi}^2\right)_{lin} = \frac{\sigma_f^2 \tau_f}{2\beta B}$$

в области

$$B > B_{min} = \sigma_f \sqrt{\frac{3A\tau_f}{\beta}},$$

а вблизи точки бифуркации дисперсия наблюдаемого сигнала выходит на уровень насыщения

$$\left(\sigma_{\xi}^2\right)_{nonlin} = \sigma_f \sqrt{\frac{\tau_f}{12A\beta}}.$$

После прохождения точки бифуркации дисперсия наблюдаемого сигнала некоторое время держится вблизи уровня насыщения, а затем также убывает по линейному закону [5].

Также стоит упомянуть описанное в работе [12] экспериментальное исследование шумов в модифицированном осцилляторе Ван дер Поля, содержащем управляемые извне нелинейные элементы в контуре обратной связи. Поведение системы определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma [f_\beta(y-x) - f_\alpha(x)] \\ \dot{y} = -z - f_\beta(y-x) \\ \dot{z} = y - \rho z + \varepsilon(t) \end{cases},$$

где x, y, z – переменные состояния, γ и ρ – параметры, а $\varepsilon(t)$ – шум (нормально распределённый случайный процесс). Функции f_α и f_β описывают нелинейные элементы электрической схемы:

$$\begin{cases} f_\alpha(v) = -\alpha_1 v + \alpha_3 v^3 \\ f_\beta(v) = -\beta_1 v + \beta_3 v^3 \end{cases},$$

где $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3$ – параметры.

В этой системе, по мере изменения параметра α_1 , наблюдаются суперкритические бифуркации типа «вилка» и Андронова-Хопфа. В результате натуральных и численных экспериментов получена зависимость функции плотности распределения наблюдаемого сигнала от расстояния управляющего параметра α_1 до точки бифуркации, что показано на рис. 3 (иллюстрация заимствована из [12]; убраны детали, не имеющие отношения к рассматриваемым здесь вопросам). Экспериментальные данные ясно демонстрируют нарастание дисперсии наблюдаемого сигнала в окрестности точки бифуркации. Это явление наблюдается для обоих типов бифуркации.

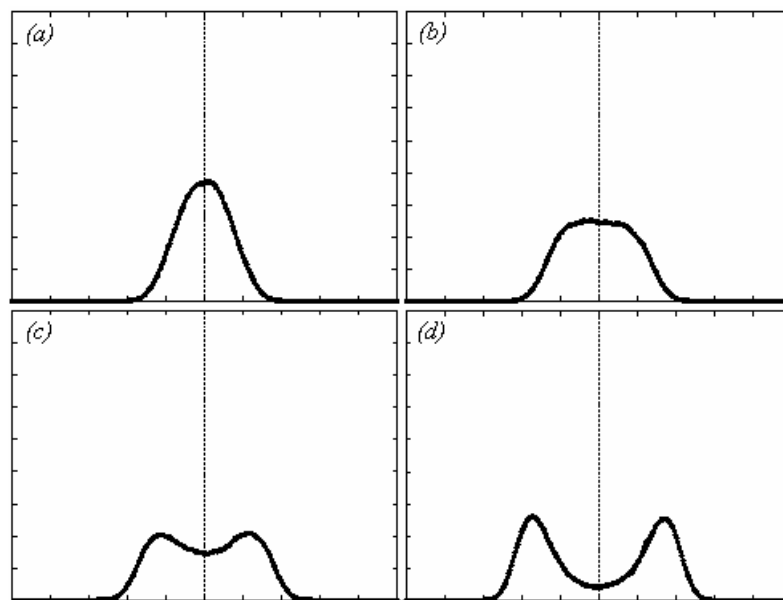


Рис. 3. Экспериментальные графики плотности распределения наблюдаемого сигнала.

Наблюдаемый сигнал в окрестности точки суперкритической бифуркации типа «вилка» [12]; бифуркационное значение параметра $\alpha_1 = \alpha_{1cp}$. (a) $\alpha_1 < \alpha_{1cp}$, система имеет единственное устойчивое положение равновесия; (b) α_{1cp} , точка бифуркации; (c) $\alpha_1 > \alpha_{1cp}$, система имеет два близких положения устойчивого равновесия; (d) положения устойчивого равновесия расходятся по мере дальнейшего увеличения α_1 .

Итак, для нелинейных систем с дискретным временем (и ряда частных случаев систем с непрерывным временем) показано, что, по мере приближения к точке бифуркации, дисперсия наблюдаемого сигнала нарастает строго определённым образом, выходя вблизи точки бифуркации на уровень насыщения. Несколько усложняет наблюдение данного явления то обстоятельство, что интервал корреляции наблюдаемого сигнала, определяющий время, необходимое для сбора статистики, также возрастает в окрестности точки бифуркации.

Естественным продолжением описанных выше исследований было бы решение следующих задач: во-первых, получение аналогичных результатов для как можно более широкого класса нелинейных систем с непрерывным временем, во-вторых, изучение закона распределения наблюдаемого сигнала в зависимости от близости системы к точке бифуркации, и в-третьих, обратная задача – определение положения точки бифуркации и выяснения её типа по изменению характеристик наблюдаемого сигнала.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве объекта исследования выберем некоторую диссипативную динамическую систему, поведение которой описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением с параметром:

$$\dot{x} = v(x, \lambda), \quad (5)$$

где $x=x(t)$ – переменная состояния, t имеет смысл времени, λ – параметр, v – некоторая нелинейная функция (*фазовая скорость*). Также будем пользоваться функцией

$$U(x, \lambda) = -\int_0^x v(z, \lambda) dz, \quad (6)$$

называемой *потенциалом*.

Для данного типа математических моделей имеется ряд строгих результатов, представляющих собой основу для изучения качественных трансформаций широкого класса динамических систем. В сочетании с относительной простотой, это делает динамическую систему вида (5) особенно удобной для исследования.

Решения уравнения (5), в зависимости от v , λ и начального условия $x=x_0$, могут вести себя следующим образом [2]: либо стремиться к постоянному значению – аттрактору (фазовое пространство в данном случае одномерно, и единственный допустимый вид аттрактора – устойчивая особая точка: $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$, $v(x^*)=0$), либо неограниченно возрастать (убывать) за бесконечное время, либо неограниченно возрастать (убывать) за конечное время.

Соответственно выбору однопараметрической одномерной системы для исследования, мы ограничиваемся рассмотрением наиболее простых

бифуркаций – локальных бифуркаций положений равновесия. Рассматриваемые нами бифуркации будут иметь коразмерность 1. Чем ниже коразмерность бифуркации, тем более типичной для разнообразных динамических систем она является. Бифуркационные задачи для систем высокой размерности часто сводятся к рассмотрению систем размерности 1 или 2 [15]. Таким образом, сделанные для системы (5) выводы будут достаточно общими.

Важным инструментом анализа бифуркаций является теория нормальных форм. Её идея заключается в том, что в окрестности точки бифуркации анализ поведения динамической системы можно свести к исследованию некоторой более простой системы. Такая модельная система будет локально определять динамику исходной системы. Для построения модельной системы (записи *нормальной формы*) ищется возможность исключения членов старших порядков в разложении заменить $v(x, \lambda)$ в ряд Тейлора [1,2].

Перечислим бифуркации коразмерности 1 наиболее распространённых нормальных форм, которые будем рассматривать далее.

Бифуркация типа «седло-узел» соответствует *регулярной экстремальной точке* (x_0, λ_0) кривой $v(x, \lambda) = 0$. Она возникает при соблюдении условий $v'_x(x_0, \lambda_0) = 0$, $v'_\lambda(x_0, \lambda_0) \neq 0$, $v''_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0$. В окрестности точки бифуркации система приводится к виду

$$\dot{y} = \mu - y^2, \quad (7)$$

где y – переменная состояния, а μ – параметр ($y=0$ соответствует $x=x_0$, а $\mu=0$ соответствует $\lambda=\lambda_0$). Фазо-параметрическая диаграмма выглядит, как показано на рис. 4 (а).

Бифуркация типа «обмен устойчивостью» (*транскритическая бифуркация*) соответствует *двойной точке* и наблюдается при соблюдении условий $v'_x(x_0, \lambda_0) = 0$, $v'_\lambda(x_0, \lambda_0) = 0$, $v''_{xx}(x_0, \lambda_0) \neq 0$, $D(x_0, \lambda_0) > 0$, где

$$D \stackrel{\text{def}}{=} (v''_{x\lambda})^2 - v''_{xx} v''_{\lambda\lambda}.$$

Система приводится к виду

$$\dot{y} = \mu^2 - y^2 \quad (8)$$

или к виду

$$\dot{y} = \mu y - y^2,$$

а фазо-параметрическая диаграмма показана на рис. 4 (б).

Бифуркация типа «вилка» соответствует *особой экстремальной точке* и требует соблюдения условий $v'_x(x_0, \lambda_0) = 0$, $v'_\lambda(x_0, \lambda_0) = 0$, $v''_{xx}(x_0, \lambda_0) = 0$, $D(x_0, \lambda_0) > 0$. Если система приводится к виду

$$\dot{y} = \mu y - y^3, \quad (9)$$

то имеет место *суперкритическая* (мягкая) бифуркация, показанная на рис. 4 (в). Если же система приводится к виду

$$\dot{y} = -\mu y + y^3, \quad (10)$$

то наблюдается *субкритическая* (жёсткая) бифуркация (рис. 4 (г)).

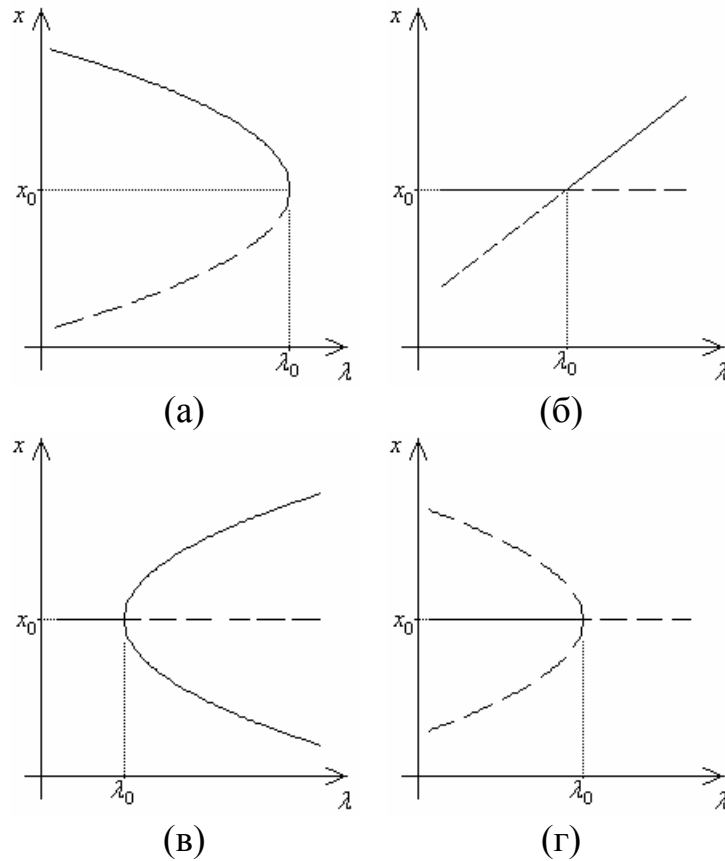


Рис. 4. Типичные бифуркации.

λ_0 – точка бифуркации. (а) – бифуркация типа «седло-узел», сближение и исчезновение пары особых точек. (б) – транскритическая бифуркация, сближение и расхождение положений равновесия. (в) – суперкритическая «вилка», из одного устойчивого положения равновесия рождается одно неустойчивое и пара расходящихся устойчивых (возможность выбора из двух вариантов устойчивого продвижения). (г) – субкритическая «вилка», сближение пары неустойчивых положений равновесия с одним устойчивым с образованием единственного неустойчивого положения равновесия. Сплошной линией показаны устойчивые особые точки, пунктирной – неустойчивые.

Обсудим, каким образом можно интерпретировать бифуркации различных типов. Итак, состоянию системы сопоставляется точка в фазовом пространстве (изображающая точка). Если точка принадлежит какому-либо инвариантному множеству, считаем, что система находится в *установившемся состоянии*. Обратно, движение изображающей точки (при фиксированных значениях параметров) вне имеющихся инвариантных множеств соответствует *переходным процессам* в системе. Если результатом переходного процесса не является выход изображающей точки на аттрактор, будем полагать, что происходит *разрушение системы*. Продвижение системы выглядит на фазо-

параметрической диаграмме как движение изображающей точки вдоль некоторой ветви, устойчивой либо неустойчивой.

Пусть в динамической системе присутствует малый шум. Его воздействие может привести к тому, что изображающая точка окажется вне областей притяжения имеющихся инвариантных множеств (для краткости назовём это *зоной неустойчивости*) что, в свою очередь, может привести к разрушению системы. Вероятность этого возрастает по мере того, как снижается устойчивость системы в преддверии бифуркации.

Таким образом, можно выделить два варианта разрушения системы. Во-первых, система может разрушиться, если после бифуркации устойчивые инвариантные множества отсутствуют как таковые. Назовём это *неизбежным разрушением*. Во-вторых, система может разрушиться, под действием шума с некоторой вероятностью попав в зону неустойчивости. Назовём это *шумовым разрушением*. Такое разрушение менее опасно, так как попадания в зону неустойчивости можно избежать, например, парируя воздействие шума сравнимым по величине управляющим воздействием. Рассмотрим перечисленные выше типы бифуркаций с точки зрения управления системой.

Бифуркация типа «седло-узел» (рис. 4 (а)) представляется наиболее опасной. Устойчиво развивающаяся система после бифуркации подвергается неизбежному разрушению. При этом, поскольку отсутствуют даже положения неустойчивого равновесия, разрушение происходит быстро. Таким образом, не остаётся шансов ни на устойчивое продвижение, ни на продление существования системы хотя бы на короткое время. Единственная возможность избежать разрушения – обращение направления изменения параметра. Однако, во-первых, это не всегда возможно, а во-вторых, если точка бифуркации пройдена, – всё равно бесполезно (система уже разрушена). Отметим попутно, что в условиях шумового воздействия разрушение системы возможно ещё до прохождения точки бифуркации (случай шумового разрушения).

Транскритическую бифуркацию (рис. 4 (б)) можно считать относительно безопасной, так как существует лишь опасность шумового разрушения в окрестности точки бифуркации. Альтернативны устойчивого продвижения в данном случае отсутствуют, и бифуркацию можно рассматривать как «период нестабильности». Таким образом, желательно сократить время пребывания в окрестности точки бифуркации и/или приложить управляющее воздействие, направленное на парирование разрушающего действия шума.

В случае суперкритической бифуркации типа «вилка» (рис. 4 (в)) опасность разрушения отсутствует, зато имеются разные варианты послебифуркационного продвижения. Для выбора варианта могут применяться управляющие воздействия, сравнимые по интенсивности с шумом.

Если имеет место субкритическая бифуркация типа «вилка» (рис. 4 (г)), то, как и в случае бифуркации типа «седло-узел», мы приходим к разрушению системы. Этот тип бифуркации менее опасен, так как вместо неизбежного разрушения мы имеем шумовое разрушение. После прохождения точки бифуркации система теряет возможность устойчивого продвижения, но

остаются шансы удержаться вблизи неустойчивого положения равновесия за счёт управляющих воздействий. В конце концов, это не удержит систему от разрушения (по мере дальнейшего изменения параметра, положение равновесия становится всё более неустойчивым), но, по крайней мере, продлит её существование. За счёт этого, обращение направления изменения параметра (если оно возможно), позволит вернуть систему в устойчивое состояние «из-за точки бифуркации». Если обращение невозможно, следует попытаться остановить или хотя бы замедлить изменение параметра.

Далее рассмотрим, как можно в математической модели нелинейной системы учесть влияние шума. В случае непрерывного времени в качестве математической модели, собственно, шума используют какой-либо случайный процесс, обычно винеровский (случайный процесс $w(t)$, такой, что приращения $w(t)$ на любом наборе неперекрывающихся временных интервалов независимы в совокупности, приращение $w(t_2)-w(t_1)$ на произвольном временном интервале (t_1, t_2) представляет собой нормально распределённую случайную величину с математическим ожиданием 0 и дисперсией (t_2-t_1) , и реализации $w(t)$ непрерывны [16]). Обозначим его $\xi(t)$ и назовём *вносимым шумом*. Математической моделью системы будет стохастическое дифференциальное уравнение. Существует классификация по способу ввода $\xi(t)$ в уравнение. Наиболее часто рассматривается *аддитивный шум*:

$$\dot{x} = v(x, \lambda) + \varepsilon \xi(t).$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ – константа, обозначающая тот факт, что шум является малым. Также рассматривается *мультипликативный шум*

$$\dot{x} = v(x, \lambda) \times \xi(t),$$

внутренние шумы вида

$$\dot{x} = v(F(x, \xi(t)), \lambda),$$

параметрические шумы вида

$$\dot{x} = v(x, F(\lambda, \xi(t))),$$

и т.д.

Далее мы будем рассматривать δ -шум, действующий по следующей схеме. Пусть в определённые моменты времени t_i переменная состояния x суммируется с реализацией ξ некоторой случайной величины Ξ . Назовём это *возмущением*. Для простоты будем иметь дело только с *периодическим* δ -шумом (то есть, возмущения происходят периодически, с интервалом T_w). Полученная в результате возмущения сумма используется в качестве начального условия в задаче Коши для дифференциального уравнения (5). Система интегрируется в течение времени T_w , затем происходит очередное возмущение, и т.д. В расширенном фазовом пространстве это выглядит как случайное перемещение между интегральными кривыми, как показано на рис. 5. В результате получится некоторый случайный процесс $x(t)$ марковского типа

(то есть, для любых τ_1 и $\tau_2 > \tau_1$ распределение $x(\tau_2)$ однозначно определяется значением $x(\tau_1)$ и не зависит от значений $x(\tau)$ в моменты времени $\tau < \tau_1$ [17]). Назовём его *наблюдаемым сигналом*. δ -шум представляется достаточно простым и удобным для анализа, и в то же время, он не столь хорошо исследован, как, например аддитивный шум.

Функцию плотности распределения случайной величины Ξ обозначим $f_u(\xi)$ и наложим на неё требование чётности (снос отсутствует). Стандартное (среднеквадратичное) отклонение Ξ будем обозначать σ_u .

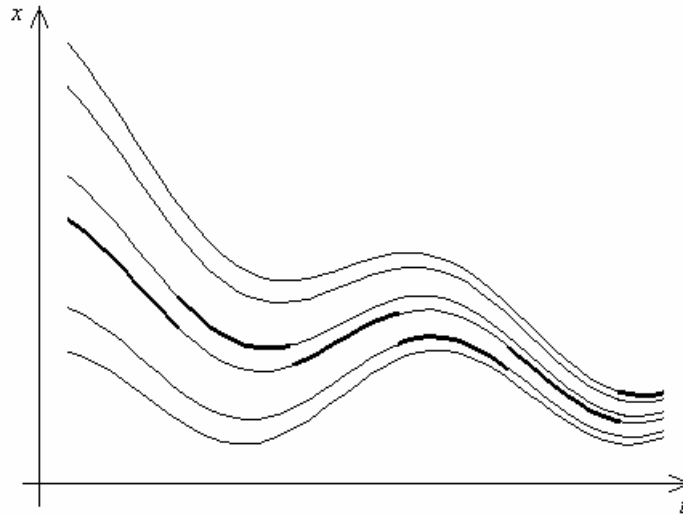


Рис. 5. Действие δ -шума.

В расширенном фазовом пространстве действие шума выглядит как случайные перемещения между интегральными кривыми (тонкие линии). Зависимость состояния системы от времени показана толстой линией с разрывами в моменты возмущений.

В дальнейших расчётах будем использовать равномерно распределённый периодический δ -шум:

$$f_u(\xi) = \begin{cases} 1/A, & |\xi| \leq A/2 \\ 0, & |\xi| > A/2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\sigma_u = \frac{A}{2\sqrt{3}}$$

$$t_{i+1} - t_i = T_u, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Будем исследовать воздействие шума на развивающуюся систему. Пусть параметр λ изменяется в пределах $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Положим, изменение параметра во времени происходит дискретно, с постоянным шагом по λ и постоянным интервалом по времени. Шаг по λ обозначим $\Delta\lambda$ и наложим на него условие малости: $\Delta\lambda \ll \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$. Временной интервал между изменениями λ обозначим T_λ . Поскольку значительно проще изучать наблюдаемый сигнал как установившийся процесс, постольку нам понадобится, чтобы его интервал

корреляции был мал по сравнению с временем изменения параметра. Для этого, как минимум, необходимо выполнение условия

$$T_{uu} \ll T_{\lambda}. \quad (12)$$

Для простоты, в теоретических расчётах будем полагать, что параметр изменяется квазистатически: $T_{\lambda} \rightarrow \infty$. Также нам понадобится учитывать ещё одно характерное время – время выхода на аттрактор T_a . Мы не будем его фиксировать, так как при изменении λ время T_a меняется в широких пределах, и существенно будет рассмотреть его во всём диапазоне.

Окончательно, поставим задачу следующим образом.

Во-первых, для случая одной из наиболее типичных бифуркаций требуется получить закон распределения наблюдаемого сигнала и выяснить характер его изменения по мере приближения параметра к точке бифуркации.

Во-вторых, исходя из этого, требуется исследовать возможность решения обратной задачи: на основании изменения характеристик наблюдаемого сигнала в процессе продвижения системы оценить расстояние до точки бифуркации и сделать предположения относительно её типа.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

С целью наблюдения явления предбифуркационного нарастания дисперсии наблюдаемого сигнала для описанных ранее основных типов бифуркаций был поставлен ряд экспериментов. В этих экспериментах выполнялось численное моделирование поведения динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями непосредственно в соответствующих нормальных формах, в присутствии δ -шума. Для каждой системы была выполнена серия экспериментов и получена эмпирическая зависимость дисперсии наблюдаемого сигнала от бифуркационного параметра и параметров вносимого шума. Явление насыщения дисперсии наблюдаемого сигнала в окрестности точки бифуркации наблюдалось в отдельных (несерийных) экспериментах из-за роста вычислительных затрат, обусловленного упоминавшимся выше предбифуркационным увеличением интервала корреляции наблюдаемого сигнала. Для сравнения также приводятся результаты моделирования линейной системы.

Эксперименты строились следующим образом. Бифуркационный параметр μ изменялся в пределах от -10 до -1 с шагом 0,02 (точка бифуркации во всех экспериментах – $\mu=0$). Для каждого значения μ выполнялось моделирование воздействия шума на систему. Шаг модели представлял собой интегрирование в течение времени $\Delta t=0,001$. В начальный момент модельного времени система помещалась в устойчивое положение равновесия u^* , вычисляемое для данного μ . В начале каждого шага, в зависимости от параметров вносимого шума, установленных для данного эксперимента, производилось либо не производилось возмущение. В конце каждого шага положение системы u регистрировалось как реализация случайной величины. По окончании

моделирования для зарегистрированных значений y вычислялось стандартное отклонение σ_y , интерпретируемое как характеристика *интенсивности* шума. Зависимость σ_y от μ , полученная в эксперименте, откладывалась на графике. Для каждого значения μ выполнялось 50000 шагов; число шагов подобрано опытным путём таким образом, чтобы быть достаточным для сбора статистики во всех экспериментах для всех значений μ (при уменьшении числа шагов до 1000 получаемые данные начинают заметно меняться от повторения к повторению).

Характеристики вносимого шума в пределах серии экспериментов варьировались по следующей схеме. Как было указано выше, параметрами равномерно распределённого δ -шума являются амплитуда возмущения A и период возмущения T_w . Величина A принимала значения 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} и 10^{-6} , а T_w – 10^{-3} , 10^{-2} и 10^{-1} . Таким образом, каждая серия включала 15 экспериментов. В процессе моделирования для $T_w=10^{-3}$ возмущение производилось на каждом шаге, для $T_w=10^{-2}$ – на каждом десятом шаге, а для $T_w=10^{-1}$ – на каждом сотом шаге.

В качестве примера, на рис. 6 показана зависимость $\sigma_y(\mu)$, полученная в результате отдельного несерийного эксперимента, выполненного аналогичным образом. Объектом эксперимента является нелинейная система, заданная уравнением (9). В отличие от серийных экспериментов, здесь параметр проходит через область насыщения и точку бифуркации. Можно видеть предбифуркационное нарастание шума, насыщение в окрестности точки бифуркации, и последующее уменьшение.

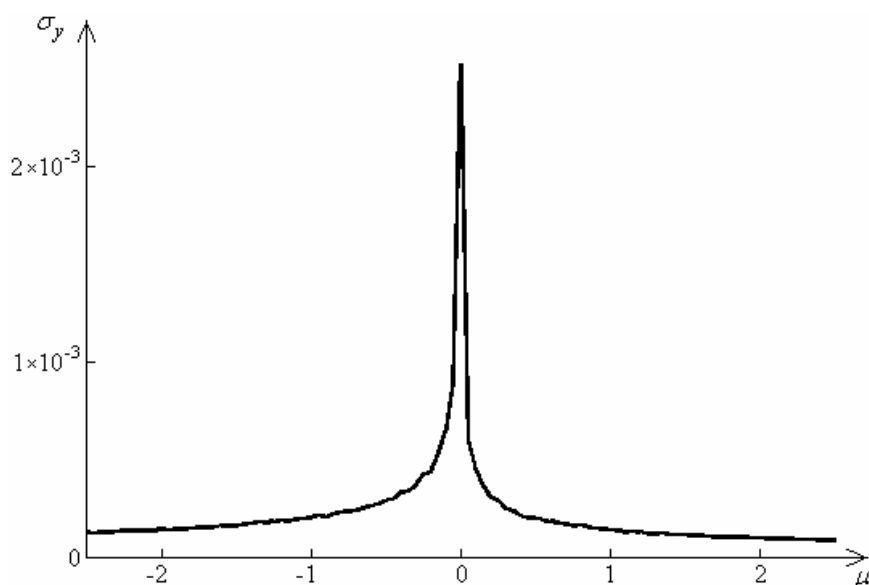


Рис. 6. Вычислительный эксперимент: шум в окрестности точки бифуркации.

Экспериментальная зависимость стандартного отклонения наблюдаемого сигнала от бифуркационного параметра. Система задана уравнением (9) (при $\mu=0$ суперкритическая бифуркация типа «вилка»). Параметры шума: $A=10^{-4}$, $T_w=10^{-2}$. Для каждой точки графика расчёт статистики по 100 тыс. шагам.

Если строить графики $\sigma_y(\mu)$ в двойном логарифмическом масштабе, видно, что во всех серийных экспериментах с нелинейными системами экспериментальные точки укладываются на некоторую прямую, то есть, зависимость (вне области насыщения), как и в случае дискретного времени, является степенной. Чтобы найти коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой, использовался итерационный взвешенный метод наименьших квадратов с вычислением весов при помощи биквадратической функции. По каждой серии был проведён анализ изменения коэффициентов в зависимости от условий эксперимента. На основании сделанных выводов были получены эмпирические зависимости, описывающие нарастание дисперсии наблюдаемого сигнала, для соответствующих систем.

На рис. 7 (а), (б) и (в) показаны результаты некоторых экспериментов из серий для систем, заданных уравнениями (9), (8) и (7), соответственно. На всех графиках в двойном логарифмическом масштабе по оси абсцисс отложены значения бифуркационного параметра μ , а по оси ординат – стандартное отклонение наблюдаемого сигнала σ_y .

Уравнение нарастания дисперсии наблюдаемого сигнала получается следующим образом. Угловой коэффициент аппроксимирующей прямой определяет степень μ в уравнении для конкретного графика. Видно, что его значение неизменно в пределах серии. Сравнивая свободные члены в уравнениях аппроксимирующих прямых для разных графиков серии, получаем множитель, зависящий от характеристик вносимого шума.

В итоге, для транскритической бифуркации и суперкритической «вилки» (уравнения (8) и (9), соответственно) получается зависимость вида

$$\sigma_y \sim \frac{A}{\sqrt{T_{ш}}} \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}, \quad (13)$$

а для бифуркации «седло-узел» (уравнение (7)) –

$$\sigma_y \sim \frac{A}{\sqrt{T_{ш}}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\mu|}}. \quad (14)$$

Подчеркнём следующее: уже можно видеть, что тип бифуркации в отдельных случаях можно определить на достаточно большом расстоянии от точки бифуркации (вне области насыщения). Особенно удобно то, что интервал корреляции наблюдаемого сигнала в этом случае сравнительно мал, и данные для статистики можно набрать достаточно быстро.

На рис. 7 (г) показаны результаты серии экспериментов над выбранной для сравнения простейшей линейной системой, заданной уравнением $\dot{y} = \mu - y$. Можно видеть, что зависимость от бифуркационного параметра отсутствует. Уравнение для стандартного отклонения наблюдаемого сигнала имеет вид

$$\sigma_y \sim \frac{A}{\sqrt{T_u}}$$

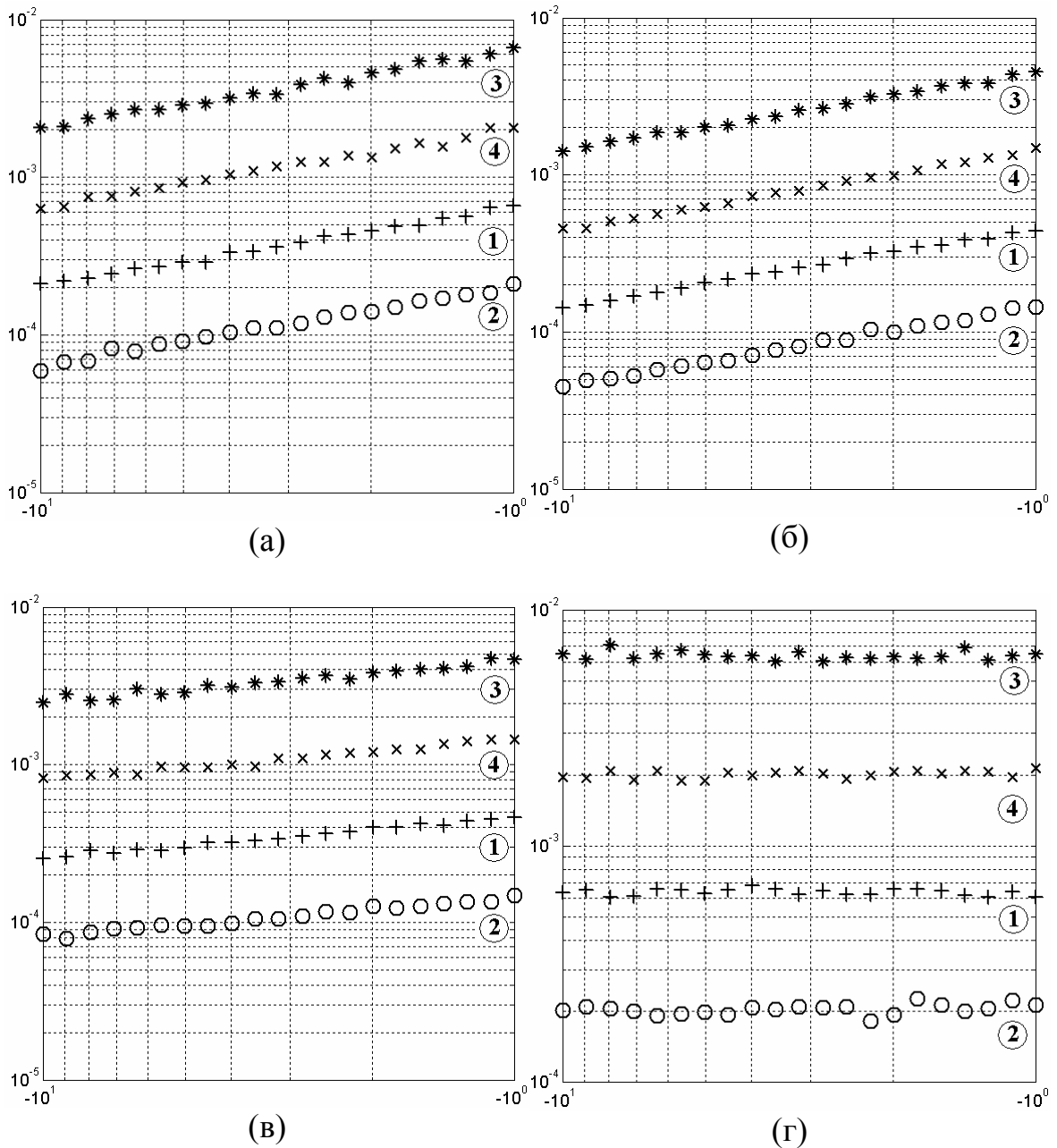


Рис. 7. Эксперименты из серий для случаев различных бифуркаций.

Эксперименты над системами, заданными уравнениями: (а) – (9), (б) – (8), (в) – (7), (г) – простейшая линейная система (для сравнения). Графики в двойном логарифмическом масштабе. По оси абсцисс отложены значения бифуркационного параметра μ , по оси ординат – стандартное отклонение наблюдаемого сигнала σ_y . Обозначения на графиках: ① – данные экспериментов для $A=10^{-4}, T_u=10^{-3}$; ② – $A=10^{-4}, T_u=10^{-2}$; ③ – $A=10^{-3}, T_u=10^{-3}$; ④ – $A=10^{-3}, T_u=10^{-2}$.

Если выбрать для сравнения линейную систему вида $\dot{y} = \mu y$, результат будет полностью аналогичен случаю системы (9), за одним исключением. В

окрестности точки потери устойчивости $\mu = 0$ в линейной системе не происходит насыщения шума: σ_y продолжает неограниченно возрастать в соответствии с уравнением (13). Наблюдение этого, впрочем, затруднено, так как корреляционный интервал также неограниченно возрастает.

Таким образом, для нелинейных систем с непрерывным временем, претерпевающих наиболее типичные бифуркации, экспериментально проверено и подтверждено, что в окрестности точки бифуркации имеет место нарастание шума. Выведенные на основании экспериментальных данных эмпирические формулы в отдельных случаях позволяют определить тип бифуркации ещё до выхода дисперсии наблюдаемого сигнала на уровень насыщения. В дальнейшем предстоит обосновать описанные экспериментальные зависимости теоретически, получив функции плотности распределения наблюдаемого сигнала для случаев различных бифуркаций.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Рассмотрим простейшую диссипативную динамическую систему вида (5), заданную уравнением

$$\dot{x} = x(\lambda - x^2). \quad (15)$$

Данная система удобна тем, что уже находится в нормальной форме: сравнивая уравнение (15) с уравнением (9), можно видеть, что в точке $\lambda=0$ происходит суперкритическая бифуркация типа «вилка».

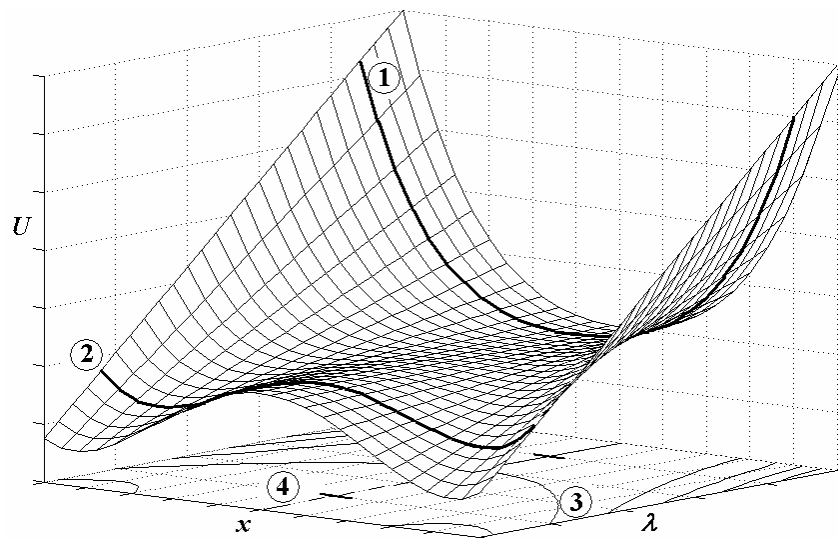


Рис. 8. Изменение потенциала при прохождении точки бифуркации.

При отрицательном значении управляющего параметра λ система имеет единственное устойчивое положение равновесия $x=0$, которое, с увеличением λ теряет устойчивость, с одновременным появлением пары симметричных устойчивых положений равновесия (суперкритическая бифуркация типа «вилка»). Обозначения: ① – потенциал с единственным устойчивым положением равновесия; ② – потенциал с двумя устойчивыми и одним неустойчивым положением равновесия; ③ – устойчивая ветвь фазо-параметрической диаграммы; ④ – неустойчивая ветвь фазо-параметрической диаграммы.

Потенциал (6) в данном случае имеет вид

$$U(x, \lambda) = \frac{x^4}{4} - \frac{\lambda x^2}{2}. \quad (16)$$

На рис. 8 показано, как меняется потенциал в процессе прохождения точки бифуркации. Заметно, что потенциальный минимум в точке $x=0$, имеющий место при $\lambda < 0$, после прохождения параметром λ бифуркационного значения $\lambda=0$ заменяется на локальный максимум с одновременным появлением пары симметрично расположенных «потенциальных ям». Энергетические затраты, необходимые для перевода системы с одного пути устойчивого продвижения на другой, соответствуют их «глубине».

Следует также обратить внимание на то, насколько пологим является график потенциала в окрестности положения равновесия в точке бифуркации. Это наглядно показывает, что в точке бифуркации возмущение системы требует минимальных энергетических затрат.

Будем считать, что на систему действует равномерно распределённый δ -шум вида (11). Пусть управляющий параметр $\lambda < 0$, и λ приближается к точке бифуркации с соблюдением условия (12). Попробуем оценить, как при этом меняется дисперсия наблюдаемого сигнала $x(t)$. Воспользуемся следующими очевидными свойствами функции $v(x, \lambda)$ для случая (15):

$$v(x, \lambda) \approx \lambda x, \quad |\lambda| \gg \tilde{x}^2, \quad (17)$$

$$v(x, \lambda) \approx -x^3, \quad |\lambda| \ll \tilde{x}^2. \quad (18)$$

Здесь \tilde{x} обозначает характерную величину x . При статистическом исследовании в качестве \tilde{x} можно взять, например, стандартное отклонение σ_x . Упрощения (17) и (18) позволяют разделить анализ поведения системы (15) по трём множествам значений параметра λ : в одном из них зависимость поведения системы от параметра является наиболее простой, в другом – отсутствует вообще, а в третьем упрощённый анализ невозможен.

Для начала, попробуем оценить качественно, как меняется характерное отклонение системы от положения равновесия по мере приближения к точке бифуркации. Будем исходить из следующих простых соображений.

Для отклонения системы от положения равновесия (при $\lambda < 0$ являющегося нулём потенциала), вносимый шум должен сообщить ей количество энергии, в сумме равное потенциалу системы в возмущённом состоянии.

При возврате системы в положение равновесия происходит диссипация энергии возмущения. Мгновенная рассеиваемая мощность, согласно [2], такова:

$$P_d = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = -v(x)^2 \quad (19)$$

(это следует из (5) и (6)).

Итак, пусть непосредственно перед возмущением положение системы $x > \sigma_u$. Направления возмущения равновероятны, поэтому оценка среднепериодической мощности шума будет выглядеть следующим образом:

$$P_u = \frac{1}{T_u} \frac{\Delta U_+ + \Delta U_-}{2}.$$

Здесь ΔU_+ – энергия, сообщаемая системе возмущением, отклоняющим от положения равновесия, а ΔU_- – энергия, высвобождаемая системой при возмущении, приближающем к положению равновесия:

$$\Delta U_+ = U(x + \sigma_u) - U(x),$$

$$\Delta U_- = U(x - \sigma_u) - U(x).$$

Приравняв оценки для получаемой и рассеиваемой мощности, получим следующее уравнение:

$$\frac{U(\tilde{x} + \sigma_u) + U(\tilde{x} - \sigma_u) - 2U(\tilde{x})}{2T_u} = v(\tilde{x})^2. \quad (20)$$

Разделим анализ поведения системы (15) по областям действия упрощений (17) и (18). Запишем уравнение (20), подставив упрощённое выражение для фазовой скорости v в определение потенциала (6).

В первом случае имеем следующее соотношение:

$$\frac{|\lambda| \sigma_u^2}{2T_u} = |\lambda|^2 \tilde{x}^2.$$

Решая его, получим

$$\tilde{x} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{2T_u}} \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (21)$$

Проверим, когда в условиях полученной зависимости допустимо упрощение (17). Подставив (21) в (17), получим соотношение

$$|\lambda| \gg \frac{\sigma_u}{\sqrt{2T_u}}. \quad (22)$$

Можно также видеть, что для $T_u=1$ оценка (21) сводится к (3).

Во втором случае получаем уравнение

$$\frac{1}{4T_u} (\sigma_u^4 + 6\tilde{x}^2 \sigma_u^2) = \tilde{x}^6.$$

Предположим, что $\tilde{x} \gg \sigma_u$. Тогда уравнение примет вид

$$\tilde{x}^6 - \frac{3\sigma_u^2}{2T_u} \tilde{x}^2 = 0.$$

Решив его, имеем

$$\tilde{x} = \sqrt[4]{\frac{3\sigma_u^2}{2T_u}}. \quad (23)$$

Согласно (18), область действия упрощения в данном случае определяется условием

$$|\lambda| \ll \sqrt{3} \frac{\sigma_u}{\sqrt{2T_u}}.$$

Итак, в целом поведение системы (15) при условии $\lambda < 0$ выглядит следующим образом. По мере приближения к точке бифуркации $\lambda=0$, \tilde{x} растёт пропорционально $|\lambda|^{-1/2}$, пока не перестаёт соответствовать условию допустимости упрощения (17). В левой полукрестности точки бифуркации, ограниченной условием допустимости упрощения (18), \tilde{x} стабилизируется на уровне, определяемом (23) (уместно сравнить эту зависимость с показанной на рис. 2). В промежутке между этими областями ($|\lambda|$ порядка $\sigma_u / \sqrt{2T_u}$) зависимость является более сложной.

Перейдём теперь от оценок к получению точного выражения для функции плотности распределения наблюдаемого сигнала. Предполагается, что полученная функция, при соответствующих значениях параметра должна быть похожа на функции, показанные на рис. 3 (а) и (б).

Для этого нам понадобится вместо отдельно взятой системы вида (5) ввести в рассмотрение ансамбль таких систем. Если одной системе соответствует точка в одномерном фазовом пространстве, то образом ансамбля систем будет совокупность точечных частиц. Пусть системы подвергаются возмущению описанным выше образом, и эти возмущения не согласованы (то есть, у каждой системы – свой независимый генератор шума). Движение каждой частицы будет включать две составляющие: детерминированную (движение под действием разности потенциалов) и стохастическую (броуновское движение). В случае системы (15) можно считать, что с течением времени установится некоторое стационарное распределение линейной плотности частиц. Будем предполагать наличие свойства эргодичности, т. е., что распределение вероятностей для положения отдельной частицы совпадает с распределением плотности частиц ансамбля.

Воспользуемся следующими определениями и обозначениями:

$$\rho \stackrel{def}{=} \frac{dn}{dx} \text{ – линейная плотность частиц}$$

u – скорость потока частиц (скорость частиц в точке в отсутствие шумов)

$$q \stackrel{\text{def}}{\equiv} \frac{dn}{dt} = \rho u \quad \text{– поток через точку}$$

$K(x, s, t)$ – относительная скорость переноса.

Относительная скорость переноса $K(x, s, t)$ (плотность вероятности переноса частицы за единицу времени) вводится в качестве характеристики стохастической составляющей движения частиц. Пусть в момент времени t координата частицы равна x . Рассмотрим вероятность случайного переноса частицы на отрезок $[s, s+ds]$ в течение интервала времени dt . Определение K заключается в том, что эта вероятность равна

$$P = K(x, s, t) ds dt .$$

Поскольку возмущения разных частиц не согласованы, постольку для выбранной наугад частицы неизвестен фазовый сдвиг возмущений относительно выбранного момента начала отсчёта $t=0$. Поэтому, впредь будем считать стохастическую составляющую движения частиц автономной: $K(x, s, t) \equiv K(x, s)$.

Также, с учётом сделанных предположений о чётности функции плотности распределения возмущения, запишем

$$\xi \stackrel{\text{def}}{\equiv} |s - x| ,$$

$$K(x, s) \equiv K(\xi) .$$

Главной интегральной характеристикой вносимого шума является постоянная, называемая коэффициентом диффузии [18]:

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{\equiv} \int_0^{+\infty} K(\xi) \xi^2 d\xi .$$

В частности, для вносимого шума вида (11) относительная скорость переноса будет очевидным образом равна

$$K(\xi) = \frac{1}{T_u} f_u(\xi) ,$$

а коэффициент диффузии, соответственно,

$$\kappa = \frac{1}{T_u} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_u(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{\sigma_u^2}{2T_u} . \quad (24)$$

В [18] показано, что стохастическая составляющая потока частиц будет подчиняться уравнению

$$q_s(x, t) = -\kappa \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} . \quad (25)$$

Для составляющей потока частиц, обусловленной воздействием разности потенциалов, имеет место очевидное соотношение

$$q_d = \rho v .$$

Записав его совместно с (25) и приняв во внимание, что нас интересует установившееся стационарное распределение плотности (а значит, суммарный поток частиц в каждой точке равен нулю), получим:

$$q = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \rho = 0 . \quad (26)$$

Введём обозначение для первообразной $v(x)$:

$$\int v(x) dx = V(x) + C$$

(где C – произвольная постоянная). Тогда, исходя из решения дифференциального уравнения (26) и учитывая свойство эргодичности, функцию плотности вероятности наблюдаемого сигнала можно записать как

$$f(x) = f_0 \exp\left(\frac{1}{\kappa} V(x)\right), \quad (27)$$

где f_0 – нормирующий множитель:

$$f_0 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{\kappa} V(x)\right) dx} . \quad (28)$$

Для определения характерных величин \tilde{x} и L воспользуемся стандартным отклонением для плотности вероятности $f(x)$:

$$\tilde{x} \equiv \sigma_f = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}, \quad (29)$$

$$L > \sigma_f .$$

Воспользуемся полученными результатами для анализа системы (15) при условии $\lambda \leq 0$. Как и прежде, упростим систему в соответствии с (17) и (18), запишем результаты для каждого случая и определим области, где полученные результаты будут корректны.

Для системы, упрощённой в соответствии с (17), первообразная $v(x)$ примет вид

$$V(x) = \frac{\lambda x^2}{2} . \quad (30)$$

Найдём нормирующий множитель f_0 . Для этого нам понадобится формула

$$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} \exp(-\Lambda x^{\alpha}) dx = \Lambda^{-\beta/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (31)$$

(можно убедиться, что заменой $\Lambda x^{\alpha} = t$ интеграл в левой части приводится к Г-функции [19]). Согласно (28), с учётом (30) и (31), подставив $\beta=1$, $\alpha=2$ и $\Lambda = |\lambda|/2\kappa$, имеем:

$$f_0^{-1} = 2 \left(\frac{|\lambda|}{2\kappa}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (32)$$

Аналогичным образом, с учётом (27), подставив в (31) $\beta=3$, $\alpha=2$, имеем также выражение для дисперсии наблюдаемого сигнала:

$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 f_0 \left(\frac{|\lambda|}{2\kappa}\right)^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \quad (33)$$

Окончательно, подставив (32) в (33), получим с учётом (29) и свойств Г-функции

$$\sigma_f = \sqrt{\kappa} \times \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (34)$$

Отсюда следует, что упрощение (17) применимо, пока выполняется условие

$$|\lambda| \gg \sqrt{\kappa}. \quad (35)$$

Упростив систему в соответствии с (18), мы аналогичным образом примем

$$V(x) = -\frac{x^4}{4}. \quad (36)$$

В этом случае $\alpha=4$ и $\Lambda = 1/4\kappa$, откуда

$$f_0^{-1} = 2 \left(\frac{1}{4\kappa}\right)^{-\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \quad (37)$$

$$\sigma_f^2 = 2 f_0 \left(\frac{1}{4\kappa}\right)^{-\frac{3}{4}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Окончательно, имеем

$$\sigma_f = \sqrt{2 \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt[4]{\kappa}}. \quad (38)$$

Условие (18) запишется в виде

$$|\lambda| \ll 2 \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt[4]{\kappa}.$$

На рис. 9 можно видеть пример графика функции плотности распределения наблюдаемого сигнала для данного случая. Для сравнения, там же дано экспериментально полученное распределение с рис. 3 (b). Поскольку данные, приведённые в [12], получены для иной системы и иных параметров шума (и, что имеет смысл подчеркнуть особо, иного вида шума), постольку экспериментальный график пришлось подвергнуть перемасштабированию. Однако, можно видеть, что теоретическая и экспериментальная зависимости совпадают с точностью до масштаба.

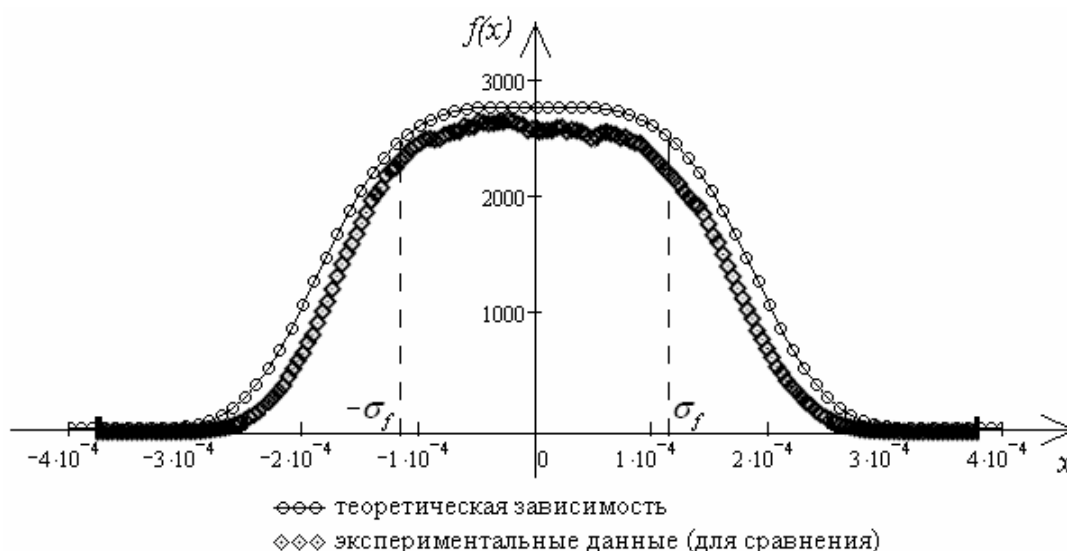


Рис. 9. Плотность распределения наблюдаемого сигнала в области насыщения.

График полученной теоретически функции плотности распределения наблюдаемого сигнала показан совместно с перемасштабированными экспериментальными данными из [12]. Масштаб по координатным осям дан для теоретического графика. Теоретическая зависимость получена путём подстановки (36) и (37) в (27), σ_f рассчитано согласно (38). Коэффициент диффузии κ определён по формуле (24) для вносимого шума вида (11) с параметрами $A=10^{-8}$, $T_{ш}=10^{-2}$.

Подставив (24), нетрудно убедиться, что выведенные формулы находятся в хорошем согласии с эмпирическими зависимостями, полученными ранее для частного случая вносимого шума вида (11): (34) соответствует и (21), а (38) – (23).

Осталось рассмотреть ситуацию, когда λ находится в промежуточной области и ни одно из упрощений неприменимо ($|\lambda|$ по порядку величины сопоставима с $\sqrt{\kappa}$):

$$V(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^4}{4}.$$

Будем полагать, что множитель в подынтегральном выражении в (28) отвечает условию $1/\kappa \gg 1$. С учётом этого, для вычисления (28) и (29) уместно будет воспользоваться *леммой Ватсона* [19], которая (для случая действительных аргументов) формулируется следующим образом. Пусть

$$\Phi(\Lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} F(x) \exp(-\Lambda x^\alpha) dx, \quad (39)$$

и выполняются условия:

$$0 < a < +\infty, \beta > 0, \alpha > 0, F(x) \in C^\infty([0, a]).$$

Тогда при $\Lambda \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение:

$$\Phi(\Lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \frac{F^{(k)}(0)}{k!}. \quad (40)$$

Это разложение можно дифференцировать по Λ любое число раз.

В качестве примера, найдём таким образом f_0 в (28). Подставим в (39) $\beta=1$, $\alpha=4$. Положим

$$\begin{aligned} \Lambda &= 1/4\kappa, \\ F(x) &= e^{-(2\Lambda|\lambda|x^2)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для простоты вычисления старших производных $F(x)$ введём вспомогательную переменную w :

$$\begin{aligned} w &\equiv \sqrt{2\Lambda|\lambda|x}, \quad u(w) = e^{-w^2}, \\ F^{(k)}(x) &= (2\Lambda|\lambda|)^{k/2} u^{(k)}(w). \end{aligned} \quad (42)$$

Обратим внимание на то, что F – чётная функция, и потому для нечётных k выполняется равенство $u^{(k)}(0) = 0$. Имея в виду этот факт, получим согласно (40), (41) и (42)

$$f_0^{-1} = 2\Phi(\Lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{-\frac{2k+1}{4}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{4}\right) \frac{u^{(2k)}(0)}{(2k)!} (2\Lambda|\lambda|)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\lambda|^k. \quad (43)$$

Этот степенной ряд сходится для любых λ : нетрудно доказать по индукции, что множитель $u^{(2k)}(0)$ является знакопеременным, и растёт не быстрее, чем $2^{2k} k!$.

Чтобы получить функцию плотности распределения наблюдаемого сигнала, подставим (43) в (27). Прделав простейшие преобразования, получим

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\kappa} V(x)\right)}{\kappa^{1/4} W_d\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{\kappa}}\right)}, \quad (44)$$

где W_d – функция, определяемая следующим образом:

$$W_d(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{2k+1}{4}\right) \frac{u^{(2k)}(0)}{(2k)!} s^k. \quad (45)$$

Исходя из полученного закона распределения, найдём стандартное отклонение наблюдаемого сигнала σ_f в (29). Для этого сначала запишем аналогичное (43) выражение для интеграла, определяющего дисперсию для плотности вероятности $f(x)$ (разница будет заключаться лишь в том, что $\beta=3$ из-за наличия множителя x^2 в подынтегральном выражении). Затем выполним нормировку, разделив полученное выражение на (43) почленно. Окончательно, получим

$$\sigma_f^2 = \sqrt{\kappa} \times W\left(\frac{|\lambda|}{\sqrt{\kappa}}\right), \quad (46)$$

где

$$W(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{2k+3}{4}\right) \frac{u^{(2k)}(0)}{(2k)!} s^k}{W_d(s)}. \quad (47)$$

Итак, поведение наблюдаемого сигнала в окрестности $|\lambda| = \sqrt{\kappa}$ определяется посредством функций W и W_d , заданных с помощью бесконечных степенных рядов. Обратим внимание на следующий важный факт: аргументом функций является отношение, сопоставляющее центру указанной окрестности точку $s=1$, что позволяет при вычислении функции абстрагироваться от характеристик вносимого шума. То есть, указанные функции являются эталонными и могут быть построены численно единственный раз, заранее. Это серьёзно облегчает решение обратной задачи.

Попутно отметим, что по мере увеличения $|\lambda|$ затраты на вычисление W и W_d для соответствующих s лавинообразно нарастают. Например, в точке $s=1$ для вычисления W с нормой невязки до 1% вполне достаточно учитывать первые 8 членов рядов в числителе и в знаменателе, а в точке $s=5$ нужно уже по 44 члена. Таким образом, использование формул (44) и (46) для расчётов вне области насыщения было бы дисфункционально.

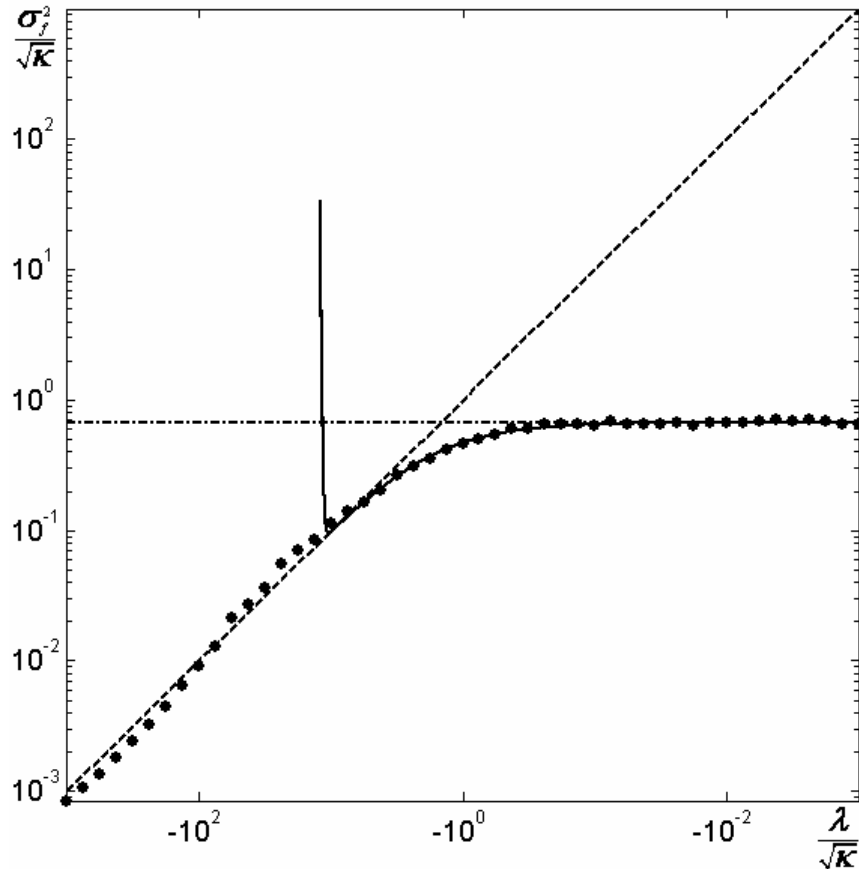


Рис. 10. Дисперсия наблюдаемого сигнала: оценки и экспериментальные данные

Точками показаны экспериментальные значения дисперсии, полученные при численном моделировании поведения системы, заданной уравнением (15), под действием вносимого шума вида (11). Параметры шума: $A=10^{-3}$, $T_w=10^{-3}$ ($\kappa=4,17 \times 10^{-5}$). Штрих-пунктирная линия соответствует оценке уровня насыщения согласно (38), штриховая линия соответствует (34). Сплошной линией показан график (46) (числитель и знаменатель $W(s)$ вычислены в 278 приближении).

На рис. 10 совместно показаны оценки дисперсии наблюдаемого сигнала согласно (34) и (38), график (46), а также измеренные экспериментально значения дисперсии. Можно видеть, что полученные зависимости (в пределах своей области допустимости) находятся в согласии с экспериментальными данными. Также ясно видно, что на практике общая формула (46) не заменяет (34), так как ей можно пользоваться только в области выхода дисперсии наблюдаемого сигнала на уровень насыщения: при вычислении согласно (47) $W(s)$ в конечном приближении, существует такое критическое значение s , свыше которого вкладом остатков рядов в числителе и знаменателе

пренебрегать уже недопустимо (на приведённом графике критическое значение выглядит как точка локального минимума). В данном случае использовать (46) имеет смысл при $|\lambda| < 10\sqrt{\kappa}$, при том, что при вычислении $W(s)$ используются полиномы 278 степени (ограничение вызвано переполнением типа `double` при вычислении соответствующих факториалов).

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Задача определения точки бифуркации в пространстве параметров и выяснение её типа по наблюдаемой траектории динамической системы с шумом является частным случаем задачи реконструкции динамической системы по временному ряду. Известно, что последняя является некорректной задачей. Поясним этот факт.

Задача математической физики называется корректно поставленной (по Адамару), если её решение существует, единственно и устойчиво (по отношению к малым изменениям начальных данных, краевых условий, параметров уравнения). Соответственно, для некорректной задачи нарушается одно из этих условий.

Так называемые обратные задачи, заключающиеся в определении некоторых количественных характеристик явления по результатам измерений их косвенных проявлений, также обычно относятся к некорректным [20].

Допустим, изучаемый объект (явление) характеризуется элементом z (функцией, вектором) некоторого множества F : $z \in F$. При этом, z недоступен для прямого изучения, и исследуется некоторое его проявление u , например, связанное с ним операторным уравнением:

$$Az = u \quad (48)$$

(A – оператор). Пусть в результате измерений известно \hat{u} – приближённое значение u . В ряде случаев недопустимо в качестве приближённого значения z брать точное решение уравнения (48) с приближённой правой частью: $\hat{z} = A^{-1}\hat{u}$. Именно, в ситуации, когда $\hat{u} \notin AF$, нарушается первое условие корректности: $\hat{z} \notin F$. Третье условие корректности нарушается, если оператор A^{-1} не является непрерывным. Таким образом, обратная задача в этих случаях действительно является некорректной.

Приближённое решение некорректно поставленной задачи, устойчивое к малым изменениям исходных данных, может быть найдено, если условие задачи включает некоторую дополнительную (априорную) информацию об исследуемой системе. Как правило, эта информация либо позволяет сузить класс возможных решений, либо определяет общий характер решения (например, характер его гладкости). В частности, для случая задачи нахождения точек бифуркации и/или определения типа бифуркации, имеют значение сведения относительно параметров системы, характеристик вносимого шума и т.д. Большой класс методов приближённого решения обратных задач (так

называемые методы регуляризации) был предложен в научной школе академика А.Н. Тихонова [20].

Рассмотрим вариант задачи на нахождение точки бифуркации и проверку гипотезы о её типе, на примере суперкритической бифуркации типа «вилка» (прочие из рассмотренных простых бифуркаций связаны со сближением устойчивого и неустойчивого положений равновесия, следовательно, в их случае вблизи точки бифуркации при достаточном времени наблюдения должен отмечаться уход сигнала $x(t)$ в область аномальных значений (шумовое разрушение); анализ таких ситуаций представляет собой отдельный класс задач).

Допустим, некоторая нелинейная система генерирует сигнал $x(t)$, в котором присутствует случайная составляющая (тогда $x(t)$ суть наблюдаемый сигнал). Пусть также имеется следующая априорная информация о системе. Во-первых, поведение системы в отсутствие шума аperiodично (это упрощает дальнейший анализ). Во-вторых, есть возможность измерения некоторой величины λ , которую мы будем считать параметром системы. При этом, характерное время изменения λ T_λ значительно превышает интервал корреляции наблюдаемого сигнала T_x :

$$T_\lambda \gg T_x.$$

Пусть также отмечено, что наблюдаемый сигнал при фиксированном λ имеет стационарное распределение, причём при изменении параметра λ в определённом направлении происходит рост дисперсии наблюдаемого сигнала σ_x^2 .

Требуется проверить предположение, что при дальнейшем изменении параметра, по достижении им определённого значения λ_b , в исследуемой системе происходит бифуркация, и определить λ_b . Также требуется проверить, является ли предстоящая бифуркация суперкритической бифуркацией типа «вилка».

Предположим, что параметр находится достаточно далеко от точки бифуркации, так что система может быть линеаризована. Тогда, согласно соотношению (34), если график для зависимости дисперсии наблюдаемого сигнала от параметра $\sigma_x^2(\lambda)$ построен в двойном логарифмическом масштабе, то точки должны ложиться на прямую с угловым коэффициентом +1.

Если этого не наблюдается, то следует найти некоторое преобразование параметра λ , чтобы удовлетворить это требование:

$$\lambda' = L(\lambda) \tag{49}$$

(фактически, данное преобразование означает переградуировку шкалы прибора, измеряющего λ). Например, если экспериментальные точки лежат на прямой с отличным от +1 угловым коэффициентом, то достаточно возведения λ в соответствующую степень и, возможно, изменения знака. Подчеркнём, что в

общем случае такое преобразование неочевидно, и его поиск представляет собой отдельную задачу.

Известно, что линейное приближение даёт бесконечный рост уровня шума в точке бифуркации. Воспользуемся этим, чтобы приближённо найти точку бифуркации λ'_b . Из (34) следует соотношение

$$\sigma_x^2 = \frac{\kappa}{-(\lambda' - \lambda'_b)}.$$

Итак, мы получили уравнение с двумя параметрами – бифуркационным значением λ'_b и коэффициентом диффузии κ (напомним, что по условиям задачи он неизвестен). Чтобы найти значения параметров, приведём его к виду уравнения прямой:

$$\sigma_x^{-2} = -\frac{1}{\kappa} \lambda' + \frac{\lambda'_b}{\kappa}. \quad (50)$$

Воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов для экспериментальных точек $(\lambda'_i, (\sigma_x^{-2})_i)$, найдём угловой коэффициент и свободный член аппроксимирующей прямой

$$\sigma_x^{-2} = a\lambda' + b, \quad (51)$$

откуда, согласно (50) получим оценки для κ и λ'_b :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= -\frac{1}{a}, \\ \tilde{\lambda}'_b &= b\tilde{\kappa}. \end{aligned} \quad (52)$$

Выполним следующее преобразование координат для удобства использования (46):

$$s' = -\frac{\lambda'}{\sqrt{\tilde{\kappa}}}, \quad y = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\tilde{\kappa}}}. \quad (53)$$

Область допустимости линейного приближения (34) в этих координатах будет определяться соотношением

$$(\tilde{s}' - \tilde{s}'_b) \gg 1. \quad (54)$$

Если это соотношение не выполняется, то исходное предположение об удалённости параметра от точки бифуркации неверно, и преобразование (49) и основанные на нём оценки (52) не имеют смысла; данный случай требует отдельного рассмотрения.

Следует отметить, что на практике по мере удаления параметра от точки бифуркации точность оценки коэффициента диффузии по формуле (52)

возрастает (так как поведение нелинейной системы всё менее отличается от поведения линеаризованной системы), в то время как точность оценки координаты точки бифуркации снижается: оценка координат центра гиперболы по удалённым точкам, близким к асимптоте (в масштабе погрешности), затруднена. Таким образом, для получения более точной оценки координаты точки бифуркации необходимо исследование наблюдаемого сигнала в области выхода его дисперсии на уровень насыщения. Относящиеся к этой области экспериментальные точки (s'_i, y_i) следует аппроксимировать функцией

$$y = W(s' - \tilde{s}'_b), \quad (55)$$

где сдвиг \tilde{s}'_b – единственный параметр аппроксимации – определяет положение точки бифуркации. Если удалось выполнить аппроксимацию с заданной точностью, то можно считать, что положение точки бифуркации в новых координатах успешно определено.

Надо отметить, что точность определения положения точки бифуркации может быть повышена за счёт предварительной обработки данных: сглаживания, интерполяции и т.д. Однако, порекомендовать какое-либо универсальное правило в этом случае трудно: необходим тщательный учёт специфики конкретной задачи.

Предположение о типе бифуркации можно проверять после оценки положения точки бифуркации. Для этого следует сравнить построенную по результатам наблюдения (за время, в течение которого изменение λ можно считать незначительным) функцию распределения наблюдаемого сигнала с функцией (44). Поскольку в области насыщения закон распределения является уникальным для данного типа бифуркации, постольку при совпадении сравниваемых функций предположение о типе можно считать подтверждённым.

Итак, на основании сказанного, алгоритм решения данной задачи можно сформулировать следующим образом.

1. Построить график для некоторого набора экспериментальных точек $(\lg \lambda_i, \lg[(\sigma_x^2)_i])$.
2. Предположив выполнение (35), подобрать преобразование (49) таким образом, чтобы точки $(\lg \lambda'_i, \lg[(\sigma_x^2)_i])$ ложились на прямую с угловым коэффициентом +1.
3. Построить график для экспериментальных точек $(\lambda'_i, (\sigma_x^{-2})_i)$.
4. Методом наименьших квадратов определить коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой (51).
5. По формулам (52) получить оценки для коэффициента диффузии $\tilde{\kappa}$ и координаты предполагаемой точки бифуркации $\tilde{\lambda}'_b$.
6. Выполнить преобразование координат согласно (53).

7. Проверить выполнение условия (54). Если условие не выполняется, то следует изменить выбор экспериментальных точек для п. 1. Например, можно попробовать выбрать точки с минимальной дисперсией наблюдаемого сигнала (предположительно, они наиболее удалены от точки бифуркации).
8. Рассчитать теоретически плотность распределения наблюдаемого сигнала для линеаризованной системы, подставив (30), (32) и $\lambda = \lambda' - \tilde{\lambda}'_b$ в (27).
9. Проверить соответствие плотности распределения наблюдаемого сигнала, полученной экспериментально, теоретическим расчётам. При несоответствии считать алгоритм неприменимым в данном случае. Вероятной причиной является слишком быстрое изменение параметра.
10. Если с ростом s' отмечается замедление роста дисперсии наблюдаемого шума по сравнению с оценкой для линеаризованной системы, то попытаться аппроксимировать экспериментальные точки функцией (55). В случае, если достигнута заданная точность аппроксимации, считать координату точки бифуркации определённой.
11. С учётом данных о положении точки бифуркации, рассчитать плотность распределения по формуле (44) и сравнить с экспериментальными данными. В случае совпадения считать предположение о типе бифуркации подтверждённым.

Приведём пример применения данного алгоритма. В качестве объекта для испытания была выбрана система, заданная уравнением (15). В силу выбора системы для исследования, п. 2 алгоритма выполнялся тривиальным образом. Система подвергалась воздействию периодического равномерно распределённого δ -шума (11) со следующими характеристиками:

$$T_u = 10^{-2}, A = 10^{-3}, \sigma_u = 2,9 \times 10^{-4}, \sqrt{\kappa} = 2,0 \times 10^{-3}.$$

Рассматривались серии по 10 точек (λ_j, σ_j^2) , отстоящих друг от друга по λ на $\Delta\lambda = 2 \times 10^{-4}$. Дисперсия σ_j^2 наблюдаемого сигнала $x(t, \lambda_j)$ вычислялась по результатам измерений $x_i = x(t_i, \lambda_j)$, таких, что $t_{i+1} - t_i = 10^{-3}$. Приведём результаты по двум случаям, различающимся скоростью $\dot{\lambda}$ изменения параметра λ .

В первом случае, $\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-9}$. Для измерений вблизи значений параметра $\lambda = -0,02$ п. 5 алгоритма дал оценки

$$\sqrt{\tilde{\kappa}} = 2,0 \times 10^{-3}, \tilde{\lambda}'_b = 5,3 \times 10^{-3}.$$

Можно видеть, что условие (54) выполнено. При этом, оценка κ является достаточно точной, а ошибка оценки λ'_b превышает размер области насыщения.

По результатам серии измерений для λ на отрезке $[-3 \times 10^{-3}; -1 \times 10^{-3}]$, согласно п. 10 алгоритма была получена оценка

$$s'_b = 0,05, \quad \tilde{\lambda}_b = -10^{-4}.$$

Итак, ошибка составила 5% от размера области насыщения. На рис. 11 (а) можно видеть, что экспериментальная плотность распределения x хорошо согласуется с теоретическими расчётами по формуле (44), даже с учётом погрешности определения положения точки бифуркации. Можно считать, что гипотеза о типе предстоящей бифуркации подтверждена.

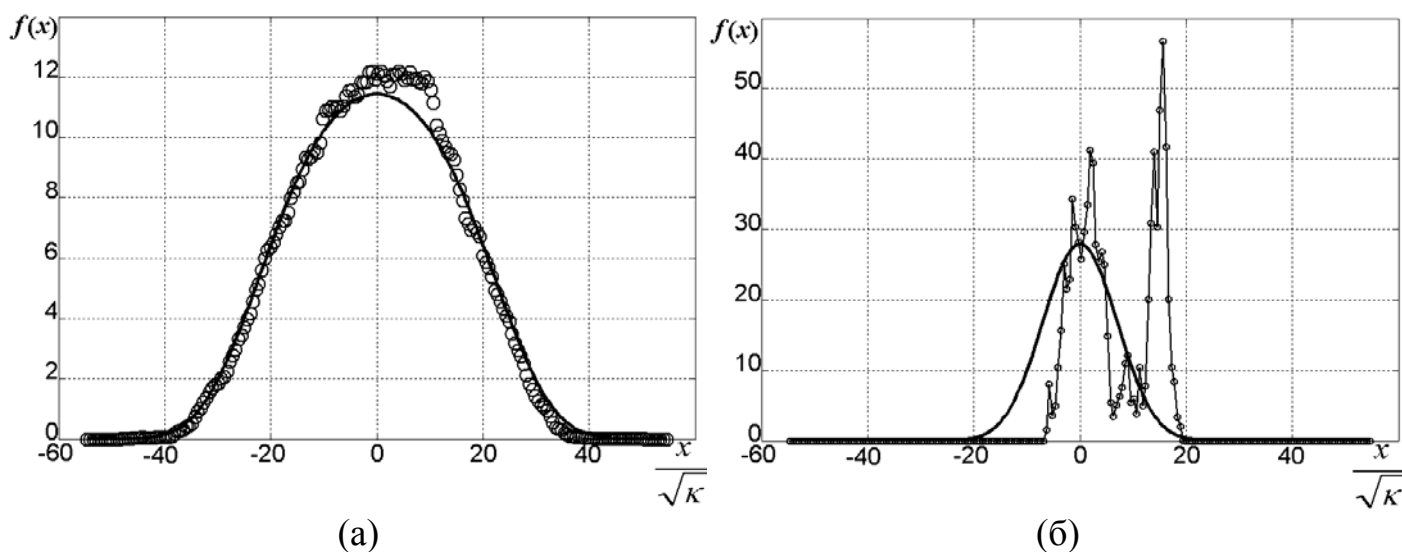


Рис. 11. Плотность распределения наблюдаемого сигнала.

Сравнение экспериментальной плотности распределения с теорией. Сплошной линией показан теоретический график функции плотности распределения $f(x)$, точками – экспериментальный. (а) – случай медленного изменения параметра ($\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-9}$), измерения в области насыщения уровня шума ($\lambda = -0,002$), точка бифуркации определена с достаточной точностью, экспериментальные данные согласуются с теорией. (б) – быстрое изменение параметра ($\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-6}$), измерения в области линейного поведения системы ($\lambda = -0,02$), можно видеть, что положение точки бифуркации не может быть определено.

Во втором случае, скорость изменения параметра в 1000 раз больше: $\dot{\lambda} = 2 \times 10^{-6}$. В пп. 1-2 алгоритма угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей экспериментальные точки $(\lg \lambda_j, \lg \sigma_j^2)$, был найден равным 10. Использование таких экспериментальных данных повлечёт неверный выбор преобразования (49), и все дальнейшие оценки будут неадекватны. В качестве иллюстрации, на рис. 11 (б) показана экспериментальная плотность распределения, найденная по измерениям в районе $\lambda = -0,02$. Можно видеть её несоответствие теоретическим расчётам. В данном случае причиной этого является нехватка данных для расчёта статистики.

Тем не менее, можно видеть, что при соблюдении условия медленного (квазистатического) изменения параметра, возможно получение достаточно точного прогноза бифуркации и проверка гипотезы о её типе весьма простым образом на основе минимума априорной информации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены вопросы поведения нелинейных динамических систем, испытывающих воздействие слабого шума, в окрестности точки бифуркации. Дан краткий обзор имеющихся результатов для систем, моделируемых нелинейными отображениями (систем с дискретным временем). Рассмотрены аналогичные явления в аperiodических системах, моделируемых нелинейными дифференциальными уравнениями – системах с непрерывным временем. В частности, получена зависимость, описывающая нарастание дисперсии наблюдаемого сигнала по мере приближения к точке бифуркации. Приведён пример алгоритма решения обратной задачи – обнаружения и определения типа бифуркаций посредством анализа наблюдаемого сигнала.

Для изучения были выбраны наиболее типичные бифуркации – локальные бифуркации коразмерности 1. Из них были рассмотрены бифуркации типа «седло-узел», транскритическая бифуркация и две бифуркации типа «вилка» (субкритическая и суперкритическая).

Приведена практическая интерпретация бифуркаций выбранных типов. Бифуркация типа «седло-узел» является наиболее опасной, так как приводит к быстрому разрушению системы. Следующей по степени опасности является субкритическая бифуркация типа «вилка», делающая невозможным устойчивое продвижение системы. Транскритическая бифуркация соответствует изменению направления пути продвижения системы, сопровождаемому временным снижением устойчивости. Наконец, суперкритическая бифуркация типа «вилка» является безопасной (с точки зрения возможности разрушения системы в краткосрочной перспективе) и интересной тем, что даёт возможность выбора устойчивого пути продвижения из двух возможных.

Поставлен ряд экспериментов по изучению изменения наблюдаемого сигнала по мере приближения к точке бифуркации. По результатам экспериментов выведены эмпирические зависимости уровня шума от бифуркационного параметра и параметров вносимого шума, для разных типов бифуркаций.

Для отдельно взятой бифуркации (суперкритическая бифуркация типа «вилка») теоретически получены качественные оценки для роста уровня шума. Затем, получена точная зависимость дисперсии наблюдаемого сигнала от вносимого шума и бифуркационного параметра. Выведенная теоретически зависимость находится в согласии с полученными ранее экспериментальными данными.

На основании полученных и имеющихся результатов, можно сделать следующие практически значимые выводы.

Во-первых, рост дисперсии наблюдаемого сигнала в процессе продвижения нелинейной системы является признаком предстоящей бифуркации и поводом для более детального изучения ситуации. Подчеркнём ещё раз, что на удалении от точки бифуркации наблюдаемый сигнал нелинейной системы неотличим от наблюдаемого сигнала линеаризованной системы, в то время как явление насыщения (ограничения уровня) дисперсии наблюдаемого сигнала характерно именно для нелинейных систем.

Во-вторых, особо опасную бифуркацию типа «седло-узел» можно предвидеть, основываясь на результатах наблюдений задолго до самой бифуркации, то есть, изучая рост дисперсии наблюдаемого сигнала до его выхода на уровень насыщения (рассматривая линеаризованную систему). Это особенно важно с учётом того факта, что интервал корреляции наблюдаемого сигнала при этом относительно мал, и данные для статистики можно набрать достаточно быстро.

В-третьих, для остальных рассмотренных типов бифуркаций задача определения типа может быть решена, исходя из данных о характеристиках наблюдаемого сигнала на этапе выхода его дисперсии на уровень насыщения. Применение диффузионной модели отчасти снимает проблему увеличения интервала корреляции наблюдаемого сигнала. Действительно, если для исследования одновременно доступно множество систем, длительный сбор статистики для одной системы может быть заменён изучением установившегося распределения (или установившейся динамики, если распределение нестационарно) по ансамблю.

При решении практических задач, чтобы свести исследуемый объект к одномерной однопараметрической системе, следует определить, во-первых, что является бифуркационным параметром, во-вторых, каков характер вносимого шума и, в-третьих, что считать состоянием системы (и следовательно, наблюдаемым сигналом). Например, если объектом исследования является общество, то в качестве малого шума можно брать мелкие правонарушения, динамику тиражей печатных изданий, динамику карьерного роста в структурах власти и т.д. (в качестве иллюстрации: на Западе далеко идущие выводы о положении дел в экономике можно делать, отслеживая численность бродячих собак на городских улицах [21]). Исследуя поведение системы в ретроспективе, естественно пронаблюдать проявление эффекта аномального усиления шумов с целью определения степени адекватности модели, а также с целью получения дополнительной информации о системе. В дальнейшем, полученный аппарат можно применять для прогноза, тем более точного, чем больше имеется априорной информации.

Чтобы показать, насколько актуальна данная задача, хотелось бы привести следующую цитату [22]: «...известно, что в периоды неустойчивого равновесия, в точках бифуркации, очень небольшие воздействия могут направить развитие по совершенно неожиданному пути. Революция и гражданская война в России, коллективизация, война и начало холодной войны – все это типичные точки бифуркации. И в эти моменты внешние воздействия играли огромную, часто

трагическую для России роль. В подобной точке бифуркации находится Россия и сегодня».

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Едиториал УРСС, 2002.
2. Г.Г. Малинецкий. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. М., Наука, 1997.
3. С.П. Кузнецов. Динамический хаос. М.: Физматгиз, 2001.
4. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. Ю.А. Кравцов, С.Г. Бильчинская, О.Я. Бутковский, И.А. Рычка, Е.Д. Суровяткина. Предбифуркационное усиление шума в нелинейных системах. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2001, том 120, вып. 6(12), стр 1527-1534.
6. Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов, И.В. Кузнецов. О национальной системе научного мониторинга. препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2004, № 47.
7. Г. Николис, И. Пригожин. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
8. С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий. Синергетика и прогнозы будущего. Изд.3. М.: Едиториал УРСС, 2003.
9. K. Wiesenfeld. Virtual Hopf phenomenon: A new precursor of period-doubling bifurcations. *Physical Review A*, Volume 32, Number 3, September 1985, Pages 1744-1751.
10. Yu. A. Kravtsov and E.D. Surovyatkina. Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification. *Physics Letters A*, Volume 319, Issues 3-4, 8 December 2003, Pages 348-351.
11. E. Surovyatkina. Prebifurcation noise amplification and noise-dependent hysteresis as indicators of bifurcations in nonlinear geophysical systems. *Nonlinear Processes in Geophysics* (2005) 12, Pages 25–29.
12. A. Juel, A.G. Darbyshire, T. Mullin. The effect of noise on pitchfork and Hopf bifurcations. *Proc. R. Soc. Lond. A* (1997) 453, 2627-2647.
13. E.D. Surovyatkina. Rise and saturation of the correlation time near bifurcation threshold. *Physics Letters A*, Volume 329, Issue 3, 23 August 2004, Pages 169-172.
14. E. Surovyatkina, Ju. Kurths. Pre-bifurcational noise-dependent phenomena as diagnostic instrument for revealing bifurcations in geophysical systems. *Geophysical Research Abstracts*, Vol. 7, 00462, 2005.
15. Ж. Йосс, Д. Джозеф. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
16. А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. 2-е изд., доп. – М.: Наука. Физматлит, 1996.
17. С.М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
18. Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. М.: Наука, 1973.
19. М. В. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
20. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
21. С.Г. Кара-Мурза. Манипуляция сознанием. М.: Эксмо/Алгоритм, 2004.
22. С. Кара-Мурза. Евроцентризм – скрытая идеология перестройки. М.: СИМС, 1996.