

Введение. Постановка задачи

Магнитное поле Земли широко применяется для обеспечения заданного углового движения недорогих микроспутников. Достоинством систем ориентации, использующих геомагнитное поле, является малая масса и объем исполнительных органов и чувствительных элементов, низкое энергопотребление или даже его полное отсутствие в случае пассивных систем ориентации. Магнитное поле используется для создания восстанавливающего и демфирующего моментов в пассивных системах, а также управляющего момента в активных системах.

В пассивных магнитных системах ориентации используется сильный постоянный магнит для создания восстанавливающего момента, а гистерезисные стержни из магнитомягкого материала создают демфирующий момент для рассеивания кинетической энергии начального движения после отделения спутника от носителя и приведения его в рабочее положение. Стержни весьма чувствительны к воздействию возмущающих магнитных полей, поэтому их расположение относительно постоянного магнита должно быть заранее рассчитано, а еще лучше - проверено в лабораторных условиях. Схема расположения постоянного магнита и шести стержней, входящих в состав пассивной системы ориентации, которая была использована на наноспутнике MUNIN, имеющем форму кубика [статья в КИ], показана на рис.1.

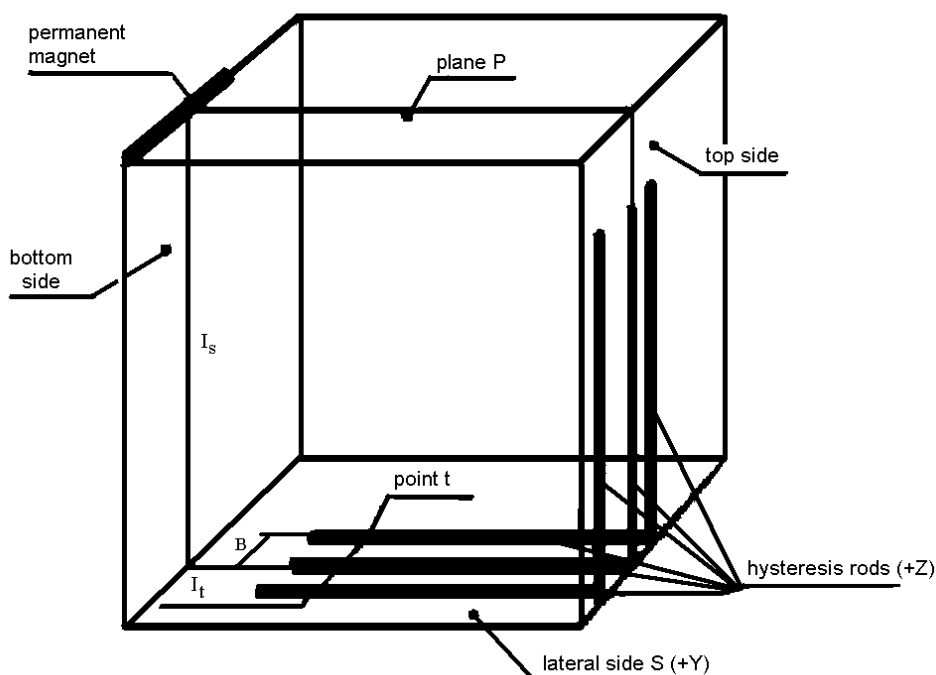


Рис.1. Расположение элементов пассивной магнитной системы ориентации наноспутника MUNIN

Тем самым, в процессе разработки системы ориентации и перед выводом спутника на орбиту, целесообразно провести испытания на Земле с целью проверки ее работоспособности. Однако при этом возникает ряд

проблем, которые не позволяют “напрямую” имитировать динамику спутника или его прототипа. Например, трение корпуса о воздух превалирует над эффектом гистерезисного демпфирования, который и является одним из предметов исследования. Если спутник имитируется телом, подвешенным на струне, а это самый простой способ обеспечения пространственного движения спутника относительно центра масс, в этом случае возникают дополнительные моменты, отсутствующие в условиях космоса, например, упругость нити, момент от которой может быть сравним с восстанавливающим моментом от постоянного магнита, взаимодействующим с геомагнитным полем. Тем самым, до разработки стенда для имитации динамики спутника с магнитными системами ориентации и до проведения экспериментов на стенде необходимо обосновать возможность имитации магнитного демпфирования и выбрать параметры и характеристики стенда, которые позволят провести такого рода эксперименты.

В качестве объекта исследования рассматривается тело, близкое по форме и инерционным характеристикам однородному плоскому диску, на котором установлен постоянный магнит и гистерезисный стержень из магнитомягкого материала. Диск подвешен на упругой нити во внешнем магнитном поле, создаваемом парами колец Гельмгольца. В положении равновесия ось стержня должна быть перпендикулярна вектору напряженности магнитного поля. Считается, что диск совершает вращательные движения в плоскости перпендикулярной нити.

Исследованию такой системы в земных условиях и посвящена данная работа. Как уже говорилось выше, с методической точки зрения здесь возникают трудности, связанные с тем, что на Земле необходимо учитывать кроме потерь на гистерезис еще и потери на вязкое трение, а также упругость подвеса, на котором закреплен наш стержень. Поскольку целью исследования является анализ влияния гистерезиса на

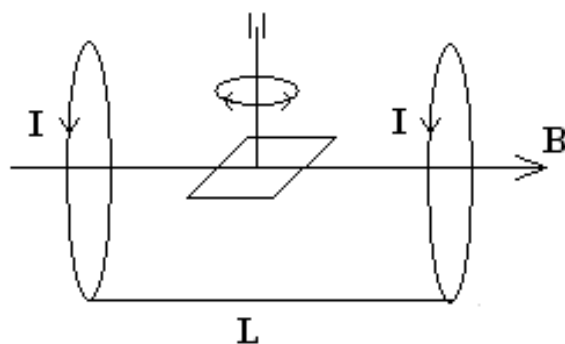


Рис.2. Кольца Гельмгольца

движение спутника, то необходимо так подобрать соответствующие параметры, чтобы это влияние было заметным и поддающемся измерениям. Влияние магнитного поля Земли может оказаться слишком малым по сравнению с трением о воздух, поэтому необходимо создать искусственное магнитное поле. Это можно сделать с помощью катушек Гельмгольца, схематично показанных на рис.2. Необходимо оценить величину напряженности магнитного поля, позволяющего организовать превалирование демпфирующего момента от гистерезисных стержней над моментом трения о воздух, а также

определить параметры катушек и величину тока, пропускаемого через них, для достижения необходимой величины напряженности поля. Предполагается построить оценку коэффициента вязкого трения диска о воздух.

Из-за ограниченных возможностей увеличения демпфирующего момента гистерезисных стержней путем увеличения напряженности перемещающего поля, что обусловлено возможностью насыщения стержней и, как следствие, потерей их эффективности, задача сводится к определению максимально допустимого коэффициента трения о воздух и сравнения его с проведенной оценкой коэффициента трения.

При вычислении допустимого коэффициента вязкого трения диска о воздух в зависимости от напряженности перемещающего поля используются следующие модели гистерезиса: модель Релея, модель «параллелограмма», модель «насыщения». В результате исследования проведен анализ уравнения движения стержня в рамках этих трех моделей. Численно оценены допустимые параметры модели. Для вычислений в качестве примера использованы данные для 4-79-пермаллоя. Получен алгоритм, позволяющий вычислять допустимый коэффициент вязкого трения диска о воздух по заданной напряженности внешнего магнитного поля. С помощью построенного алгоритма вычислен допустимый коэффициент трения.

1. Модели гистерезиса

В зависимости от величины напряженности внешнего перемещающего поля будем использовать следующие модели гистерезиса.

1.1. Модель Релея

Релей установил, что проницаемость ферромагнетика, соответствующая «все меньшим и меньшим значениям намагниченности, приближается к постоянному значению, намного превышающему единицу» [1]. Он показал также, что при достаточно малой намагниченности справедлив закон, выражаемый формулой

$$\mu = \mu_{\text{нач}} + \alpha_R H, \quad (1.1)$$

где μ – проницаемость на кривой намагничивания при напряженности поля H , $\mu_{\text{нач}}$ – начальная проницаемость, α_R – постоянная Релея, равная $d\mu/dH$. Для большинства ферромагнетиков эта кривая при индукциях внешнего магнитного поля порядка $0.1 B_s$ представляет собой прямую, B_s – индукция насыщения стержня. Закон Релея можно записать в виде

$$B = \mu_{\text{нач}} H + \alpha_R H^2. \quad (1.2)$$

Эта зависимость индукции от H представлена кривой M на рис.3.

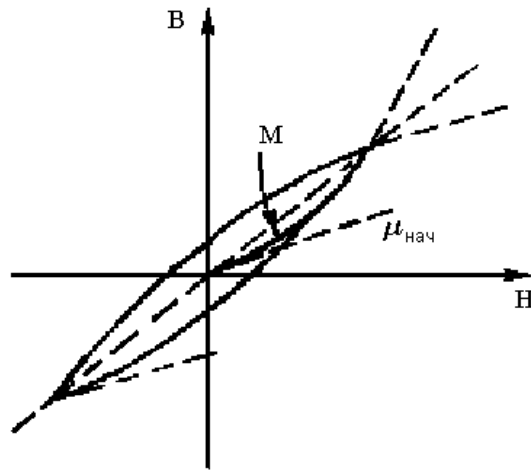


Рис.3. Вид петли гистерезиса в модели Релея

Релей установил также закон изменения B в интервале $B = \pm B_m$ при изменении H_τ в пределах $\pm H_m$ (то есть для ветвей петли гистерезиса). Восходящая и нисходящая ветви петли гистерезиса, согласно Релею, представляют собой параболы

$$B = \mu H_\tau \pm (\mu - \mu_{нач}) \frac{H_m^2 - H_\tau^2}{2H_m}, \quad (1.3)$$

где $\mu = B_m / H_m$. Тангенс угла наклона для нисходящей ветви в вершине петли равен начальной проницаемости основной кривой ($\mu_{нач}$) [6]. Уравнения (1.1-1.3) записаны в гауссовой системе единиц.

Переходя в систему СИ, получим следующее выражение для намагниченности стержня:

$$I = (\mu_{нач} + \alpha_R H_m) H_\tau - \frac{\alpha_R}{2} (H_m^2 - H_\tau^2) \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt}. \quad (1.4)$$

Это уравнение достаточно точно описывает намагниченность стержня при условии $|H_\tau| < H_c$, где H_c – коэрцитивная сила данного материала, и симметричном перемагнивании.

1.2. Модель «параллелограмма»

При значениях проекции напряженности внешнего магнитного поля H_τ , удовлетворяющих условиям $H_c < |H_\tau| < H_s$, намагниченность стержня может быть описана моделью «параллелограмма», H_s – значение проекции напряженности внешнего магнитного поля, при которой наступает насыщение материала. Намагниченность стержня в модели «параллелограмма» имеет следующий вид:

$$I = (\mu_{нач} + \alpha_R H_c) H_\tau - \frac{k}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt}. \quad (1.5)$$

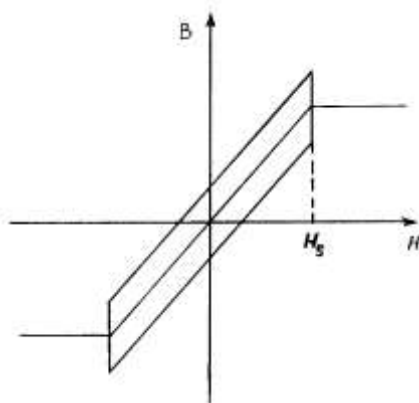


Рис.4. Вид петли гистерезиса в модели «параллелограмма»

Коэффициент k найдём из условия непрерывности функции, описывающей потери на гистерезис, при $H_m = H_c$ (H_c – коэрцитивная сила). Для этого приравняем площади петли Релея и параллелограмма при $H_m = H_c$

$$\oint \alpha_R \frac{H_c^2 - H_\tau^2}{2} \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} dH_\tau = \oint \frac{k}{2} \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} dH_\tau.$$

Интегрируем обе части и выполним необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} \alpha_R \int_{-H_c}^{H_c} \left(\frac{H_c^2 - H_\tau^2}{2} - \frac{H_\tau^2 - H_c^2}{2} \right) dH_\tau &= \int_{-H_c}^{H_c} \left(\frac{k}{2} + \frac{k}{2} \right) dH_\tau \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_R \int_{-H_c}^{H_c} (H_c^2 - H_\tau^2) dH_\tau &= \int_{-H_c}^{H_c} k dH_\tau \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_R \left[H_c^2 H_\tau \Big|_{-H_c}^{H_c} - \frac{1}{3} H_\tau^3 \Big|_{-H_c}^{H_c} \right] &= k H_\tau \Big|_{-H_c}^{H_c} \Rightarrow \alpha_R \left[2H_c^3 - \frac{2}{3} H_c^3 \right] = 2kH_c \\ \Rightarrow \alpha_R \frac{4}{3} H_c^3 &= 2kH_c \Rightarrow k = \frac{2}{3} \alpha_R H_c^2 \end{aligned}$$

Таким образом, получим выражение для намагниченности стержня

$$I = (\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) H_\tau - \frac{1}{3} \alpha_R H_c^2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt}. \quad (1.6)$$

1.3. Модель «насыщения»

Когда $|H_\tau| > H_s$, демпфирования нет. То есть $I = I_s = \text{const}$, где I_s - индукция насыщения.

2. Исследование колебаний намагниченного спутника в подвесе

В качестве модели спутника будем рассматривать твердое тело, подвешенное на упругой нити (условно показанное в виде пластины на рис.5). На нем расположен постоянный магнит, который необходим для создания восстанавливающего момента, возвращающего спутник в

положение равновесия подобно стрелке компаса. Под углом φ_0 к постоянному магниту расположен магнитомягкий стержень.

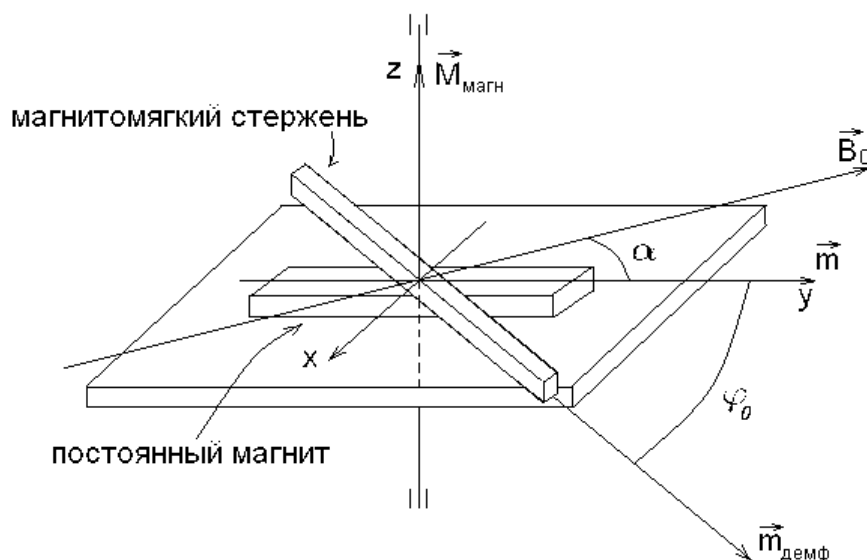


Рис.5. Модель спутника

Введем обозначения: B_0 – индукция внешнего магнитного поля, создаваемого катушками; \vec{m} – магнитный дипольный момент постоянного магнита; $\vec{m}_{\text{деф}}$ – магнитный дипольный момент гистерезисного стержня; $\vec{M}_{\text{магн}} = [\vec{m} + \vec{m}_{\text{деф}}, \vec{B}_0]$ – механический момент, создаваемый магнитными силами; φ_0 – угол между осями стержня и постоянного магнита (рис.6); α – угол между осью постоянного магнита и направлением вектора B_0 ; φ_1 – положение равновесия подвеса, то есть значение угла α , когда подвес находится в положении равновесия; k_1 – коэффициент вязкого трения; k_2 – коэффициент упругости подвеса; J – момент инерции спутника.

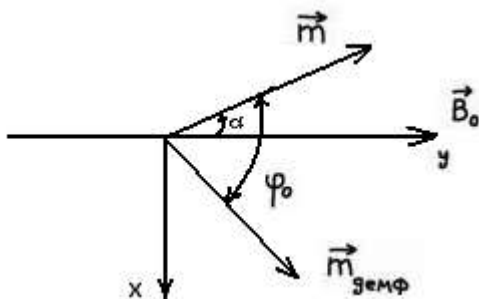


Рис.6. Углы между введенными векторами

Запишем уравнение движения спутника

$$J\ddot{\alpha} = \left| (\vec{m} + \vec{m}_{\text{деф}}) \times \vec{B}_0 \right| - k_1\dot{\alpha} - k_2(\alpha - \varphi_1), \quad (2.1)$$

$$\vec{m}_{\text{деф}} = V \cdot \vec{I}_{\text{ст}}, \quad (2.2)$$

где V – объем стержня, $\vec{I}_{\text{ст}}$ – намагниченность стержня.

2.1. Уравнение движения спутника в подвесе

Рассмотрим уравнение (2.1). Поскольку демпфирующий и восстанавливающий механические моменты направлены по одной оси, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \left| (\vec{m} + \vec{m}_{\text{демф}}) \times \vec{B}_0 \right| &= \left| \vec{m} \times \vec{B}_0 \right| + \left| \vec{m}_{\text{демф}} \times \vec{B}_0 \right| \\ \left| \vec{m} \times \vec{B}_0 \right| &= -m \cdot B_0 \cdot \sin \alpha \\ \left| \vec{m}_{\text{демф}} \times \vec{B}_0 \right| &= -m_{\text{демф}} \cdot B_0 \cdot \sin(\alpha - \varphi_0) = -V \cdot I_{\text{см}} \cdot B_0 \cdot \sin(\alpha - \varphi_0) \end{aligned}$$

Тогда уравнение движения (2.1) запишется в виде

$$J\ddot{\alpha} = -B_0 m \sin \alpha - B_0 V I_{\text{см}} \sin(\alpha - \varphi_0) - k_1 \dot{\alpha} - k_2 (\alpha - \varphi_1). \quad (2.3)$$

Положим $\varphi_1 = 0, \varphi_0 = \pi/2$ в уравнении (2.3), тогда получим

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J} [-B_0 m \sin \alpha + B_0 V I_{\text{см}} \cos \alpha - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha]. \quad (2.4)$$

Выразим H_τ и H_m через α и α_m , где H_τ – проекция напряженности H_0 внешнего магнитного поля на ось стержня,

$$\begin{cases} H_\tau = H_0 \sin \alpha = \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha \\ H_m = \max_\alpha |H_0 \sin \alpha| = \frac{B_0}{\mu_0} \left(\max_\alpha |\sin \alpha| \right) = \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha_m \end{cases}$$

В уравнение (2.4) подставим выражение (1.3) для модели Релея

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \frac{1}{J} \left[-B_0 m \sin \alpha + B_0 V \cos \alpha \cdot \mu_0 \left[(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_m) H_\tau - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha_R \frac{(H_\tau^2 - H_m^2)}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right] - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha \right] \\ \ddot{\alpha} &= \frac{1}{J} \left[-B_0 m \sin \alpha + B_0 V \cos \alpha \cdot \mu_0 \left[\left(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha_m \right) \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha_R \frac{\left(\frac{B_0^2}{\mu_0^2} \sin^2 \alpha_m - \frac{B_0^2}{\mu_0^2} \sin^2 \alpha \right)}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right] - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha \right] \\ \ddot{\alpha} &= \frac{1}{J} \left[-B_0 m \sin \alpha + B_0 V \cos \alpha \cdot \mu_0 \left[\left(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha_m \right) \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha_R B_0^2}{2\mu_0^2} (\sin^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha) \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right] - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha \right] \end{aligned}$$

А также для модели параллелограмма

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J} \left[-B_0 m \sin \alpha + B_0 V \mu_0 \left((\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) H_\tau - \frac{1}{3} \alpha_R H_c^2 \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right) \cos \alpha - \right. \\ \left. - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha \right]$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J} \left[-B_0 m \sin \alpha + B_0 V \mu_0 \left((\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha - \frac{1}{3} \alpha_R H_c^2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right) \cos \alpha - \right. \\ \left. - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha \right]$$

От размерной переменной t перейдем к безразмерной переменной v по формуле $\omega_0(t - t_0) = v$, где $\omega_0 = 2\pi/T$, T – характерное время. Чтобы сделать эту замену, найдем ω_0 . За характерное время T возьмем период гармонических колебаний спутника, на котором установлен только постоянный магнит. Для того, чтобы найти частоту колебаний, запишем уравнение свободных колебаний спутника

$$\ddot{\alpha} + \frac{B_0 m}{J} \alpha = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{B_0 m}{J}$$

Делаем замену при помощи вспомогательных выражений

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \omega_0 t = \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} t \\ \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dv} \frac{dv}{dt} = \alpha' \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} \\ \ddot{\alpha} = \frac{d}{dt} \dot{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\alpha' \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} \right) = \frac{d}{dv} \left(\alpha' \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} \right) \frac{dv}{dt} = \alpha'' \frac{B_0 m}{J} \end{array} \right.$$

После замены переменных уравнение движения запишется в следующем виде:

1) для модели Релея:

$$\alpha'' \frac{B_0 m}{J} = \frac{1}{J} \left[-B_0 m \sin \alpha + B_0 V \cos \alpha \cdot \mu_0 \left[\left(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha_m \right) \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha_R B_0^2}{2\mu_0^2} (\sin^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha) \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right] - k_1 \alpha' \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} - k_2 \alpha \right] \\ \alpha'' = -\sin \alpha + \frac{V \cos \alpha}{m} \cdot \mu_0 \left[\left(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha_m \right) \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_R B_0^2}{2\mu_0^2} (\sin^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha) \times \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right] - \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}} \alpha' - \frac{k_2}{B_0 m} \alpha$$

2) для модели параллелограмма:

$$\alpha'' \frac{B_0 m}{J} = \frac{1}{J} \left[-B_0 m \sin \alpha + B_0 V \mu_0 \left((\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{1}{3} \alpha_R H_c^2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right) \cos \alpha - \right. \\ \left. - k_1 \alpha \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} - k_2 \alpha \right]$$

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \frac{V \mu_0}{m} \left((\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha - \frac{1}{3} \alpha_R H_c^2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \right) \cos \alpha - \\ - \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}} \alpha' - \frac{k_2}{B_0 m} \alpha$$

Упростим полученные выражения:

1) для модели Релея:

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \frac{V \left(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha_m \right) B_0}{m} \sin \alpha \cos \alpha - \\ - \frac{V \alpha_R B_0^2}{2m \mu_0} \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \cos \alpha (\sin^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha) - \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}} \alpha' - \frac{k_2}{B_0 m} \alpha$$

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \frac{V \left(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R \frac{B_0}{\mu_0} \sin \alpha_m \right) B_0}{2m} \sin 2\alpha - \\ - \frac{V \alpha_R B_0^2}{2m \mu_0} \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \cos \alpha (\sin^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha) - \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}} \alpha' - \frac{k_2}{B_0 m} \alpha$$

2) для модели «параллелограмма»:

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \frac{V \mu_0 (\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) \frac{B_0}{\mu_0}}{m} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{V \mu_0 \frac{1}{3} \alpha_R H_c^2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt}}{m} \cos \alpha - \\ - \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}} \alpha' - \frac{k_2}{B_0 m} \alpha$$

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \frac{V \mu_0 (\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) \frac{B_0}{\mu_0}}{2m} \sin 2\alpha - \frac{V \mu_0 \alpha_R H_c^2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dt}}{3m} \cos \alpha - \\ - \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}} \alpha' - \frac{k_2}{B_0 m} \alpha$$

2.2. Исследование модели Релея

Введем безразмерные параметры

$$\eta_1 = \frac{\mu_{\text{нач}} V B_0}{m}, \quad \eta_2 = \frac{\alpha_R V B_0^2}{2 \mu_0 m}, \quad \eta_3 = \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}}, \quad \eta_4 = \frac{k_2}{B_0 m},$$

тогда получим уравнение движения в безразмерном виде

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \frac{\eta_1}{2} \sin 2\alpha + \eta_2 \sin \alpha_m \cdot \sin 2\alpha - \\ - \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH}{dt} \cos \alpha (\sin^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha) - \eta_3 \alpha' - \eta_4 \alpha$$

Приведем подобные члены

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \left(\frac{\eta_1}{2} + \eta_2 \sin \alpha_m \right) \sin 2\alpha - \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \cos \alpha (\sin^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha) - \\ - \eta_3 \alpha' - \eta_4 \alpha$$

Считая колебания малыми, разложим тригонометрические функции в окрестности $\alpha = 0$

$$\alpha'' = -\alpha + (\eta_1 + 2\eta_2 \sin \alpha_m) \alpha - \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dt} (\alpha_m^2 - \alpha^2) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) - \eta_3 \alpha' - \eta_4 \alpha.$$

Раскроем скобки

$$\alpha'' = -\eta_3 \alpha' - \alpha(1 - \eta_1 + \eta_4) - \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \left(\alpha_m^2 - \alpha^2 - \frac{\alpha_m^2 \alpha^2}{2} \right) + 2\eta_2 \alpha_m \alpha \quad (2.5)$$

Запишем уравнение (2.5) в стандартном виде¹

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'' + (1 - \eta_1 + \eta_4) \alpha = -\eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \left(\alpha_m^2 - \alpha^2 - \frac{\alpha_m^2 \alpha^2}{2} \right) - \eta_3 \alpha' + 2\eta_2 \alpha_m \alpha \\ \lambda^2 = 1 - \eta_1 + \eta_4 \\ \operatorname{ef}(\alpha', \alpha) = -\eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \left(\alpha_m^2 - \alpha^2 - \frac{\alpha_m^2 \alpha^2}{2} \right) - \eta_3 \alpha' + 2\eta_2 \alpha_m \alpha \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.3. Исследование модели «параллелограмма»

Введем безразмерные параметры

$$\eta_1 = \frac{B_0 V (\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c)}{m}, \eta_2 = \frac{\mu_0 V \alpha_R H_c^2}{3m}, \eta_3 = \frac{k_1}{\sqrt{B_0 m J}}, \eta_4 = \frac{k_2}{B_0 m},$$

отличные от введенных в разделе 2.2, но имеющих те же обозначения. Тогда получим уравнение движения в безразмерном виде

$$\alpha'' = -\sin \alpha + \eta_1 \frac{\sin 2\alpha}{2} - \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \cos \alpha - \eta_3 \alpha' - \eta_4 \alpha.$$

Считая колебания малыми, разложим тригонометрические функции в окрестности $\alpha = 0$

$$\alpha'' = -\alpha + \eta_1 \alpha - \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) - \eta_3 \alpha' - \eta_4 \alpha.$$

¹ Здесь и далее под стандартным видом будем понимать уравнение $\alpha'' + \lambda^2 \alpha = \operatorname{ef}(\alpha', \alpha)$

Пренебрежем членами порядка выше первого и запишем оставшиеся члены

$$\alpha'' = -\alpha + \eta_1 \alpha - \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha' - \eta_4 \alpha. \quad (2.7)$$

Перепишем уравнение (2.7) в стандартном виде

$$\begin{cases} \alpha'' + (1 - \eta_1 + \eta_4) \alpha = -\eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha' \\ \lambda^2 = 1 - \eta_1 + \eta_4 \\ \operatorname{ef}(\alpha', \alpha) = -\eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha' \end{cases} \quad (2.8)$$

2.4. Решение уравнений движения (2.6) и (2.8)

В этом параграфе для решения уравнения движения, записанном в стандартном виде, будем использовать метод Ван-дер-Поля [4].

Сделаем замену $\alpha = a \cos \varphi, z = -a\lambda \sin \varphi$. В результате для правой части уравнения в рамках модели Релея получим выражение

$$\operatorname{ef}(-a\lambda \sin \varphi, a \cos \varphi) = -\eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dt} \left(a^2 - a^2 \cos^2 \varphi - \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{2} \right) +$$

$$+ \eta_3 a \lambda \sin \varphi + 2\eta_2 a^2 \cos \varphi$$

Членом $(a^4 \cos^2 \varphi)/2$ можно пренебречь.

Чтобы найти зависимость амплитуды колебаний от времени, подставим это уравнение в уравнение для поиска усредненных величин

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ -\int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi \cdot a^2 \eta_2 \operatorname{sign} \left(\frac{dH_\tau}{dt} \right) d\varphi + \int_0^{2\pi} \eta_3 a \lambda \sin^2 \varphi d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} 2\eta_2 a^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right\}$$

Вычислим входящие сюда интегралы

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Рассмотрим значения sign на периоде от 0 до 2π . Из замены видно, что при увеличении φ от 0 до π угол уменьшается от a до $-a$, а из введенной системы координат следует, что мы «находимся» на верхней ветви петли Релея. Получается добавка к I, следовательно, $\operatorname{sign}(dH_\tau/dv) = -1$. Аналогично, при изменении φ от π до 2π получаем, что $\operatorname{sign}(dH_\tau/dv) = 1$, тогда справедлива цепочка равенств

$$\int_0^{2\pi} \text{sign}\left(\frac{dH_\tau}{dt}\right) \sin^3 \varphi d\varphi = -\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{3}(\sin^2 \varphi \cos \varphi + 2 \cos \varphi) \Big|_0^\pi +$$

$$+ \frac{1}{3}(-\sin^2 \varphi \cos \varphi - 2 \cos \varphi) \Big|_\pi^{2\pi} = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$$

Таким образом, получили уравнение

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{8}{3} \eta_2 \bar{a}^{-2} + \eta_3 \bar{a} \lambda \pi \right), \quad \bar{a}' = -\frac{4\eta_2}{3\pi\lambda} \bar{a}^{-2} - \frac{\eta_3}{2} \bar{a}.$$

Его решение запишем в виде

$$\bar{a}(v) = \frac{1}{C_0 e^{\frac{\eta_3 v}{2}} - 4\eta_2 / 3\pi\lambda\eta_3} = \frac{1}{C_0 e^{\frac{\eta_3 v}{2}} - 8\eta_2 / (3\pi\eta_3 \sqrt{1 + \eta_4 - \eta_1})}.$$

Найдем постоянную C_0 . Пусть $v = 0$ $\bar{a}(v) = a_0$, тогда, подставляя эти начальные условия, получаем

$$a_0 = \frac{1}{C_0 - 8\eta_2 / (3\pi\eta_3 \sqrt{1 + \eta_4 - \eta_1})} \Rightarrow \frac{1}{a_0} = C_0 - \frac{8\eta_2}{3\pi\sqrt{1 + \eta_4 - \eta_1} \eta_3}$$

$$C_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{8\eta_2}{3\pi\sqrt{1 + \eta_4 - \eta_1} \eta_3}$$

Итак, имеем

$$\bar{a}(v) = \frac{1}{\frac{1}{a_0} e^{\frac{\eta_3 v}{2}} + \frac{8\eta_2}{3\pi\sqrt{1 + \eta_4 - \eta_1} \eta_3} \left(e^{\frac{\eta_3 v}{2}} - 1 \right)}$$

Возвращаясь к переменной t , получаем

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{\frac{1}{a_0} e^{\frac{\eta_3}{2} \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} t} + \frac{8\eta_2}{3\pi\sqrt{1 + \eta_4 - \eta_1} \eta_3} \left(e^{\frac{\eta_3}{2} \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} t} - 1 \right)}$$

Проведем аналогичные выкладки для модели «параллелограмма». Правая часть уравнения в стандартном виде выглядит следующим образом:

$$\text{ef}(-a\lambda \sin \varphi, a \cos \varphi) = -\eta_2 \text{sign} \frac{dH}{dv} + \eta_3 a \lambda \sin \varphi$$

Чтобы найти зависимость амплитуды колебаний от времени, подставим это выражение в усредненное уравнение

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \varphi \left(-\eta_2 \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \right) d\varphi + \int_0^{2\pi} \eta_3 a \lambda \sin^2 \varphi d\varphi \right\}$$

Вычислим интегралы входящие сюда квадратуры. Второй интеграл имеет вид $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$. Рассмотрим значения sign на периоде от 0 до

2π . Из замены видно, что при увеличении φ от 0 до π угол уменьшается от a до $-a$, а из введенной системы координат следует, что мы «находимся» на верхней ветви петли Релея. Получается добавка к I, следовательно $\text{sign}(dH_\tau/dv) = -1$. Аналогично, при изменении φ от π до 2π : $\text{sign}(dH_\tau/dv) = 1$.

$$\int_0^{2\pi} \text{sign}\left(\frac{dH_\tau}{dt}\right) \sin \varphi d\varphi = -\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \cos \varphi \Big|_0^\pi - \cos \varphi \Big|_\pi^{2\pi} = -2 - 2 = -4$$

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left(4\eta_2 + \frac{\eta_3 \bar{a}}{2} \lambda \pi \right) = -\frac{2\eta_2}{\pi\lambda} - \frac{\eta_3 \bar{a}}{\lambda}$$

Решение этого уравнения запишется в виде

$$\bar{a} = -\frac{2\eta_2}{\pi\eta_3} + C \exp\left(-\frac{\eta_3}{\lambda} v\right)$$

Найдем C . Пусть $v = 0$ $\bar{a}(v) = a_0$, подставляем начальные значения

$$a_0 = -\frac{2\eta_2}{\pi\eta_3} + C \Rightarrow C = a_0 + \frac{2\eta_2}{\pi\eta_3}$$

$$\bar{a} = -\frac{2\eta_2}{\pi\eta_3} + \left(a_0 + \frac{2\eta_2}{\pi\eta_3} \right) \exp\left(-\frac{\eta_3}{\lambda} v\right) = \frac{2\eta_2}{\pi\eta_3} \left(\exp\left(-\frac{\eta_3}{\lambda} v\right) - 1 \right) + a_0 \exp\left(-\frac{\eta_3}{\lambda} v\right)$$

Возвращаясь к переменной t , получаем окончательно

$$\bar{a}(t) = \frac{2\eta_2}{\pi\eta_3} \left(\exp\left(-\frac{\eta_3}{\lambda} \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} t\right) - 1 \right) + a_0 \exp\left(-\frac{\eta_3}{\lambda} \sqrt{\frac{B_0 m}{J}} t\right)$$

2.5. Анализ решения уравнения движения

Теперь, когда получено уравнение движения, нужно разобраться, как влияет демпфирующий стержень на движение спутника и какое магнитное поле нужно создать, чтобы влияние стержня было достаточно заметным. За затухание колебаний за счет гистерезиса в нашем уравнении отвечает параметр η_2 .

Будем исследовать отношение амплитуд $k = (a_{v_0} |_{\eta_2=0}) / (a_{v_0} |_{\eta_2 \neq 0})$ в момент v_0 без затухания на гистерезис (в числителе) и с затуханием (в знаменателе) для модели Релея. После подстановки выражений для амплитуд получаем

$$k = \frac{\frac{1}{\frac{1}{a_0} e^{\frac{\eta_3 v_0}{2}}}}{\frac{1}{\frac{1}{a_0} e^{\frac{\eta_3 v_0}{2}} + \frac{8\eta_2}{3\pi\eta_3\sqrt{1+\eta_4-\eta_1}} \left(e^{\frac{\eta_3 v_0}{2}} - 1 \right)}} = 1 + \frac{8\eta_2 a_0}{3\pi\eta_3\sqrt{1+\eta_4-\eta_1}} \left(1 - e^{-\frac{\eta_3 v_0}{2}} \right)$$

Построим график зависимости k от индукции магнитного поля, подставив численные значения параметров для реальной модели и взяв B_0 за переменную (рис.7).

Коэффициент упругости подвеса найдем из условия - пусть период колебаний диска диаметром 30 см и массой 200 г равен 1 мин. Запишем уравнение колебаний диска $J\ddot{\alpha} + k_2\alpha = 0 \Rightarrow \omega^2 = k_2/J$. С другой стороны $\omega = 2\pi/T, J = mR^2/2$. Отсюда можем найти коэффициент упругости

$$k_2 = \omega^2 J = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{mR^2}{2} = \frac{2\pi^2 mR^2}{T^2} \approx 7.85 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right).$$

Коэффициент вязкого трения о воздух найдем, зная, что колебания того же диска затухают за 1 час (возьмем начальную амплитуду 180° , конечную 1°):

$$\ddot{\varphi} + (2\delta)\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi(t) = Ae^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$A_0 = 180^\circ, A_k = 1^\circ, 2\delta = \frac{k_1}{J}, t = 3600\text{с}$$

$$1 = 180e^{-\frac{k_1}{2J}3600} \Rightarrow k_1 = 2J \frac{\ln 180}{3600} = 2 \frac{mR^2}{2} \frac{\ln 180}{3600} \approx 6.5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} \right)$$

Значения для остальных параметров возьмем такие, чтобы они соответствовали реальному спутнику типа MUNIN,

$$\alpha_R = 3 \cdot 10^2 (\text{м} \cdot \text{А}); \quad V = 0.5 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3); \quad a_0 = 0.1;$$

$$\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} (\text{Гн/м}); \quad m = 0.3 \cdot (\text{А} \cdot \text{м}^2); \quad k_2 = 7.85 \cdot 10^{-6} (\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2);$$

$$\mu_{\text{нач}} = 20000; \quad k_1 = 6.5 \cdot 10^{-6} (\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}); \quad J = 0.05 (\text{кг} \cdot \text{м}^2);$$

$$t = 1800\text{с}$$

Перед построением графика вспомним, что безразмерные параметры также являются функциями индукции магнитного поля

$$k(B_0) = 1 + \frac{8\eta_2(B_0)a_0}{3\pi\sqrt{1+\eta_4(B_0)-\eta_1(B_0)}\eta_3(B_0)} \left(1 - e^{-\frac{\eta_3(B_0)v_0(B_0)}{2}} \right)$$

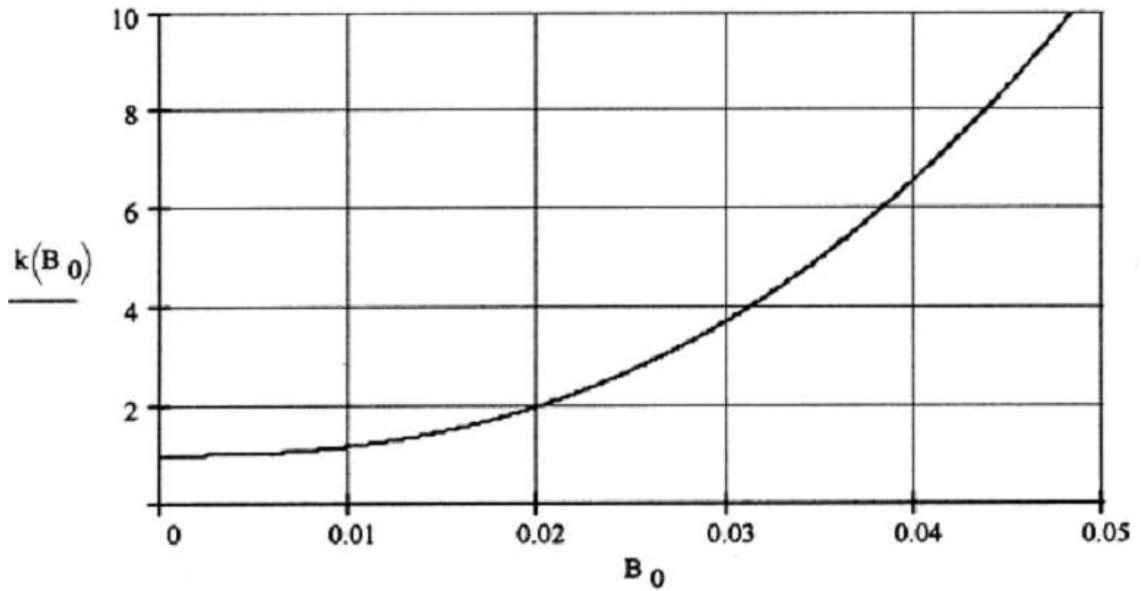


Рис.7. График зависимости k от индукции магнитного поля

Приведем детальный график в окрестности $k=2$ (рис.8).

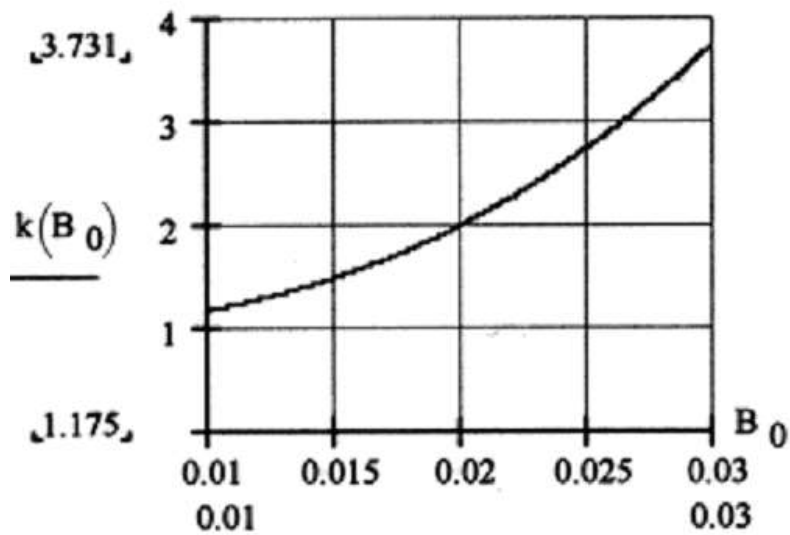


Рис.8. График зависимости k от индукции B_0 в окрестности значений $k=2$
 $k(0.01)=1.175$; $k(0.02)=1.991$; $k(0.03)=3.731$

Посмотрим, как меняется амплитуда колебаний при $B_0=0.02$ Тл, когда есть затухание за счет гистерезиса ($\alpha_R=300$) и когда его нет ($\alpha_R=0$), то есть когда затухание происходит только за счет вязкого трения (рис.9).

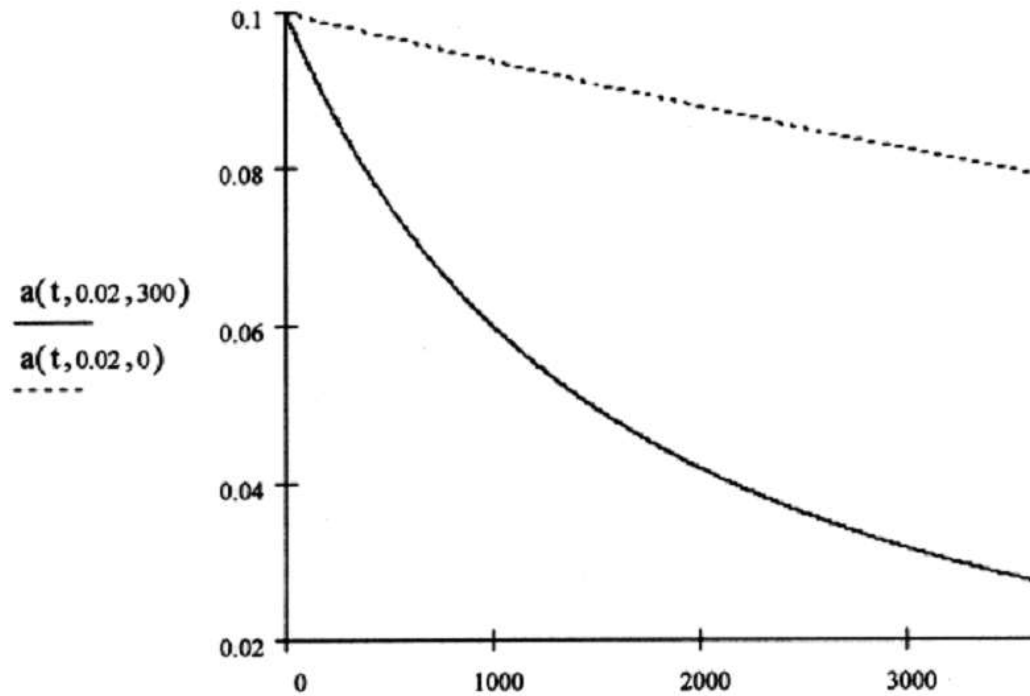


Рис.9. Зависимость амплитуды колебаний при $B_0=0.02$ Тл с затуханием и без затухания

Из приведенных графиков видно, что при индукции магнитного поля порядка $2 \cdot 10^{-2}$ Тл и более влияние гистерезиса на затухание колебаний становится достаточно заметным. Это говорит о том, что для испытаний на Земле необходимо искусственно создавать магнитное поле, поскольку значение индукции магнитного поля Земли имеет порядок 10^{-4} Тл.

3. Исследование движения намагниченного стержня в подвесе

3.1. Объект исследования

Будем рассматривать стержень из магнитомягкого материала, находящийся на упругом подвесе во внешнем магнитном поле (рис.10). Считаем, что вектор индукции внешнего магнитного поля направлен перпендикулярно оси подвеса. В положении равновесия подвеса ось стержня перпендикулярна вектору напряженности магнитного поля. Считается, что стержень совершает колебания в плоскости, перпендикулярной оси подвеса.

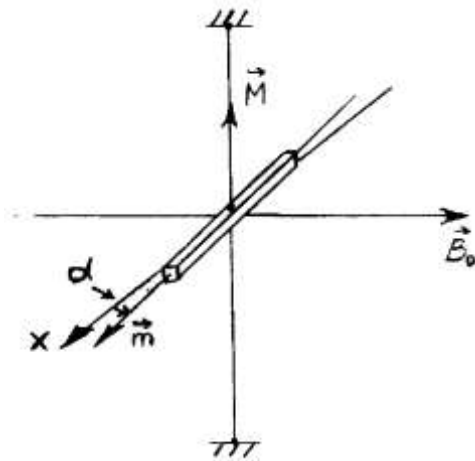


Рис.10. Стержень, закрепленный на упругой нити во внешнем магнитном поле

Рассмотрим следующую систему осей: направление оси B_0 совпадает с направлением вектора индукции внешнего магнитного поля; ось M направлена вверх вдоль оси подвеса; ось x перпендикулярна осям B_0 и M , направлена вдоль оси стержня в положении равновесия и, соответственно дополняет оси B_0 и M до правой тройки. Запишем уравнение движения стержня

$$\vec{M} = \vec{m}(\alpha) \times \vec{B}_0 - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha, \quad (3.1)$$

где M – вектор, удовлетворяющий условию $|M|=J\ddot{\alpha}$; J – экваториальный момент инерции стержня; α – угол между осью x и вектором магнитного момента стержня; B_0 – индукция внешнего магнитного поля; $m(\alpha)$ – магнитный момент стержня; k_1 – коэффициент вязкого трения; k_2 – коэффициент упругости подвеса.

Перепишем уравнение (3.1) в проекциях на оси x , B_0 , M в соответствии с рис.10 и рис.11

$$J\ddot{\alpha} = mB_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha. \quad (3.2)$$

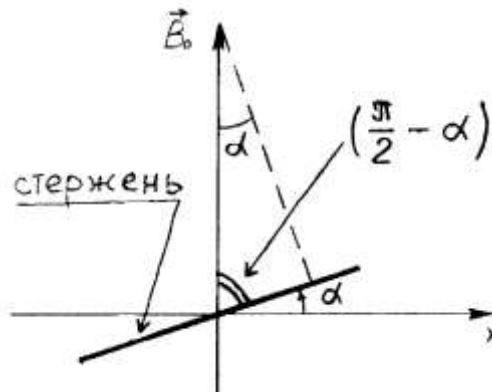


Рис.11. Расположение стержня при отклонении от положения равновесия на угол α

Учитывая, что магнитный момент выражается через объем и намагниченность стержня по формуле (2.2), получим уравнение

$$J\ddot{\alpha} = B_0 V l \cos \alpha - k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha. \quad (3.3)$$

Намагниченность стержня I является функцией от угла α и зависит от выбранной модели гистерезиса, $I = f(H_\tau)$, где H_τ – проекция H_0 (напряженности внешнего магнитного поля) на ось стержня: $H_\tau = H_0 \sin \alpha$ или $H_\tau = (B_0/\mu_0) \sin \alpha$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

3.2. Исследование уравнений движения в рамках различных моделей гистерезиса

3.2.1. Уравнения движения в безразмерном виде

Вернемся к уравнению движения стержня (3.3). За характерное время возьмем период колебаний стержня при наличии только упругого подвеса (то есть без воздуха и магнитного поля), которые описываются уравнением $\ddot{\alpha} + k_2 \alpha / J = 0$. Для этого уравнения $\omega_0 = \sqrt{k_2 / J}$. Перейдем к безразмерному времени по формуле

$$v = \omega_0 t = t \sqrt{\frac{k_2}{J}}, \quad (3.4)$$

тогда $\dot{\alpha} = \alpha' \sqrt{k_2 / J}$, $\ddot{\alpha} = \alpha'' k_2 / J$.

Уравнение движения (3.3), выраженное через безразмерное время по формуле (3.4), запишется так:

$$\alpha'' = \frac{B_0 V I}{k_2} \cos \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}} \alpha' - \alpha. \quad (3.5)$$

Подставляя в уравнение (3.5) выражения для намагниченности стержня вначале в модели Релея (1.4), а затем в модели «параллелограмма» (1.6), получим уравнения движения, выраженные через проекцию на стержень вектора напряженности внешнего магнитного поля H_τ :

1) для модели Релея

$$\alpha'' = \frac{B_0 V}{k_2} [(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_m) H_\tau - \frac{\alpha_R}{2} (H_m^2 - H_\tau^2) \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv}] \cos \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}} \alpha' - \alpha \quad (3.6)$$

2) для модели «параллелограмма»

$$\alpha'' = \frac{B_0 V}{k_2} [(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) H_\tau - \frac{\alpha_R H_c^2}{3} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv}] \cos \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}} \alpha' - \alpha \quad (3.7)$$

3.2.2. Исследование уравнения движения в рамках модели Релея

Продолжим решение уравнения (3.6) для модели Релея. Подставляя $H_\tau = (B_0/\mu_0)\sin\alpha$ (см. раздел 2) и $H_m = (B_0/\mu_0)\sin\alpha_m$, где α_m – амплитуда колебаний, получим

$$\alpha'' = \frac{B_0 V}{k_2} (\mu_{\text{нач}} + \alpha_R \frac{B_0}{\mu_0} \sin\alpha_m) \frac{B_0}{\mu_0} \sin\alpha \cos\alpha - \frac{B_0 V}{k_2} \frac{\alpha_R}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0^2} (\sin^2\alpha_m - \sin^2\alpha) \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \cos\alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}} \alpha' - \alpha$$

Преобразуем это уравнение к более удобному для дальнейшей работы виду

$$\alpha'' = \frac{B_0^2 V \mu_{\text{нач}}}{k_2 \mu_0} \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{B_0^3 V \alpha_R}{k_2 \mu_0^2} \sin\alpha_m \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{B_0^3 V \alpha_R}{k_2 \mu_0^2} \times \frac{(\sin^2\alpha_m - \sin^2\alpha)}{2} \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \cos\alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}} \alpha' - \alpha \quad (3.8)$$

Введем безразмерные параметры

$$\eta_1 = \frac{B_0^2 V \mu_{\text{нач}}}{k_2 \mu_0}, \eta_2 = \frac{B_0^3 V \alpha_R}{k_2 \mu_0^2}, \eta_3 = \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}}. \quad (3.9)$$

и запишем уравнение (3.8) в безразмерном виде

$$\alpha'' = \eta_1 \frac{\sin 2\alpha}{2} + \eta_2 \sin\alpha_m \frac{\sin 2\alpha}{2} - \eta_2 \frac{(\sin^2\alpha_m - \sin^2\alpha)}{2} \times \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \cos\alpha - \eta_3 \alpha' - \alpha \quad (3.10)$$

Будем считать параметры $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ll 1$, тогда есть основание полагать, что уравнение (3.10) может допускать решение при $|\alpha| \ll 1$. Разложим тригонометрические функции в уравнении (3.10) в окрестности $\alpha=0$ и получим

$$\alpha'' = \eta_1 \alpha + \eta_2 \alpha_m \alpha - \eta_2 \frac{\alpha_m^2 - \alpha^2}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha' - \alpha. \quad (3.11)$$

Проанализируем получившееся уравнение.

- Член $\eta_1 \alpha$ зависит от начальной магнитной проницаемости материала стержня. Он создает опрокидывающий момент, следовательно, необходимо задать некоторые ограничения на параметры модели, поскольку, например, если опрокидывающий момент будет больше или равен восстанавливающему, то система не вернется в состояние с $\alpha=0$.

- Член $\eta_2 \alpha_m \alpha$ зависит от постоянной Релея и также создает опрокидывающий момент (добавка, связанная с увеличением магнитной проницаемости материала по мере увеличения H_τ , описывает увеличение наклона петли Релея – см. (1.1).

- Член $-\eta_2 \frac{\alpha_m^2 - \alpha^2}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv}$ также зависит от постоянной Релея (добавка или уменьшение магнитной проницаемости в зависимости от того, по какой ветви петли Релея (нисходящей или восходящей), мы «движемся» в данный момент) – отвечает за затухание колебаний из-за гистерезиса.
- Член $-\eta_3 \alpha'$ зависит от вязкости воздуха, отвечает за затухание колебаний, вызванное вязким трением (в результате работы мы должны оценить допустимый коэффициент вязкости воздуха, при котором будет заметен эффект затухания колебаний за счет гистерезисного стержня).
- Член $-\alpha$ создает восстанавливающий момент, вызванный действием упругого подвеса.
-

3.2.3. Некоторые ограничения в модели Релея

Рассмотрим возникающие ограничения в модели Релея на амплитуду угла α и упругость подвеса.

1) *Амплитуда угла α* . Поскольку минимальная напряженность внешнего магнитного поля – это напряженность магнитного поля Земли $H_{\text{земли}} \approx 20$ А/м, то, учитывая, что $H_\tau = H_0 \sin \alpha$, и коэрцитивная сила, например, 4-79-пермаллоя $H_c \approx 4$ А/м (см. Приложение), получим ограничение на угол α : $\sin \alpha_c = H_c / H_{\text{земли}} \approx 0.2 \Rightarrow \alpha_c \approx 11^\circ$. Таким образом, получаем, что для материала 4-79-пермаллой при амплитудах $\alpha_m > 11^\circ$ модель Релея становится неприменимой. Если мы создаем искусственное магнитное поле (например, с помощью катушек Гельмгольца) такое, что, к примеру, напряженность суммарного поля в 10 раз больше поля Земли, то максимальная амплитуда угла отклонения, при которой модель Релея будет применима, становится в 10 раз меньше (в случае 4-79-пермаллоя – около 1°).

2) *Упругость подвеса и объем стержня*. Ограничение на упругость подвеса вытекает из условия малости опрокидывающего момента, который в уравнении (3.10) описан членами, содержащими параметры η_1, η_2 . Рассмотрим параметр η_1 :

$$\eta_1 = \frac{B_0^2 V \mu_{\text{нач}}}{k_2 \mu_0} \ll 1 \Rightarrow k_2 \gg \frac{B_0^2 V \mu_{\text{нач}}}{\mu_0}.$$

Подставим в соотношение для k_2 следующие значения параметров: $\mu_{\text{нач}} = 20000$ (см. Приложение); $B_0 = B_{\text{земли}} \approx 2.5 \cdot 10^{-5}$ Тл ($H_{\text{земли}} \approx 20$ А/м, $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, $B_{\text{земли}} = \mu_0 H_{\text{земли}}$); V вычислим, полагая размеры стержня $l = 20$ см, $d = 1$ мм [5]: $V = 2 \cdot 10^{-7}$ м³. Получим, что при напряженности магнитного поля, равной напряженности магнитного

поля Земли, $k_2 \gg 2 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$. Из вышеизложенного видно, что при увеличении напряженности внешнего магнитного поля в 10 (100) раз, упругость подвеса необходимо увеличивать в 100 (10000) раз. Из выражения для параметра η_1 также видно, что вместо увеличения в 100 (10000) коэффициента упругости подвеса можно, соответственно в 100 (10000) раз уменьшать объем стержня.

Теперь проанализируем параметр η_2

$$\eta_2 = \frac{B_0^3 V \alpha_R}{k_2 \mu_0^2} \ll 1 \Rightarrow k_2 \gg \frac{B_0^3 V \alpha_R}{\mu_0^2}.$$

Здесь $\alpha_R = 350000$ (см. Приложение); $B_0 = B_{\text{земли}} \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$, $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$, $V = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3$. Получим, что при напряженности магнитного поля, равной напряженности магнитного поля Земли, $k_2 \gg 7 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$.

Поскольку в выражение для параметра η_2 входит индукция внешнего магнитного поля в третьей степени (а не во второй, как в η_1), то при изменении напряженности поля на один порядок, придется менять значения упругости или объема стержня на три порядка.

3.2.4. Дальнейшее исследование уравнения движения в рамках модели Релея

Продолжим исследование уравнения движения в рамках модели Релея. Перейдем к исследованию уравнения движения, записанного в безразмерном виде (3.11), методом Ван-дер-Поля. Для этого необходимо уравнение (3.11) переписать в стандартном виде $\alpha'' + \lambda^2 \alpha = \varepsilon f(\alpha', \alpha)$, где $|\varepsilon| \ll 1$. В результате получим

$$\begin{cases} \alpha'' + \alpha = \eta_1 \alpha + \eta_2 \alpha_m \alpha - \eta_2 \frac{\alpha_m^2 - \alpha^2}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha', \\ \lambda^2 = 1, \\ \varepsilon f(\alpha', \alpha) = \eta_1 \alpha + \eta_2 \alpha_m \alpha - \eta_2 \frac{\alpha_m^2 - \alpha^2}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha'. \end{cases} \quad (3.12)$$

Здесь члены $\eta_1 \alpha$ и $\eta_2 \alpha_m \alpha$ находятся в правой части. Ниже при интегрировании по периоду они дают нуль. Это значит, что опрокидывающий момент полагается малым. Если мы не хотим пренебрегать опрокидывающим моментом, то эти два члена нужно перенести в левую часть. Тогда $\lambda^2 = 1 - \eta_1 - \eta_2 \alpha_m$ ниже в уравнении (3.15) войдет в член $\eta_2 / 3\pi$ следующим образом: $\eta_2 / (3\pi \lambda)$ (при амплитудах порядка 1° и значениях η_1 и η_2 , оцененных выше, это дает поправку около 2%, при амплитудах порядка 10° – 5%).

Для решения системы (3.12) нужно решить уравнение

$$\bar{a}' = -\frac{\varepsilon}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot f(-a\lambda \sin \varphi, a \cos \varphi) d\varphi$$

Введем стандартную замену переменных из метода Ван-дер-Поля: $\alpha = a \cos \varphi, z = -a\lambda \sin \varphi$, где a, φ – новые переменные – функции времени. После такой замены переменных получаем

$$\varepsilon f(-a \sin \varphi, a \cos \varphi) = \eta_1 a \cos \varphi + \eta_2 a^2 \cos \varphi - \eta_2 \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} + \\ + \eta_3 a \sin \varphi.$$

Тогда уравнение для усредненной по быстрой фазе амплитуды на периоде запишется так:

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \eta_1 a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \eta_2 a^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} \eta_2 \frac{a^2 \sin^3 \varphi}{2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} d\varphi + \int_0^{2\pi} \eta_3 a \sin^2 \varphi d\varphi \right]. \quad (3.13)$$

Рассмотрим значения sign на периоде от 0 до 2π . Из замены видно, что при увеличении φ от 0 до π угол уменьшается от a до $-a$, а из введенной системы координат следует, что мы «находимся» на верхней ветви петли Релея. Получается добавка к I , следовательно $\text{sign}(dH_\tau/dv) = -1$. Аналогично, при изменении φ от π до 2π : $\text{sign}(dH_\tau/dv) = 1$. После интегрирования правой части уравнения (3.13) получим

$$a' = -\frac{2\eta_2}{3\pi} a^2 - \frac{\eta_3}{2} a. \quad (3.14)$$

Решая уравнение (3.14), получаем выражение для амплитуды

$$a = \frac{\frac{\eta_3}{2}}{C_0 \exp\left(\frac{\eta_3}{2} v\right) - \frac{2}{3\pi} \eta_2}, \quad (3.15)$$

где C_0 – константа, зависящая от начальной амплитуды. Подставляем начальную амплитуду $a_{v=0} = a_0$. Тогда $C_0 = 1/a_0 + 2\eta_2/3\pi\eta_3$. Следовательно,

$$a(v) = \frac{a_0}{\exp\left(\frac{\eta_3}{2} v\right) + \frac{2a_0\eta_2}{3\pi\eta_3} \left(\exp\left(\frac{\eta_3}{2} v\right) - 1\right)}. \quad (3.16)$$

Если в (3.16) разложить экспоненты до первой степени аргумента включительно, то получим следующую зависимость:

$$a(v) = \frac{a_0}{1 + \frac{\eta_3}{2} v + \frac{a_0\eta_2}{3\pi} v} \quad (3.17)$$

ИЛИ

$$a(t) = \frac{a_0}{1 + \left(\frac{\eta_3}{2} \sqrt{\frac{k_2}{J}} \right) t + \left(\frac{a_0 \eta_2}{3\pi} \sqrt{\frac{k_2}{J}} \right) t}$$

Из уравнения (3.14) следует ограничение на вязкость воздуха. Чтобы демпфирование от гистерезиса было заметно по сравнению с вязким трением, необходимо выполнение следующего условия:

$$a \frac{2\eta_2}{3\pi} \sim \frac{\eta_3}{2}.$$

Таким образом, для вязкого трения получаем $k_1 \sim 4a\eta_2 \sqrt{k_2 J} / 3\pi$. Оценим k_1 , подставляя следующие значения параметров: $a = 0.2$ (10°); $k_1 = 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$ (см. ограничения выше); $\eta_2 = 0.1$; $J = \text{мл}^2 / 12 = \rho V l^2 / 12 = 5.81 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Тогда для вязкого трения получаем $k_1 \sim 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$.

3.2.5. Исследование уравнения движения в рамках модели «параллелограмма»

Рассмотрим ограничение на амплитуду колебаний для модели «параллелограмма». Аналогично тому, как это было сделано для модели Релея, вычислим амплитуду колебаний стержня, больше которой модель «параллелограмма» будет применима. Подставляя значения для геомагнитного поля $H_{\text{земли}} \approx 20 \text{ А/м}$ и напряженности поля, при которой происходит насыщение 4-79-пермаллоя $H_s \approx 12 \text{ А/м}$ (см. Приложение), в выражение $H_\tau = H_{\text{внеш}} \sin \alpha$, получим ограничение на угол α $\sin \alpha_s = H_s / H_{\text{земли}} \approx 0.6 \Rightarrow \alpha_s \approx 37^\circ$. Таким образом, получаем, что для материала 4-79-пермаллой при амплитудах $\alpha_m > 37^\circ$ модель «параллелограмма» становится неприменимой.

Продолжим решение уравнения движения в рамках модели «параллелограмма» (3.7)

$$\alpha'' = \frac{B_0 V}{k_2} [(\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) H_\tau - \frac{\alpha_R H_c^2}{3} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv}] \cos \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}} \alpha' - \alpha.$$

Подставляя в это уравнение $H_\tau = (B_0 / \mu_0) \sin \alpha$, получим

$$\alpha'' = \frac{B_0^2 V (\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c) \sin 2\alpha}{k_2 \mu_0} - \frac{B_0 V \alpha_R H_c^2}{3 k_2} \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \cos \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}} \alpha' - \alpha. \quad (3.18)$$

Введем безразмерные параметры

$$\eta_1 = \frac{B_0^2 V (\mu_{\text{нач}} + \alpha_R H_c)}{k_2 \mu_0}, \eta_2 = \frac{B_0 V \alpha_R H_c^2}{3 k_2}, \eta_3 = \frac{k_1}{\sqrt{k_2 J}}. \quad (3.19)$$

Запишем уравнение (3.18) в безразмерном виде

$$\alpha'' = \eta_1 \frac{\sin 2\alpha}{2} - \eta_2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \cos \alpha - \eta_3 \alpha' - \alpha. \quad (3.20)$$

Будем считать параметры $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ll 1$. Тогда есть основание полагать, что уравнение (3.20) допускает решение при $|\alpha| \ll 1$. Разложив тригонометрические функции в уравнении (3.20) в окрестности $\alpha=0$, получим

$$\alpha'' = \eta_1 \alpha - \eta_2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha' - \alpha. \quad (3.21)$$

Перейдем к исследованию уравнения движения, записанного в безразмерном виде (3.21), методом Ван-дер-Поля. Записываем уравнение (3.21) в стандартном виде

$$\begin{cases} \alpha'' + \alpha = \eta_1 \alpha - \eta_2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha', \\ \lambda^2 = 1, \\ \text{ef}(\alpha', \alpha) = \eta_1 \alpha - \eta_2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} - \eta_3 \alpha', \end{cases} \quad (3.22)$$

При усреднении период разбивается на несколько частей:

при $|\alpha| > \alpha_c$ таких, что $|H_\tau| > H_c$, используем модель, описанную уравнениями (3.18 – 3.22), то есть в качестве модели гистерезиса берем параллелограмм (рис. 4);

при $|\alpha| < \alpha_c$ таких, что $|H_\tau| < H_c$, используем модель Релея (рис. 3).

при $|H_\tau| = H_c$, разрыва нет, поскольку при выборе коэффициента k перед знаком sign в модели «параллелограмма» использовалась связка через равенство потерь энергии на гистерезис в рамках моделей Релея и «параллелограмма».

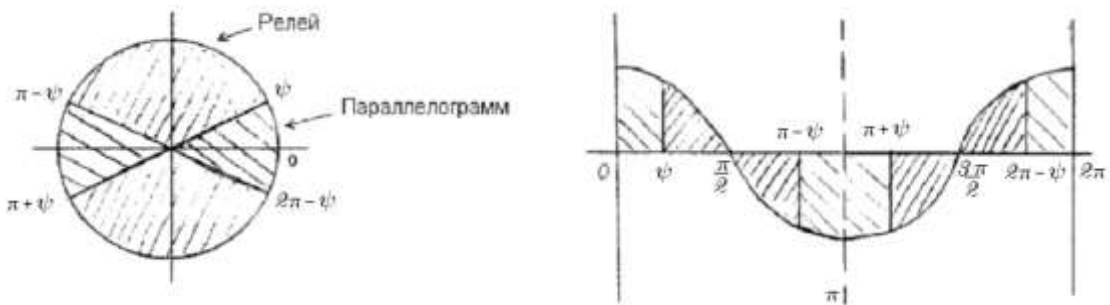


Рис.12. Точки перехода от модели Релея к модели «параллелограмма» на интервале $(0; 2\pi)$

При изменении фазы φ от 0 до 2π получаются точки ψ , где заменяем модель (рис. 12):

при $\varphi \in (0; \psi) \cup (\pi - \psi; \pi + \psi) \cup (2\pi - \psi; 2\pi) = \Psi_1$ используется модель «параллелограмма»;

при $\varphi \in (\psi; \pi - \psi) \cup (\pi + \psi; 2\pi - \psi) = \Psi_2$ – модель Релея.

Чтобы не путать безразмерные параметры в моделях Релея и «параллелограмма», параметрам в модели Релея будет приписывать сверху индекс R. Уравнение для усреднения по быстрой фазе запишется следующим образом:

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Psi_1} \eta_1 \alpha \cos \varphi \sin \varphi d\varphi - \int_{\Psi_1} \eta_2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \sin \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \eta_3 \alpha \sin^2 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + (\eta_1^R a + \eta_2^R a^2) \int_{\Psi_2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - \frac{\eta_2^R a^2}{2} \int_{\Psi_2} \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \sin^3 \varphi d\varphi \right].$$

Интегралы, содержащие произведение синуса на косинус на Ψ_1 и Ψ_2 обращаются в нуль. Тогда имеем

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi} \left[\eta_3 a \pi - \int_{\Psi_1} \eta_2 \cdot \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \sin \varphi d\varphi - \frac{\eta_2^R a^2}{2} \int_{\Psi_2} \text{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \sin^3 \varphi d\varphi \right],$$

$\psi = \varphi_c \Rightarrow \alpha_c = a \cos \varphi_c \Rightarrow \cos \psi = \alpha_c / a$ (α_c см. выше в ограничениях на модель Релея). После интегрирования получаем

$$\bar{a}' = -\frac{\eta_3}{2} a - \frac{2\eta_2}{\pi} (1 - \cos \psi) - \frac{\eta_2^R}{3\pi} a^2 \cos \psi (3 - \cos^2 \psi), \quad (3.23)$$

где $\cos \psi$ находится следующим образом $\psi = \varphi_c \Rightarrow \alpha_c = a \cos \varphi_c \Rightarrow \cos \psi = \alpha_c / a$.

Из уравнения (3.23) видно, что если $\psi = 0$, то есть амплитуда $a = \alpha_c$ (точка перехода с одной модели на другую), то уравнение (3.23) преобразуется к виду (3.13), то есть совпадает с уравнением для амплитуды в модели Релея.

Из уравнения (3.23) следует ограничение на вязкость воздуха. Чтобы демпфирование от гистерезиса было заметно по сравнению с вязким трением, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{\eta_3}{2} a \sim \frac{2\eta_2}{\pi} (1 - \cos \psi) + \frac{\eta_2^R}{3\pi} a^2 \cos \psi (3 - \cos^2 \psi). \quad (3.24)$$

Подставим сюда следующие значения параметров: $a = 0.5$ (30°); $\eta_2^R = 0.1$ (см. выше); $k_2 = 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$ (см. выше); $J = \text{мл}^2 / 12 = \rho V l^2 / 12 = 5.81 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $\alpha_R = 350000$ (см. Приложение); $\eta_2 = 0.084$; $\cos \psi = \alpha_c / a = 0.2 / 0.5 = 0.4$. Получаем $\eta_3 a / 2 \sim 0.033$. Тогда для вязкого трения имеем следующую оценку: $k_1 \sim 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$.

3.2.6. Исследование уравнения движения в рамках модели насыщения

В случае модели «насыщения» период, на котором происходит интегрирование, разбивается на множества следующим образом:

при $\varphi \in (\theta; \psi) \cup (\pi - \psi; \pi - \theta) \cup (\pi + \theta; \pi + \psi) \cup (2\pi - \psi; 2\pi - \theta) = \Psi_1$ – модель «параллелограмма»;

при $\varphi \in (\psi; \pi - \psi) \cup (\pi + \psi; 2\pi - \psi) = \Psi_2$ – модель Релея.

Тогда

$$\bar{a}' = -\frac{1}{2\pi} \left[\eta_3 a \pi - \int_{\Psi_1} \eta_2 \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \sin \varphi d\varphi - \frac{\eta_2^R a^2}{2} \int_{\Psi_2} \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \sin^3 \varphi d\varphi \right] \quad (3.25)$$

Подставим пределы интегрирования в первый интеграл из (3.25), получим

$$\begin{aligned} \bar{a}' = & -\frac{1}{2\pi} \left[\eta_3 a \pi - \int_0^\psi -\eta_2 \sin \varphi d\varphi - \int_{\pi-\psi}^{\pi-\theta} -\eta_2 \sin \varphi d\varphi - \int_{\pi+\theta}^{\pi+\psi} \eta_2 \sin \varphi d\varphi - \right. \\ & \left. - \int_{2\pi-\psi}^{2\pi-\theta} \eta_2 \sin \varphi d\varphi - \frac{\eta_2^R a^2}{2} \int_{\Psi_2} \operatorname{sign} \frac{dH_\tau}{dv} \sin^3 \varphi d\varphi \right]. \end{aligned}$$

После интегрирования получаем уравнение для амплитуды

$$\bar{a}' = -\frac{\eta_3}{2} a - \frac{2\eta_2}{\pi} (\cos \theta - \cos \psi) - \frac{\eta_2^R}{3\pi} a^2 \cos \psi (3 - \cos^2 \psi). \quad (3.26)$$

Здесь $\cos \psi = \alpha_c / a$; $\cos \theta = \alpha_s / a$, где α_c – угол, при котором происходит переход от модели «параллелограмма» к модели Релея; α_s – угол, при котором происходит переход от состояния насыщения к модели «параллелограмма».

Из уравнения (3.25) следует ограничение на вязкость воздуха в рамках модели «насыщения». Чтобы демпфирование от гистерезиса было заметно по сравнению с вязким трением, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{\eta_3}{2} a \sim \frac{2\eta_2}{\pi} (\cos \theta - \cos \psi) + \frac{\eta_2^R}{3\pi} a^2 \cos \psi (3 - \cos^2 \psi). \quad (3.27)$$

Произведем оценку допустимого коэффициента вязкого трения, когда напряженность внешнего магнитного поля равна напряженности геомагнитного поля. Подставим в (3.26) следующие значения параметров: $a = 0.7$ (30°); $\eta_2^R = 0.1$ (см. выше); $k_2 = 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$ (см. выше); $J = ml^2 / 12 = \rho V l^2 / 12 = 5.81 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $\alpha_R = 350000$ (см. Приложение); $\eta_2 = 0.084$; $\cos \psi = \alpha_c / a = 0.29$; $\cos \theta = \alpha_s / a = 0.86$. Получаем $\eta_3 a / 2 \sim 0.031$. Тогда для вязкого трения имеем $k_1 \sim 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$.

Проведем сравнение коэффициентов вязкого трения и упругости нити, полученных выше в результате оценки в рамках моделей Релея, «параллелограмма» и «насыщения», с коэффициентами вязкого трения и упругости нити, вычисленных на основании экспериментальных данных.

Рассмотрим пример: диск диаметром 30 см и массой 200 г подвешен на упругой нити. Период колебаний диска равен 10 сек. Колебания диска затухают от $A_0 = 180^\circ$ до $A_k = 1^\circ$ за $t = 10$ мин.

Коэффициент упругости нити найдем, зная, что $\omega^2 = k_2/J$ для уравнения колебаний $J\ddot{\alpha} + k_2\alpha = 0$. С другой стороны $\omega = 2\pi/T$. Момент инерции диска вычислим по формуле $J = mR^2/2$. Тогда получим

$$k_2 = \frac{2\pi^2 mR^2}{T^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right).$$

Запишем уравнения затухающих колебаний $\ddot{\varphi} + (2\delta)\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$. Его решение имеет следующий вид $\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Из этой формулы получается соотношение для начальной и конечной амплитуды $A_k = A_0 \exp(-k_1 t / (2J))$. Отсюда находим коэффициент вязкого трения

$$k_1 = \frac{mR^2}{t} \ln \frac{A_0}{A_k} \approx 4 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} \right).$$

Если полученный коэффициент вязкого трения считать сравнимым с коэффициентом вязкого трения о воздух для стержня, то в рамках наших предположений достаточно создать разрежение в несколько раз меньше атмосферного, чтобы было заметно затухание колебаний стержня за счет гистерезисных потерь в стержне при напряженности внешнего магнитного поля, равной напряженности геомагнитного поля.

3.3. Алгоритм для вычисления допустимого коэффициента вязкого трения воздуха по заданной напряженности внешнего магнитного поля

Ограничение на вязкость воздуха следует последовательно рассматривать в рамках моделей Релея и «параллелограмма». В рамках модели «насыщения» это делать необязательно, поскольку данная модель отличается от модели «параллелограмма» только тем, что здесь есть участок петли гистерезиса, на котором не происходит демпфирования.

Сначала необходимо обратиться к модели Релея. Ограничение на вязкость воздуха следует из уравнения (3.14)

$$a' = -\frac{2\eta_2}{3\pi} a^2 - \frac{\eta_3}{2} a.$$

Чтобы демпфирование было заметно по сравнению с вязким трением, необходимо выполнение следующего условия:

$$a \frac{2\eta_2}{3\pi} \sim \frac{\eta_3}{2}.$$

Таким образом, для вязкого трения получаем: $k_1 \sim 4a\eta_2\sqrt{k_2J}/3\pi$.

Прежде, чем подставлять в это соотношение значения для η_2 и k_2 , необходимо обратиться к ограничениям на упругость подвеса и объем стержня. Коэффициент k_2 необходимо взять таким, чтобы он удовлетворял оценкам, полученным путем анализа малых параметров η_1

и η_2 . Амплитуда a вычисляется из соотношения $\sin \alpha_c = H_c / H_{\text{внеш}}$, где H_c - коэрцитивная сила для данного материала.

После получения допустимого коэффициента вязкого трения в рамках модели Релея, обратимся к модели «параллелограмма». Ограничение на вязкость воздуха в рамках модели «параллелограмма» следует из уравнения (3.23)

$$\bar{a}' = -\frac{\eta_3}{2}a - \frac{2\eta_2}{\pi}(1 - \cos \psi) - \frac{\eta_2^R}{3\pi}a^2 \cos \psi(3 - \cos^2 \psi).$$

Чтобы демпфирование было заметно по сравнению с вязким трением, необходимо выполнение условия (3.24)

$$\frac{\eta_3}{2}a \sim \frac{2\eta_2}{\pi}(1 - \cos \psi) + \frac{\eta_2^R}{3\pi}a^2 \cos \psi(3 - \cos^2 \psi).$$

Таким образом, учитывая, что $\eta_3 = k_1 / \sqrt{k_2 J}$, для вязкого трения получаем следующую оценку:

$$k_1 \sim \frac{2\sqrt{k_2 J}}{a} \left(\frac{2\eta_2}{\pi}(1 - \cos \psi) + \frac{\eta_2^R}{3\pi}a^2 \cos \psi(3 - \cos^2 \psi) \right).$$

Амплитуда a должна удовлетворять соотношению $\sin \alpha_s = H_s / H_{\text{внеш}}$, где H_s - напряженность внешнего магнитного поля, при которой происходит насыщение данного материала. Коэффициент k_2 необходимо взять таким, чтобы он удовлетворял оценкам, полученным путем анализа малых параметров η_1 и η_2 .

После получения оценок для коэффициента вязкого трения в рамках модели Релея и модели «параллелограмма» достаточно выбрать наибольшую из них.

4. Анализ решения уравнения движения с помощью улучшенной модели

Известно, что при линейном увеличении амплитуды напряженности внешнего поля площадь петли гистерезиса растет нелинейно, и в какой то момент выходит на постоянную величину. Площадь петли гистерезиса за один период равна потери энергии на перемагничивание на том же интервале времени.

Заметим, что площадь петли и коэффициент η_2 оба пропорциональны кубу напряженности внешнего поля. То есть $\eta_2 \propto S_{\text{петли}}$. Тогда формула для отношения амплитуд будет выглядеть следующим образом: $k(B_0) := 1 + \alpha \cdot S \cdot (1 - \exp(-\beta \tau))$.

Чтобы полностью исключить влияние атмосферы на затухание положим $k=10$, то есть S по сравнению с предыдущими вычислениями (в районе 0.02 Тл) выросло в 9 раз.

OutX , Тл	OutY, S _{петли} , 1.0e-003
0.0110	0.0027
0.0161	0.0109
0.0212	0.0247
0.0263	0.0469
0.0314	0.0796
0.0365	0.1246
0.0416	0.1840
0.0467	0.2598
0.0518	0.3541

Табл.1. Зависимость площади петли гистерезиса от амплитуды внешнего магнитного поля

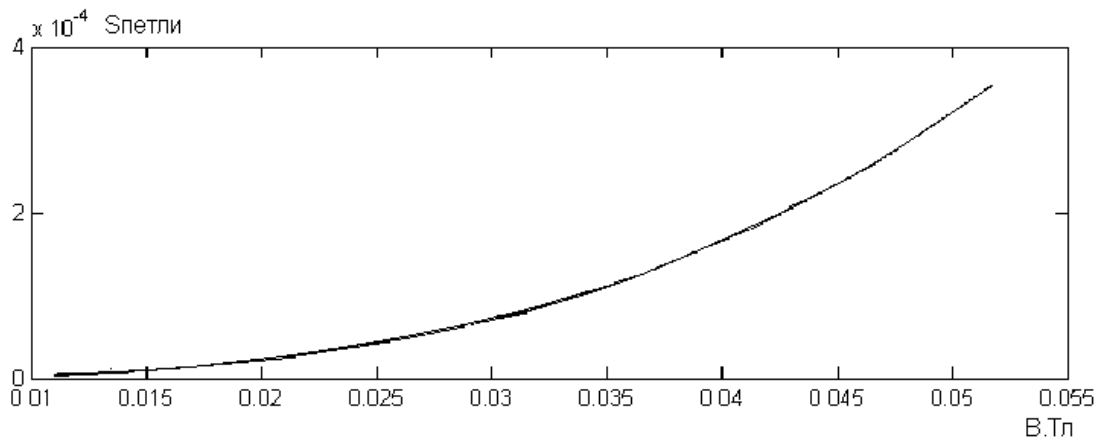


Рис.12. Зависимость площади петли от амплитуды магнитного поля

Из приведенных табл.1 и рис.12 видно, что достаточно взять значение индукции поля, равное 0.04 Тл.

Заключение

В работе рассмотрена механическая система, состоящая из постоянного магнита и гистерезисного стержня из магнитомягкого материала, размещенных на плоском диске, который подвешен на упругой нити во внешнем магнитном поле. В положении равновесия ось стержня перпендикулярна вектору напряженности магнитного поля. Проведен анализ уравнения движения стержня в рамках трех моделей гистерезиса: модели Релея, модели «параллелограмма», модели «насыщения». Численно оценены допустимые параметры модели. Для вычислений в качестве примера использованы данные для 4-79-пермаллоя. Получен искомый алгоритм, позволяющий вычислять допустимый коэффициент вязкого трения воздуха по заданной напряженности внешнего магнитного поля и наоборот. Показано, что подходящим выбором напряженности внешнего магнитного поля можно обеспечить превалирование гистерезисного демпфирования со стороны стержня над демпфированием за счет вязкого трения диска о воздух и,

тем самым, провести анализ динамики спутника в лабораторных условиях.

Приложение

Состав	79% Ni, 17% Fe, 4% Mo
Начальная магнитная проницаемость $\mu_{нач}$	20000
Максимальная магнитная проницаемость	100000
Коэрцитивная сила H_c	0.05 Эрстед (3.98 А/м)
Напряженность магнитного поля, при которой наступает насыщение, H_s	$H_s = 3H_c = 12 \text{ А/м}$
Точка Кюри	460°C
Потери на гистерезис при насыщении	200 эрг / см ³
Электрическое сопротивление	55 мком·см
Плотность ρ	8.72 г/см ³ (8720кг / м ³)
Постоянная Релея α_R	350000

Табл.2. Характеристики материала 4-79-пермаллой

Литература

1. Бозорт Р. Ферромагнетизм. – М.: Издательство иностранной литературы, 1956. – 784 с.
2. Голик И.В. Некоторые условия наземного тестирования пассивной магнитной системы ориентации. – Выпускная квалификационная работа на степень магистра. – М.: МФТИ, 2001. – 27 с.
3. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1989.
4. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 400 с.
5. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Пассивная магнитная система ориентации наноспутника, Космические исследования, 2002, т.40, N 2, с.156-170.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. III. – М.: Наука, 1986.