

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В.Келдыша

**А.И. Игнатов, А.А. Давыдов, В.В. Сазонов**

**АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ МАЛЫМ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ,  
ПОСТРОЕННЫХ НА БАЗЕ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ**

Москва – 2005

### **Аннотация**

Рассмотрены две конфигурации системы маховиков, в которых оси вращения расположены параллельно боковым ребрам четырехгранной и правильной шестигранной пирамиды. Приведены параметрические зависимости для выбора наиболее рационального расположения системы маховиков на космическом аппарате с точки зрения обеспечения максимально широких возможностей управления его угловой скоростью. Построены области возможных значений кинетического момента системы маховиков, с целью оценки возможности их использования в качестве исполнительных органов системы управления малым космическим аппаратом. Рассмотрены возможности каждой из конфигураций системы при отказе одного из маховиков.

**A.I. Ignatov, A.A. Davydov, V.V. Sazonov**

### **THE ANALYSIS OF DYNAMIC CAPABILITIES OF THE CONTROL SYSTEMS BY THE SPACECRAFT BUILT ON THE BASIS OF THE REACTION WHEELS**

#### **Abstract**

There are examined two configurations of the reaction wheels' system in which rotation axes are oriented to on-side to edges of tetrahedral and regular hexahedral pyramids. Parametric relations are adduced for selection of the most rational arrangement of the reaction wheels' system of control on the spacecraft in the view of providing with the maximum wide capabilities of control by its angular rate. Areas of possible values of an angular momentum of the reaction wheels' system are built with the purpose to estimate capability of their use as executive devices of the control system by the spacecraft. Capabilities of each configuration of the system are surveyed at failure of one of the reaction wheels.

## 1. Электромеханические исполнительные органы систем управления малыми космическими аппаратами.

Электромеханические исполнительные органы (ЭМИО) систем управления (СУ) космических аппаратов (КА) предназначены для создания управляющих моментов. Во многих случаях, при создании длительно существующих КА с высокими требованиями к динамике и точности ориентации использованию ЭМИО в составе СУ нет альтернативы. В то же время ЭМИО являются наиболее массивными и энергопотребляющими устройствами СУ, постоянно задействованными в процессе функционирования КА. В связи с этим задачи выбора типа ЭМИО и оптимизации их характеристик являются актуальными.

Для больших КА и орбитальных станций целесообразность применения силовых гироскопических комплексов на основе силовых гироскопов с постоянным значением кинетического момента во многих случаях очевидна. Для малых КА выбор типа ЭМИО для СУ является не тривиальной задачей.

ЭМИО для малых КА могут быть построены на базе:

- силовых гироскопических комплексов (СГК) различного типа,
- трехстепенных силовых стабилизаторов с управляемым значением кинетического момента,
- управляющих маховиков.

Между областями применения перечисленных устройств нельзя провести резких границ. Соответственно динамические требования к СУ, включающей в свой состав ЭМИО, во многом определяются множеством требуемых значений кинетического момента  $A_T$ . Множество  $A_T$  является областью изменения в связанной с КА системе координат значения вектора суммарного кинетического момента ЭМИО. Изменение этого вектора в указанной области в соответствии с реализуемыми в системе законами должно обеспечивать требуемое управление параметрами движения относительно центра масс КА. Естественно множество  $A_T$  должно содержаться внутри множества создаваемых ЭМИО значений кинетического момента  $A_C$ .

Таким образом, для всех вариантов построения ЭМИО должно быть обеспечено выполнение условия:

$$A_T \subset A_C. \quad (1.1)$$

При выполнении условия (1.1) можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента создаваемого двигателями маховиками, будет достаточна, для обеспечения требуемой угловой скорости вращения КА.

Введем связанную с КА правую декартову систему координат  $OXYZ$ , начало координат точка  $O$  совпадает с центром масс КА, а оси совпадают с главными центральными осями инерции КА. Обычно область множества  $A_T$  ограничена эллипсоидом:

$$\frac{(H_{TX})^2}{(J_X w_X)^2} + \frac{(H_{TY})^2}{(J_Y w_Y)^2} + \frac{(H_{TZ})^2}{(J_Z w_Z)^2} = 1, \quad (1.2)$$

где  $H_{TX}, H_{TY}, H_{TZ}$  - проекции суммарного вектора требуемого кинетического момента ЭМИО на оси системы координат  $OXYZ$ ,  $J_X, J_Y, J_Z$  - моменты инерции КА в связанной системе координат  $OXYZ$ ,  $w_X, w_Y, w_Z$  - проекции максимальной требуемой угловой скорости КА на оси системы координат  $OXYZ$ .

Построение области множества создаваемых ЭМИО значений кинетического момента  $A_C$  задача более сложная. В зависимости от расположения ЭМИО относительно главных осей КА, возможно подобрать форму области кинетического момента  $A_C$ , наиболее соответствующую заданным моментам инерции КА.

В данной работе рассматривается решение такой задачи для двух различных конфигураций системы ЭМИО, построенных на базе маховиков, основными преимуществами которых по сравнению с другими типами ЭМИО являются относительная дешевизна, конструктивная простота и простота алгоритмов управления.

Следует отметить, что рассмотренный ниже способ построения областей вариации кинетического момента пригоден и для построения областей механического момента, создаваемого маховиками.

## 2. Конфигурация системы маховиков «четырёхгранная пирамида».

**2.1. Область возможных значений кинетического момента.** Рассмотрим систему маховиков, оси которых расположены параллельно боковым ребрам четырёхгранной пирамиды (рис. 1).

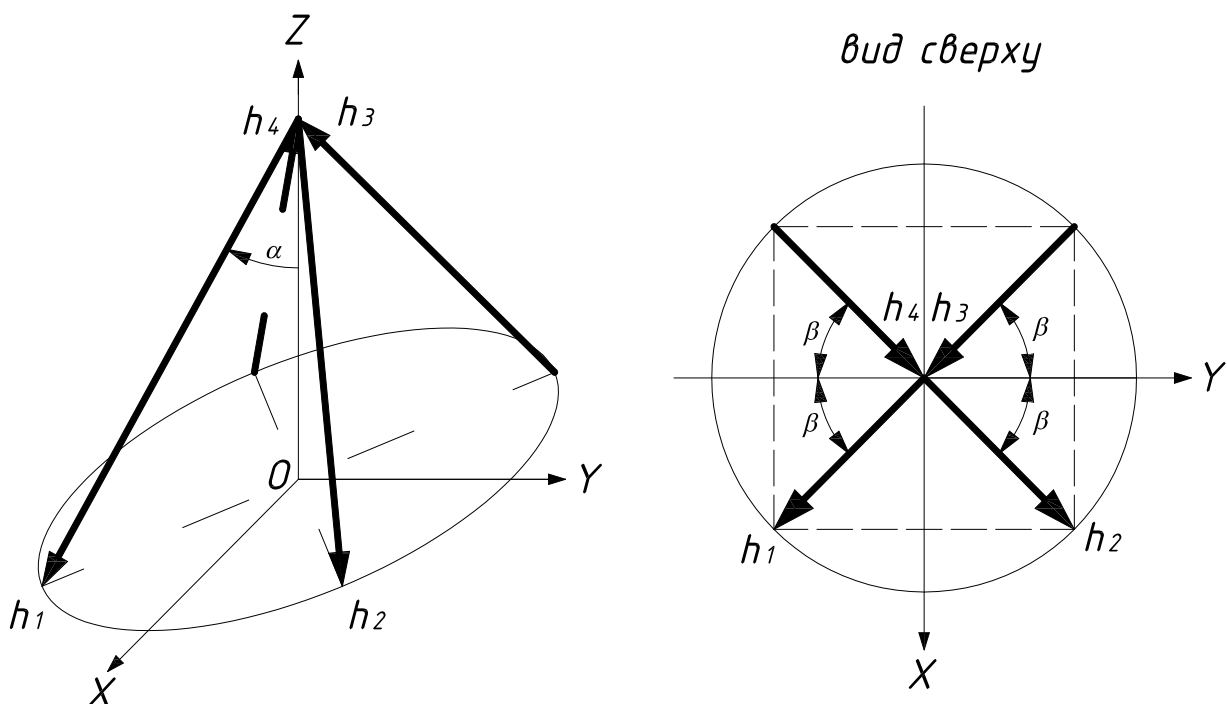


Рис. 1

Орты  $\mathbf{e}_i$  ( $i=1,\dots,4$ ) осей маховиков имеют в системе координат  $OXYZ$  компоненты:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (\sin a \sin b, -\sin a \cos b, -\cos a), & \mathbf{e}_2 &= (\sin a \sin b, \sin a \cos b, -\cos a), \\ \mathbf{e}_3 &= (\sin a \sin b, -\sin a \cos b, \cos a), & \mathbf{e}_4 &= (\sin a \sin b, \sin a \cos b, \cos a).\end{aligned}$$

Здесь  $a$  - угол между осью маховика и осью  $OZ$ ,  $b$  - угол определяющий положение и форму основания пирамиды в плоскости  $OXY$ , при  $b = 45^\circ$  основание представляет собой квадрат; при  $0^\circ < b < 45^\circ$  основание является прямоугольником с большей стороной расположенной параллельно оси  $OY$ ; при  $45^\circ < b < 90^\circ$  основание является прямоугольником с большей стороной расположенной параллельно оси  $OX$ . Углы  $a$  и  $b$  - параметры системы. Суммарный кинетический момент маховиков выражается формулой

$$\mathbf{H} = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathbf{e}_3 + h_4 \mathbf{e}_4, \quad (2.1)$$

в которой  $h_i$  - значение кинетического момента маховика с номером  $i$ . Маховики считаем одинаковыми. В этом случае  $-h_{\max} \leq h_i \leq h_{\max}$  ( $i=1,\dots,4$ ), где  $h_{\max}$  - абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Величина  $h_{\max}$  - еще один параметр системы. Скалярная запись векторного выражения (2.1):

$$\begin{aligned}H_x &= (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \sin a \sin b, & H_y &= (-h_1 + h_2 - h_3 + h_4) \sin a \cos b, \\ H_z &= (-h_1 - h_2 + h_3 + h_4) \cos a.\end{aligned}$$

Здесь  $H_x, H_y, H_z$  компоненты  $\mathbf{H}$  в системе координат  $OXYZ$ . Выражение (2.1) для краткости будем записывать в виде  $\mathbf{H} = [h_1, h_2, h_3, h_4]$ . Кроме того, будем использовать обычное представление вектора  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ , указывая в круглых скобках его компоненты в системе координат  $OXYZ$ . Не ограничивая общности, положим  $h_{\max} = 1$ .

Рассмотрим область  $P$  пространства  $R^3(H_x, H_y, H_z)$ , заполняемую концами векторов (2.1) при  $|h_i| \leq 1$ . Эта область является областью возможных значений кинетического момента системы маховиков и представляет собой выпуклый многогранник, обладающий центральной симметрией относительно начала координат. Перечислим вершины, ребра и грани этого многогранника. Координаты каждой вершины многогранника соответствуют координатам конца вектора суммарного кинетического момента составленного из определенной комбинации максимальных значений кинетических моментов маховиков  $[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1]$ , из чего следует, что общее число вершин не может быть более  $16 = 2^4$ . Однако существуют комбинации, при которых суммарный вектор  $\mathbf{H}$  лежит внутри области  $P$ , что зависит от взаимного расположения маховиков относительно связанной системы координат  $OXYZ$ . В данном слу-

чае многогранник  $P$  имеет 14 вершин, поскольку  $\mathbf{H} = [1, -1, -1, 1] = (0, 0, 0)$  и  $\mathbf{H} = [-1, 1, 1, -1] = (0, 0, 0)$ . Обозначим их  $V_i$  и  $V'_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ). При каждом  $i$  вершины  $V_i$  и  $V'_i$  расположены центрально симметрично относительно точки  $O$ . Вершины характеризуются соотношениями:

1) $V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, 1] = (4 \sin a \sin b, 0, 0)$ ,	$\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
2) $V_2 : \mathbf{H} = [-1, 1, 1, 1] = (2 \sin a \sin b, 2 \sin a \cos b, 2 \cos a)$ ,	$\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_4\}$ ,
3) $V_3 : \mathbf{H} = [1, -1, 1, 1] = (2 \sin a \sin b, -2 \sin a \cos b, 2 \cos a)$ ,	$\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$ ,
4) $V_4 : \mathbf{H} = [1, 1, -1, 1] = (2 \sin a \sin b, 2 \sin a \cos b, -2 \cos a)$ ,	$\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ,
5) $V_5 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, -1] = (2 \sin a \sin b, -2 \sin a \cos b, -2 \cos a)$ ,	$\{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
6) $V_6 : \mathbf{H} = [1, -1, 1, -1] = (0, -4 \sin a \cos b, 0)$ ,	$\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ,
7) $V_7 : \mathbf{H} = [1, 1, -1, -1] = (0, 0, -4 \cos a)$ ,	$\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ,
8) $V'_1 : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, 1] = (0, 0, 4 \cos a)$ ,	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
9) $V'_6 : \mathbf{H} = [-1, 1, -1, 1] = (0, 4 \sin a \cos b, 0)$ ,	$\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
10) $V'_5 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, 1] = (-2 \sin a \sin b, 2 \sin a \cos b, 2 \cos a)$ ,	$\{\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ,
11) $V'_4 : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, -1] = (-2 \sin a \sin b, -2 \sin a \cos b, 2 \cos a)$ ,	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
12) $V'_3 : \mathbf{H} = [-1, 1, -1, -1] = (-2 \sin a \sin b, 2 \sin a \cos b, -2 \cos a)$ ,	$\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ,
13) $V'_2 : \mathbf{H} = [1, -1, -1, -1] = (-2 \sin a \sin b, -2 \sin a \cos b, -2 \cos a)$ ,	$\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$ ,
14) $V'_1 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, -1] = (-4 \sin a \sin b, 0, 0)$ ,	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ .

Здесь в фигурных скобках указаны орты ребер, выходящих из каждой вершины. Многогранник  $P$  имеет 24 ребра. Ребра будем задавать, указывая соединяемые ими вершины и параметризации соответствующих отрезков. Имеем:

1) $V_2 V_1 : \mathbf{H} = [u, 1, 1, 1]$ ,	9) $V_3 V_7 : \mathbf{H} = [u, 1, -1, -1]$ ,	17) $V_2 V_7 : \mathbf{H} = [1, u, -1, -1]$ ,
2) $V_3 V_1 : \mathbf{H} = [1, u, 1, 1]$ ,	10) $V_3 V'_6 : \mathbf{H} = [-1, 1, -1, u]$ ,	18) $V_4 V_6 : \mathbf{H} = [u, -1, 1, -1]$ ,
3) $V_4 V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, u, 1]$ ,	11) $V_5 V'_7 : \mathbf{H} = [-1, -1, u, 1]$ ,	19) $V_2 V_6 : \mathbf{H} = [1, -1, u, -1]$ ,
4) $V_5 V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, u]$ ,	12) $V_5 V'_6 : \mathbf{H} = [-1, u, -1, 1]$ ,	20) $V_4 V'_7 : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, u]$ ,
5) $V_7 V_3 : \mathbf{H} = [u, -1, 1, 1]$ ,	13) $V_6 V_4 : \mathbf{H} = [u, 1, -1, 1]$ ,	21) $V_1 V'_3 : \mathbf{H} = [-1, u, -1, -1]$ ,
6) $V_7 V_2 : \mathbf{H} = [-1, u, 1, 1]$ ,	14) $V_6 V_2 : \mathbf{H} = [-1, 1, u, 1]$ ,	22) $V_1 V'_4 : \mathbf{H} = [-1, -1, u, -1]$ ,
7) $V_7 V_5 : \mathbf{H} = [1, 1, u, -1]$ ,	15) $V_6 V_3 : \mathbf{H} = [1, -1, 1, u]$ ,	23) $V_1 V'_5 : \mathbf{H} = [u, -1, -1, -1]$ ,
8) $V_7 V_4 : \mathbf{H} = [1, 1, -1, u]$ ,	16) $V_6 V_5 : \mathbf{H} = [1, u, 1, -1]$ ,	24) $V_1 V'_5 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, u]$ .

Здесь  $-1 \leq u \leq 1$ . Первая вершина ребра получается при  $u = -1$ , последняя — при  $u = 1$ . Многогранник  $P$  имеет 12 граней, которые обозначим  $F_i$  и  $F'_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). При каждом  $i$  грани  $F_i$  и  $F'_i$  расположены центрально симметрично относительно точки  $O$ . Грани будем задавать списком принадлежащих им ребер и параметризацией:

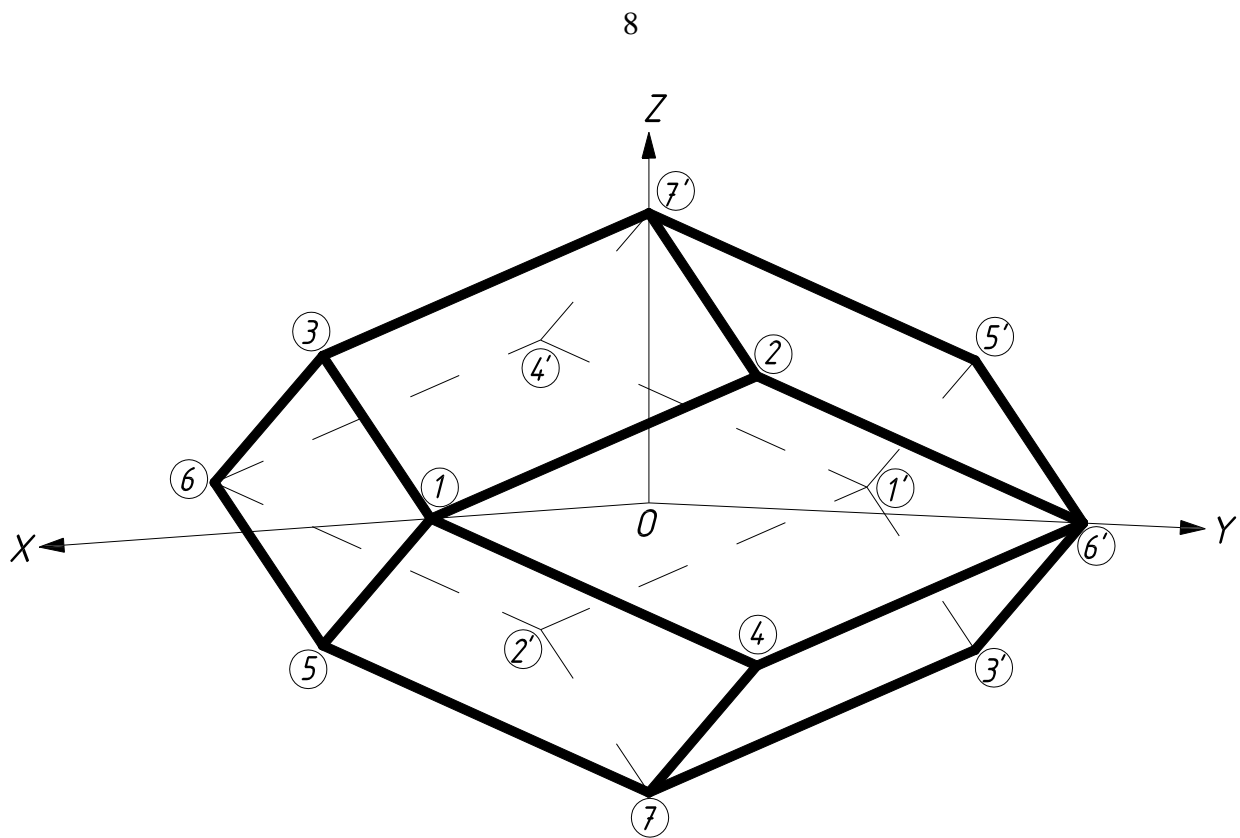
- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1) $F_1 = \{V_1V_4, V_4V_7, V_7V_5, V_5V_1\}$ ,       | $\mathbf{H} = [1, 1, u, v]$ ,   |
| 2) $F'_1 = \{V_1V'_4, V_4V'_7, V_7V'_5, V_5V'_1\}$ ,  | $\mathbf{H} = [-1, -1, u, v]$ , |
| 3) $F_2 = \{V_4V'_6, V_6V'_3, V_3V_7, V_7V_4\}$ ,     | $\mathbf{H} = [u, 1, -1, v]$ ,  |
| 4) $F'_2 = \{V_4V_6, V_6V_3, V_3V'_7, V_7V'_4\}$ ,    | $\mathbf{H} = [u, -1, 1, v]$ ,  |
| 5) $F_3 = \{V_1V_5, V_5V_6, V_6V_3, V_3V_1\}$ ,       | $\mathbf{H} = [1, u, 1, v]$ ,   |
| 6) $F'_3 = \{V_1V'_5, V_5V'_6, V_6V'_3, V_3V'_1\}$ ,  | $\mathbf{H} = [-1, u, -1, v]$ , |
| 7) $F_4 = \{V_5V_7, V_7V'_2, V_2V_6, V_6V_5\}$ ,      | $\mathbf{H} = [1, u, v, -1]$ ,  |
| 8) $F'_4 = \{V_5V'_7, V_7V'_2, V_2V'_6, V_6V'_5\}$ ,  | $\mathbf{H} = [-1, u, v, 1]$ ,  |
| 9) $F_5 = \{V_1V_3, V_3V'_7, V_7V_2, V_2V_1\}$ ,      | $\mathbf{H} = [u, v, 1, 1]$ ,   |
| 10) $F'_5 = \{V_1V'_3, V_3V'_7, V_7V'_2, V_2V'_1\}$ , | $\mathbf{H} = [u, v, -1, -1]$ , |
| 11) $F_6 = \{V_2V'_6, V_6V'_4, V_4V_1, V_1V_2\}$ ,    | $\mathbf{H} = [u, 1, v, 1]$ ,   |
| 12) $F'_6 = \{V_2V_6, V_6V_4, V_4V'_1, V_1V'_2\}$ ,   | $\mathbf{H} = [u, -1, v, -1]$ . |

Здесь принято, что обозначения вида  $V_2V_1$  и  $V_1V_2$  задают одно и тоже ребро, но при разном выборе первой и последней вершин. Таким образом, многогранник  $P$  имеет 14 вершин, 12 граней и 24 ребра, что соответствует значению Эйлеровой характеристики ( $14 + 12 - 24 = 2$ ), которое постоянно для всех выпуклых многогранников. В табл. 1 приведены значения координат вершин многогранника  $P$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  при значении углов  $a = 67^\circ$  и  $b = 32^\circ$  (способ, применявшийся для определения значений углов  $a$  и  $b$ , описан в п. 2.3).

Таблица 1.

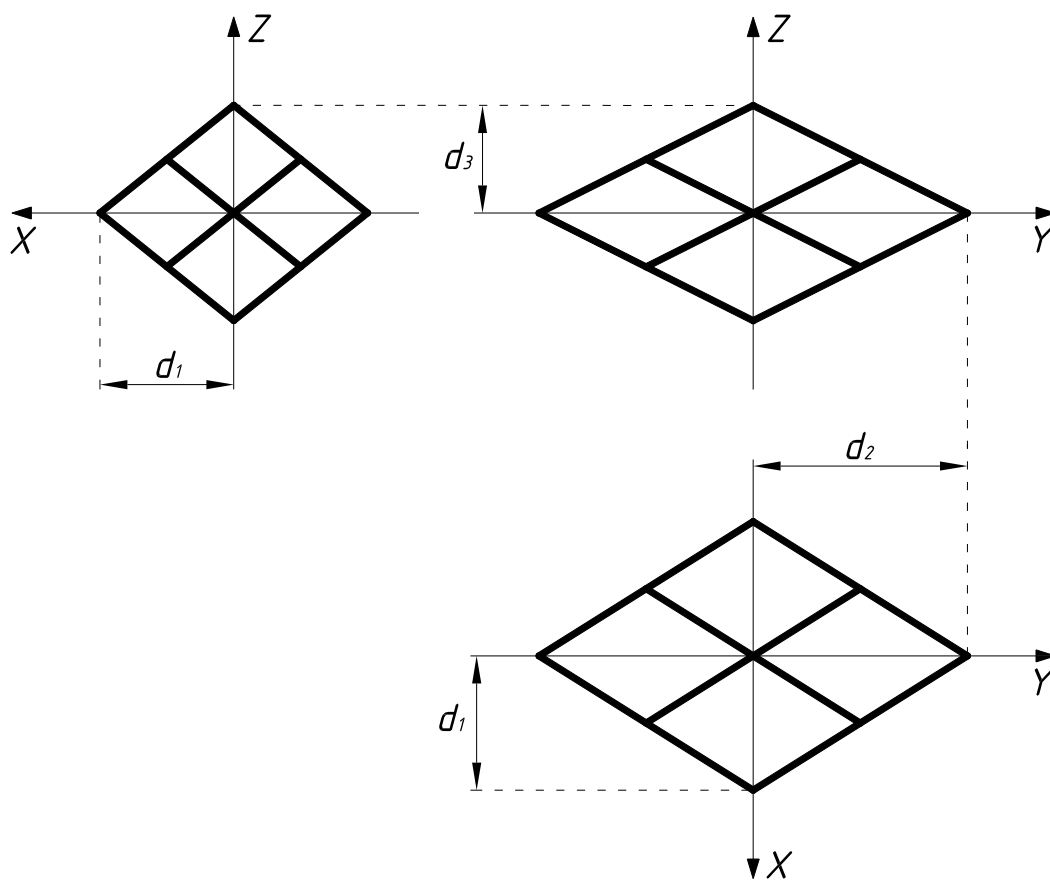
Вершина	$X$	$Y$	$Z$
$V_1$	1.951	0	0
$V_2$	0.976	1.561	0.781
$V_3$	0.976	-1.561	0.781
$V_4$	0.976	1.561	-0.781
$V_5$	0.976	-1.561	-0.781
$V_6$	0	-3.123	0
$V_7$	0	0	-1.563
$V'_7$	0	0	1.563
$V'_6$	0	3.123	0
$V'_5$	-0.976	1.561	0.781
$V'_4$	-0.976	-1.561	0.781
$V'_3$	-0.976	1.561	-0.781
$V'_2$	-0.976	-1.561	-0.781
$V'_1$	-1.951	0	0

Вид многогранника  $P$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  приведен на рис. 2.



**Рис. 2**

На рис. 3 изображены проекции многогранника  $P$  на координатные плоскости системы  $OXYZ$ .



**Рис. 3**



Многогранник  $P$  допускает ряд преобразований симметрии. Он переходит в себя при повороте вокруг осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  на угол кратный  $p$  (в частном случае при значении угла  $b = p/4 = 45^\circ$  многогранник  $P$  переходит в себя при повороте вокруг оси  $OZ$  на угол кратный  $p/2$ ). Координатные плоскости системы  $OXYZ$  являются его плоскостями симметрии.

Приведем некоторые метрические характеристики многогранника  $P$ . Все его ребра имеют длину 2. Следовательно, все грани – ромбы. Вершины  $V_1$  и  $V'_1$  находятся на расстоянии  $d_1 = 4 \sin a \sin b$  от начала координат - точки  $O$ , вершины  $V_6$  и  $V'_6$  отстоят от этой точки на расстояние  $d_2 = 4 \sin a \cos b$ , а вершины  $V_7$  и  $V'_7$  на расстояние  $d_3 = 4 \cos a$ . Расстояния до вершин  $V_2, V_3, V_4, V_5$  и  $V'_2, V'_3, V'_4, V'_5$  от точки  $O$  равны  $d_4 = 2$ . Равенство  $d_1 = d_2$  имеет место при  $b = p/4 = 45^\circ$ , равенство  $d_1 = d_2 = d_3$  достигается при одновременном выполнении условий  $a = \arctg \sqrt{2} = 54.7^\circ$  и  $b = p/4 = 45^\circ$ .

Таким образом, соотношения между расстояниями  $d_1, d_2, d_3$  выражаются неравенствами, приведенными в табл. 2.

Таблица 2.

$0 \leq b \leq \frac{p}{4}$		$\frac{p}{4} \leq b \leq \frac{p}{2}$	
$d_1 \leq d_2 \leq d_3$	$0 \leq a \leq \arctg\left(\frac{1}{\cos b}\right)$	$d_2 \leq d_1 \leq d_3$	$0 \leq a \leq \arctg\left(\frac{1}{\sin b}\right)$
$d_1 \leq d_3 \leq d_2$	$\arctg\left(\frac{1}{\cos b}\right) \leq a \leq \arctg\left(\frac{1}{\sin b}\right)$	$d_2 \leq d_3 \leq d_1$	$\arctg\left(\frac{1}{\sin b}\right) \leq a \leq \arctg\left(\frac{1}{\cos b}\right)$
$d_3 \leq d_1 \leq d_2$	$\arctg\left(\frac{1}{\sin b}\right) \leq a \leq \frac{p}{2}$	$d_3 \leq d_2 \leq d_1$	$\arctg\left(\frac{1}{\cos b}\right) \leq a \leq \frac{p}{2}$

В табл. 3 указаны зависимости, позволяющие определить расстояние от начала координат  $O$  до каждой грани многогранника  $P$ .

Таблица 3.

Грани	Расстояние	Грани	Расстояние	Грани	Расстояние
$F_1, F'_1$	$\frac{2 \sin 2a \sin b}{\sqrt{1 - \sin^2 a \cos^2 b}}$	$F_2, F'_2$	$\frac{2 \sin 2a \cos b}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 b}}$	$F_3, F'_3$	$2 \sin a \sin 2b$
$F_5, F'_5$	$\frac{2 \sin 2a \sin b}{\sqrt{1 - \sin^2 a \cos^2 b}}$	$F_4, F'_4$	$\frac{2 \sin 2a \cos b}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 b}}$	$F_6, F'_6$	

## 2.2. Возможности системы при отключении одного из маховиков.

Оценим возможности рассматриваемой системы в случае, когда один из маховиков отключен (вышел из строя). Без ограничения общности можно считать, что отключен маховик с осью, параллельной орту  $e_4$ . Суммарный кинетический момент такой усеченной системы выражается векторной формулой

$$\mathbf{H} = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathbf{e}_3, \quad (2.2)$$

скалярная запись которой имеет вид

$$H_x = (h_1 + h_2 + h_3) \sin a \sin b, \quad H_y = (-h_1 + h_2 - h_3) \sin a \cos b;$$

$$H_z = (-h_1 - h_2 + h_3) \cos a.$$

Выражение (2.2) для краткости будем записывать в виде  $\mathbf{H} = [h_1, h_2, h_3]$ . Здесь по-прежнему  $-h_{\max} \leq h_i \leq h_{\max}$  ( $i = 1, \dots, 3$ ). Не ограничивая общности, положим  $h_{\max} = 1$ . Область пространства, заполняемая концами векторов (2.2) при  $|h_i| \leq 1$ , – область возможных значений кинетического момента системы маховиков – представляет собой параллелепипед  $P'$ . Перечислим вершины, ребра и грани этого параллелепипеда. Вершины (их у параллелепипеда 8) обозначим  $V_i$  и  $V'_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). При каждом  $i$  вершины  $V_i$  и  $V'_i$  расположены центрально симметрично относительно точки  $O$ . Вершины характеризуются соотношениями:

$$\begin{aligned} 1) V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, 1] &= (3 \sin a \sin b, -\sin a \cos b, -\cos a), & \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}, \\ 2) V_2 : \mathbf{H} = [-1, 1, 1] &= (\sin a \sin b, \sin a \cos b, \cos a), & \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ 3) V_3 : \mathbf{H} = [1, -1, 1] &= (\sin a \sin b, -3 \sin a \cos b, \cos a), & \{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}, \\ 4) V_4 : \mathbf{H} = [1, 1, -1] &= (\sin a \sin b, \sin a \cos b, -3 \cos a), & \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ 5) V'_4 : \mathbf{H} = [-1, -1, 1] &= (-\sin a \sin b, -\sin a \cos b, 3 \cos a), & \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}, \\ 6) V'_3 : \mathbf{H} = [-1, 1, -1] &= (-\sin a \sin b, 3 \sin a \cos b, -\cos a), & \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ 7) V'_2 : \mathbf{H} = [1, -1, -1] &= (-\sin a \sin b, -\sin a \cos b, -\cos a), & \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}, \\ 8) V'_1 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1] &= (-3 \sin a \sin b, \sin a \cos b, \cos a), & \{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}. \end{aligned}$$

Здесь в фигурных скобках указаны орты ребер, выходящих из каждой вершины. Параллелепипед имеет 12 ребер. Ребра параллелепипеда  $P'$  будем задавать, указывая соединяемые ими вершины и параметризации соответствующих отрезков. Имеем:

$$\begin{aligned} 1) V_2 V_1 : \mathbf{H} = [u, 1, 1], & \quad 5) V_4 V_3 : \mathbf{H} = [u, -1, 1], & \quad 9) V_1 V'_4 : \mathbf{H} = [-1, -1, u], \\ 2) V_3 V_1 : \mathbf{H} = [1, u, 1], & \quad 6) V_2 V_3 : \mathbf{H} = [1, -1, u], & \quad 10) V_2 V'_4 : \mathbf{H} = [1, u, -1], \\ 3) V_4 V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, u], & \quad 7) V_1 V'_2 : \mathbf{H} = [u, -1, -1], & \quad 11) V_3 V'_4 : \mathbf{H} = [u, 1, -1], \\ 4) V_4 V_2 : \mathbf{H} = [-1, u, 1], & \quad 8) V_1 V'_3 : \mathbf{H} = [-1, u, -1], & \quad 12) V_3 V'_2 : \mathbf{H} = [-1, 1, u]. \end{aligned}$$

Здесь  $-1 \leq u \leq 1$ . Первая вершина ребра получается при  $u = -1$ , последняя – при  $u = 1$ . Как и всякий параллелепипед  $P'$  имеет 6 граней, которые обозначим  $F_i$  и  $F'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). При каждом  $i$  грани  $F_i$  и  $F'_i$  расположены центрально симметрично относительно точки  $O$ . Грани будем задавать списком принадлежащих им ребер и параметризацией:

$$\begin{aligned} 1) F_1 &= \{V_1 V_2, V_2 V'_4, V_4 V_3, V_3 V_1\}, & \mathbf{H} = [u, v, 1], \\ 2) F_2 &= \{V_1 V_3, V_3 V'_2, V_2 V_4, V_4 V_1\}, & \mathbf{H} = [1, u, v], \\ 3) F_3 &= \{V_1 V_4, V_4 V'_3, V_3 V_2, V_2 V_1\}, & \mathbf{H} = [u, 1, v], \\ 4) F'_1 &= \{V_1 V'_2, V_2 V_4, V_4 V'_3, V_3 V'_1\}, & \mathbf{H} = [u, v, -1], \end{aligned}$$

$$5) F'_2 = \{V_1V'_3, V_3V_2, V_2V'_4, V_4V_1\}, \quad \mathbf{H} = [-1, u, v],$$

$$6) F'_3 = \{V_1V'_4, V_4V_3, V_3V'_2, V_2V_1\}, \quad \mathbf{H} = [u, -1, v].$$

Здесь принято, что обозначения вида  $V_2V_1$  и  $V_1V_2$  задают одно и то же ребро, но при разном выборе первой и последней вершин. В табл. 4 приведены значения координат вершин параллелепипеда  $P'$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  при значении углов  $a = 67^\circ$  и  $b = 32^\circ$  с учетом отказа одного маховика.

Таблица 4.

Вершина	$X$	$Y$	$Z$
$V_1$	1.463	-0.781	-0.391
$V_2$	0.488	0.781	0.391
$V_3$	0.488	-2.342	0.391
$V_4$	0.488	0.781	-1.172
$V'_4$	-0.488	-0.781	1.172
$V'_3$	-0.488	2.342	-0.391
$V'_2$	-0.488	-0.781	-0.391
$V'_1$	-1.463	0.781	0.391

Вид параллелепипеда  $P'$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  приведен на рис. 4.

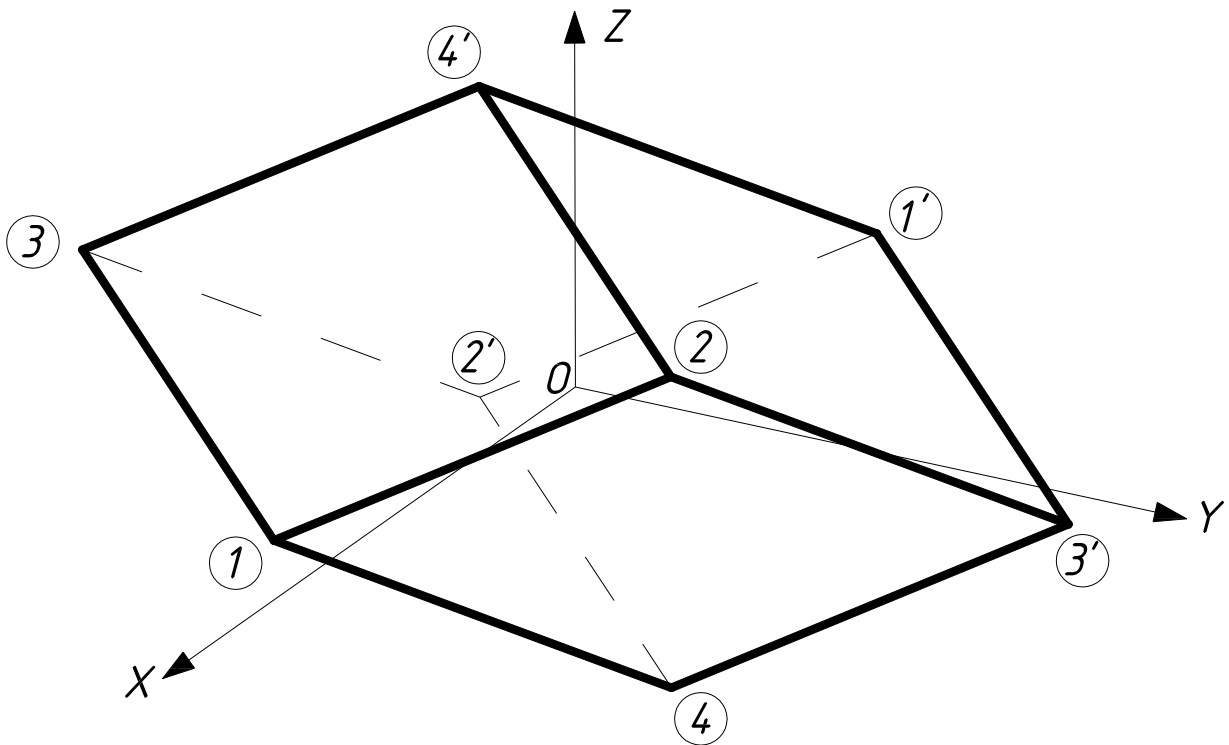


Рис. 4

На рис. 5 изображены проекции параллелепипеда  $P'$  на координатные плоскости системы  $OXYZ$ .

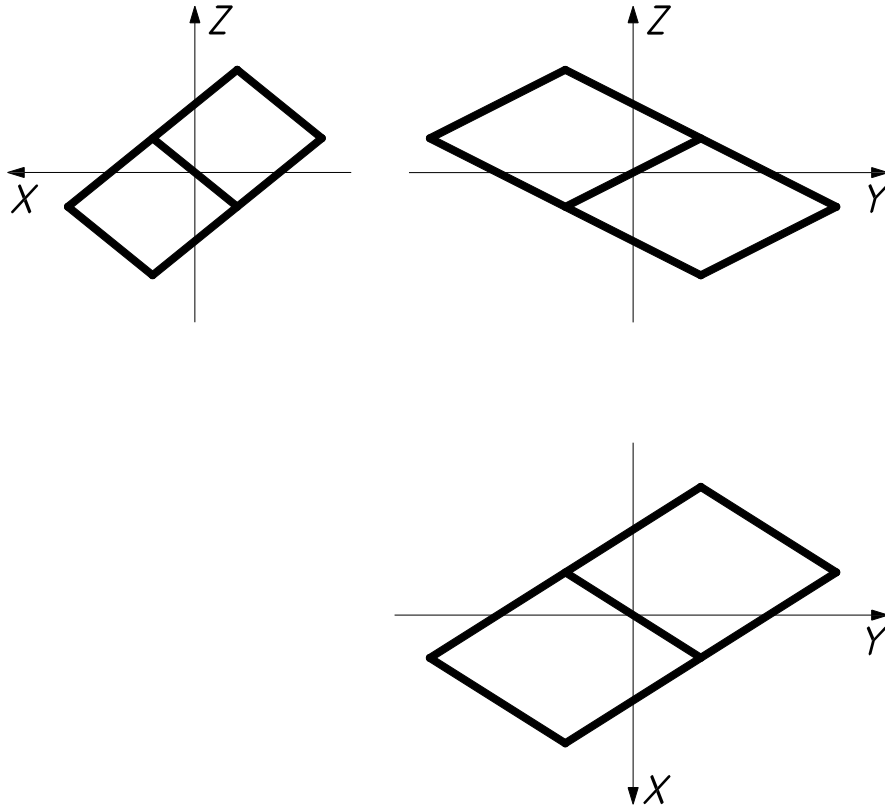


Рис. 5

Параллелепипед  $P'$  представляет собой многогранник  $P$  с длиной ребер  $V_4V_7'$ ,  $V_1V_5'$ ,  $V_3V_6'$ ,  $V_7V_4$ ,  $V_5V_1$ ,  $V_6V_3$  равной нулю, поскольку именно эти ребра параллельны орту  $e_4$  и, соответственно, оси отключенного маховика. Таким образом, в декартовой системе координат  $OXYZ$ , координаты вершин  $V_4'$ ,  $V_1'$ ,  $V_3'$ ,  $V_4$ ,  $V_1$ ,  $V_3$  параллелепипеда  $P'$  совпадают с координатами середин ребер  $V_4V_7'$ ,  $V_1V_5'$ ,  $V_3V_6'$ ,  $V_7V_4$ ,  $V_5V_1$ ,  $V_6V_3$  многогранника  $P$  соответственно. Приведем некоторые метрические характеристики многогранника  $P'$ . Его ребра имеют длину 2. Следовательно, все грани – ромбы. Вершины  $V_1$  и  $V_1'$  находятся на расстоянии  $d_1 = \sqrt{8\sin^2 a \sin^2 b + 1}$  от начала координат - точки  $O$ , вершины  $V_3$  и  $V_3'$  отстоят от этой точки на расстояние  $d_2 = \sqrt{8\sin^2 a \cos^2 b + 1}$ , а вершины  $V_4$  и  $V_4'$  на расстояние  $d_3 = \sqrt{8\cos^2 a + 1}$ . Расстояния до вершин  $V_2$  и  $V_2'$  от точки  $O$  равны  $d_4 = 1$ . Равенство  $d_1 = d_2$  имеет место при  $b = p/4 = 45^\circ$ , равенство  $d_1 = d_2 = d_3$  достигается при одновременном выполнении условий  $a = \arctg \sqrt{2} = 54.7^\circ$  и  $b = p/4 = 45^\circ$ .

Таким образом, соотношения между расстояниями  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  выражаются неравенствами, приведенными в табл. 2.

В табл. 5 указаны зависимости, позволяющие определить расстояние от начала координат  $O$  до каждой грани параллелепипеда  $P'$ .

Таблица 5.

Грани	Расстояние	Грани	Расстояние	Грани	Расстояние
$F_1, F'_1$	$\frac{\sin 2a \sin b}{\sqrt{1 - \sin^2 a \cos^2 b}}$	$F_2, F'_2$	$\frac{\sin 2a \cos b}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 b}}$	$F_3, F'_3$	$\sin a \sin 2b$

**2.3. Расположение маховиков на космическом аппарате.** Рассмотрим вопрос, как следует расположить описанную в п. 2.1 систему из четырех маховиков на КА и как лучше всего выбрать значения углов  $a$  и  $b$ , чтобы обеспечить достаточно широкие возможности управления угловой скоростью аппарата.

Моменты инерции относительно главных центральных осей инерции КА, т.е. осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  обозначим соответственно  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ . Примем значения этих моментов равными:  $J_x = 1000 \text{ кг м}^2$ ,  $J_y = 1600 \text{ кг м}^2$ ,  $J_z = 800 \text{ кг м}^2$ . Поскольку система управления ориентацией космического аппарата должна быть достаточно универсальной, естественно потребовать, чтобы максимальные абсолютные значения реализуемых ею угловых скоростей вращения вокруг каждой из осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  были одинаковы. Предположим, что полный кинетический момент КА - сумма кинетических моментов несущего тела и маховиков - равен нулю. Тогда имеют место соотношения:

$$J_x w_x + H_x = 0, \quad J_y w_y + H_y = 0, \quad J_z w_z + H_z = 0.$$

Здесь  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  и  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  - проекции абсолютной угловой скорости несущего тела и собственного кинетического момента системы маховиков на оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно. Разрешая последние соотношения относительно угловых скоростей, получим

$$w_x = -\frac{H_x}{J_x}, \quad w_y = -\frac{H_y}{J_y}, \quad w_z = -\frac{H_z}{J_z}. \quad (2.3)$$

Исходя из требуемого условия  $w_x = w_y = w_z$  и с учетом соотношений  $H_x = 4 \sin a \sin b$ ,  $H_y = 4 \sin a \cos b$ ,  $H_z = 4 \cos a$ , определим значение угла  $b$ .  $\frac{H_x}{J_x} = \frac{J_y}{J_x} \cdot \frac{4 \sin a \sin b}{4 \sin a \cos b} = \frac{5}{8}$ , откуда получаем  $b = \arctg \frac{5}{8} = 32^\circ$ . Зная значение угла

$b$  определяем значение угла  $a$ .  $\frac{H_y}{H_z} = \frac{J_y}{J_z} \cdot \frac{4 \sin a \cos b}{4 \cos a} = 2$ , откуда получаем

$$\operatorname{tg} a = \frac{2}{\cos b}, \quad a = 67^\circ.$$

Таким образом, при полученных значениях углов  $a$  и  $b$ , максимальные значения абсолютных величин компонент угловой скорости КА в системе  $OXYZ$  составляют  $w_x = w_y = w_z = 0.002 h_{\max} \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}$ , где  $h_{\max}$  - абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Если по какой-либо оси реализуется отвечающее ей максимальное значение, то компоненты угловой скорости по двум другим осям равны нулю. Указан-

ные максимальные значения компонент угловой скорости характеризуют предельные возможности системы маховиков для разворотов КА вокруг его главных центральных осей инерции. При произвольном выборе направления вектора угловой скорости в системе  $OXYZ$  максимальное значение модуля этого вектора будет меньше. Область допустимых значений угловой скорости аппарата представляет собой многогранник  $P_\omega$ , получающийся из многогранника  $P$  преобразованием подобия, задаваемым формулами (2.3). Указанные выше предельные значения угловых скоростей реализуются на вершинах этого многогранника.

### 3. Конфигурация системы маховиков «шестигранная пирамида».

**3.1. Область возможных значений кинетического момента.** Рассмотрим систему маховиков, оси которых расположены параллельно боковым ребрам правильной шестигранной пирамиды (рис. 6).

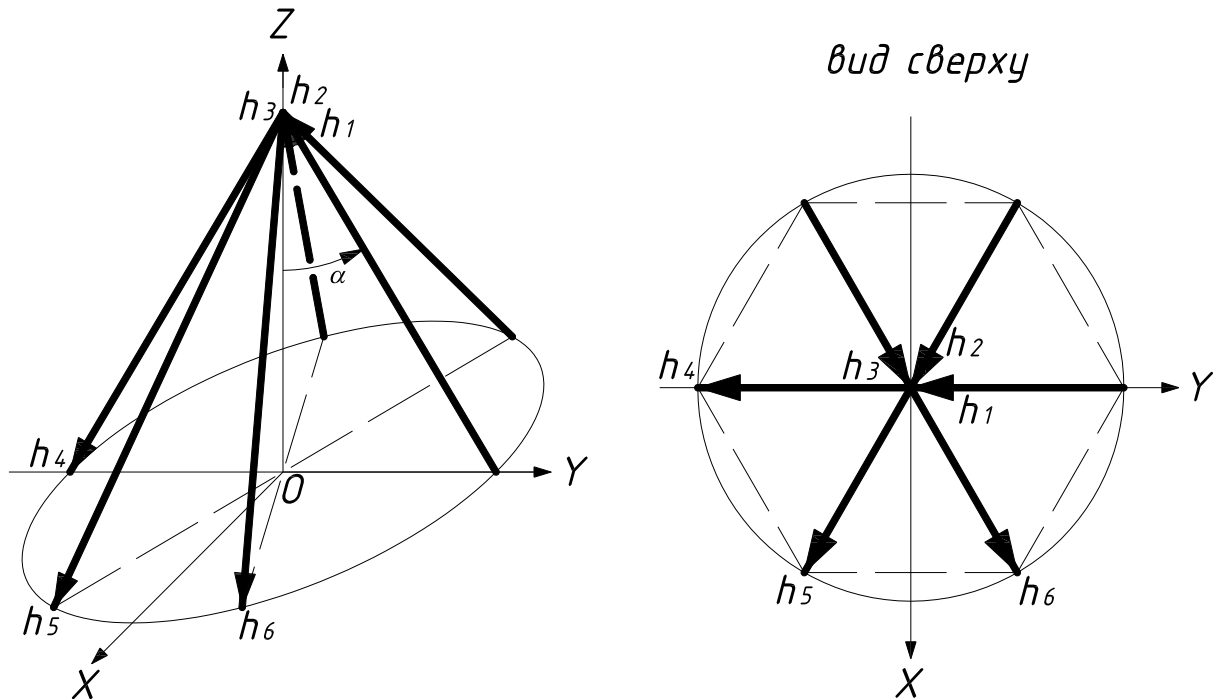


Рис. 6

Орты  $e_i$  ( $i=1,\dots,6$ ) осей маховиков имеют в системе координат  $OXYZ$  компоненты:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, -\sin a, \cos a), & e_2 &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{1}{2} \sin a, \cos a \right), \\ e_3 &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{1}{2} \sin a, \cos a \right), & e_4 &= (0, \sin a, -\cos a), \\ e_5 &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{1}{2} \sin a, -\cos a \right), & e_6 &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{1}{2} \sin a, -\cos a \right). \end{aligned}$$

Здесь  $a$  - угол между осью маховика и осью  $OZ$ . Угол  $a$  - параметр системы. Суммарный кинетический момент маховиков выражается формулой:

$$\mathbf{H} = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathbf{e}_3 + h_4 \mathbf{e}_4 + h_5 \mathbf{e}_5 + h_6 \mathbf{e}_6, \quad (3.1)$$

в которой  $h_i$  - значение кинетического момента маховика с номером  $i$ . Маховики считаем одинаковыми. В этом случае  $-h_{\max} \leq h_i \leq h_{\max}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), где  $h_{\max}$  - абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Величина  $h_{\max}$  - еще один параметр системы. Скалярная запись векторного выражения (3.1)

$$H_x = (h_2 + h_3 + h_5 + h_6) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \quad H_y = \left( -h_1 - \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} - h_4 - \frac{h_5}{2} + \frac{h_6}{2} \right) \sin a,$$

$$H_z = (h_1 + h_2 + h_3 - h_4 - h_5 - h_6) \cos a.$$

Здесь  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  компоненты  $\mathbf{H}$  в системе координат  $OXYZ$ . Выражение (3.1) для краткости будем записывать в виде  $\mathbf{H} = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6]$ . Кроме того, будем использовать обычное представление вектора  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ , указывая в круглых скобках его компоненты в системе координат  $OXYZ$ . Не ограничивая общности, положим  $h_{\max} = 1$ .

Рассмотрим область  $P$  пространства  $R^3(H_x, H_y, H_z)$ , заполняемую концами векторов (3.1) при  $|h_i| \leq 1$ . Эта область является областью возможных значений кинетического момента системы маховиков и представляет собой выпуклый многогранник, обладающий центральной симметрией относительно начала координат. Перечислим вершины, ребра и грани этого многогранника. Координаты каждой вершины многогранника соответствуют координатам конца вектора суммарного кинетического момента составленного из определенной комбинации максимальных значений кинетических моментов маховиков  $[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1]$ , из чего следует, что общее число вершин не может быть более  $64 = 2^6$ . В данном случае существуют 2 комбинации, при которых суммарный вектор  $\mathbf{H}$  равен нулю ( $\mathbf{H} = [1, -1, 1, 1, -1, 1]$  и  $\mathbf{H} = [-1, 1, -1, -1, 1, -1]$ ), и 30 комбинаций, когда суммарный вектор  $\mathbf{H}$  лежит внутри области  $P$ , что зависит от взаимного расположения маховиков относительно связанной системы координат  $OXYZ$ . Оставшиеся 32 комбинации соответствуют вершинам многогранника. Обозначим их  $V_i$  и  $V'_i$  ( $i = 1, \dots, 16$ ). При каждом  $i$  вершины  $V_i$  и  $V'_i$  расположены центрально симметрично относительно точки  $O$ . Вершины характеризуются соотношениями:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $V_1 : \mathbf{H} = [1,1,1,-1,-1,-1] = (0,0,6 \cos a),$                                | $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\},$ |
| 2) $V_2 : \mathbf{H} = [-1,1,1,-1,-1,-1] = (0,2 \sin a,4 \cos a),$                        | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_6\},$   |
| 3) $V_3 : \mathbf{H} = [1,-1,1,-1,-1,-1] = (-\sqrt{3} \sin a, \sin a,4 \cos a),$          | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\},$  |
| 4) $V_4 : \mathbf{H} = [1,1,-1,-1,-1,-1] = (-\sqrt{3} \sin a, -\sin a,4 \cos a),$         | $\{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\},$   |
| 5) $V_5 : \mathbf{H} = [1,1,1,1,-1,-1] = (0,-2 \sin a,4 \cos a),$                         | $\{-\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\},$  |
| 6) $V_6 : \mathbf{H} = [1,1,1,-1,1,-1] = (\sqrt{3} \sin a, -\sin a,4 \cos a),$            | $\{\mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\},$   |
| 7) $V_7 : \mathbf{H} = [1,1,1,-1,-1,1] = (\sqrt{3} \sin a, \sin a,4 \cos a),$             | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, -\mathbf{e}_6\},$  |
| 8) $V_8 : \mathbf{H} = [-1,1,1,-1,-1,1] = (\sqrt{3} \sin a, 3 \sin a,2 \cos a),$          | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5, -\mathbf{e}_6\},$                              |
| 9) $V_9 : \mathbf{H} = [-1,-1,1,-1,-1,-1] = (-\sqrt{3} \sin a, 3 \sin a,2 \cos a),$       | $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_6\},$                               |
| 10) $V_{10} : \mathbf{H} = [1,-1,-1,-1,-1,-1] = (-2\sqrt{3} \sin a, 0,2 \cos a),$         | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\},$                               |
| 11) $V_{11} : \mathbf{H} = [1,1,-1,1,-1,-1] = (-\sqrt{3} \sin a, -3 \sin a,2 \cos a),$    | $\{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\},$                              |
| 12) $V_{12} : \mathbf{H} = [1,1,1,1,1,-1] = (\sqrt{3} \sin a, -3 \sin a,2 \cos a),$       | $\{-\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\},$                             |
| 13) $V_{13} : \mathbf{H} = [1,1,1,-1,1,1] = (2\sqrt{3} \sin a, 0,2 \cos a),$              | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5, -\mathbf{e}_6\},$                             |
| 14) $V_{14} : \mathbf{H} = [-1,1,1,-1,1,1] = (2\sqrt{3} \sin a, 2 \sin a, 0),$            | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\},$                              |
| 15) $V_{15} : \mathbf{H} = [-1,-1,1,-1,-1,1] = (0,4 \sin a, 0),$                          | $\{\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5, -\mathbf{e}_6\},$                              |
| 16) $V_{16} : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,-1,-1,-1] = (-2\sqrt{3} \sin a, 2 \sin a, 0),$       | $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_6\},$                                |
| 17) $V'_{16} : \mathbf{H} = [1,1,1,1,1,1] = (2\sqrt{3} \sin a, -2 \sin a, 0),$            | $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_6\},$                            |
| 18) $V'_{15} : \mathbf{H} = [1,1,-1,1,1,-1] = (0,-4 \sin a, 0),$                          | $\{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\},$                              |
| 19) $V'_{14} : \mathbf{H} = [1,-1,-1,1,-1,-1] = (-2\sqrt{3} \sin a, -2 \sin a, 0),$       | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\},$                              |
| 20) $V'_{13} : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,1,-1,-1] = (-2\sqrt{3} \sin a, 0,-2 \cos a),$       | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\},$                               |
| 21) $V'_{12} : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,-1,-1,1] = (-\sqrt{3} \sin a, 3 \sin a,-2 \cos a),$ | $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, -\mathbf{e}_6\},$                               |
| 22) $V'_{11} : \mathbf{H} = [-1,-1,1,-1,1,1] = (\sqrt{3} \sin a, 3 \sin a,-2 \cos a),$    | $\{\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\},$                              |
| 23) $V'_{10} : \mathbf{H} = [-1,1,1,1,1,1] = (2\sqrt{3} \sin a, 0,-2 \cos a),$            | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\},$                             |
| 24) $V'_9 : \mathbf{H} = [1,1,-1,1,1,1] = (\sqrt{3} \sin a, -3 \sin a,-2 \cos a),$        | $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_6\},$                             |
| 25) $V'_8 : \mathbf{H} = [1,-1,-1,1,1,-1] = (-\sqrt{3} \sin a, -3 \sin a,-2 \cos a),$     | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\},$                              |
| 26) $V'_7 : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,1,1,-1] = (-\sqrt{3} \sin a, -\sin a,-4 \cos a),$      | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\},$   |
| 27) $V'_6 : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,1,-1,1] = (-\sqrt{3} \sin a, \sin a,-4 \cos a),$       | $\{-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, -\mathbf{e}_6\},$  |
| 28) $V'_5 : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,-1,1,1] = (0,2 \sin a,-4 \cos a),$                     | $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\},$   |
| 29) $V'_4 : \mathbf{H} = [-1,-1,1,1,1,1] = (\sqrt{3} \sin a, \sin a,-4 \cos a),$          | $\{\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\},$  |
| 30) $V'_3 : \mathbf{H} = [-1,1,-1,1,1,1] = (\sqrt{3} \sin a, -\sin a,-4 \cos a),$         | $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$   |
| 31) $V'_2 : \mathbf{H} = [1,-1,-1,1,1,1] = (0,-2 \sin a,-4 \cos a),$                      | $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_6\},$  |
| 32) $V'_1 : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,1,1,1] = (0,0,-6 \cos a),$                             | $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5, -\mathbf{e}_6\}.$ |

Здесь в фигурных скобках указаны орты ребер, выходящих из каждой вершины. Многогранник  $P$  имеет 60 ребер. Ребра будем задавать, указывая



соединяемые ими вершины и параметризации соответствующих отрезков. Имеем :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $V_2V_1 : \mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, -1, -1]$ ,           | 31) $V_3V_1 : \mathbf{H} = [1, u, 1, -1, -1, -1]$ ,          |
| 2) $V_4V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, u, -1, -1, -1]$ ,           | 32) $V_1V_5 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, u, -1, -1]$ ,           |
| 3) $V_1V_6 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, -1, u, -1]$ ,            | 33) $V_1V_7 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, -1, -1, u]$ ,           |
| 4) $V_9V_2 : \mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, -1, -1]$ ,          | 34) $V_2V_8 : \mathbf{H} = [-1, 1, 1, -1, -1, u]$ ,          |
| 5) $V_9V_3 : \mathbf{H} = [u, -1, 1, -1, -1, -1]$ ,          | 35) $V_{10}V_3 : \mathbf{H} = [1, -1, u, -1, -1, -1]$ ,      |
| 6) $V_{10}V_4 : \mathbf{H} = [1, u, -1, -1, -1, -1]$ ,       | 36) $V_4V_{11} : \mathbf{H} = [1, 1, -1, u, -1, -1]$ ,       |
| 7) $V_{11}V_5 : \mathbf{H} = [1, 1, u, 1, -1, -1]$ ,         | 37) $V_5V_{12} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, 1, u, -1]$ ,         |
| 8) $V_6V_{12} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, u, 1, -1]$ ,          | 38) $V_6V_{13} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, -1, 1, u]$ ,         |
| 9) $V_7V_{13} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, -1, u, 1]$ ,          | 39) $V_8V_7 : \mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, -1, 1]$ ,           |
| 10) $V_8V_{14} : \mathbf{H} = [-1, 1, 1, -1, u, 1]$ ,        | 40) $V_{15}V_8 : \mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, -1, 1]$ ,       |
| 11) $V_9V_{15} : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, -1, -1, u]$ ,      | 41) $V_{16}V_9 : \mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, -1, -1]$ ,     |
| 12) $V_{16}V_{10} : \mathbf{H} = [u, -1, -1, -1, -1, -1]$ ,  | 42) $V_{10}V'_{14} : \mathbf{H} = [1, -1, -1, u, -1, -1]$ ,  |
| 13) $V'_{14}V_{11} : \mathbf{H} = [1, u, -1, 1, -1, -1]$ ,   | 43) $V_{11}V'_{15} : \mathbf{H} = [1, 1, -1, 1, u, -1]$ ,    |
| 14) $V'_{15}V_{12} : \mathbf{H} = [1, 1, u, 1, 1, -1]$ ,     | 44) $V_{12}V'_{16} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, 1, 1, u]$ ,      |
| 15) $V_{13}V'_{16} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, u, 1, 1]$ ,      | 45) $V_{14}V_{13} : \mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, 1, 1]$ ,      |
| 16) $V'_{13}V'_{14} : \mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, -1, -1]$ , | 46) $V_{16}V'_{13} : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, -1, -1]$ , |
| 17) $V_{16}V'_{12} : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, -1, -1, u]$ , | 47) $V'_{12}V_{15} : \mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, -1, 1]$ ,  |
| 18) $V_{15}V'_{11} : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, -1, u, 1]$ ,   | 48) $V'_{11}V_{14} : \mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, 1, 1]$ ,    |
| 19) $V_{14}V'_{10} : \mathbf{H} = [-1, 1, 1, u, 1, 1]$ ,     | 49) $V'_{10}V'_{16} : \mathbf{H} = [u, 1, 1, 1, 1, 1]$ ,     |
| 20) $V_9V'_{16} : \mathbf{H} = [1, 1, u, 1, 1, 1]$ ,         | 50) $V'_{15}V'_9 : \mathbf{H} = [1, 1, -1, 1, 1, u]$ ,       |
| 21) $V_8V'_{15} : \mathbf{H} = [1, u, -1, 1, 1, -1]$ ,       | 51) $V'_{14}V'_8 : \mathbf{H} = [1, -1, -1, 1, u, -1]$ ,     |
| 22) $V_7V'_8 : \mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, 1, -1]$ ,         | 52) $V'_{13}V'_7 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, 1, u, 1]$ ,     |
| 23) $V'_{13}V'_6 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, 1, -1, u]$ ,    | 53) $V'_{12}V'_6 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, -1, 1]$ ,    |
| 24) $V'_{12}V'_5 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, -1, u, 1]$ ,    | 54) $V_5V'_{11} : \mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, 1, 1]$ ,      |
| 25) $V'_{11}V'_4 : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, u, 1, 1]$ ,      | 55) $V_4V'_{10} : \mathbf{H} = [-1, u, 1, 1, 1, 1]$ ,        |
| 26) $V_3V'_{10} : \mathbf{H} = [-1, 1, u, 1, 1, 1]$ ,        | 56) $V_3V'_9 : \mathbf{H} = [u, 1, -1, 1, 1, 1]$ ,           |
| 27) $V_2V'_9 : \mathbf{H} = [1, u, -1, 1, 1, 1]$ ,           | 57) $V_8V'_2 : \mathbf{H} = [1, -1, -1, 1, 1, u]$ ,          |
| 28) $V_7V'_1 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, 1, 1, u]$ ,         | 58) $V_6V'_1 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, 1, u, 1]$ ,         |
| 29) $V_5V'_1 : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, 1, 1]$ ,         | 59) $V_1V'_4 : \mathbf{H} = [-1, -1, u, 1, 1, 1]$ ,          |
| 30) $V_1V'_3 : \mathbf{H} = [-1, u, -1, 1, 1, 1]$ ,          | 60) $V_1V'_2 : \mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, 1, 1]$            |

Здесь  $-1 \leq u \leq 1$ . Первая вершина ребра получается при  $u = -1$ , последняя – при  $u = 1$ . Многогранник  $P$  имеет 30 граней, которые обозначим  $F_i$  и  $F'_i$  ( $i = 1, \dots, 15$ ). При каждом  $i$  грани  $F_i$  и  $F'_i$  расположены центрально симмет-

рично относительно точки  $O$ . Грани будем задавать списком принадлежащих им ребер и параметризацией:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $F_1 = \{V_1V_2, V_2V_8, V_8V_7, V_7V_1\}$ ,                                  | $\mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, -1, v]$ ,   |
| 2) $F'_1 = \{V'_1V'_2, V'_2V'_8, V'_8V'_7, V'_7V'_1\}$ ,                         | $\mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, 1, v]$ ,   |
| 3) $F_2 = \{V_1V_3, V_3V_9, V_9V_2, V_2V_1\}$ ,                                  | $\mathbf{H} = [u, v, 1, -1, -1, -1]$ ,  |
| 4) $F'_2 = \{V'_1V'_3, V'_3V'_9, V'_9V'_2, V'_2V'_1\}$ ,                         | $\mathbf{H} = [u, v, -1, 1, 1, 1]$ ,    |
| 5) $F_3 = \{V_1V_4, V_4V_{10}, V_{10}V_3, V_3V_1\}$ ,                            | $\mathbf{H} = [1, u, v, -1, -1, -1]$ ,  |
| 6) $F'_3 = \{V'_1V'_4, V'_4V'_{10}, V'_{10}V'_3, V'_3V'_1\}$ ,                   | $\mathbf{H} = [-1, u, v, 1, 1, 1]$ ,    |
| 7) $F_4 = \{V_1V_5, V_5V_{11}, V_{11}V_4, V_4V_1\}$ ,                            | $\mathbf{H} = [1, 1, u, v, -1, -1]$ ,   |
| 8) $F'_4 = \{V'_1V'_5, V'_5V'_{11}, V'_{11}V'_4, V'_4V'_1\}$ ,                   | $\mathbf{H} = [-1, -1, u, v, 1, 1]$ ,   |
| 9) $F_5 = \{V_1V_6, V_6V_{12}, V_{12}V_5, V_5V_1\}$ ,                            | $\mathbf{H} = [1, 1, 1, u, v, -1]$ ,    |
| 10) $F'_5 = \{V'_1V'_6, V'_6V'_{12}, V'_{12}V'_5, V'_5V'_1\}$ ,                  | $\mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, v, 1]$ ,  |
| 11) $F_6 = \{V_1V_7, V_7V_{13}, V_{13}V_6, V_6V_1\}$ ,                           | $\mathbf{H} = [1, 1, 1, -1, u, v]$ ,    |
| 12) $F'_6 = \{V'_1V'_7, V'_7V'_{13}, V'_{13}V'_6, V'_6V'_1\}$ ,                  | $\mathbf{H} = [-1, -1, -1, 1, u, v]$ ,  |
| 13) $F_7 = \{V_7V_8, V_8V_{14}, V_{14}V_{13}, V_{13}V_7\}$ ,                     | $\mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, v, 1]$ ,    |
| 14) $F'_7 = \{V'_7V'_8, V'_8V'_{14}, V'_{14}V'_{13}, V'_{13}V'_7\}$ ,            | $\mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, v, -1]$ ,  |
| 15) $F_8 = \{V_8V_2, V_2V_9, V_9V_{15}, V_{15}V_8\}$ ,                           | $\mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, -1, v]$ ,  |
| 16) $F'_8 = \{V'_8V'_2, V'_2V'_9, V'_9V'_{15}, V'_{15}V'_8\}$ ,                  | $\mathbf{H} = [1, u, -1, 1, 1, v]$ ,    |
| 17) $F_9 = \{V_9V_3, V_3V_{10}, V_{10}V_{16}, V_{16}V_9\}$ ,                     | $\mathbf{H} = [u, -1, v, -1, -1, -1]$ , |
| 18) $F'_9 = \{V'_9V'_3, V'_3V'_{10}, V'_{10}V'_{16}, V'_{16}V'_9\}$ ,            | $\mathbf{H} = [u, 1, v, 1, 1, 1]$ ,     |
| 19) $F_{10} = \{V_{10}V_4, V_4V_{11}, V_{11}V'_{14}, V'_{14}V_{10}\}$ ,          | $\mathbf{H} = [1, u, -1, v, -1, -1]$ ,  |
| 20) $F'_{10} = \{V'_{10}V'_4, V'_4V'_{11}, V'_{11}V_{14}, V_{14}V'_{10}\}$ ,     | $\mathbf{H} = [-1, u, 1, v, 1, 1]$ ,    |
| 21) $F_{11} = \{V_{11}V_5, V_5V_{12}, V_{12}V'_{15}, V'_{15}V_{11}\}$ ,          | $\mathbf{H} = [1, 1, u, 1, v, -1]$ ,    |
| 22) $F'_{11} = \{V'_{11}V'_5, V'_5V'_{12}, V'_{12}V_{15}, V_{15}V'_{11}\}$ ,     | $\mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, v, 1]$ ,  |
| 23) $F_{12} = \{V_{12}V_6, V_6V_{13}, V_{13}V'_{16}, V'_{16}V_{12}\}$ ,          | $\mathbf{H} = [1, 1, 1, u, 1, v]$ ,     |
| 24) $F'_{12} = \{V'_{12}V'_6, V'_6V'_{13}, V'_{13}V_{16}, V_{16}V'_{12}\}$ ,     | $\mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, -1, v]$ , |
| 25) $F_{13} = \{V_{13}V_{14}, V_{14}V'_{10}, V'_{10}V'_{16}, V'_{16}V_{13}\}$ ,  | $\mathbf{H} = [u, 1, 1, v, 1, 1]$ ,     |
| 26) $F'_{13} = \{V'_{13}V'_{14}, V'_{14}V_{10}, V_{10}V_{16}, V_{16}V'_{13}\}$ , | $\mathbf{H} = [u, -1, -1, v, -1, -1]$ , |
| 27) $F_{14} = \{V_8V_{15}, V_{15}V'_{11}, V'_{11}V_{14}, V_{14}V_8\}$ ,          | $\mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, v, 1]$ ,   |
| 28) $F'_{14} = \{V'_8V'_{15}, V'_{15}V'_{11}, V'_{11}V'_{14}, V'_{14}V'_8\}$ ,   | $\mathbf{H} = [1, u, -1, 1, v, -1]$ ,   |
| 29) $F_{15} = \{V_9V_{16}, V_{16}V'_{12}, V'_{12}V_{16}, V_{16}V_9\}$ ,          | $\mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, -1, v]$ , |
| 30) $F'_{15} = \{V'_9V'_{16}, V'_{16}V'_{12}, V'_{12}V'_{16}, V'_{16}V'_9\}$ ,   | $\mathbf{H} = [1, 1, u, 1, 1, v]$ .     |

Здесь принято, что обозначения вида  $V_2V_1$  и  $V_1V_2$  задают одно и тоже ребро, но при разном выборе первой и последней вершин. Таким образом, многогранник  $P$  имеет 32 вершины, 30 граней и 60 ребер. В табл. 6 приведены значения координат вершин многогранника  $P$  в декартовой системе координат  $OXYZ$

при значении угла  $\alpha = 72^\circ$  (способ, применявшийся для определения значения угла  $\alpha$ , описан в п. 3.3).

Таблица 6.

Вершина	$X$	$Y$	$Z$	Вершина	$X$	$Y$	$Z$
$V_1$	0	0	1.854	$V'_1$	0	0	-1.854
$V_2$	0	1.902	1.236	$V'_2$	0	-1.902	-1.236
$V_3$	-1.647	0.951	1.236	$V'_3$	1.647	-0.951	-1.236
$V_4$	-1.647	-0.951	1.236	$V'_4$	1.647	0.951	-1.236
$V_5$	0	-1.902	1.236	$V'_5$	0	1.902	-1.236
$V_6$	1.647	-0.951	1.236	$V'_6$	-1.647	0.951	-1.236
$V_7$	1.647	0.951	1.236	$V'_7$	-1.647	-0.951	-1.236
$V_8$	1.647	2.853	0.618	$V'_8$	-1.647	-2.853	-0.618
$V_9$	-1.647	2.853	0.618	$V'_9$	1.647	-2.853	-0.618
$V_{10}$	-3.294	0	0.618	$V'_{10}$	3.294	0	-0.618
$V_{11}$	-1.647	-2.853	0.618	$V'_{11}$	1.647	2.853	-0.618
$V_{12}$	1.647	-2.853	0.618	$V'_{12}$	-1.647	2.853	-0.618
$V_{13}$	3.294	0	0.618	$V'_{13}$	-3.294	0	-0.618
$V_{14}$	3.294	1.902	0	$V'_{14}$	-3.294	-1.902	0
$V_{15}$	0	3.804	0	$V'_{15}$	0	-3.804	0
$V_{16}$	-3.294	1.902	0	$V'_{16}$	3.294	-1.902	0

Вид многогранника  $P$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  приведен на рис. 7.

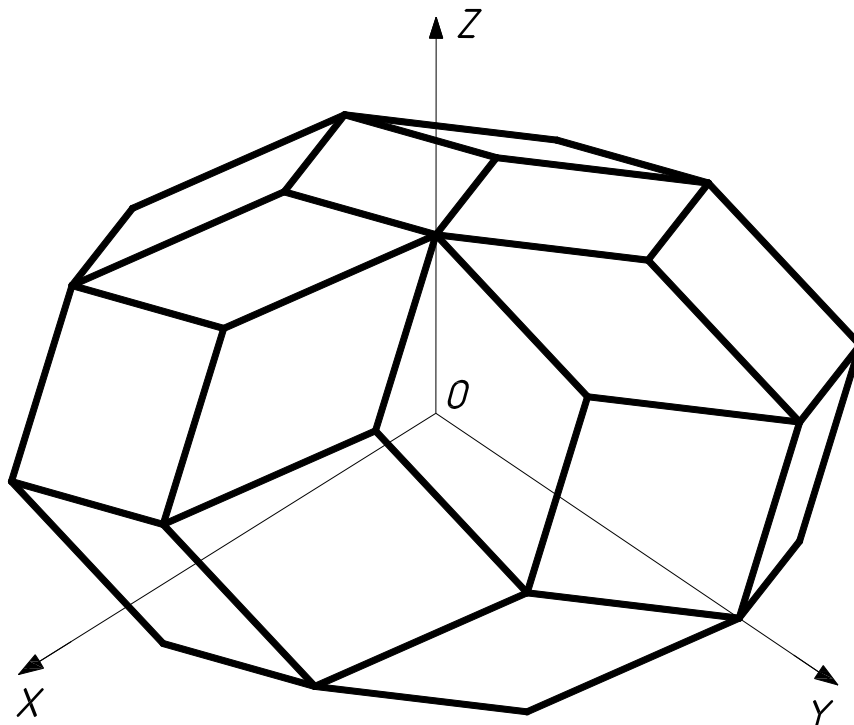


Рис. 7

На рис. 8 изображены проекции многогранника  $P$  на координатные плоскости системы  $OXYZ$ .

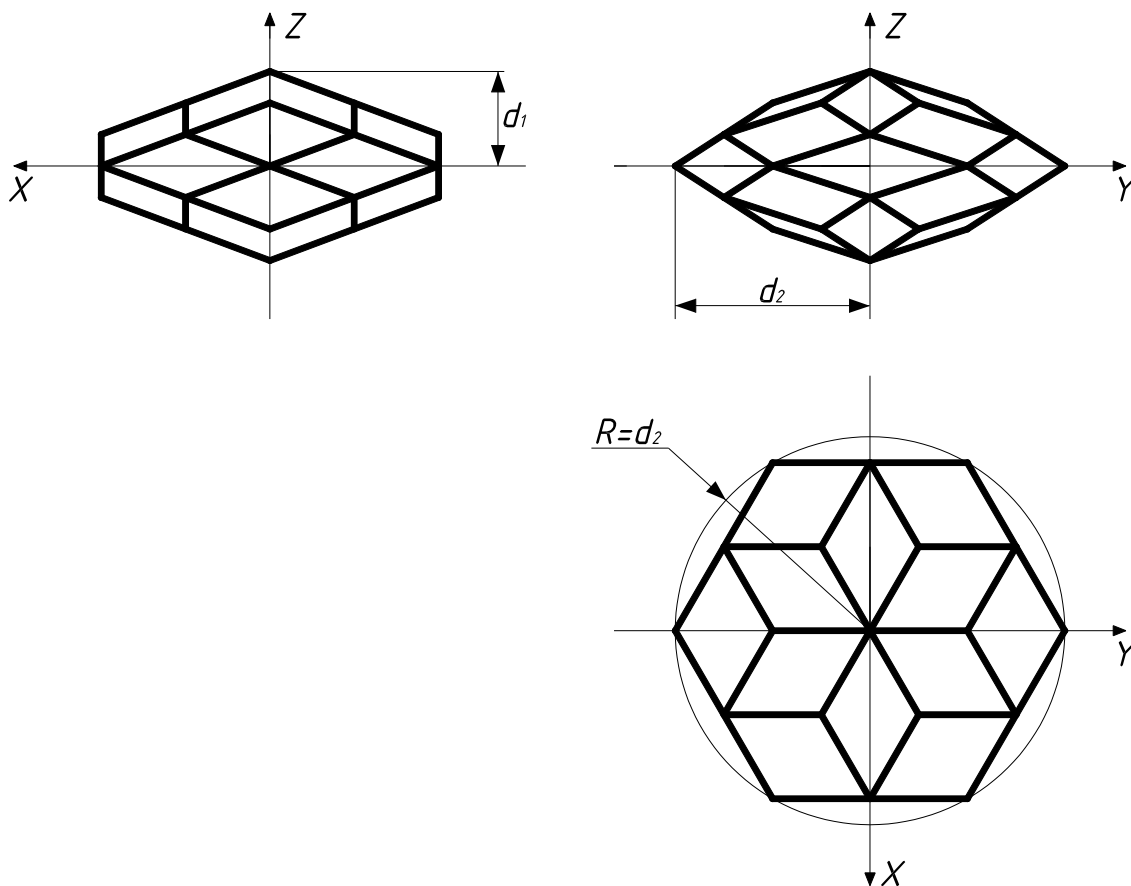


Рис. 8

На рис. 9 изображены проекции многогранника  $P$  на координатную плоскость  $OXY$  и обозначены вершины многогранника.

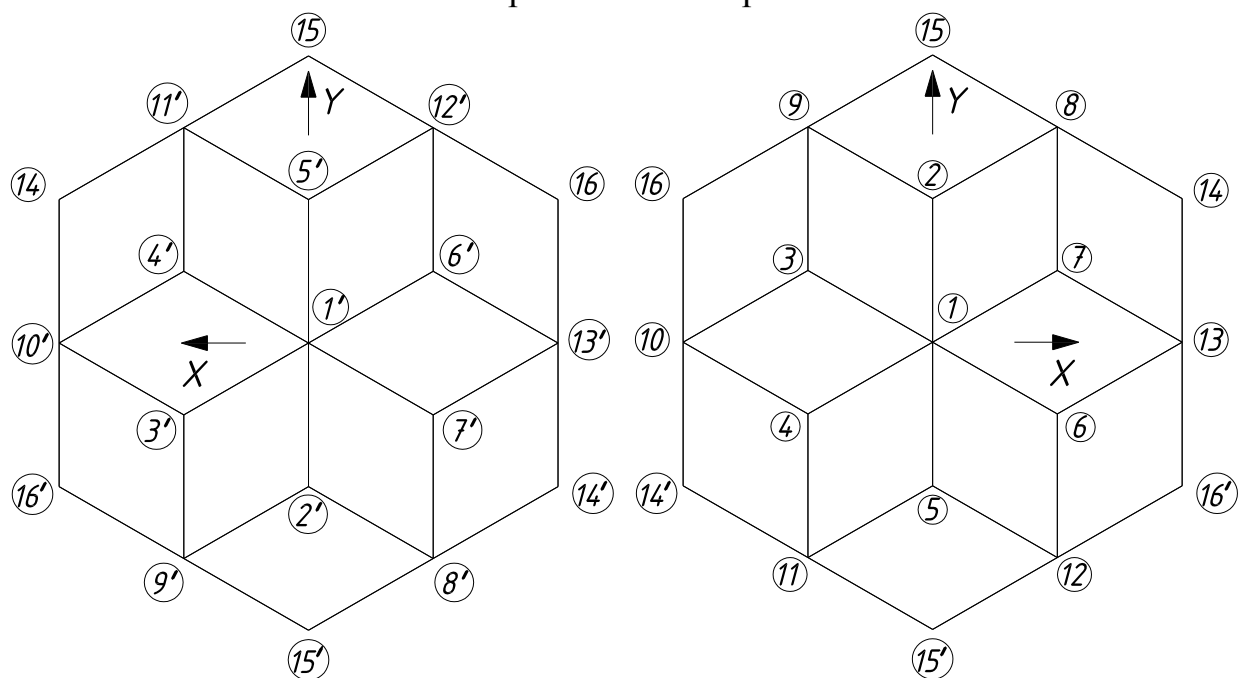


Рис. 9

Многогранник  $P$  допускает ряд преобразований симметрии. Он переходит в себя при повороте вокруг осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  на угол кратный  $p$ . Координатные плоскости системы  $OXYZ$  являются его плоскостями симметрии.

Приведем некоторые метрические характеристики многогранника  $P$ . Все его ребра имеют длину 2. Следовательно, все грани – ромбы. Вершины  $V_1$  и  $V'_1$  находятся на расстоянии  $d_1 = 6\cos a$  от начала координат - точки  $O$ , вершины  $V_{14}$ ,  $V'_{14}$ ,  $V_{15}$ ,  $V'_{15}$  и  $V_{16}$ ,  $V'_{16}$  отстоят от этой точки на расстояние  $d_2 = 4\sin a$ , а вершины  $V_2$ ,  $V'_2$ ,  $V_3$ ,  $V'_3$ ,  $V_4$ ,  $V'_4$ ,  $V_5$ ,  $V'_5$ ,  $V_6$ ,  $V'_6$  и  $V_7$ ,  $V'_7$  на расстояние  $d_3 = 2\sqrt{3\cos^2 a + 1}$ . Расстояния до вершин  $V_8$ ,  $V'_8$ ,  $V_9$ ,  $V'_9$ ,  $V_{10}$ ,  $V'_{10}$ ,  $V_{11}$ ,  $V'_{11}$ ,  $V_{12}$ ,  $V'_{12}$  и  $V_{13}$ ,  $V'_{13}$  от точки  $O$  равны  $d_4 = 2\sqrt{2\sin^2 a + 1}$ . Соотношения между расстояниями  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  выражаются неравенствами, приведенными в табл. 7.

Таблица 7.

Расстояния	Значения угла $a$
$d_2 < d_4 < d_3 < d_1$	$0^\circ \leq a < \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$
$d_2 = d_4 < d_3 < d_1$	$a = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$
$d_4 < d_2 < d_3 < d_1$	$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} < a < \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$
$d_4 < d_2 = d_3 < d_1$	$a = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 49.1^\circ$
$d_4 < d_3 < d_2 < d_1$	$\arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} < a < \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}$
$d_4 = d_3 < d_2 < d_1$	$a = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 50.8^\circ$
$d_3 < d_4 < d_2 < d_1$	$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} < a < \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$
$d_3 < d_4 < d_2 = d_1$	$a = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \approx 56.3^\circ$
$d_3 < d_4 < d_1 < d_2$	$\operatorname{arctg} \frac{3}{2} < a < \arccos \sqrt{\frac{3}{11}}$
$d_3 < d_4 = d_1 < d_2$	$a = \arccos \sqrt{\frac{3}{11}} \approx 58.5^\circ$
$d_3 < d_1 < d_4 < d_2$	$\arccos \sqrt{\frac{3}{11}} < a < \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$
$d_3 = d_1 < d_4 < d_2$	$a = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 65.9^\circ$
$d_1 < d_3 < d_4 < d_2$	$\arccos \frac{1}{\sqrt{6}} < a \leq 90^\circ$

В табл. 8 указаны зависимости, позволяющие определить расстояние от начала координат  $O$  до каждой грани многогранника  $P$ .

Таблица 8.

Грани	$F_1, F'_1, F_2, F'_2, F_3, F'_3,$ $F_4, F'_4, F_5, F'_5, F_6, F'_6$	$F_7, F'_7, F_8, F'_8, F_9, F'_9,$ $F_{10}, F'_{10}, F_{11}, F'_{11}, F_{12}, F'_{12}$	$F_{13}, F'_{13}, F_{14}, F'_{14}, F_{15}, F'_{15}$
Расстояние	$3 \sin 2a \sqrt{\frac{3}{3 + \cos^2 a}}$	$4 \sin 2a \sqrt{\frac{1}{1 + 15 \cos^2 a}}$	$2\sqrt{3} \sin a$

### 3.2 Возможности системы при отключении одного из маховиков.

Оценим возможности рассматриваемой системы в случае, когда один из маховиков отключен (вышел из строя). Без ограничения общности можно считать, что отключен маховик с осью, параллельной орту  $\mathbf{e}_6$ . Суммарный кинетический момент такой усеченной системы выражается векторной формулой

$$\mathbf{H} = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathbf{e}_3 + h_4 \mathbf{e}_4 + h_5 \mathbf{e}_5, \quad (3.2)$$

скалярная запись которой имеет вид

$$H_x = (h_2 + h_3 + h_5) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \quad H_y = \left( -h_1 - \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} - h_4 - \frac{h_5}{2} \right) \sin a,$$

$$H_z = (h_1 + h_2 + h_3 - h_4 - h_5) \cos a.$$

Выражение (3.2) для краткости будем записывать в виде  $\mathbf{H} = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5]$ . Здесь по-прежнему  $-h_{\max} \leq h_i \leq h_{\max}$  ( $i=1, \dots, 5$ ). Не ограничивая общности, положим  $h_{\max} = 1$ . Область пространства, заполняемая концами векторов (3.2) при  $|h_i| \leq 1$  – область возможных значений кинетического момента системы маховиков – представляет собой многогранник  $P'$ . Перечислим вершины, ребра и грани этого многогранника. Вершины (в данном случае их 22) обозначим  $V_i$  и  $V'_i$  ( $i=1, \dots, 11$ ). При каждом  $i$  вершины  $V_i$  и  $V'_i$  расположены центрально симметрично относительно точки  $O$ . Вершины характеризуются соотношениями:

- 1)  $V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, -1, -1] = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{1}{2} \sin a, 5 \cos a \right) \quad \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\},$
- 2)  $V_2 : \mathbf{H} = [-1, 1, 1, -1, -1] = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{5}{2} \sin a, 3 \cos a \right) \quad \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5\},$
- 3)  $V_3 : \mathbf{H} = [1, -1, 1, -1, -1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{3}{2} \sin a, 3 \cos a \right) \quad \{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\},$
- 4)  $V_4 : \mathbf{H} = [1, 1, -1, -1, -1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{1}{2} \sin a, 3 \cos a \right) \quad \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\},$
- 5)  $V_5 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, 1, -1] = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{3}{2} \sin a, 3 \cos a \right) \quad \{-\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\},$

- 6)  $V_6 : \mathbf{H} = [1,1,1,-1,1] = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{1}{2} \sin a, 3 \cos a \right)$   $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\}$ ,
- 7)  $V_7 : \mathbf{H} = [-1,1,1,-1,1] = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{3}{2} \sin a, \cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\}$ ,
- 8)  $V_8 : \mathbf{H} = [-1,-1,1,-1,-1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{7}{2} \sin a, \cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5\}$ ,
- 9)  $V_9 : \mathbf{H} = [1,-1,-1,-1,-1] = \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{1}{2} \sin a, \cos a \right)$   $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ,
- 10)  $V_{10} : \mathbf{H} = [1,1,-1,1,-1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{5}{2} \sin a, \cos a \right)$   $\{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ ,
- 11)  $V_{11} : \mathbf{H} = [1,1,1,1,1] = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{5}{2} \sin a, \cos a \right)$   $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
- 12)  $V'_{11} : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,-1,-1] = \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{5}{2} \sin a, -\cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ,
- 13)  $V'_{10} : \mathbf{H} = [-1,-1,1,-1,1] = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{5}{2} \sin a, -\cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\}$ ,
- 14)  $V'_9 : \mathbf{H} = [-1,1,1,1,1] = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{1}{2} \sin a, -\cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
- 15)  $V'_8 : \mathbf{H} = [1,1,-1,1,1] = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{7}{2} \sin a, -\cos a \right)$   $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_5\}$ ,
- 16)  $V'_7 : \mathbf{H} = [1,-1,-1,1,-1] = \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{3}{2} \sin a, -\cos a \right)$   $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ ,
- 17)  $V'_6 : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,1,-1] = \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{1}{2} \sin a, -3 \cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ ,
- 18)  $V'_5 : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,-1,1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{3}{2} \sin a, -3 \cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\}$ ,
- 19)  $V'_4 : \mathbf{H} = [-1,-1,1,1,1] = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, \frac{1}{2} \sin a, -3 \cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4\}$ ,
- 20)  $V'_3 : \mathbf{H} = [-1,1,-1,1,1] = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{3}{2} \sin a, -3 \cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ,
- 21)  $V'_2 : \mathbf{H} = [1,-1,-1,1,1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{5}{2} \sin a, -3 \cos a \right)$   $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_5\}$ ,
- 22)  $V'_1 : \mathbf{H} = [-1,-1,-1,1,1] = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a, -\frac{1}{2} \sin a, -5 \cos a \right)$   $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_5\}$ .

Здесь в фигурных скобках указаны орты ребер, выходящих из каждой вершины. Параллелепипед имеет 40 ребер. Ребра многогранника  $P'$  будем задавать, указывая соединяемые ими вершины и параметризации соответствующих отрезков. Имеем:

$$\begin{array}{lll}
1) V_2V_1 : \mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, -1], & 15) V_3V_1 : \mathbf{H} = [1, u, 1, -1, -1], & 29) V_6V_7' : \mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, -1], \\
2) V_4V_1 : \mathbf{H} = [1, 1, u, -1, -1], & 16) V_1V_5 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, u, -1], & 30) V_9V_7' : \mathbf{H} = [1, -1, -1, u, -1], \\
3) V_1V_6 : \mathbf{H} = [1, 1, 1, -1, u], & 17) V_2V_7 : \mathbf{H} = [-1, 1, 1, -1, u], & 31) V_6V_1' : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, 1, u], \\
4) V_8V_2 : \mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, -1], & 18) V_3V_8' : \mathbf{H} = [u, 1, -1, 1, 1], & 32) V_5V_{10}' : \mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, 1], \\
5) V_9V_3 : \mathbf{H} = [1, -1, u, -1, -1], & 19) V_1V_2' : \mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, 1], & 33) V_{10}'V_4' : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, u, 1], \\
6) V_4V_{10} : \mathbf{H} = [1, 1, -1, u, -1], & 20) V_{10}V_5 : \mathbf{H} = [1, 1, u, 1, -1], & 34) V_{11}'V_6' : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, -1], \\
7) V_5V_{11} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, 1, u], & 21) V_7V_6 : \mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, 1], & 35) V_{11}'V_8 : \mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, -1], \\
8) V_6V_{11} : \mathbf{H} = [1, 1, 1, u, 1], & 22) V_7V_9' : \mathbf{H} = [-1, 1, 1, u, 1], & 36) V_{11}'V_9 : \mathbf{H} = [u, -1, -1, -1, -1], \\
9) V_{10}'V_7 : \mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, 1], & 23) V_2V_8' : \mathbf{H} = [1, u, -1, 1, 1], & 37) V_8V_3 : \mathbf{H} = [u, -1, 1, -1, -1], \\
10) V_1V_3' : \mathbf{H} = [-1, u, -1, 1, 1], & 24) V_9V_{11} : \mathbf{H} = [u, 1, 1, 1, 1], & 38) V_{11}'V_5' : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, -1, u], \\
11) V_7V_2' : \mathbf{H} = [1, -1, -1, 1, u], & 25) V_8V_{11} : \mathbf{H} = [1, 1, u, 1, 1], & 39) V_8V_{10}' : \mathbf{H} = [-1, -1, 1, -1, u], \\
12) V_{10}'V_8' : \mathbf{H} = [1, 1, -1, 1, u], & 26) V_7V_{10} : \mathbf{H} = [1, u, -1, 1, -1], & 40) V_9V_4 : \mathbf{H} = [1, u, -1, -1, -1], \\
13) V_4V_9' : \mathbf{H} = [-1, u, 1, 1, 1], & 27) V_3V_9' : \mathbf{H} = [-1, 1, u, 1, 1], & \\
14) V_1V_4' : \mathbf{H} = [-1, -1, u, 1, 1], & 28) V_5V_1' : \mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, 1], & 
\end{array}$$

Здесь  $-1 \leq u \leq 1$ . Первая вершина ребра получается при  $u = -1$ , последняя – при  $u = 1$ . Многогранник  $P'$  имеет 20 граней, которые обозначим  $F_i$  и  $F_i'$  ( $i = 1, \dots, 10$ ). При каждом  $i$  грани  $F_i$  и  $F_i'$  расположены центрально симметрично относительно точки  $O$ . Грани будем задавать списком принадлежащих им ребер и параметризацией:

$$\begin{array}{ll}
1) F_1 = \{V_1V_2, V_2V_7, V_7V_6, V_6V_1\}, & \mathbf{H} = [u, 1, 1, -1, v], \\
2) F_1' = \{V_1V_2', V_2V_7', V_7V_6', V_6V_1'\}, & \mathbf{H} = [u, -1, -1, 1, v], \\
3) F_2 = \{V_1V_3, V_3V_8, V_8V_2, V_2V_1\}, & \mathbf{H} = [u, v, 1, -1, -1], \\
4) F_2' = \{V_1V_3', V_3V_8', V_8V_2', V_2V_1'\}, & \mathbf{H} = [u, v, -1, 1, 1], \\
5) F_3 = \{V_1V_4, V_4V_9, V_9V_3, V_3V_1\}, & \mathbf{H} = [1, u, v, -1, -1], \\
6) F_3' = \{V_1V_4', V_4V_9', V_9V_3', V_3V_1'\}, & \mathbf{H} = [-1, u, v, 1, 1], \\
7) F_4 = \{V_1V_5, V_5V_{10}, V_{10}V_4, V_4V_1\}, & \mathbf{H} = [1, 1, u, v, -1], \\
8) F_4' = \{V_1V_5', V_5V_{10}', V_{10}V_4', V_4V_1'\}, & \mathbf{H} = [-1, -1, u, v, 1], \\
9) F_5 = \{V_1V_6, V_6V_{11}, V_{11}V_5, V_5V_1\}, & \mathbf{H} = [1, 1, 1, u, v], \\
10) F_5' = \{V_1V_6', V_6V_{11}', V_{11}V_5', V_5V_1'\}, & \mathbf{H} = [-1, -1, -1, u, v], \\
11) F_6 = \{V_3V_9, V_9V_{11}, V_{11}V_8, V_8V_3\}, & \mathbf{H} = [u, -1, v, -1, -1], \\
12) F_6' = \{V_3V_9', V_9V_{11}', V_{11}V_8', V_8V_3'\}, & \mathbf{H} = [u, 1, v, 1, 1], \\
13) F_7 = \{V_4V_{10}, V_{10}V_7, V_7V_9, V_9V_4\}, & \mathbf{H} = [1, u, -1, v, -1], \\
14) F_7' = \{V_4V_{10}', V_{10}V_7', V_7V_9', V_9V_4'\}, & \mathbf{H} = [-1, u, 1, v, 1],
\end{array}$$



- 15)  $F_8 = \{V_5V_{11}, V_{11}V_8', V_8'V_{10}, V_{10}V_5\}$ ,  $\mathbf{H} = [1, 1, u, 1, v]$ ,  
 16)  $F_8' = \{V_5'V_{11}', V_{11}'V_8, V_8V_{10}', V_{10}'V_5'\}$ ,  $\mathbf{H} = [-1, -1, u, -1, v]$ ,  
 17)  $F_9 = \{V_6V_7, V_7V_9', V_9'V_{11}, V_{11}V_6\}$ ,  $\mathbf{H} = [u, 1, 1, v, 1]$ ,  
 18)  $F_9' = \{V_6'V_7', V_7'V_9, V_9V_{11}', V_{11}'V_6'\}$ ,  $\mathbf{H} = [u, -1, -1, v, -1]$ ,  
 19)  $F_{10} = \{V_7V_2, V_2V_8, V_8V_{10}', V_{10}'V_7\}$ ,  $\mathbf{H} = [-1, u, 1, -1, v]$ ,  
 20)  $F_{10}' = \{V_7'V_2', V_2'V_8', V_8'V_{10}, V_{10}V_7'\}$ ,  $\mathbf{H} = [1, u, -1, 1, v]$ .

Здесь принято, что обозначения вида  $V_2V_1$  и  $V_1V_2$  задают одно и то же ребро, но при разном выборе первой и последней вершин. В табл. 9 приведены значения координат вершин многогранника  $P'$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  при значении угла  $\alpha = 72^\circ$  с учетом отказа одного маховика.

Таблица 9.

Вершина	X	Y	Z	Вершина	X	Y	Z
$V_1$	0.824	0.476	1.545	$V_1'$	-0.824	-0.476	-1.545
$V_2$	0.824	2.378	0.927	$V_2'$	-0.824	-2.378	-0.927
$V_3$	-0.824	1.427	0.927	$V_3'$	0.824	-1.427	-0.927
$V_4$	-0.824	-0.476	0.927	$V_4'$	0.824	0.476	-0.927
$V_5$	0.824	-1.427	0.927	$V_5'$	-0.824	1.427	-0.927
$V_6$	2.471	-0.476	0.927	$V_6'$	-2.471	0.476	-0.927
$V_7$	2.471	1.427	0.309	$V_7'$	-2.471	-1.427	-0.309
$V_8$	-0.824	3.329	0.309	$V_8'$	0.824	-3.329	-0.309
$V_9$	-2.471	0.476	0.309	$V_9'$	2.478	-0.478	-0.309
$V_{10}$	-0.824	-2.378	0.309	$V_{10}'$	0.824	2.378	-0.309
$V_{11}$	2.471	-2.378	0.309	$V_{11}'$	-2.471	2.378	-0.309

Вид многогранника  $P'$  в декартовой системе координат  $OXYZ$  приведен на рис. 10.

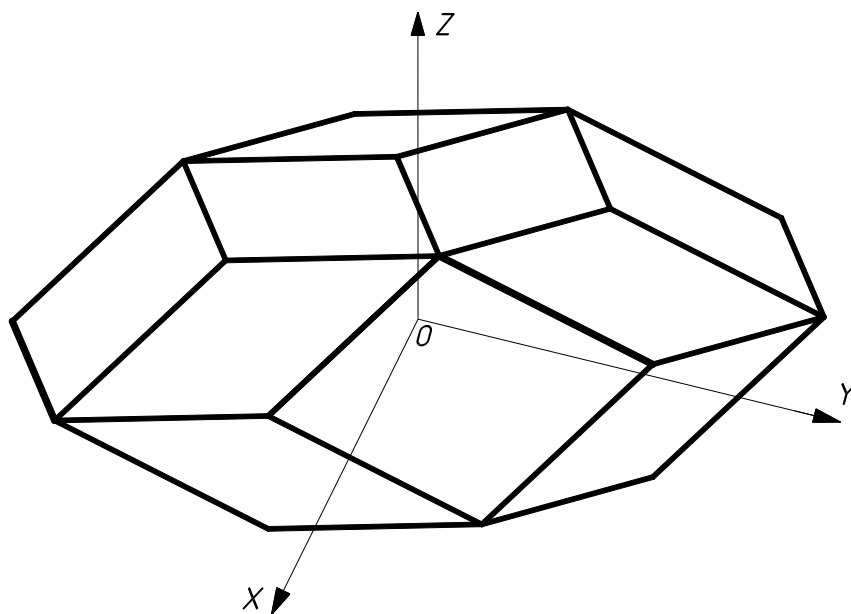


Рис. 10

На рис. 11 изображены проекции многогранника  $P'$  на координатные плоскости системы  $OXYZ$ .

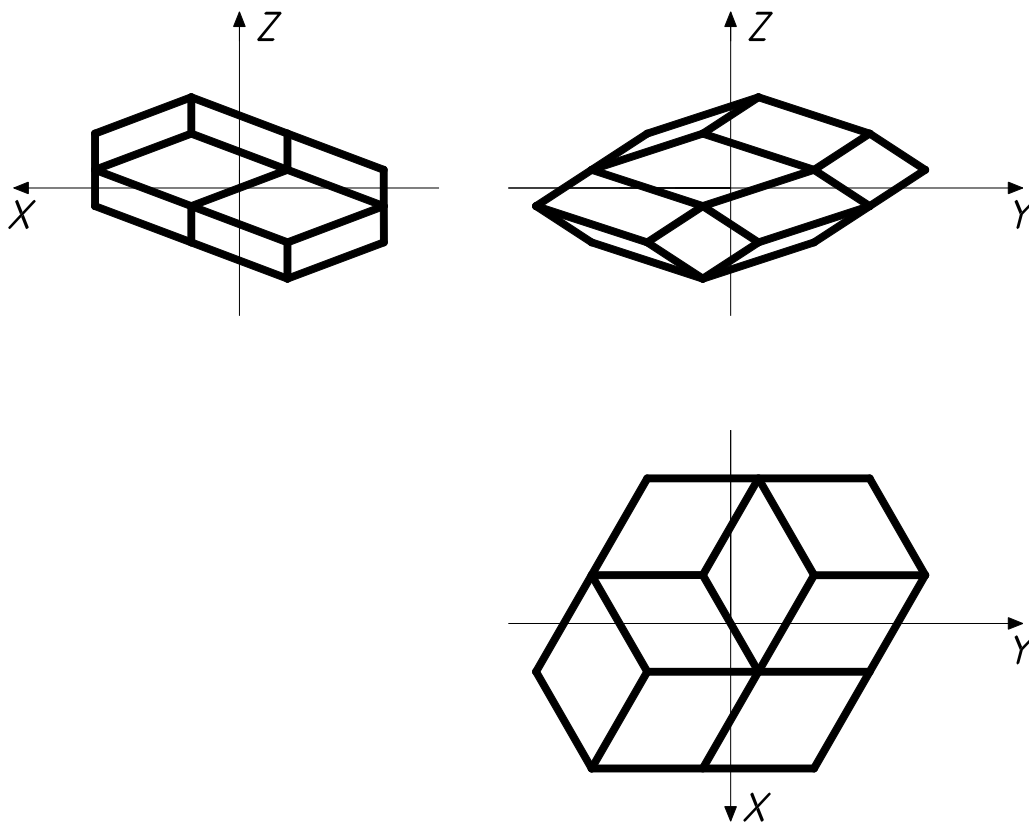


Рис. 11

На рис. 12 изображены проекции многогранника  $P'$  на координатную плоскость  $OXY$  и обозначены вершины многогранника.

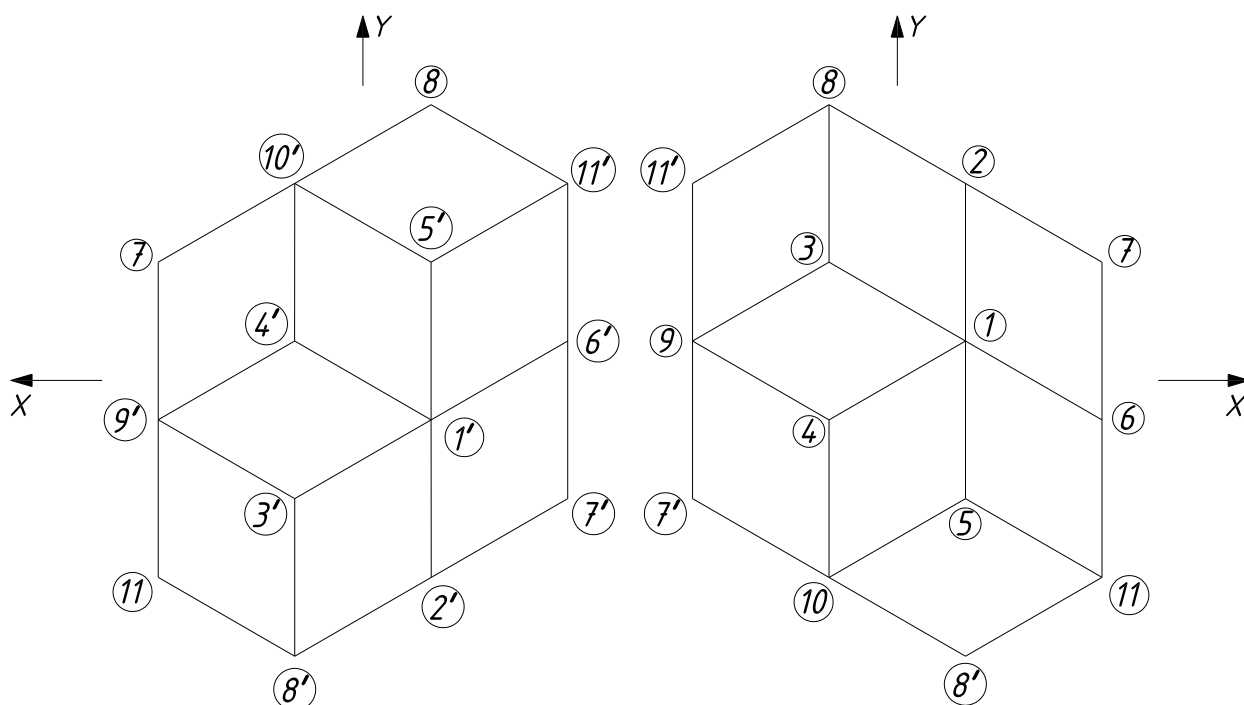


Рис. 12

Многогранник  $P'$  представляет собой многогранник  $P$  с длиной ребер  $V_1V_7', V_2V_8', V_6V_{13}', V_9V_{15}', V_{12}V_{16}', V_1V_7, V_2V_8, V_6V_{13}, V_9V_{15}, V_{12}V_{16}'$  равной нулю, поскольку именно эти ребра параллельны орту  $e_6$  и, соответственно, оси отключенного маховика. Таким образом, в декартовой системе координат  $OXYZ$ , координаты вершин  $V_1', V_2', V_6', V_8', V_{11}', V_1, V_2, V_6, V_8, V_{11}$  многогранника  $P'$  совпадают с координатами середин ребер  $V_1V_7', V_2V_8', V_6V_{13}', V_9V_{15}', V_{12}V_{16}', V_1V_7, V_2V_8, V_6V_{13}, V_9V_{15}, V_{12}V_{16}'$  многогранника  $P$  соответственно. Приведем некоторые метрические характеристики многогранника  $P'$ . Его ребра имеют длину 2. Следовательно, все грани – ромбы. Зависимости, определяющие расстояния от начала координат (точки  $O$ ), до вершин многогранника  $P'$  представлены в табл. 10.

Таблица 10.

Вершины	Расстояние
$V_1, V_1'$	$d_1 = \sqrt{24\cos^2 a + 1}$
$V_2, V_2', V_6, V_6'$	$d_2 = \sqrt{2\cos^2 a + 7}$
$V_3, V_3', V_5, V_5'$	$d_3 = \sqrt{6\cos^2 a + 3}$
$V_4, V_4'$	$d_4 = \sqrt{8\cos^2 a + 1}$
$V_7, V_7'$	$d_5 = \sqrt{8\sin^2 a + 1}$
$V_8, V_8', V_{11}, V_{11}'$	$d_6 = \sqrt{12\sin^2 a + 1}$
$V_9, V_9', V_{10}, V_{10}'$	$d_7 = \sqrt{6\sin^2 a + 1}$

В табл. 11 указаны зависимости, позволяющие определить расстояние от начала координат  $O$  до каждой грани многогранника  $P'$ .

Таблица 11.

Грани	Расстояние	Грани	Расстояние
$F_1, F_1'$	$\frac{7}{2}\sin 2a\sqrt{\frac{1}{4-3\sin^2 a}}$	$F_2, F_2'$	$\frac{5}{2}\sin 2a\sqrt{\frac{3}{4-\sin^2 a}}$
$F_6, F_6'$	$3\sin 2a\sqrt{\frac{1}{4-3\sin^2 a}}$	$F_3, F_3'$	$2\sin 2a\sqrt{\frac{3}{4-\sin^2 a}}$
$F_8, F_8'$		$F_4, F_4'$	
$F_7, F_7'$	$\frac{5}{2}\sin 2a\sqrt{\frac{1}{4-3\sin^2 a}}$	$F_9, F_9'$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin a$
		$F_{10}, F_{10}'$	

Приведенные выше геометрические построения областей возможных значений кинетических моментов маховиков позволяют сделать вывод, что схема, состоящая из большего количества маховиков, менее чувствительна к отказам и имеет область возможных значений кинетического момента, более приближенную к эллипсоиду, что дает более широкие возможности управления угловой скоростью КА.

**3.3. Расположение маховиков на космическом аппарате.** Рассмотрим вопрос, как следует расположить описанную в п. 3.1 систему из шести махо-

виков на КА и как лучше всего выбрать значения угла  $a$ , чтобы обеспечить достаточно широкие возможности управления угловой скоростью КА.

Также как в п. 2.3 моменты инерции КА относительно главных центральных осей инерции  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  обозначим соответственно  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  и примем значения этих моментов равными:  $J_x = 1000 \text{ кг м}^2$ ,  $J_y = 1600 \text{ кг м}^2$ ,  $J_z = 800 \text{ кг м}^2$ . Исходя из условия  $w_y = w_z$  и с учетом соотношений  $H_x = 2\sqrt{3} \sin a$ ,  $H_y = 4 \sin a$ ,  $H_z = 6 \cos a$ , определим значение угла  $a$ .  $\frac{H_y}{H_z} = \frac{J_y}{J_z}$ ,

$\frac{4 \sin a}{6 \cos a} = 2$ , откуда получаем  $a = \arctg 3 = 72^\circ$ . Здесь  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  и  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  - проекции абсолютной угловой скорости несущего тела и собственного кинетического момента системы маховиков на оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно. Поскольку  $J_y > J_x$  и пирамида, по ребрам которой располагаются маховики, является правильной, то рациональнее ее расположить таким образом, чтобы вектора  $h_1$  и  $h_4$  лежали в плоскости  $OYZ$ . Таким образом, при полученном значении угла  $a$ , максимальные значения абсолютных величин компонент угловой скорости аппарата в системе  $OXYZ$  составляют  $w_x = 0.0033h_{\max} \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}$ ,  $w_y = w_z = 0.0023h_{\max} \text{ кг}^{-1} \text{ м}^{-2}$ , где  $h_{\max}$  - абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика.

### Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
2. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М., Наука, 1974.
3. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., Наука, 1970.