

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
им. М. В. Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Т. Т. Гарипов

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН
В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Москва, 2005

УДК.519.6

Т.Т. Гарипов

Email: garipov@kiam.ru

Моделирование развития трещин в пороупругой среде.

Ключевые слова: трещина, разлом, критерий, разрушение, опорные операторы, модель Био, интенсивность напряжений, теория упругости.

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрена связная задача Био. Создан алгоритм ее решения на основе метода опорных операторов. В качестве тестов использованы известные решения задачи упругости для трещин в неограниченной среде. Реализован алгоритм решения задач упругости и пороупругости, получено хорошее соответствие численного и асимптотического решения. В случае стационарной задачи получено асимптотическое решение вблизи концов трещины в пороупругой постановке. Численно решена задача взаимодействия трещин, получены возможные зоны разрушений при взаимодействии, основанные на критерии Кулона-Мора.

Стр. 22, рис. 15 , библи. 16.

T.T. Garipov

Modelling of cracks evolution in poroelastic medium.

ABSTRACT

In this article the set of processes in the saturated porous media is considered according to the quasi-stationary Biot model. For solving this problem the support operator method is used. The algorithm of solving the problems of elasticity and poroelasticity is realized. Good conformity of numerical and asymptotic decisions is received. In case of a stationary problem, asymptotical solving near the ends of a crack, has been received. The Kylon-More criterion was used for modeling the crack interaction. The problem of the cracks interaction is solved numerically, possible zones of destructions duriang interaction process are calculated.

Оглавление

Введение	3
§1. Общие представления теории трещин	4
§2. Критерий Кулона-Мора	12
§3. Развитие трещин в пороупругой среде	12
§4. Численные эксперименты	15
§4.1 Тестовые примеры	15
§4.2 Взаимодействие трещины гидроразрыва с разломом .	18
Заключение	18
Литература	20

Введение

В настоящее время большинство нефтегазовых месторождений России находятся на стадии завершающей разработки. Такие месторождения характеризуются общим истощением и большой обводненностью нефтедобывающих скважин. Новые месторождения, вовлекаемые в разработку, содержат трудноизвлекаемые запасы углеводородов, коллекторы характеризуются низкой проницаемостью и слабым дренированием. В течение длительного срока эксплуатации скважин, параметры призабойной зоны значительно ухудшаются. Это связано изменением проницаемости, выпадением парафинов и асфальтенов и значительной обводненностью скважин. Эффективность работы таких скважин за время эксплуатации значительно уменьшается. Одним из основных методов интенсификации разработки сложных и проблемных нефтегазовых месторождений является гидравлический разрыв пласта (ГРП). В настоящее время около трети запасов углеводородов можно извлечь только с использованием этой технологии [1].

Возникающие в процессе ГРП высокопроницаемые трещины позволяют увеличить дебет скважин в несколько раз. Опыт использования технологии ГРП насчитывает более пятидесяти лет, однако, предсказание эволюции трещины гидроразрыва в сложных геологических структурах остается

важной и актуальной проблемой.

При рассмотрении такого класса задач, часто используется классический подход возникновения трещин в пластично-упругом материале, исследуются классические уравнения теории упругости и пластичности. Большой вклад в изучение поведения трещин внесли механики А. Гриффитс и Л. Ирвин. В 1920 году А. Гриффитс предложил энергетический критерий разрушения материалов [3], позднее в 1957 году Г. Ирвином был предложен силовой критерий разрушения, последний также показал эквивалентность обоих подходов [4]. При этом использовалось известное решение задачи о напряженном состоянии бесконечной пластины с эллиптическим вырезом, впервые полученное российским ученым Колосовым В.Г. в 1909 году [5]. Для определения параметров разрушения Ирвином введена новая характеристика материала - коэффициент интенсивности напряжений. Физическое значение параметра подробно изучено Ирвином и положено в основу его теории трещин [4].

В случае отсутствия информации о коэффициенте интенсивности для трещины, для определения зон разрушений может быть использован критерий Кулона-Мора [2], который связывает компоненты тензора напряжений.

При изучении гидравлического разрыва пласта необходимо учитывать отток части жидкости через поверхность трещины в горные породы. В свою очередь, возникающие фильтрационные потоки в породе порождают массовые источники, приводящие к изменению полей напряжений вблизи трещины. Градиенты давления противонаправлены фильтрационным скоростям, поэтому учет фильтрационных утечек приводит к уменьшению раскрытия трещин [6]. Для описания напряженно деформированного состояния горной породы в данной работе используется система уравнений Био [7]. Модель Био позволяет рассматривать совместно задачи фильтрации и пороупругости.

§1. Общие представления теории трещин

Далее рассмотрим уравнения теории упругости в предположении отсутствия массовых источников. Тогда, решение задачи теории упругости может быть представлено через одну вспомогательную функцию - функцию Эри.

В случае плоской деформации уравнения равновесия имеют вид:

$$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \quad (1)$$

Тогда, легко видеть, что для выполнения равенств должны существовать функции $A(x, y)$, $B(x, y)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -\frac{\partial A}{\partial y} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial B}{\partial x} \\ \sigma_{xy} = \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2)$$

Отсюда следует существование функции $U(x, y)$: $A = \frac{\partial U}{\partial x}$ и $B = \frac{\partial U}{\partial y}$. Подставляя выражения в уравнение (2), получим выражение для определения напряжений через функцию $U(x, y)$, называемой функцией Эри.

Для материалов подчиняющихся закону Гука, можно получить бигармоническое уравнение на функцию Эри вида:

$$\Delta\Delta U = 0 \quad (3)$$

Наиболее общим методом решения задач теории упругости является использование аппарата комплексного анализа. Введем комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. В этом случае бигармоническое уравнение примет вид:

$$\Delta\Delta U = 16 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \quad (4)$$

Общее решение бигармонического уравнения в комплексных переменных задается формулой:

$$U(z) = \bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad (5)$$

Данное решение впервые получено в 1927 году Гурса, и носит его имя, здесь $\phi(z)$, $\chi(z)$ - неизвестные функции комплексного переменного.

Таким образом задача нахождения напряжений в упругом теле свелась к нахождению функций $\phi(z)$, $\chi(z)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{2} \{ -\bar{z}\phi''(z) - z\overline{\phi''(z)} + 2 [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] - \chi''(z) - \overline{\chi''(z)} \} \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{2} \{ \bar{z}\phi''(z) + z\overline{\phi''(z)} + 2 [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] + \chi''(z) + \overline{\chi''(z)} \} \\ \sigma_{xy} &= -\frac{i}{2} \{ \bar{z}\phi''(z) - z\overline{\phi''(z)} + \chi''(z) - \overline{\chi''(z)} \} \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения задач теории трещин интересно рассмотреть задачу растяжения кругового выреза в неограниченной плоскости. В случае всесто-

ронного растяжения напряжениями P_0 решение задачи в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho} = P_0 \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = P_0 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) \\ \sigma_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Данное решение поддается обобщению на случай эллиптического и прямолинейного выреза выбором соответствующего отображения. Действительно, рассмотрим функцию Жуковского:

$$z = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad R > 0, \quad 0 \leq m < 1 \quad (8)$$

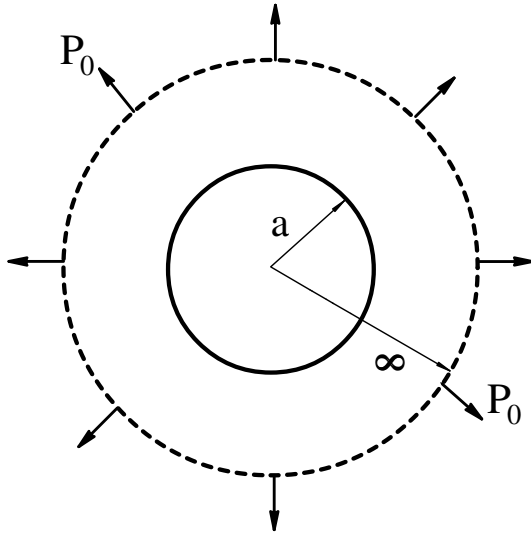


Рис. 1: Развитие трещины

Окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = R(1 + m)$, $b = R(1 - m)$. Подбрав соответствующие можно получить любой эллипс, в предельном случае R и $m = 1$ эллипс обращается в двусторонний отрезок, заключенный между точками $\pm 2R$. Применив соответствующее обратное отображение можно свести задачу с эллиптическим вырезом к задаче о круге, подробно данные вопросы изучены, например, в работах [8], [16].

При теоретическом анализе проблем прочности и разрушения, авторы работ [4], [3] основываются на универсальных уравнениях термодинамики. Закон сохранения энергии для тела в конечных размерах в общем случае имеет вид:

$$dE + dU = dA + dQ + dQ^* \quad (9)$$

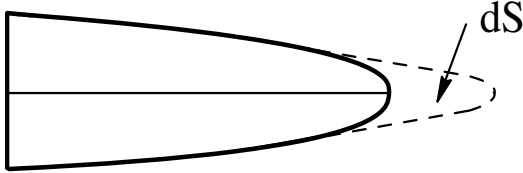
Здесь E - кинетическая энергия, U - полная внутренняя энергия, dA - работа внешних сил, dQ - внешний приток тепла, dQ^* - „особый“ приток энергии, обусловленный, например, химическими реакциями. Для развивающейся трещины в закон сохранения (9) необходимо добавить член dA^* - энергия в особых точках, возникающая за счет движения краев трещины.

Далее, в предположении хрупкого и квазихрупкого разрушения, можно считать, что величины dE , dQ , dA не изменяются, закон сохранения примет

вид:

$$dU = dA^* + dQ^* \quad (10)$$

Энергия dA^* освобождаемая при образовании новой поверхности трещины, равной работе по закрытию этой поверхности определяется равенством:



$$dA^* = \frac{2(1 - \sigma^2)\pi \hat{K}^2 dS}{E} \quad (11)$$

Рис. 2: Изменение площади трещины
Здесь \hat{K} - коэффициент интенсивности напряжений, σ , E - коэффициенты Пуассона и Юнга, соответственно. Величина dS изменение площади трещины (рис.2).

Здесь \hat{K} - коэффициент интенсивности напряжений, σ , E - коэффициенты Пуассона и Юнга, соответственно. Величина dS изменение площади трещины (рис.2).

Равновесная трещина отличается от произвольной поверхности нормального разрыва тем, что освободившаяся энергия обращается в ноль, отсюда:

$$\hat{K} = 0 \quad (12)$$

Тогда, справедливы утверждения:

1. Растягивающие напряжения на контуре трещины конечно
2. Противоположные берега трещины плавно смыкаются на ее контуре

Утверждения и физические соображения, приводящие к таким выводам, рассмотрены в работе [14], доказательство факта приведено в статье [13]. Формула (2) в частном случае плоской деформации без учета условия конечности напряжений указаны в работе [4]. Условие $\hat{K} = 0$ позволяет сформулировать задачу о равновесных трещинах. В плоской постановке, общая задача теории трещин для единичной трещины, может быть сформулирована следующим образом. Для данного распределения напряжений и сил действующих на трещину, необходимо найти напряжения, деформации и координаты удовлетворяющие уравнениям равновесия и граничным условиям.

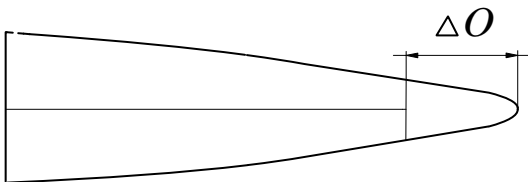


Рис. 3: Особая зона

[16]. В предположении, что концы трещины свободны от напряжений, в

Как отмечалось выше, для единичной трещины подобрав соответствующее отображение, задачу можно свести к задаче о круге. Однако, уравнения равновесия и граничные условия не определяют длину трещины

случае нормальных растягивающих сил, напряжения вблизи трещины связаны с удлинением трещины dl выражением:

$$\sigma_{nn} = \frac{P_0\sqrt{a}}{\sqrt{2dl}} + O(1) \quad (13)$$

Отсюда следует, что при любой длине трещины a напряжения в конце трещины не будут конечными и равновесной трещины не существует. Данный факт связан с тем, что классическая модель не учитывает силы сцепления на концах трещин, т.е. модель не полностью описывает нагрузки, действующие на трещину. Следовательно, для построения адекватной теории квазихрупкого развития трещин необходимо модель дополнить некоторыми допущениями. Известно, что интенсивность сил сцепления действующая между телами зависит от расстояния между ними. С увеличением расстояния до некоторой величины интенсивность возрастает, затем быстро убывает [16]. Таким образом у трещины возникает некоторая зона da в которой силы сцепления значительны (рис.3).

Физический анализ развития трещин приводит к основным гипотезам развития трещин:

1. Ширина концевой части da мала сравнительно с длиной трещины a
2. Начальное сечение поверхности трещины не зависит от действующих нагрузок для данного материала, при данных условиях всегда одинаковы

Подробно физические предположения приводящие к вышесказанным гипотезам получены и рассмотрены в работах [14], [15]. При принятых предположениях единственной характеристикой сил сцепления является константа сцепления, определяемая выражением:

$$\gamma = \int_{da} \frac{G(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi \quad (14)$$

$G(\xi)$ - распределения сил сцепления вблизи концов щели. В работе [4] Г. Ирвином был предложен универсальный критерий разрушения, тесно связанный с идеями Гриффитса, который связывает коэффициенты интенсивности напряжений и константу материала γ .

$$k_I^2 + k_{II}^2 = \frac{E\gamma}{1 - \sigma^2} \quad (15)$$

Где E и σ модуль Юнга и Пуассона соответственно. При достижении равенства (15) осуществляется критическое условие для внешних нагрузок и

трещина может эволюционировать. В общем случае равенство определяет расположение и геометрические характеристики трещины. Равенства, полученные Ирвином в теории трещин, являются основными соотношениями, добавочными к уравнениям теории упругости.

Вообще говоря, разрушение материалов более сложная и общая задача, и выявление локальных зон выполнения критерия Ирвина в общем не гарантирует предсказания сценария разрушения. Однако, в большом числе практически важных случаев разрушение происходит квазихрупким образом, т.е. пластическая зона имеет малые размеры и сосредотачивается вблизи концов трещины. Эта возможность позволяет применять описанную методику для рассмотрения и изучения процессов развития трещин.

Для изучения особенностей решения вблизи концов щели, рассмотрим упругую неограниченную плоскую пластину, ослабленную прямолинейной щелью $|x| \leq a$. Под щелью понимается эллиптическая трещина, имеющая один нулевой радиус. Упругая среда задается стандартной системой уравнений теории упругости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} - \lambda e \delta_{ij} \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (16)$$

где μ , λ - коэффициенты Ламэ, δ_{ij} - символ Кронекера, u_i - перемещения. Эволюция трещины (щели) может развиваться по трем сценариям [7]. При нормальных напряжениях приложенных к берегам щели возникает трещина типа „разрыв“, если силы приложены по касательной к берегам трещины, то образуется трещина второго типа - к'сдвиг“. В трехмерном случае осуществляется третья возможность трещина типа „срез“, в этом случае перемещения совпадают с плоскостью трещины и перпендикулярны плоскости XU (рис.4). Для нас наибольший интерес представляют трещины

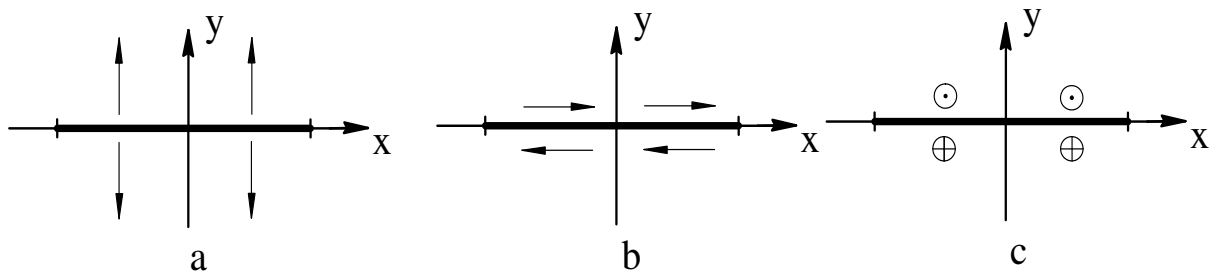


Рис. 4: Типы растрескивания: а) разрыв б) сдвиг в) срез

первого и второго типа. Рассмотрим задачу.

К берегам щели, на отрезке $[-b, b]$, $|b| \leq |a|$ приложена нагрузка $G(x)$, на бесконечности - требование отсутствия напряжений (рис.5), Переходя к полярным координатам $re^{i\phi}$ можно получить асимптотическое решение вблизи краев щели[8].

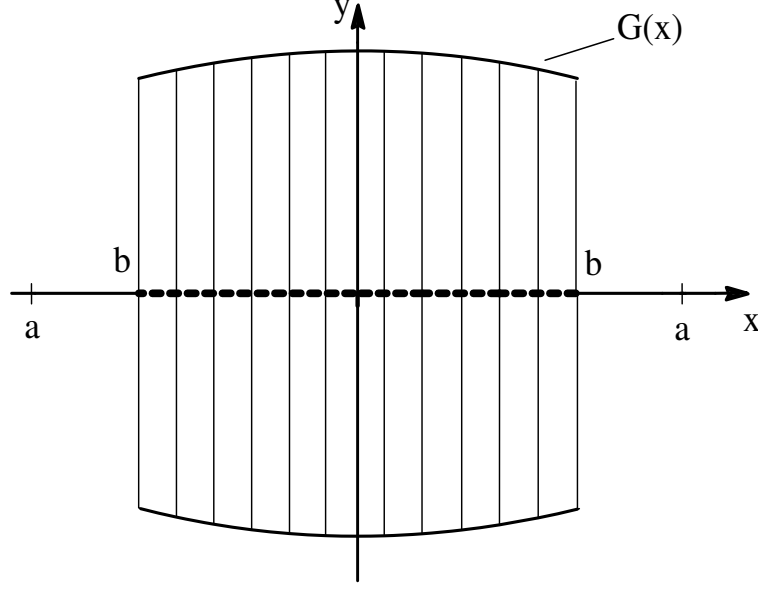


Рис. 5: Симметричная нагрузка $G(x)$ по берегу щели a на участке b

Если нагрузка на берега трещины нормальная, т.е. $\sigma_{xx}|_b = G(x)$ и $\sigma_{yy}|_b = 0$ получаем решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = k_I \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \left(1 - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = k_I \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \left(1 + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \\ \sigma_{xy} = k_I \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} \end{array} \right. \quad (17)$$

В случае если нагрузки по берегам разлома касательные ($\sigma_{xx}|_b = G(x)$ и $\sigma_{yy}|_b = 0$), решение принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = k_{II} \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \left(2 + \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = k_{II} \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} \\ \sigma_{xy} = k_{II} \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \left(1 - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \end{array} \right. \quad (18)$$

Из асимптотического решения (17),(18) для напряжений вблизи концов щели, видно, что напряжения прямо пропорционально коэффициенту k_i и обратно пропорционально корню от расстояния. Можно показать, что решения для ограниченной пластины имеет тот же вид. Здесь k_i - коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий типу трещины.

$$k_i = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a G(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi \quad (19)$$

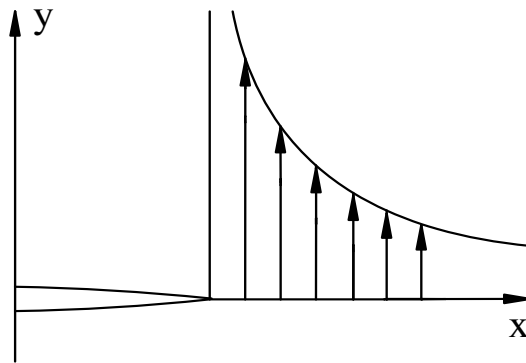


Рис. 6: Распределение напряжений σ_{xx} вблизи конца щели

Формулы (17),(18) имеют ограниченную зону применимости (рис.6), из решения видно, что при стремлении r к нулю напряжения стремятся к бесконечности, этот факт есть следствие линеаризации и использования закона Гука, который несправедлив в окрестности щели. Известно, закон Гука не верен при больших внутренних напряжениях, в нашем случае, возникающих вблизи концов щели. На достаточно больших расстояниях r формула также недостаточно точна, для получения более точного решения следует использовать члены высших порядков по r :

$$\sigma_{ij} = C_1(a)(r)^{-\frac{1}{2}} f_{1,i,j} + C_2(a)(r)^0 f_{2,i,j} + C_3(a)(r)^{\frac{1}{2}} f_{3,i,j} \quad (20)$$

Условие $C_1(a)(r)^{-\frac{1}{2}} f_{1,i,j} \gg C_2(a)(r)^0 f_{2,i,j} +$ определяет зону применимости асимптотических решений вида (17),(18).

Как отмечалось, при исследовании развития трещин необходимо учитывать зону действия сил сцепления. Вблизи концов трещины берега близко подходят друг к другу и силы сцепления имеют значительную интенсивность. В случае квазихрупкого разрушения границу действия сил сцепления можно отождествлять с зоной пластичности [16]. Принимая во внимание гипотезу о малости зоны большой интенсивности сил сцепления эффектами пластичности можно пренебречь, соответственно представленные

формулы достаточно корректно описывают поля напряжений и деформаций.

В общем случае трещины могут быть криволинейными. В случае плоской деформации можно показать, что в локальной системе координат r, ϕ асимптотические решения вида (17), (18) сохраняют свой вид. также, необходимо отметить, что в общем случае коэффициенты интенсивности k_I, k_{II} зависят от распределения внешних нагрузок, геометрических размеров трещин и законов притока тепла.

§2. Критерий Кулона-Мора

Как отмечалось выше, коэффициенты интенсивности напряжений зависят от геометрических размеров трещин, приложенных нагрузок и массовых источников. В геометрически сложных областях, с неоднородными коэффициентами, с сильным влиянием границ на решение, определение коэффициентов интенсивности напряжений невыполнимая задача. В некоторых случаях информация о размерах и типах трещин может быть сильно искажена, что является обычным для геофизики. В этом случае общепринятым методом определения зон разрушения является критерий Кулона-Мора, который по известным полям напряжений определяет состояние предельного равновесия:

$$|\sigma_{\tau n}| = k |\sigma_{nn}| \quad (21)$$

Здесь $\sigma_{nn}, \sigma_{\tau n}$ - нормальное и касательное напряжение, k - коэффициент трения определяемы экспериментально. В случае $|\sigma_{\tau n}| < k |\sigma_{nn}|$ среда считается непрерывной. При нарушении закона порода разрушается.

§3. Развитие трещин в пороупругой среде

Для изучения развития и эволюции трещин в пороупругой среде используются классические уравнения пороупругости, полученные в работе [7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\vec{W}) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Здесь $f = \zeta e + \frac{\zeta^2}{K_u - K_d} p$, $\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e \delta_{ij} - \zeta p \delta_{ij}$, K_u, K_d - дренажные модули деформирования, ζ - коэффициент рыхлости породы, e_{ij} - тензор деформаций. W - скорость фильтрации, подчиняющаяся закону Дарси

$W = -\frac{k}{\eta} \text{grad}(p)$, k , η проницаемость породы и вязкость фильтрующейся жидкости соответственно.

Рассмотрим пористую среду с единичной трещиной. Задача рассматривается в стационарном приближении. Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} \text{div}(-\text{grad}(p)) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Пусть в трещину закачивается жидкость объема Q , которая равномерно распределяется на участке $[-b, b]$ трещины $[-a, a]$. Тогда на участке трещи-

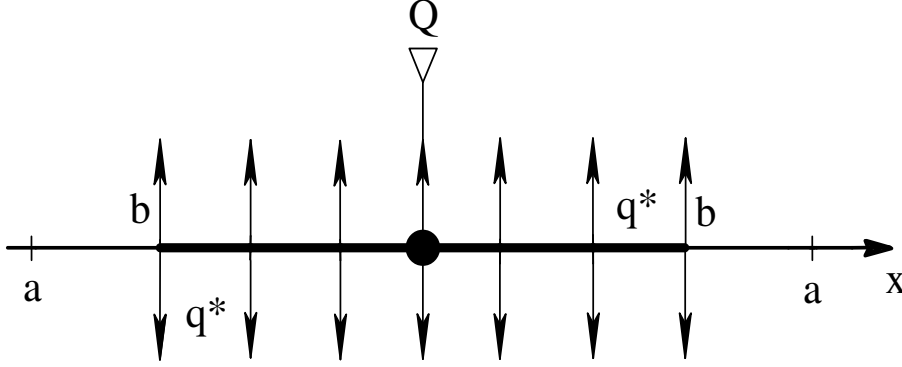


Рис. 7: Распределение напряжений σ_{xx} вблизи конца щели

ны $[-b, b]$ получим граничное условие $\frac{dp}{dn} = q^* = q(x) = \frac{Q}{2b}$, на оставшейся части трещины положим $\frac{dp}{dn} = 0$.

Для задачи гидравлического разрыва вышеуказанные граничные условия вполне естественны. Основная энергия разрыва приходится на ограниченную призабойную зону, и можно предположить, что основная масса жидкости отфильтровывается в горные породы в зоне забоя. В оставшейся зоне движение жидкости преимущественно осуществляется вдоль трещины.

Рассмотрим стационарное уравнение Пуассона. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$ комплексный потенциал описывающий распространение давления вне трещины, $z = x + iy$. Таким образом задача свелась к решению задачи Неймана- нахождению гармонической во внешности отрезка $[-b, b]$ функцию $u(z)$ с граничным условием $\frac{\partial u}{\partial n} = q^*$. Для решения задачи воспользуемся конформным отображением внешности отрезка $[-b, b]$ на внешность единичного круга. Воспользуемся функцией Жуковского:

$$\omega = \xi + i\eta, \quad z = \frac{b}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) \quad (24)$$

тогда граничные условия преобразуются к виду [10]:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial n} \left| \frac{dz}{d\omega} \right| = -q^* b \sin(\phi) \quad (25)$$

где $\rho = |\xi|$, $\phi = \arg \xi$. В силу условий Коши-Римана на окружности $\rho = 1$ получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = -q^* b \sin(\phi) \quad (26)$$

Воспользовавшись обратной функцией Жуковского, получим представление комплексного потенциала в плоскости z :

$$f(z) = iq^* \left\{ z - \sqrt{z^2 - b^2} \right\} \quad (27)$$

Выделяя мнимую и действительную часть, получим решение задачи на берегах трещины:

$$p|_{\Gamma} = q^* \sqrt{b^2 - x^2} \quad (28)$$

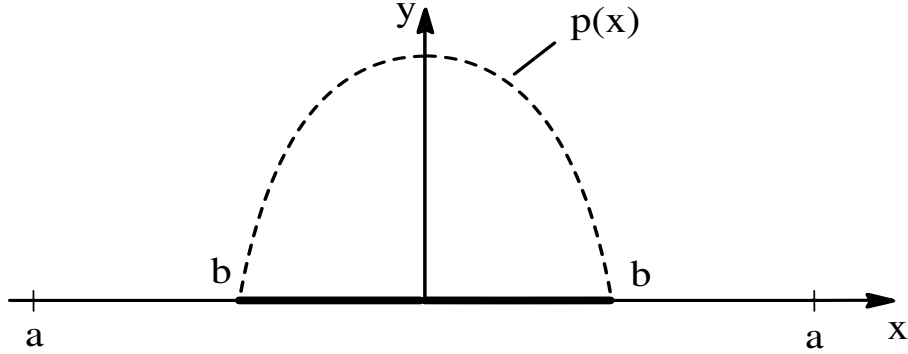


Рис. 8: Распределение давления на берегах трещины

Вернемся к уравнениям пороупругости (22). Так как в нашем случае мы имеем дело с установившейся фильтрацией, то напряженно деформированное состояние не зависит от массовых источников порождаемых фильтрационными процессами. Действительно, уравнения пороупругости в этом случае можно привести к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{\partial \zeta p}{\partial x_j} \\ \sigma_{ij} = \tau_{ij} + \zeta p \delta_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e \delta_{ij} \\ \sigma_{yy}|_{\Gamma} = p(x)(1 + \zeta) \end{array} \right. \quad (29)$$

Учитывая то обстоятельство, что $\frac{\partial \zeta p}{\partial x_j} = 0$ получим условие независимости напряжений от установившегося поля давления. Следовательно, решение пороупругой задачи вблизи концов трещины описывается уравнениями

(17):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_{xx} = k_I \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \left(1 - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \\
 \sigma_{yy} = k_I \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \left(1 + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} \right) \\
 \sigma_{xy} = k_I \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{2\pi R}} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2} \\
 k_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-b}^b G(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi = \frac{q^*}{\sqrt{\pi a}} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - \xi^2} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi
 \end{array} \right. \quad (30)$$

Выражение для определения коэффициента интенсивности напряжений в общем случае не интегрируемо в аналитических функциях.

§4. Численные эксперименты

Для изучения процессов образования трещин в пороупругой среде реализован программный комплекс, алгоритмически основанный на методе опорных операторов [9]. Для выявления особенностей используются адаптивные сетки и сетки с локальным измельчением.

Первая серия расчетов посвящена тестированию реализованных программных средств, а также изучения вопросов посвященных проблеме устойчивости эволюции трещин. Сравнение численных результатов производится с асимптотическим решением вида (18).

Вторая часть главы посвящена изучению трещин в пороупругой среде. Рассматриваются проблемы взаимодействия основной трещины гидроразрыва с разломом, также выясняются зоны возможного образования трещин на основе критерия Кулона-Мора.

§4.1 Тестовые примеры

Важной проблемой изучения возникновения и развития трещин является задача определения режимов развития трещин. Развитие трещины может происходить двояко. Возможна реализации лавинообразного, ускоренного процесса развития трещины, приводящего к неуправляемому разрушению материала, либо существует возможность устойчивого процесса развития трещины, в котором для увеличения трещины необходимо прикладывать большие нагрузки (рис.9).

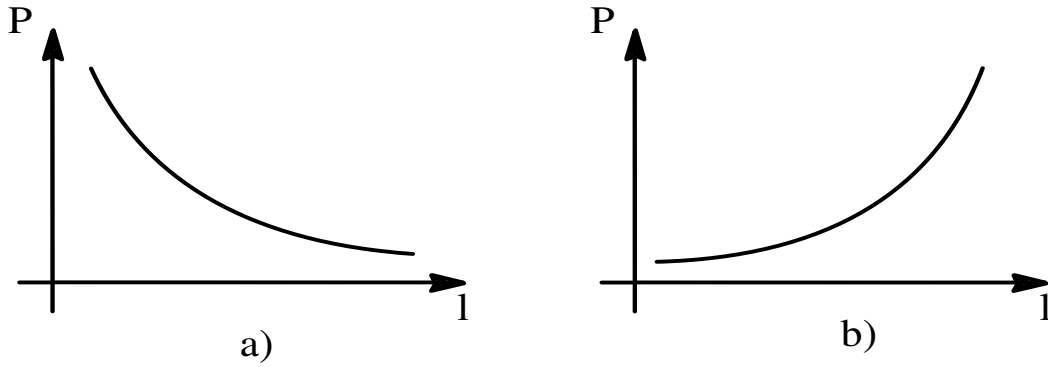


Рис. 9: Варианты развития трещины: а) неустойчивый б) устойчивый

Пусть нормальные нагрузки приложены по всей длине трещины $[-a, a]$ и не зависят от координат: $\sigma_{xx} = P$, $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$, в этом случае известно, что процесс развития неустойчив [8], что и демонстрирует рисунок. Действительно, в случае если нагрузка не зависит от координаты $k_I = P\sqrt{\pi a}$. Предельное условие разрушения записывается в виде:

$$k_I = P\sqrt{\pi a} = \sqrt{\frac{E\gamma}{1 - \sigma^2}} \quad (31)$$

В силу возрастания коэффициента интенсивности напряжений, получим убывание значений нагрузок с ростом длины трещины a .

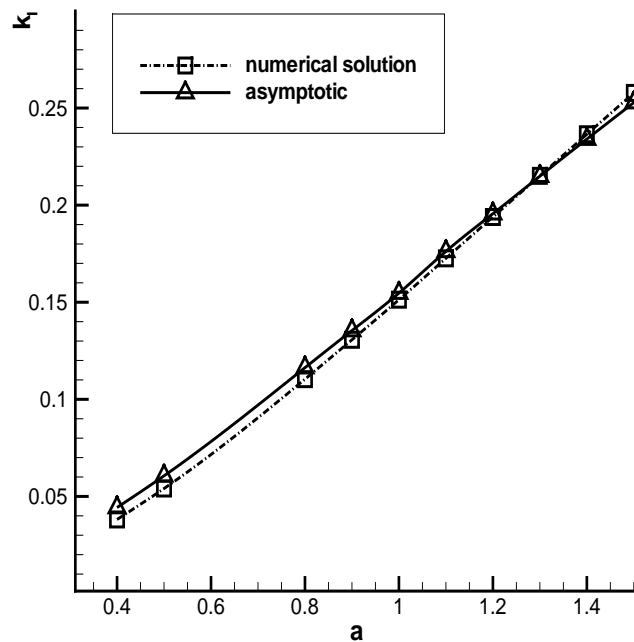


Рис. 10: Неустойчивый процесс развития трещины. Сравнение численного и асимптотического решения

Когда плоскость находится под действием сосредоточенных расклинивающих сил приложенных к середине берегов трещины a , процесс развивается устойчиво и коэффициент интенсивности напряжений в этом случае имеет вид $k_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}$. Для достижения критического значения напряжения

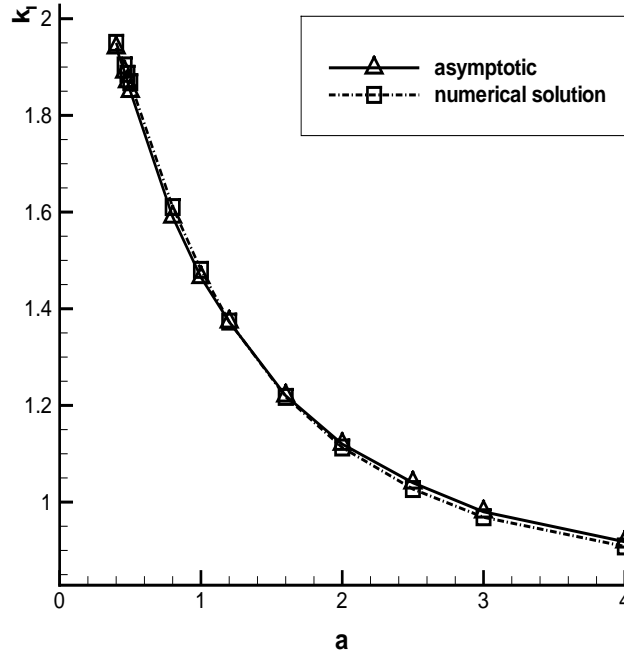


Рис. 11: Устойчивый процесс развития трещины. Сравнение численного и асимптотического решения

P^* на берегу трещины получим условие:

$$P^* = \sqrt{\frac{E\gamma}{\pi a(1 - \sigma^2)}} \quad (32)$$

Видно, что с увеличением длины трещины значение критическое значение усилия на границе убывает, развитие трещины имеет неустойчивый характер. Соответственно с силу убывания критических нагрузок коэффициент интенсивности должен возрастет, что и демонстрирует рисунок (рис.11). Приведенные графики демонстрируют хорошее совпадение численного и асимптотического решения.

В общем случае, когда нагрузки приложены на ограниченном участке $[-b, b]$ трещины $[-a, a]$ коэффициент интенсивности напряжений имеет вид:

$$k_I = \frac{2P\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (33)$$

В этом случае процесс распространения трещины при фиксированных нагрузках P и зоне $[-b, b]$ может быть устойчив.

§4.2 Взаимодействие трещины гидроразрыва с разломом

Важной задачей при проведении гидравлического разрыва пласта, является определение зон разрушения и направление эволюции трещины. Задача особенно актуальна в средах сложной геометрии, содержащих массу неоднородностей и особенностей, каковыми без сомнения являются природные коллектора.

Для моделирования таких процессов рассматривается частная задача взаимодействия основной трещины гидроразрыва с разломом. Разлом представляет собой трещину заполненную высокопроницаемой породой. Для основной породы физические постоянные равны: коэффициенты Ламэ $\lambda = 0.42 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 1.33 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент рыхлости $\zeta = 0.6$, проницаемость $k = 0.005$ Дарси, а для разлома: $\lambda = 0.2 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.7 \cdot 10^9$ Па, $\zeta = 0.95$, $k = 0.1$ Дарси. Ниже представлена схема взаимодействия трещин (рис.12). В процессе фильтрации, часть жидкости гидроразрыва проника-

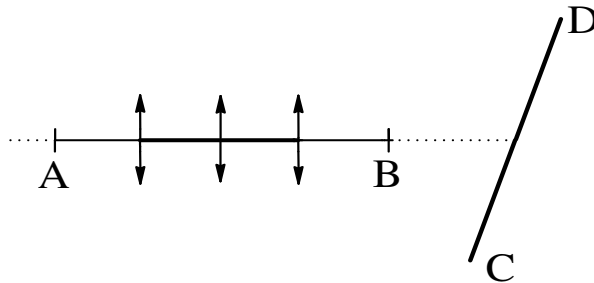


Рис. 12: Схема взаимодействия трещины AB с разломом CD

ет в разлом CD провоцируя высокие напряжения у концов щели. За счет протекающих процессов фильтрации и движения пород связанных с гидроразрывом возникает движение берегов разлома CD , левый берег движется вниз, правый вверх. Тем самым берега движутся в противоположные стороны, вызывая сдвиговые деформации (рис.13). Учитывая тот факт, что проницаемость породы в разломе существенно ниже, разлом начинает „раздуваться“, т.е. его объем увеличивается, это демонстрирует рисунок ниже (рис.14). Максимальные напряжения достигаются вблизи концов основной трещины AB . Направление возможного роста трещины определяются с помощью критерия Кулона-Мора (рис.15). Из графика видно, что трещина движется по оси основной трещины, вблизи разлома трещина меняет направление и соединяется с разломом.

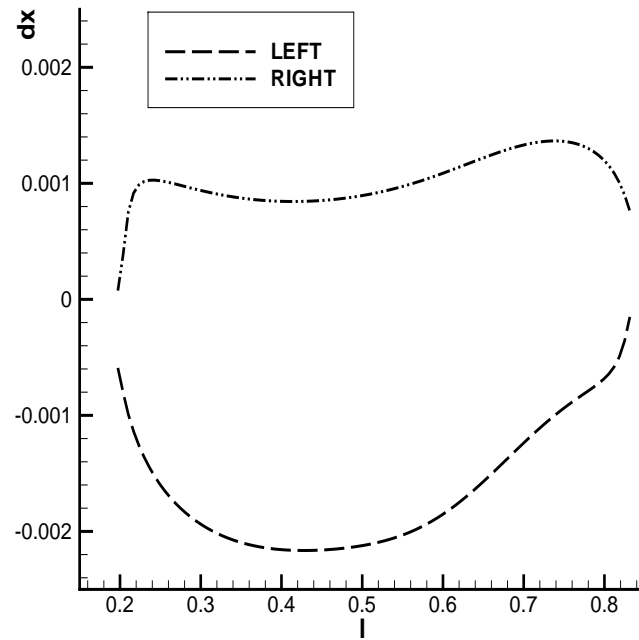


Рис. 13: Распределение смещение вдоль разлома по верхнему и нижнему берегу разлома

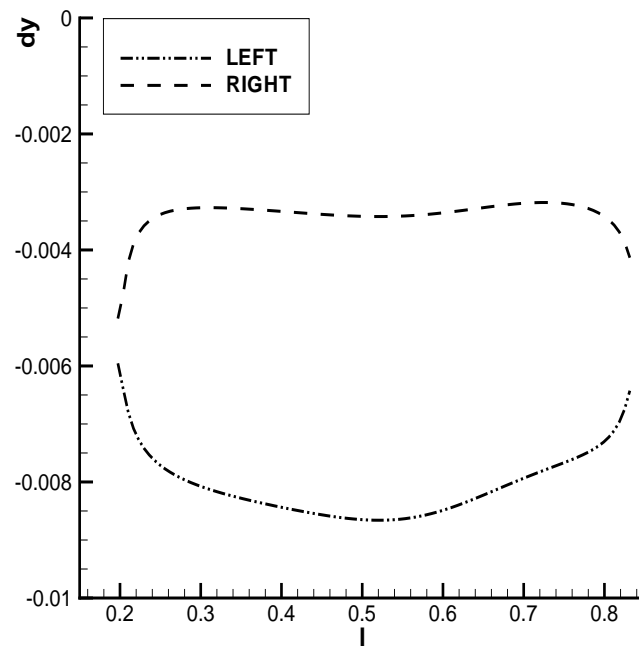


Рис. 14: Распределение смещение поперек разлома по верхнему и нижнему берегу разлома

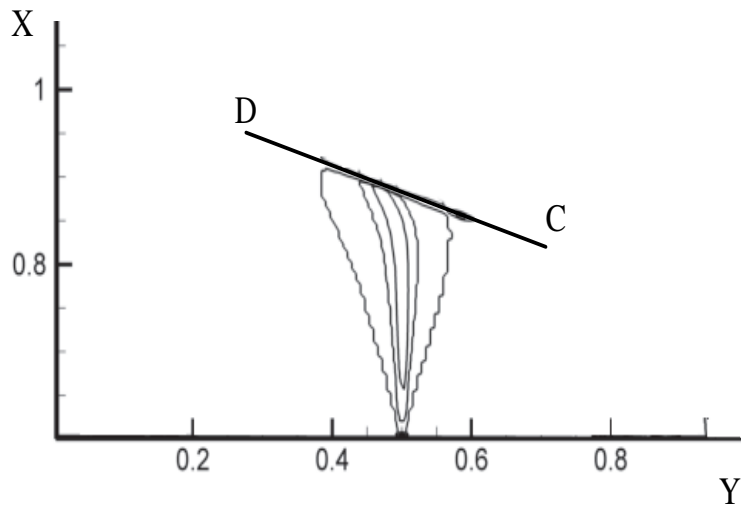


Рис. 15: Зона разрушения по критерию Кулона-Мора

Заключение

Для моделирования трещин в пороупругой среде реализована двумерная и трехмерная программа решения уравнений пороупругости. Алгоритм основан на методе опорных операторов, позволяющих правильно аппроксимировать уравнения на сильно деформированных сетках. Для моделирования используются адаптивные сетки, позволяющие добиваться необходимой точности.

В первой части работы приведены классические результаты теории трещин. Рассмотрены одиночные трещины в однородной упругой среде. Произведено сравнение асимптотического и численного решения, получено хорошее совпадение, что иллюстрируют приведенные графики.

Далее рассмотрен случай единичной трещины в пороупругой среде в случае установившейся фильтрации, представлено асимптотическое решение. Для моделирования трещин используется модель Био.

Рассматривается модель описывающая процессы гидравлического разрыва пласта. Для предсказания возможных зон разрушения используется критерий Кулона-Мора. На примере взаимодействия трещины гидроразрыва с естественным разломом показана возможная зона и направление разрушения. Продемонстрированы графики смещений на берегах разлома, демонстрирующие возникновение нормальных и касательных напряжений по берегам разлома, способные привести к сдвиговым и разрывным разрушениям вне зоны гидравлического разрыва пласта.

Литература

- [1] *Константинов С.В., Гусев В.И.*, "Техника и технология проведения гидравлического разрыва пластов за рубежом", ВНИИОЭНГ, Нефтепромысловое дело, Обзорная информация, 1985
- [2] *Брок Д.*, "Основы механики разрушения", Успехи математических наук 1973 в.28 N 2
- [3] *Griffith A.A.*, "The phenomenon of rupture and flow of solids", Philosophical Transaction of the Royal Society of London, 1920, v.221
- [4] *Irwin G.R.*, "Analysis of stresses and strain near the end of crack traversing a plate", Journal of Applied Mechanics, 1957, v.24, с 3
- [5] *Колосов Г.В.*, "Применение комплексной переменной в теории упругости", ОНТИ, 1935
- [6] *Зазовский А.Ф., Лемеха Ф.В., Федоренко Р.П.*, "Нелинейные эффекты при циркуляции жидкости в трещине гидроразрыва", Препринт ИПМ, 1987, N210
- [7] *Biot M.A.*, "Mechanics of deformation and acoustic propagation", Journal of Applied Physics, 1962, v.33, N4
- [8] *Седов Л.И.*, "Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики", Москва, 1950
- [9] *А.А. Самарский, А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, В.В. Тишкин*, "Разностные схемы на нерегулярных сетках", Минск, 1996 нерегулярных сетках, Минск, 1996
- [10] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.*, "Методы теории функций комплексного переменного", Наука, 1973

- [11] *Баренблатт Г.И.*, "О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта", Прикладная математика и механика, т.ХХ, в.2, 1958
- [12] *Баренблатт Г.И.*, "О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями", Прикладная математика и механика, т.ХХІІІ, в.5, 1959
- [13] *Баренблатт Г.И.*, "Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении", Журнал прикладной математики и технической физики, N 4, 1961
- [14] *Баренблатт Г.И., Христианович С.А.*, "Об обрушении кровли при горных выработках", Известия АН СССР, ОТН, N11, 1955
- [15] *Желтов Ю.П., Христианович С.А.*, "О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта", Известия АН СССР, ОТН, N5, 1955
- [16] *Желтов Ю.П.*, "Об образовании вертикальных трещин в пласте при помощи фильтрующейся жидкости", Известия АН СССР, ОТН, N5, 1955
- [16] *Мухелишвили Н.И.*, "Некоторые основные задачи математической теории упругости", НАУКА, Москва, 1966