

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

Д. Ю. Максимов, А. Х. Пергамент, Б. Д. Плющенко

**О НЕКОТОРЫХ  
СХЕМАХ РАСЩЕПЛЕНИЯ  
В ЗАДАЧАХ ГАЗОДИНАМИКИ  
С ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ**

Москва 2005

*Д. Ю. Максимов, А. Х. Пергамент, Б. Д. Плющенко*, О некоторых схемах расщепления в задачах газодинамики с теплопроводностью.

**Аннотация.** В работе построены и исследованы схемы типа «high resolution» с различными лимитерами, *minmod*, *van Leer*, *superbee* и др. Все рассмотренные схемы квазимонотонны и приводят к возникновению немонотонностей на фронте ударной волны. Существует класс таких начальных условий, что схемы TVD приводят к существенным локальным несоответствиям профилей решения. В частности, такого рода проблемы возникают в том случае, когда имеется начальный скачок скорости и особенности в профилях плотности и температуры. Если для широкого класса задач оптимальным является *superbee*, то в последнем случае преимущество имеет *minmod*. Однако использование сглаженных начальных условий, хотя бы на 2 расчётных интервала, а также учёт вязкости или введение дополнительной численной диссипации, позволяет эффективно применять схемы с лимитерами для расчёта физических задач<sup>1</sup>.

*D. Yu. Maksimov, A. Kh. Pergament, B. D. Plyushchenkov*, On some operator splitting schemes in gas-dynamics problems with heat conduction.

**Abstract.** This work treats the construction and investigation of the high resolution type difference schemes that involve different limiters such as *minmod*, *van Leer*, *superbee* and some others. All considered schemes are quasimonotonic and lead to appearance of non-monotonies in the shock wave front. There is a class of initial conditions such that TVD schemes applied result in considerable local discrepancies between solution profiles. In particular, these problems arise where an initial velocity jump and singularities in density and temperature profiles are present. While for a wide class of problems the *superbee* limiter is optimal, in the last case *minmod* may have an advantage. Nevertheless, using the smoothed initial conditions, at least on 2 cells, or taking into account viscosity as well as introducing additional numerical dissipation allows to effectively apply schemes with limiters for solution of physical problems.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00641).

# Содержание

1	Введение	3
2	Система уравнений для газодинамики горения	4
3	Метод решения: расщепление по процессам	5
4	Схема с переключателем для 1D скалярного уравнения переноса	7
5	Обобщение на систему	9
6	2D схема	12
7	Граничные условия	15
8	Результаты расчётов. Свойства схемы	17
9	Заключение	26

## 1 Введение

В настоящее время значительное количество работ целого ряда исследователей посвящено рассмотрению, в том числе, математическому моделированию процессов горения [8, 9, 12, 15]. При этом рассматривается система уравнений, включающая в себя как уравнения химической кинетики, так и уравнения движения газовой смеси. Динамика газовой смеси описывается системой уравнений Навье–Стокса и уравнением баланса энергии, учитывающим тепловые потоки.

В настоящей работе исследуются различные разностные схемы для газовой динамики с вязкостью и теплопроводностью. Существенным моментом является проблема учёта диссипативных эффектов: вязкости, теплопроводности, диффузии. В работе [7] для одномерной задачи горения была исследована схема расщепления, которая, в сущности, представляет собой вариант аддитивной схемы, причём первый шаг — это решение диффузионных задач, а последующий — решение газодинамической задачи, что аналогично известным схемам О. М. Белоцерковского [1, 3]. Естественным образом, для диффузионных процессов используются неявные схемы. В отличие от ряда работ [5, 14], в настоящей статье для системы газодинамических уравнений предлагается использовать явные схемы с коррекцией потоков, в том числе TVD схемы. Важным аспектом при использовании схем типа TVD является выбор лимитеров при коррекции потоков. В данной работе рассмотрены различные лимитеры, например, `minmod` [13], `superbee`, и т. д. Рассмотренные схемы являются монотонными и имеют второй порядок аппроксимации по пространству для гладких решений всюду, за исключением

точек экстремума, где меняется шаблон схемы. Если же решение имеет особенности, например, разрыв производных, то в некоторых случаях схема в окрестности такой точки может иметь аппроксимацию  $O(1)$ . Данная работа посвящена исследованию, каковы порядки точности и аппроксимации для различных схем с коррекцией потоков, а также каково влияние диффузионных процессов на эти явления.

## 2 Система уравнений для газодинамики горения

Для исследования возьмём 2D двухкомпонентную задачу, включающую перенос, теплопроводность, вязкость, диффузию горючего вещества, рассматриваемую в общем случае в поле тяжести:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{уравнение неразрывности: } \partial_t \rho + \partial_x(\rho v_x) + \partial_y(\rho v_y) = 0, \quad (2.1a) \\ \text{уравнения сохранения импульсов:} \\ \partial_t(\rho v_x) + \partial_x(\rho v_x^2 + p - \tau^{xx}) + \partial_y(\rho v_x v_y - \tau^{xy}) = \rho g^x, \quad (2.1б) \\ \partial_t(\rho v_y) + \partial_x(\rho v_x v_y - \tau^{yx}) + \partial_y(\rho v_y^2 + p - \tau^{yy}) = \rho g^y, \quad (2.1в) \\ \text{уравнение сохранения энергии: } \partial_t(\rho[e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)]) + \\ + \partial_x(\rho v_x[e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)] + p v_x - v_x \tau^{xx} - v_y \tau^{xy} + q^x) + \\ + \partial_y(\rho v_y[e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)] + p v_y - v_x \tau^{yx} - v_y \tau^{yy} + q^y) = \\ = \rho v_x g^x + \rho v_y g^y, \quad (2.1г) \\ \text{уравнение химической кинетики: } \partial_t(\rho Y) + \\ + \partial_x(\rho v_x Y - \eta/\text{Sc} \cdot \partial_x Y) + \partial_y(\rho v_y Y - \eta/\text{Sc} \cdot \partial_y Y) = -Z, \quad (2.1д) \end{array} \right.$$

где  $\rho$  — плотность,  $v_x$ ,  $v_y$  — скорости,  $p$  — давление,  $\tau^{xx}$ ,  $\tau^{xy}$ ,  $\tau^{yx}$ ,  $\tau^{yy}$  — компоненты тензора вязких напряжений,  $g^x$ ,  $g^y$  — компоненты ускорения свободного падения,  $e$  — внутренняя энергия на единицу массы,  $q^x$ ,  $q^y$  — компоненты вектора теплового потока,  $Y$  — объёмная концентрация топлива,  $\eta$  — первая вязкость, называемая также динамической,  $\text{Sc} = \eta/\rho D$  — число Шмидта ( $D$  — коэффициент диффузии горючей смеси),  $Z$  — скорость реакции.

Уравнение состояния:  $p = p(\rho, T) = \alpha \rho T$  — уравнение состояния совершенного газа,  $\alpha = c_p - c_v \equiv (1 - 1/\gamma)c_p \equiv (\gamma - 1)c_v$ , где  $T$  — температура,  $c_p$ ,  $c_v$  — теплоёмкости на единицу массы при постоянном давлении и объёме соответственно,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Температурная зависимость скорости реакции даётся законом Аррениуса с энергией активации  $E$ , временной константой  $\tau_R$  и плотностной константой  $\rho_R$ :  $Z = Z(\rho, Y, T) = (\rho Y)^n / \rho_R^{n-1} \tau_R \cdot e^{-E/RT}$ ,  $n$  — порядок реакции,

$Q$  — теплотворная способность топлива, также называемая энергией выхода реакции (на единицу массы),  $Q = Q(n)$ ,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $E$  — энергия активации.

Определяющие соотношения:

$$\tau^{xx} = \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right)(\partial_x v_x + \partial_y v_y) + 2\eta\partial_x v_x, \quad (2.2)$$

$$\tau^{xy} = \tau^{yx} = 2\eta\frac{1}{2}(\partial_x v_y + \partial_y v_x), \quad (2.3)$$

$$\tau^{yy} = \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right)(\partial_x v_x + \partial_y v_y) + 2\eta\partial_y v_y, \quad (2.4)$$

$$\xi = \xi(T), \quad \eta = \eta(T), \quad (2.5)$$

$$e = QY + c_v T, \quad (2.6)$$

$$q^x = -c_p\eta/\text{Pr} \cdot \partial_x T - Q\eta/\text{Sc} \cdot \partial_x Y, \quad (2.7)$$

$$q^y = -c_p\eta/\text{Pr} \cdot \partial_y T - Q\eta/\text{Sc} \cdot \partial_y Y, \quad (2.8)$$

где  $\xi$  — вторая вязкость, равна 0 для одноатомного газа,  $\text{Pr} = \eta c_p/\kappa$  — число Прандтля ( $\kappa$  — коэффициент теплопроводности).

Граничные условия:  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\partial_n T = 0$ ,  $Y(x=0) = 0$ ,  $Y(x=1) = 1$ ,  $\partial_n Y(y=0, y=1) = 0$ .

### 3 Метод решения: расщепление по процессам

Следуя О. М. Белоцерковскому [3], произведём разделение на гиперболическую и диссипативную части.

Гиперболическая часть:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v_x) + \partial_y(\rho v_y) = 0, \quad (3.1a) \\ \partial_t(\rho v_x) + \partial_x(\rho v_x^2 + p) + \partial_y(\rho v_x v_y) = \rho g^x, \quad (3.1б) \\ \partial_t(\rho v_y) + \partial_x(\rho v_x v_y) + \partial_y(\rho v_y^2 + p) = \rho g^y, \quad (3.1в) \\ \partial_t(\rho[e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)]) + \partial_x(v_x \rho[e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)] + v_x p) + \\ + \partial_y(v_y \rho[e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)] + v_y p) = \rho v_x g^x + \rho v_y g^y, \quad (3.1г) \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho v_x Y) + \partial_y(\rho v_y Y) = -Z(\rho, Y, T). \quad (3.1д) \end{array} \right.$$

Диссипативная часть:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho = 0, \quad (3.2a) \\ \partial_t(\rho v_x) + \partial_x(-\tau^{xx}) + \partial_y(-\tau^{xy}) = 0, \quad (3.2б) \\ \partial_t(\rho v_y) + \partial_x(-\tau^{yx}) + \partial_y(-\tau^{yy}) = 0, \quad (3.2в) \\ \partial_t(\rho[e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)]) + \\ + \partial_x(-v_x \tau^{xx} - v_y \tau^{xy} + q^x) + \partial_y(-v_x \tau^{yx} - v_y \tau^{yy} + q^y) = 0, \quad (3.2г) \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(-\eta/Sc \cdot \partial_x Y) + \partial_y(-\eta/Sc \cdot \partial_y Y) = 0. \quad (3.2д) \end{array} \right.$$

Пусть  $I_x = \rho v_x$ ,  $I_y = \rho v_y$ ,  $y = \rho Y$ ,  $w = \rho(e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2))$ ,  $\beta = \alpha/c_v$ . Тогда  $v_x = I_x/\rho$ ,  $v_y = I_y/\rho$ ;  $T = 1/c_v \cdot [w/\rho - Qy/\rho - \frac{1}{2}(I_x^2 + I_y^2)/\rho^2]$ ,  $p = \beta \times [w - Qy - \frac{1}{2}(I_x^2 + I_y^2)/\rho]$ . Введём векторы

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ I_x \\ I_y \\ w \\ y \end{bmatrix} \quad \text{— вектор} \\ \text{— неизвестных} \\ \text{функций,} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g^x \\ \rho g^y \\ I_x g^x + I_y g^y \\ -Z \end{bmatrix} \quad \text{— вектор} \\ \text{источников,}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{I_x}{\rho} \\ (1 - \frac{\beta}{2}) \frac{I_x^2}{\rho} - \frac{\beta I_y^2}{2\rho} + \beta w - \beta Qy \\ I_x I_y / \rho \\ (1+\beta) \frac{I_x w}{\rho} - \frac{\beta I_x^3}{2\rho^2} - \frac{\beta I_x I_y^2}{2\rho^2} - \beta Q \frac{I_x y}{\rho} \\ I_x y / \rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} I_y \\ I_x I_y / \rho \\ (1 - \frac{\beta}{2}) \frac{I_y^2}{\rho} - \frac{\beta I_x^2}{2\rho} + \beta w - \beta Qy \\ (1+\beta) \frac{I_y w}{\rho} - \frac{\beta I_y^3}{2\rho^2} - \frac{\beta I_y I_x^2}{2\rho^2} - \beta Q \frac{I_y y}{\rho} \\ I_y y / \rho \end{bmatrix}$$

— векторы потоков. Тогда систему (3.1) можно представить в форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{z}. \quad (3.3)$$

При помощи векторов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{xx} \\ \tau^{yx} \\ v_x \tau^{xx} + v_y \tau^{xy} - q^x \\ \eta/Sc \cdot \partial_x Y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{xy} \\ \tau^{yy} \\ v_x \tau^{yx} + v_y \tau^{yy} - q^y \\ \eta/Sc \cdot \partial_y Y \end{bmatrix}$$

систему (3.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}. \quad (3.4)$$

В дальнейшем будут исследованы схемы расщепления для газодинамической задачи за исключением диффузии топлива, т. е. положено  $Y = 0$ . Ниже описаны принципы построения схем газовой динамики с коррекцией потоков.

## 4 Схема с переключателем для 1D скалярного уравнения переноса

Вначале рассмотрим одномерное скалярное уравнение (уравнение переноса)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0. \quad (4.1)$$

Обозначим  $f = au$  — поток величины  $u$ . Требуется построить монотонную консервативную разностную схему второго порядка аппроксимации по времени и пространству, устойчивую при условии Куранта, использующую минимальный шаблон.

Консервативность означает возможность записать схему в виде

$$\frac{\hat{u}_m - u_m}{\tau} + \frac{f_{m+\frac{1}{2}} - f_{m-\frac{1}{2}}}{h} = 0, \quad (4.2)$$

где  $f_{m+\frac{1}{2}}$  берётся на полуцелом по времени слое. В силу уравнения (4.1) величина  $u$  и её поток  $f$  переносятся по характеристике  $x - at = \xi$ . Отсюда следует, что можно искать  $f_{m+\frac{1}{2}}$  в точке  $x_m + (h - a\tau)/2$ . Такой подход приводит к известной схеме Лакса–Вендроффа, поток в которой можно записать в виде

$$f_{m+\frac{1}{2}} = f_m + \frac{f_{m+1} - f_m}{h} \cdot \frac{h - a\tau}{2}, \quad (4.3)$$

где  $f_m = au_m$ . Эту запись можно трактовать как разложение  $f$  в ряд Тейлора по  $x$  до первого члена. Схема Лакса–Вендроффа удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям, кроме одного: она немонотонна вследствие её линейности и аппроксимации  $O(h^2 + \tau^2)$ , о чём утверждает теорема Годунова. Выход из такой ситуации лежит в использовании нелинейных разностных схем. Такой нелинейной схемой может быть схема с переключением.

Требование монотонности схемы, являющееся одним из самых важных, в 1D случае часто заменяют условием TVD — невозрастания полной вариации, т. е.  $\text{TV}(u^{n+1}) \leq \text{TV}(u^n) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_{m+1}^n - u_m^n|$ . Чтобы ему удовлетворить, основываясь на представлении (4.3), используют различные модификации второго слагаемого (первого порядка по  $h$ ) в нём. Одной из

самых простых (как по выводу, так и по её виду) схем TVD является схема, базирующаяся на переключателе  $\text{minmod}$ :

$$f_{m+\frac{1}{2}} = f_m + \frac{h - a\tau}{2} \text{minmod} \left( \frac{f_{m+1} - f_m}{h}, \frac{f_m - f_{m-1}}{h} \right), \quad (4.4)$$

где  $\text{minmod}$  — симметричный оператор, который можно определить, например, так:

$$\text{minmod}(x, y) = \text{sign } x \min(|x|, |y|) \max(0, \text{sign } xy). \quad (4.5)$$

Заметим, что вид (4.4) позволяет при необходимости перейти к неравномерной сетке. Оператор  $\text{minmod}$  выбирает в (4.4) минимальную производную, если они одного знака, и равняется нулю в противном случае. При постоянных шагах вид (4.4) упрощается:

$$f_{m+\frac{1}{2}} = f_m + \frac{1 - q}{2} \text{minmod}(f_{m+1} - f_m, f_m - f_{m-1}), \quad (4.6)$$

где  $q = a\tau/h$  — число Куранта.

Основываясь на других рассуждениях, опирающихся на непосредственное определение полной вариации, схему (4.3) можно обобщить с помощью введения лимитера

$$f_{m+\frac{1}{2}} = f_m + \frac{1 - q}{2} \psi(r)(f_{m+1} - f_m), \quad (4.7)$$

где  $r = (f_m - f_{m-1})/(f_{m+1} - f_m)$ ,  $\psi$  — функция, удовлетворяющая условиям  $\psi(r) \leq 2$ ,  $\psi(r)/r \geq 0$ ,  $\psi(0) = 0$ . Схема (4.6) есть частный случай схемы (4.7) для  $\psi(r) = \max(0, \min(1, r))$ . С определённой точки зрения зеркальным [11] к лимитеру  $\text{minmod}$  является лимитер *superbee*, определяемый так:  $\psi(r) = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r))$ . Можно также указать некоторые другие лимитеры. *van Leer*:  $\psi(r) = (r + |r|)/(1 + |r|)$ , *MC* (*monotonized centered*):  $\psi(r) = \max(0, \min((1 + r)/2, 2, 2r))$ , *UMIST* (*Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport*):  $\psi(r) = \max(0, \min(2r, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}r, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}r, 2))$ . При  $\psi = 0$  получаем обычную схему 1A (первого порядка) против потока.

Предложенные схемы с переключателем  $\text{minmod}$  и их обобщения с различными лимитерами решают проблему с монотонностью схемы, однако не дают схему второго порядка по  $h$  в норме  $C$ . А именно, порядок аппроксимации уменьшается в точках экстремума, там, где меняется шаблон схемы. Тем не менее, как показывают расчёты, второй порядок сходимости сохраняется в промежутках с исключёнными окрестностями точек экстремума.



## 5 Обобщение на систему

Обобщение схем (4.6) и (4.7) на случай системы и 2D можно провести унифицированно и получить схемы типа TVD, для которых понятие монотонности уже не определено. Во-первых, нет определения монотонности для функций нескольких переменных. Что касается одномерного случая, то, вообще говоря, при рассмотрении системы не все составляющие вектора решений одновременно могут быть монотонными.

Как следствие наличия этих сложностей, в работах Радвогина [4, 13] предлагаются следующие критерии для выбора схем:

1. дивергентность схемы, что обеспечивает возможность её использования для нахождения обобщённых решений;
2. выбор схем с минимальным шаблоном;
3. минимизация осцилляций посредством конструирования схем, которые порождают осцилляции, направленные к разрыву.

Такие схемы можно назвать квазимонотонными.

При этом обобщении требование минимальности шаблона играет важную роль при расчёте нелинейных задач, поскольку расчёт по (4.6) или (4.7) происходит после перехода к «локальным» переменным (а именно, к т. н. «инвариантам Римана») с помощью постоянной матрицы, взятой в одной точке. Брать тем самым в расчёт более дальние точки уже нельзя. В частности, неудовлетворительными оказываются попытки обобщения схемы ENO второго порядка, записанной для скалярного случая.

### 5.1 Обобщение на случай $a(u) \neq \text{const}$ , произвольного знака

В случае  $a < 0$  (4.7) запишется, очевидно, так:

$$f_{m+\frac{1}{2}} = f_{m+1} - \frac{1+q}{2}\psi(r)(f_{m+1} - f_m), \quad r = \frac{f_{m+2} - f_{m+1}}{f_{m+1} - f_m}. \quad (5.1)$$

Комбинируя (4.7) и (5.1), можно формально записать поток в дивергентном замыкании, обозначаемый  $\mathring{F}_{m+\frac{1}{2}}$ , в виде

$$\mathring{F}_{m+\frac{1}{2}} = F_m^+ + F_{m+1}^-, \quad (5.2)$$

где

$$F_m^+ = f_m^+ + \frac{1 - q_{m+\frac{1}{2}}}{2}\psi(r_{m+\frac{1}{2}}^+)(f_{m+1}^+ - f_m^+), \quad (5.3)$$

$$F_{m+1}^- = f_{m+1}^- - \frac{1 + q_{m+\frac{1}{2}}}{2} \psi(r_{m+\frac{1}{2}}^-)(f_{m+1}^- - f_m^-), \quad (5.4)$$

причём из  $F_m^+$  и  $F_{m+1}^-$  не равно нулю лишь одно из них. Используются обозначения:

$$q_{m+\frac{1}{2}} = a_{m+\frac{1}{2}} \tau / h, \quad r_{m+\frac{1}{2}}^+ = \frac{f_m^+ - f_{m-1}^+}{f_{m+1}^+ - f_m^+}, \quad r_{m+\frac{1}{2}}^- = \frac{f_{m+2}^- - f_{m+1}^-}{f_{m+1}^- - f_m^-}. \quad (5.5)$$

Здесь возникает вопрос: как определить  $f_{m-1}^\pm$ ,  $f_m^\pm$ ,  $f_{m+1}^\pm$ ,  $f_{m+2}^\pm$ ,  $a_{m+\frac{1}{2}}$ ? Дальше мы будем использовать следующее обозначение  $a^\pm = \frac{1}{2}(a \pm |a|)$ . Во-первых, в формулах (5.3)–(5.5) следует брать  $f^\pm = a_{m+\frac{1}{2}}^\pm u$ . Это значит, что при вычислении  $\mathring{F}_{m+\frac{1}{2}}$  везде используется одно и то же значение  $a_{m+\frac{1}{2}}$ , отнесённое к точке  $x_{m+\frac{1}{2}}$ , для каждой из величин  $f^\pm$ . Во-вторых, само значение  $a_{m+\frac{1}{2}}$  можно определить как  $a_{m+\frac{1}{2}} = (a(u_m) + a(u_{m+1}))/2$  и как  $a_{m+\frac{1}{2}} = a((u_m + u_{m+1})/2) \equiv a(u_{m+\frac{1}{2}})$ . Остановимся на втором варианте. Выбор способа вычисления  $a_{m+\frac{1}{2}}$ , согласно [7], в расчётах не отражается.

Для дальнейшего использования будет удобно ещё видоизменить (5.3)–(5.5) следующим образом. Введём величины  $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign } a)$ . Введём функцию от двух аргументов  $\psi(r_1, r_2) = \psi(r_2/r_1) \cdot r_1$ . Тогда (5.3), (5.4) и (5.5) можно переписать в виде

$$F_m^+ = f_m^+ + \frac{1 - q_{m+\frac{1}{2}}}{2} \sigma_{m+\frac{1}{2}}^+ \psi(f_{m+1} - f_m, f_m - f_{m-1}), \quad (5.6)$$

$$F_{m+1}^- = f_{m+1}^- - \frac{1 + q_{m+\frac{1}{2}}}{2} \sigma_{m+\frac{1}{2}}^- \psi(f_{m+1} - f_m, f_{m+2} - f_{m+1}). \quad (5.7)$$

## 5.2 Обобщение на случай системы

Пусть дана система

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (5.8)$$

где  $u$ ,  $f$  — векторы. (Случай с источником см. в 2D случае.) Предположим (это выполнено для случая газовой динамики и задач горения), что  $f = au$ , где  $a = \partial f / \partial u$ . Вследствие гиперболичности  $a$  может быть представлена в виде

$$a = S_a^{-1} D_a S_a, \quad (5.9)$$

где  $D_a = \text{diag}\{\lambda_1^a, \dots, \lambda_n^a\}$ .  $S_a$  — матрица, строки которой есть левые нуль-векторы  $a$ .

Согласно описанным принципам определения скорости ( $a$ ), «заморозим» матрицу  $a$  в окрестности точки  $x_{m+\frac{1}{2}}$  с целью вычислить поток  $\mathring{F}_{m+\frac{1}{2}}$ .

Будем опускать индекс  $m + \frac{1}{2}$  везде где это не вызывает недоразумений. Домножим (5.8) на  $S_a$  слева. Тогда, используя (5.9), получаем  $\partial v / \partial t + D_a \partial v / \partial x = 0$ ,  $v = S_a u$ , — систему из  $n$  независимых уравнений вида (4.1), но с коэффициентом произвольного знака. Далее можно использовать (5.2) и произвести обратный переход, домножив полученные значения на  $S_a^{-1}$ .

Поток, соответствующий вектору  $v$ , равен  $f_v = D_a v = D_a S_a u$ . Поэтому  $f = a u = S_a^{-1} D_a S_a u = S_a^{-1} f_v$ . Аналогично скалярному случаю, положим  $D_a^\pm = \frac{1}{2}(D_a \pm |D_a|)$ ,  $Q = D_a \tau / h$ ,  $\sigma_a^\pm = \frac{1}{2}(I \pm \text{sign } D_a)$ ,  $I$  — единичная матрица. Введём  $\psi(r_1, r_2)$  — вектор, определяемый покомпонентным применением  $\psi$  к соответствующим компонентам  $r_1$  и  $r_2$ . Тогда

$$F_m^+ = S_a^{-1} D_a^+ S_a u_m + S_a^{-1} \frac{I - Q}{2} \sigma^+ \psi(D_a S_a (u_{m+1} - u_m), D_a S_a (u_m - u_{m-1})). \quad (5.10)$$

Положим  $a^\pm = S_a^{-1} D_a^\pm S_a$ . В силу равенств  $S_a^{-1} D_a = S_a^{-1} S_a a S_a^{-1} = a S_a^{-1}$ ,  $D_a S_a u = S_a a S_a^{-1} S_a u = S_a a u = S_a f$  «левый» поток  $F_m^+$  можно переписать в виде

$$F_m^+ = f_m^+ + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\tau}{h} a \right) S_a^{-1} \sigma^+ \psi(S_a (f_{m+1} - f_m), S_a (f_m - f_{m-1})). \quad (5.11)$$

Аналогично

$$F_{m+1}^- = f_{m+1}^- - \frac{1}{2} \left( I + \frac{\tau}{h} a \right) S_a^{-1} \sigma^- \psi(S_a (f_{m+1} - f_m), S_a (f_{m+2} - f_{m+1})). \quad (5.12)$$

Несмотря на то, что  $f_j$ , согласно выписанным формулам, должны вычисляться как  $f_j = a_{m+\frac{1}{2}} u_j$ , можно эти значения вычислять сразу по определению потока  $f$ , равно как и  $f_j$  в формулах (5.6) и (5.7).

Однако в случае разрывных решений, например, как в тесте на стр. 19, это лишь ухудшает ситуацию. Колебания решения усиливаются: для  $\rho$  возрастает амплитуда, этот эффект возникает и для  $p$ . С другой стороны, использование этого подхода позволяет добиться исчезновения особенности решения у границы при некоторых дополнительных условиях, см. стр. 24.

Вид матриц  $a$ ,  $S_a$ ,  $S_a^{-1}$  для газодинамических задач можно найти, например, в [7], [13].

## 6 2D схема

### 6.1 Класс схем второго порядка аппроксимации по времени для гиперболической части

Для написания 2D 2A (второго порядка) схемы найдём, какой вид должны иметь потоки в дивергентном замыкании. Для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = z \quad (6.1)$$

введём такого типа матрицы:

$$a = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad b = \frac{\partial g}{\partial u}. \quad (6.2)$$

Предположим, что  $f$  и  $g$  зависят только от  $u$ , а  $z$  зависит от  $u$ ,  $x$ ,  $t$ . Про- дифференцируем уравнение (6.1) по  $t$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (6.3)$$

Умножив (6.1) на  $a$  и  $b$ , получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -a \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial g}{\partial y} + az, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -b \frac{\partial f}{\partial x} - b \frac{\partial g}{\partial y} + bz. \quad (6.4)$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ -a \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial g}{\partial y} + az \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ -b \frac{\partial f}{\partial x} - b \frac{\partial g}{\partial y} + bz \right] + \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (6.5)$$

Обозначим знаком  $\checkmark$  значения на неявном слое по времени. Подставляя (6.5) в представление  $\partial u / \partial t = (\checkmark u - u) / \tau - \tau / 2 \cdot \partial^2 u / \partial t^2 + O(\tau^2)$ , запишем аппроксимацию производной по времени со вторым порядком:

$$\begin{aligned} \frac{\checkmark u - u}{\tau} - \frac{\tau}{2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[ -a \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial g}{\partial y} + az \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ -b \frac{\partial f}{\partial x} - b \frac{\partial g}{\partial y} + bz \right] + \frac{\partial z}{\partial t} \right\} + \\ + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = z + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Член  $\partial z / \partial t$  перепишем в правой части в виде  $\partial z / \partial u \cdot (z - \partial f / \partial x - \partial g / \partial y) + (\partial z / \partial t)_{\text{частн}}$ . Окончательно получим:

$$\frac{\checkmark u - u}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( f - \frac{\tau a}{2} \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{\tau a}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\tau a}{2} z \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( g - \frac{\tau b}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\tau b}{2} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\tau b}{2} z \right] = \\
& = z + \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\partial z}{\partial u} \left( z - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\text{частн}} \right]. \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Все величины без знака  $\sim$  берутся на явном временном слое.

## 6.2 Сетка

Построим неравномерную сетку в области  $\{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_M, y_0 \leq y \leq y_K\}$ :

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m + \Delta x_m, & m = 0, \dots, M-1; \\ y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, & k = 0, \dots, K-1. \end{cases} \tag{6.8}$$

Дополним её полуцелыми точками следующим образом:

$$\begin{cases} x_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}), & m = 0, \dots, M-1; & x_{-\frac{1}{2}} = x_0, & x_{M+\frac{1}{2}} = x_M; \\ y_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_k + y_{k+1}), & k = 0, \dots, K-1; & y_{-\frac{1}{2}} = y_0, & y_{K+\frac{1}{2}} = y_K. \end{cases} \tag{6.9}$$

Также нам понадобятся следующие величины:

$$\begin{cases} h_m^x = x_{m+\frac{1}{2}} - x_{m-\frac{1}{2}}, & m = 0, \dots, M; \\ h_k^y = y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}, & k = 0, \dots, K. \end{cases} \tag{6.10}$$

## 6.3 Разностная схема внутри области

Для аппроксимации производных, входящих в (6.7), рассмотрим двумерную систему гиперболических уравнений в форме (6.1), (6.2). Предположим, что  $f$  и  $g$  являются однородными  $p$ -векторами первой степени по  $u$ . Это означает, что  $f = au$ ,  $g = bu$ .

Для  $a$  и  $b$  имеется представление  $a = S_a^{-1} D_a S_a$ ,  $b = S_b^{-1} D_b S_b$ , где  $D_a = \text{diag}\{\lambda_1^a, \lambda_2^a, \dots, \lambda_n^a\}$  и  $D_b = \text{diag}\{\lambda_1^b, \lambda_2^b, \dots, \lambda_n^b\}$ . Введём разделённые величины  $D_a^\pm = \frac{1}{2}(D_a \pm |D_a|)$ , так что выполняется соотношение  $D_a^+ + D_a^- = D_a$ . Таким же образом положим  $D_b^\pm = \frac{1}{2}(D_b \pm |D_b|)$ , и  $D_b^+ + D_b^- = D_b$ . Определим  $a^\pm = S_a^{-1} D_a^\pm S_a$ ,  $b^\pm = S_b^{-1} D_b^\pm S_b$ , так что  $a^+ + a^- = a$ ,  $b^+ + b^- = b$ .

Разностная схема является дивергентной. Она записывается следующим образом:

$$\frac{\check{u}_{m,k} - u_{m,k}}{\tau} + \frac{1}{h_m^x} \left( \mathring{F}_{m+\frac{1}{2},k} - \mathring{F}_{m-\frac{1}{2},k} \right) + \frac{1}{h_k^y} \left( \mathring{G}_{m,k+\frac{1}{2}} - \mathring{G}_{m,k-\frac{1}{2}} \right) = \mathring{Z}_{m,k}. \tag{6.11}$$

Чтобы вычислить значения  $\mathring{F}_{m+\frac{1}{2},k}$ ,  $\mathring{G}_{m,k+\frac{1}{2}}$ ,  $\mathring{Z}_{m,k}$ , используем формулы, полученные на основе (6.7):

$$\begin{aligned}
\mathring{F}_{m+\frac{1}{2},k} &= f_{m,k}^+ - \frac{\tau}{2} a_{m+\frac{1}{2},k}^+ \left[ \frac{g_{m,k}^+ - g_{m,k-1}^+}{\Delta y_{k-1}} + \frac{g_{m,k+1}^- - g_{m,k}^-}{\Delta y_k} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta x_m I - \tau a_{m+\frac{1}{2},k}^+) S_a^{-1} \sigma_a^+ \psi \left( S_a \frac{f_{m+1,k} - f_{m,k}}{\Delta x_m}, S_a \frac{f_{m,k} - f_{m-1,k}}{\Delta x_{m-1}} \right) + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} a_{m+\frac{1}{2},k}^+ z(u_{m,k}) + \\
&+ f_{m+1,k}^- - \frac{\tau}{2} a_{m+\frac{1}{2},k}^- \left[ \frac{g_{m+1,k}^+ - g_{m+1,k-1}^+}{\Delta y_{k-1}} + \frac{g_{m+1,k+1}^- - g_{m+1,k}^-}{\Delta y_k} \right] - \\
&- \frac{1}{2} (\Delta x_m I + \tau a_{m+\frac{1}{2},k}^-) S_a^{-1} \sigma_a^- \psi \left( S_a \frac{f_{m+1,k} - f_{m,k}}{\Delta x_m}, S_a \frac{f_{m+2,k} - f_{m+1,k}}{\Delta x_{m+1}} \right) + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} a_{m+\frac{1}{2},k}^- z(u_{m+1,k}), \tag{6.12}
\end{aligned}$$

где  $I$  — единичная матрица. Величины вида  $f^+$  определяются так:

$$f_{m,k}^+ = a_{m+\frac{1}{2},k}^+ u_{m,k}, f_{m,k}^- = a_{m-\frac{1}{2},k}^- u_{m,k}; g_{m,k}^+ = b_{m,k+\frac{1}{2}}^+ u_{m,k}, g_{m,k}^- = b_{m,k-\frac{1}{2}}^- u_{m,k}; \tag{6.13}$$

в свою очередь, величины вида  $a^+$  получим после преобразования  $u$ :

$$a_{m+\frac{1}{2},k} = a((u_{m,k} + u_{m+1,k})/2), b_{m,k+\frac{1}{2}} = b((u_{m,k} + u_{m,k+1})/2). \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathring{G}_{m,k+\frac{1}{2}} &= g_{m,k}^+ - \frac{\tau}{2} b_{m,k+\frac{1}{2}}^+ \left[ \frac{f_{m,k}^+ - f_{m-1,k}^+}{\Delta x_{m-1}} + \frac{f_{m+1,k}^- - f_{m,k}^-}{\Delta x_m} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta y_k I - \tau b_{m,k+\frac{1}{2}}^+) S_b^{-1} \sigma_b^+ \psi \left( S_b \frac{g_{m,k+1} - g_{m,k}}{\Delta y_k}, S_b \frac{g_{m,k} - g_{m,k-1}}{\Delta y_{k-1}} \right) + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} b_{m,k+\frac{1}{2}}^+ z(u_{m,k}) + \\
&+ g_{m,k+1}^- - \frac{\tau}{2} b_{m,k+\frac{1}{2}}^- \left[ \frac{f_{m,k+1}^+ - f_{m-1,k+1}^+}{\Delta x_{m-1}} + \frac{f_{m+1,k+1}^- - f_{m,k+1}^-}{\Delta x_m} \right] - \\
&- \frac{1}{2} (\Delta y_k I + \tau b_{m,k+\frac{1}{2}}^-) S_b^{-1} \sigma_b^- \psi \left( S_b \frac{g_{m,k+1} - g_{m,k}}{\Delta y_k}, S_b \frac{g_{m,k+2} - g_{m,k+1}}{\Delta y_{k+1}} \right) + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} b_{m,k+\frac{1}{2}}^- z(u_{m,k+1}). \tag{6.15}
\end{aligned}$$

$\overset{\circ}{Z}_{m,k}$  равно

$$z(u_{m,k}) + \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\partial z}{\partial u}(u_{m,k}) \left( z(u_{m,k}) - \left[ \frac{f_{m,k}^+ - f_{m-1,k}^+}{\Delta x_{m-1}} + \frac{f_{m+1,k}^- - f_{m,k}^-}{\Delta x_m} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[ \frac{g_{m,k}^+ - g_{m,k-1}^+}{\Delta y_{k-1}} + \frac{g_{m,k+1}^- - g_{m,k}^-}{\Delta y_k} \right] \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\text{частн}}(u_{m,k}) \right]. \quad (6.16)$$

Данная схема была описана Ю. Б. Радвогиным и является схемой типа TVD, устойчивой при условии Куранта по обоим направлениям, т. е. при  $\max |\lambda_x^i| \tau / h_x \leq 1$  и  $\max |\lambda_y^j| \tau / h_y \leq 1$ .

## 7 Граничные условия

Существует проблема граничных условий. При расчёте границы требуется, вначале определить недостающие значения на явном слое, а затем выполнить сами граничные условия. Например, в работе [13] используется равномерная сетка, и для нахождения потоков на границе применяется линейная или квадратичная экстраполяция величин, присутствующих в схеме.

### 7.1 Разностная схема на границе

Для случая неравномерной сетки можно предложить следующее. Рассмотрим разностную схему при  $m = 0$ . Тогда нам необходимо иметь  $F_{-\frac{1}{2}}$ . Схема написана для произвольных значений шагов  $\Delta x_m$ ,  $\Delta y_k$ . Если значения шагов  $\Delta x_m$ ,  $\Delta y_k$  устремить к 0, то вместо значений разностных производных получаются обычные.

Поскольку за границей решение не существует, положим равными нулю соответствующие шаги сетки. Отсюда выявятся неопределённые значения — производные  $\partial f / \partial x|_{0,k}$ , нужные для вычисления величин  $\overset{\circ}{F}_{-\frac{1}{2},k}$  и  $\overset{\circ}{F}_{\frac{1}{2},k}$  и которые должны быть определены. Это даст возможность получить все значения неизвестных на неявном слое по времени в граничных точках.

К примеру, выражение для  $\overset{\circ}{F}_{-\frac{1}{2},k}$  сведётся к:

$$\overset{\circ}{F}_{-\frac{1}{2},k} = a_{0,k} u_{0,k} - \frac{\tau}{2} a_{0,k} \left[ \frac{g_{0,k}^+ - g_{0,k-1}^+}{\Delta y_{k-1}} + \frac{g_{0,k+1}^- - g_{0,k}^-}{\Delta y_k} \right] - \frac{\tau}{2} a_{0,k} \times \\ \times \left[ S_{a_{0,k}}^{-1} \sigma_a^+ S_{a_{0,k}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{0,k} + S_{a_{0,k}}^{-1} \sigma_a^- \psi \left( S_{a_{0,k}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{0,k}, S_{a_{0,k}} \frac{f_{1,k} - f_{0,k}}{\Delta x_0} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\tau}{2} a_{0,k} z(u_{0,k}). \quad (7.1)$$

Значения  $\partial f / \partial x|_{0,k}$  получим из их аппроксимации внутри области со вторым порядком:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{0,k} = \xi_0 f_0 + \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2, \quad (7.2)$$

где  $f_m = a_{m,k} u_{m,k}$ ,  $\xi_0 = -1/\Delta x_0 \cdot (1 + \Delta x_0/2h_1)$ ,  $\xi_1 = 1/\Delta x_0 + 1/\Delta x_1$ ,  $\xi_2 = -\Delta x_0/2\Delta x_1 h_1$ ,  $h_1 = (\Delta x_0 + \Delta x_1)/2$ . Тем не менее, несмотря на то, что формально требуется второй порядок, имеет смысл ограничиться первым — аппроксимацией по двум точкам.

Однако значения потоков, определённых с помощью экстраполяции, приводят к решению, не удовлетворяющему граничным условиям.

## 7.2 Граничные условия для газодинамической части

Здесь мы опишем поправочный метод и получим из  $\mathring{F}_{-\frac{1}{2},k}$  новый вектор  $\tilde{F}_{-\frac{1}{2},k}$ , который позволит удовлетворить граничным условиям. Фактически мы покажем, что допустимо некоторым образом изменить  $\mathring{F}_{-\frac{1}{2},k}$ .

Дифференциальное условие на стенке  $x = x_0$  — это  $v_x = 0$ . Следовательно матрица  $D_a$  есть  $\text{diag}\{-c, 0, 0, 0, c\}$ . Мы видим, что имеется одна характеристика, идущая с границы: соответствующая пятому собственному значению  $c$ . Поэтому мы можем использовать одно разностное условие.

Как известно, матрица  $S_a$  состоит из строк  $l_a^1, l_a^2, l_a^3, l_a^4, l_a^5$  — левых собственных векторов  $a$ . При умножении на  $u$  получаются (по крайней мере в линейном случае) инварианты. Инвариант, который соответствует характеристике, идущей с границы, должен быть определён так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Локально переопределим  $l_a^5$ :  $\tilde{l}_a^5 = (0, 1, 0, 0, 0)$ . Получим новые  $\tilde{l}_a^5 u \equiv v_x$  и  $\tilde{S}_a$ , построенные из  $l_a^1, l_a^2, l_a^3, l_a^4, \tilde{l}_a^5$ . Можно проверить, что  $\tilde{S}_a$  невырождена.

Тогда можно определить новый  $\tilde{F}_{-\frac{1}{2},k}$  из условия

$$\tilde{S}_a \tilde{F}_{-\frac{1}{2},k} = \Gamma, \quad (7.3)$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} l_a^1 \mathring{F}_{-\frac{1}{2},k} \\ l_a^2 \mathring{F}_{-\frac{1}{2},k} \\ l_a^3 \mathring{F}_{-\frac{1}{2},k} \\ l_a^4 \mathring{F}_{-\frac{1}{2},k} \\ R \end{bmatrix}, \quad R = \mathring{F}_{\frac{1}{2},k}^{(2)} + \frac{h_0^x}{h_k^y} (\mathring{G}_{0,k+\frac{1}{2}}^{(2)} - \mathring{G}_{0,k-\frac{1}{2}}^{(2)}) - h_0^x \mathring{Z}_{0,k}^{(2)}. \quad (7.4)$$



Происходит следующее преобразование:

$$\overset{\circ}{\tilde{F}}_{-\frac{1}{2},k} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^4 \\ F^5 \end{bmatrix} \mapsto \tilde{F}_{-\frac{1}{2},k} = \begin{bmatrix} F^1 + \frac{\Delta}{c} \\ R \\ F^3 + \frac{\Delta}{c}v_y \\ F^4 + \frac{\Delta}{c}(c^2/\beta + QY + \frac{1}{2}v_y^2) \\ F^5 + \frac{\Delta}{c}Y \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

где  $\Delta = R - F^2$ . В углу изменения  $F$  и  $G$  выполняются независимо. Построенный вектор  $\tilde{F}_{-\frac{1}{2},k}$  позволяет построить функцию, удовлетворяющую разностному уравнению (6.11) и граничному условию на жёсткой стенке.

Замечание 1. Подобные конструкции легко обобщаются на случай любого числа граничных условий вида  $\sum \alpha_i u_i = \beta$ , где  $\alpha_i$  — константы. В частности, если требуется нулевая скорость по направлению  $(\nu_x, \nu_y)$ , то нужно взять  $\tilde{l}_a^5 = (0, \nu_x, \nu_y, 0, 0)$ .

Замечание 2.  $S_a, S_a^{-1}$  всегда берутся на границе (где  $v_x = 0$ ).

## 8 Результаты расчётов. Свойства схемы

### 8.1 Уравнение переноса

Передача различных профилей для скалярного уравнения переноса показана на рис. 8.1. Начальные профили представляют собой: угол, «полочка» и кусок гладкого профиля, синуса на отрезке  $[0, \pi]$ . Примерно рассмотренные лимитеры можно расположить по величине ошибки в следующем порядке:  $1A \ll \text{minmod} < \text{UMIST} < \text{van Leer} < \text{MC} < \text{superbee}$ . Использование ограничителя искажает, вообще говоря, симметричность начального профиля. Из рассмотренных лишь ограничитель  $\text{minmod}$  сохраняет симметричность профиля. Точнее всего передаёт разрывные профили  $\text{superbee}$ . Этот лимитер имеет свойство несколько «уплощать» гладкие профили. Кроме того, в некоторых случаях  $\text{superbee}$  делает размазанный профиль более крутым — например, в области сшивания  $\sin$  с константой. Как показывают расчёты,  $\text{minmod}$  и другие лимитеры имеет смысл использовать при значениях  $q$  (критерий Куранта), близких к 1, и только на гладких решениях. В расчётах положено  $M = 150$  ( $M$  — число интервалов сетки),  $L = 15$ ,  $q = 0.2$ . На рис. 8.2 представлена нормированная на  $h^2$  ошибка:  $(u_m - f(x_m))/h^2$ . Как было указано выше, расчёт гладкого профиля, имеющего максимум, не приводит к сходимости со вторым порядком в  $C$  по

всей области. Однако, если рассматривать отрезок с исключёнными точками экстремума решения, то для достаточно малых  $h$  будет наблюдаться сходимость со вторым порядком, т. е. нарушение порядка аппроксимации в одной точке не влияет на точность в отдалённых точках, что естественно. Это верно и для случая системы.

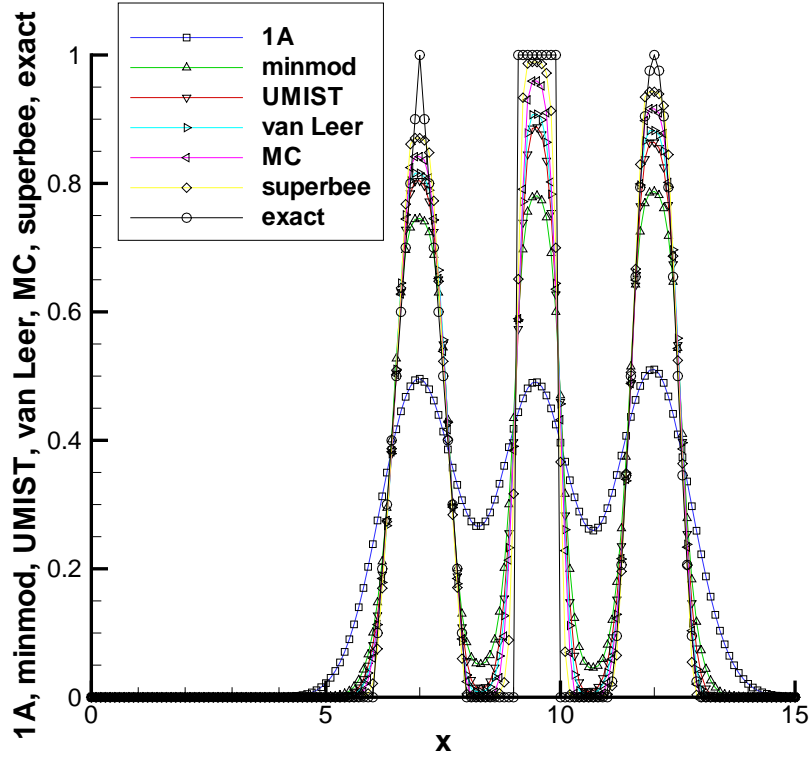


Рис. 8.1: Перенос профилей для 1D скалярного уравнения переноса при использовании различных лимитеров

## 8.2 Задача о распаде разрыва

Описанная схема является схемой высокого разрешения (high resolution) [10]. Стандартный тест — задача о распаде разрыва. Рассмотрим разрыв плотности и давления. Возьмём  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 6$ ,  $v_L = v_R = 0$ ,  $p_L = 0.4$ ,  $p_R = 2.4$ . Точное решение задачи о распаде разрыва (здесь и далее в обозначениях [2]) таково:

$$\downarrow P = 0.920917, U = -0.47851, R_I = 1.7843, R_{II} = 3.1038;$$

$$\downarrow \text{Левая волна — ударная, } D_I = -1.08862;$$

$$\downarrow \text{Правая волна — разрежения, } D_{II}^* = 0.17412, D_{II}^1 = 0.748331.$$

На рис. 8.3 представлены графики  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$ , полученных по схемам с minmod (**rho1, v1, p1**) и superbee (**rho5, v5, p5**), а также точное решение (**rho, v, p**). Между областями с постоянными значениями изображены ударная

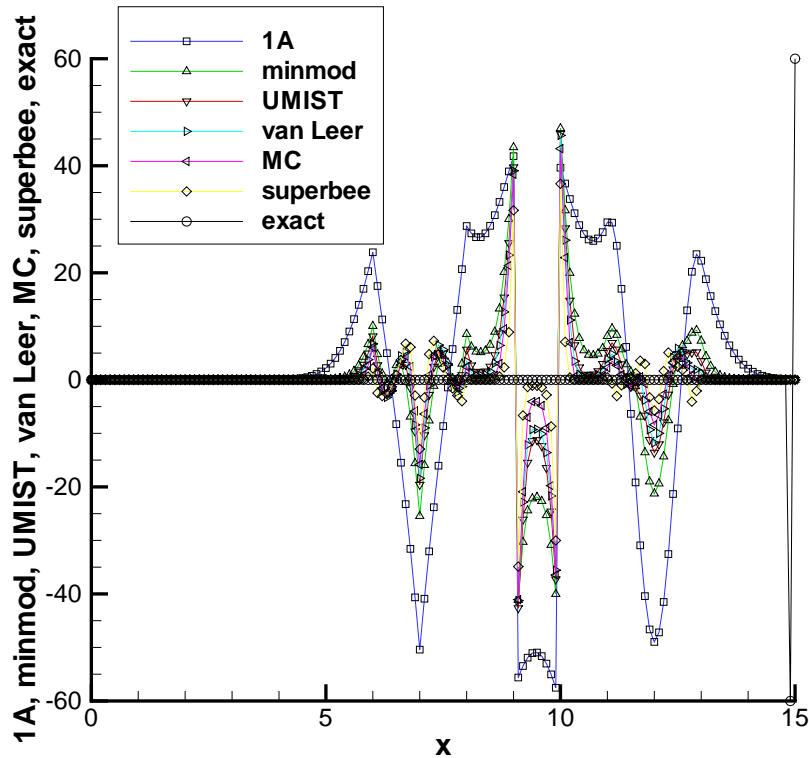


Рис. 8.2: Ошибка для уравнения переноса

волна, контактный разрыв, волна разрежения. Правильно определяется постоянное решение слева и справа от контактного разрыва. Движение фронтов соответствует точному решению. Не вполне выражен контактный разрыв. Наиболее выраженными, как и в скалярном случае, являются ударные волны и волны разрежения, полученные при решении с помощью лимитера superbee. Параметры расчёта:  $L = \pi$ ,  $M = 100$ ,  $T = 1$ ,  $\tau = 0.004$ ,  $q_{\max} \equiv \max_t q = 0.17$ . Показатель адиабаты во всех тестах равен  $\gamma = 1.4$ .

### 8.3 Столкновение потоков

Выше было отмечено, что порядок аппроксимации схем TVD уменьшается в окрестности точки экстремума. Ситуация усложняется, если решение имеет особую точку.

Один из известных тестов — столкновение потоков одинаковых масс, движущихся с одинаковой скоростью:  $\rho_L = \rho_R = 1$ ,  $v_L = 1$ ,  $v_R = -1$ ,  $p_L = p_R = 0.4$ , т. е. имеется скачок скорости. Точное решение задачи о распаде разрыва:

- ↓  $P = 1.95917$ ,  $U = 0$ ,  $R_I = 2.78838$ ,  $R_{II} = 2.78838$ ;
- ↓ Левая волна — ударная,  $D_I = -0.559166$ ;
- ↓ Правая волна — ударная,  $D_{II} = 0.559166$ .

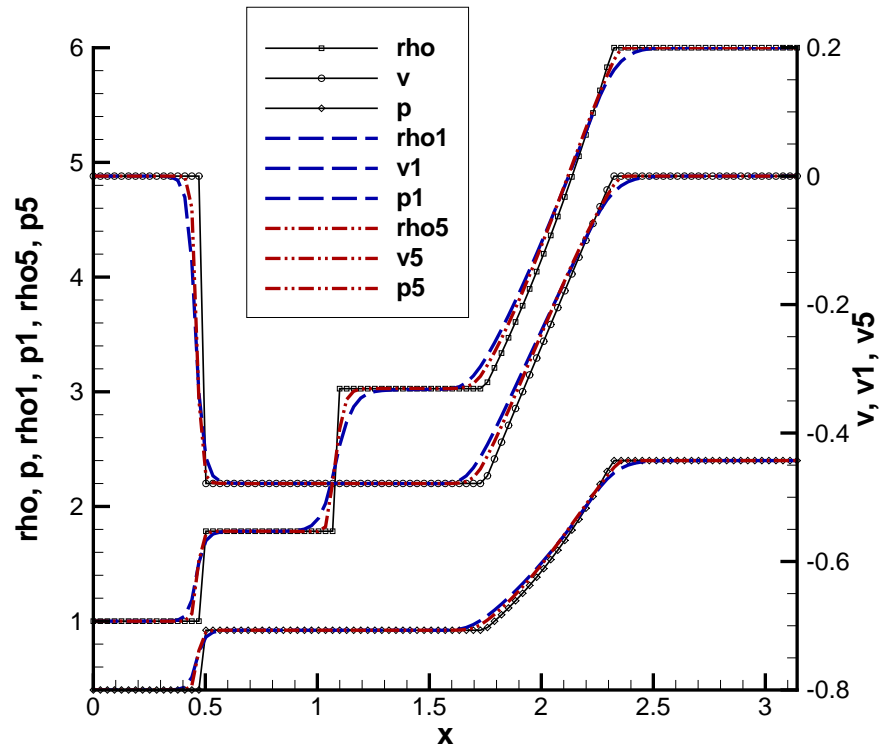


Рис. 8.3: Задача о распаде разрыва

На рис. 8.4 ( $q = 0.95$ ) и 8.5 ( $q = 0.223$ ) представлены участки решения между двумя ударными волнами. В данном тесте этом случае энтропийный след проявляется в виде выброса плотности, а значит, и полной энергии вблизи точки столкновения, не исчезающего по абсолютной величине при уменьшении шагов. Это есть следствие того, что решение имеет особенность, его производная по  $x$  неограничена. Как результат, порядок аппроксимации —  $O(1)$ . Эта особенность наблюдается уже при использовании схемы первого порядка (базовая схема Годунова), без членов с ограничителями. Тест посчитан с использованием лимитеров `minmod` (на графике — **rho1**, **v1**, **p1**) и `superbee` (на графике — **rho5**, **v5**, **p5**);  $T = 1.5$ , остальные параметры те же, что в предыдущем тесте.

Для фронтов плотности в данном случае периодическим образом нарушается монотонность решения. Немонотонности у фронтов проявляются для всех величин,  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$ . Чем больше критерий Куранта  $q$ , тем больше выбросы.

Для  $\rho$ , помимо энтропийного следа, наблюдаются колебания различной интенсивности. Амплитуда колебаний возрастает в соответствии с таблицей, приведённой для скалярного теста. При увеличении  $q$  с 0.2 до 0.8 и выше появляется рябь и немонотонность при всех лимитерах, включая `minmod`. В целом общий вид профилей сохраняется; особой разницы в профи-

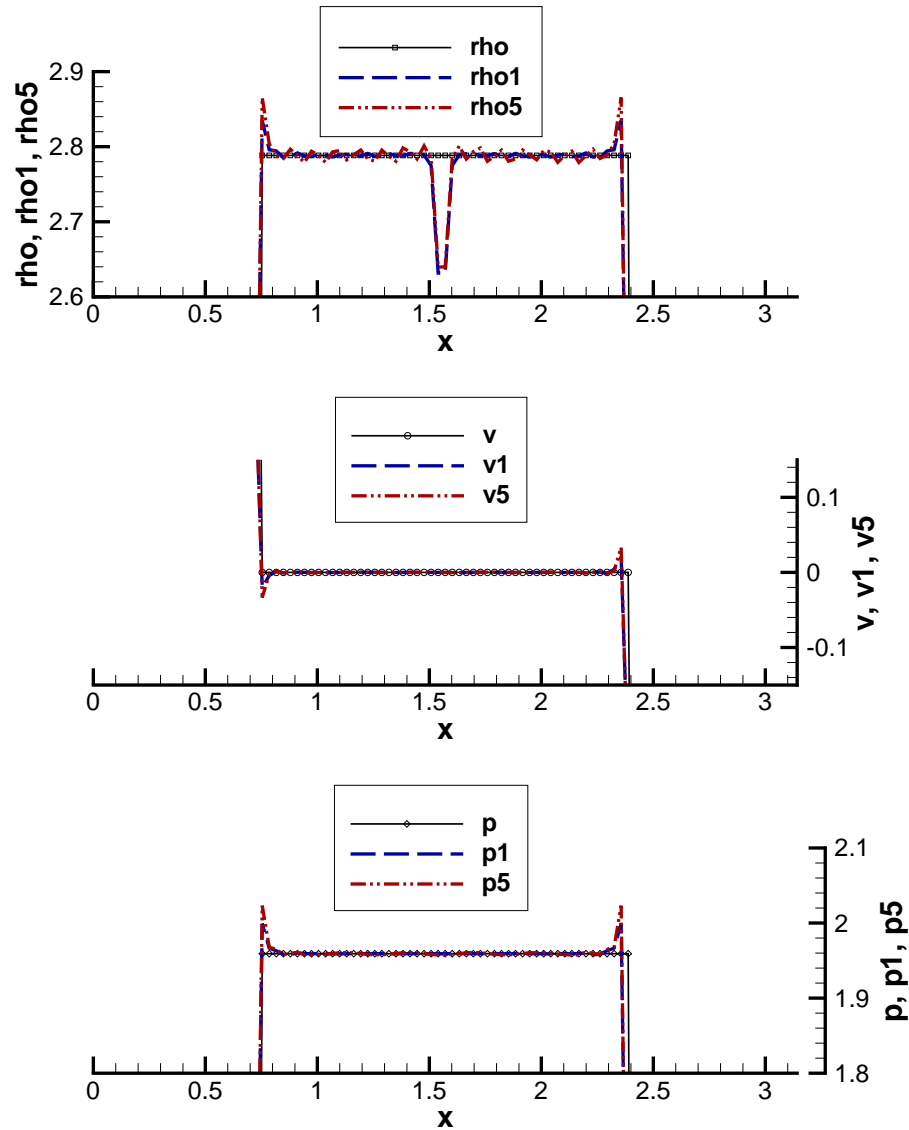


Рис. 8.4: Задача о распаде разрыва, столкновение потоков,  $q = 0.95$

лях фронтов для различных лимитеров нет. Для данного случая использование `superbee` не приводит к какому-либо уточнению решения, и этот лимитер оказался худшим из всех рассмотренных.

В силу вышесказанного рассматриваемый класс схем не является оптимальным для расчёта задач с такого типа начальными условиями.

## 8.4 Задача о распаде сглаженного разрыва

Для гладких решений с большими градиентами может возникнуть та же особенность в точке максимальной производной. Интересно отметить, что лишь само использование членов, повышающих порядок аппроксимации до второго, уменьшает в этом случае этот дефект, восстанавливая гладкий профиль решения. Чтобы это увидеть, рассмотрим более реалистичный ва-

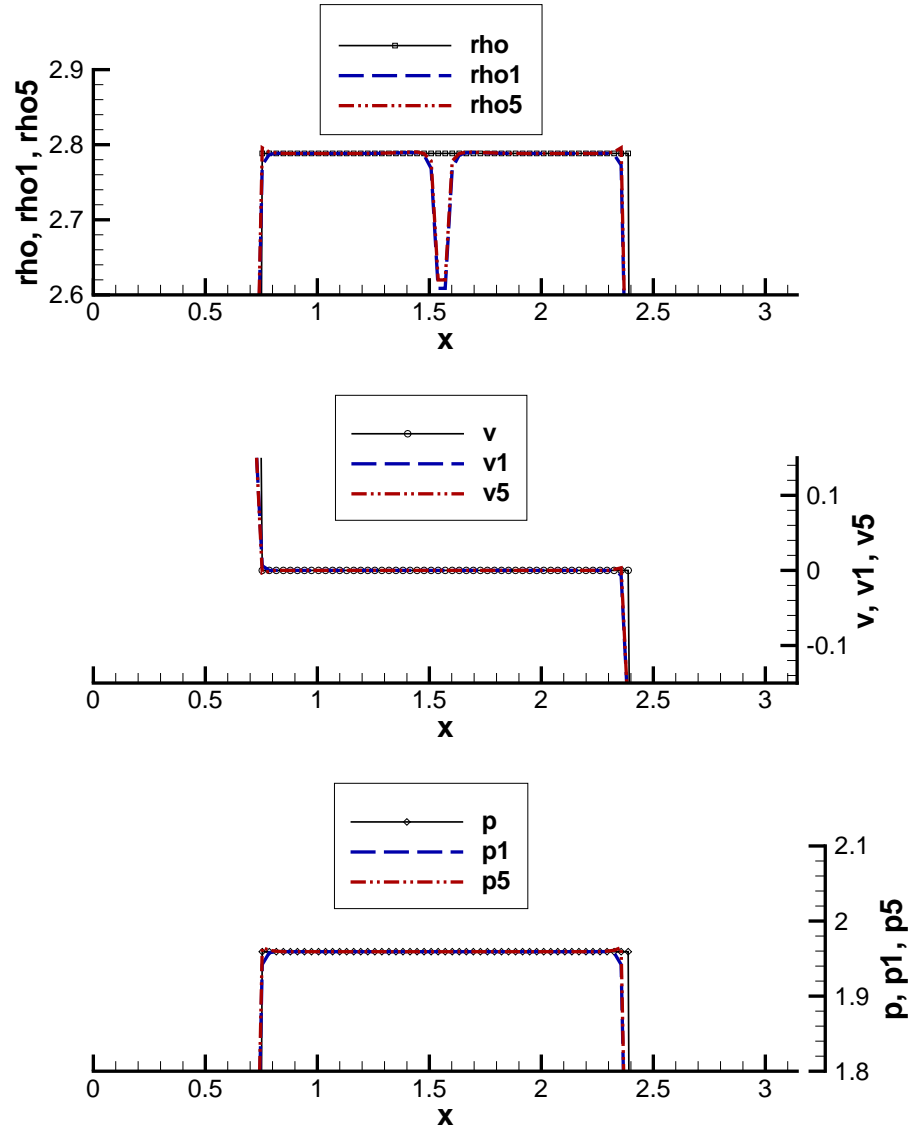


Рис. 8.5: Задача о распаде разрыва, столкновение потоков,  $q = 0.223$

риант начальных условий, чем в предыдущем тесте, — чуть сгладим скачок  $v_0$ , положив на отрезке  $[0, \pi]$   $v_0 = -2/\pi \cdot \arctg((x - \pi/2)/\Delta)$ , где  $\Delta$  — характерная длина скачка,  $\rho_0 = 1$ ,  $p_0 = 0.4$ . Возьмём  $\Delta$  равным  $0.4h$ , что уже является неплохим приближением разрыва. Для такого  $\Delta$  решение практически разрывно, и по-прежнему наблюдается энтропийный след для базовой схемы Годунова первого порядка, но он исчезает при использовании коррекции потоков, т. е. при повышении порядка аппроксимации (рис. 8.6,  $q = 0.78$ ). На графике показана  $\rho$  для 1А (**rho0**), minmod (**rho1**), superbee (**rho5**). Фронты, однако, при использовании лимитеров по-прежнему немонотонны, и их улучшения до вида 1А не наблюдается. В схеме первого порядка фронты остаются монотонными.

Для меньших  $\Delta$  (например,  $0.3h$ ) из двух лимитеров лишь superbee убирает рассматриваемый дефект. Этот ограничитель в данном тесте, как и в

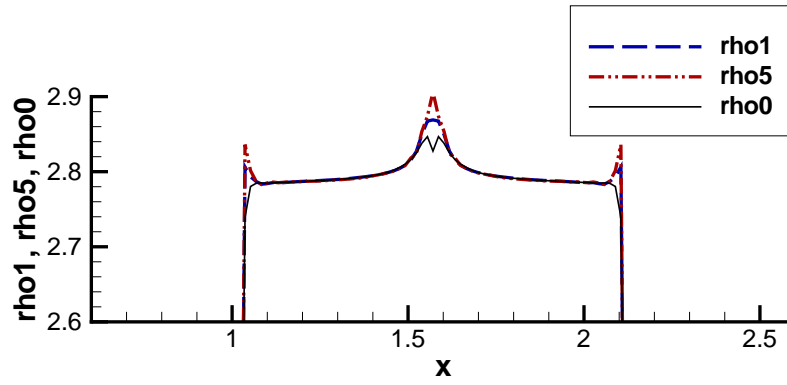


Рис. 8.6: Задача о распаде сглаженного разрыва

скалярном случае, «укручает профили сверх нормы», из-за чего гладкий профиль также оказывается не совсем гладким. При дальнейшем укрупнении фронта дефект, естественно, появится и для схемы 2A. Параметры расчёта:  $L = \pi$ ,  $M = 200$ ,  $T = 1$ ,  $\tau = 0.007$ ,  $q_{\max} \equiv \max_t q = 0.78$ .

## 8.5 Отражение от границы

Причины возникновения физически некорректных решений связаны с отсутствием численной диссипации в областях с нулевыми значениями собственных чисел. Энтروпийный след иногда появляется в численных результатах вблизи оси симметрии и непроницаемой стенки, где нормальная к границе компонента скорости равна нулю [6].

Рассмотрим задачу о распаде разрыва:  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 6$ ,  $v_L = v_R = 0$ ,  $p_L = 0.4$ ,  $p_R = 2.4$ , посчитанную до момента  $T = 2$ . К этому времени левая ударная волна доходит до левой границы и отражается, образуя отражённую ударную волну.

При расчёте граничных значений на основе характеристического метода, описанного в пункте 7.2, проявляются схожие дефекты в профиле плотности. После отражения волны от границы остаётся артефакт. При любом способе вычисления потока, 1A, minmod или superbee, у границы остаётся особенность, которая представлена на рис. 8.7. На графике показана  $\rho$ , соответствующая точному решению (**rho**), для 1A (**rho0**), minmod (**rho1**), superbee (**rho5**). Этот подход, с алгоритмической точки зрения наиболее правильный, больше всего подчёркивает дефект у границы. Также в целом особенность более выражена у более «сильных» лимитеров.

Можно для вычисления граничных значений использовать явный вид потока на границе. Поскольку известно, что на границе  $v = 0$ , то поток  $f$  имеет вид  $(0, p, 0, 0, 0)^T$ , где  $p$  — давление. Выберем  $p$  таким образом, чтобы разностный поток  $F_{-\frac{1}{2},k} \equiv F_{0,k} = f|_{0,k}$  удовлетворял граничным условиям. При таком подходе ошибка заметно снижается (см. рис. 8.8).

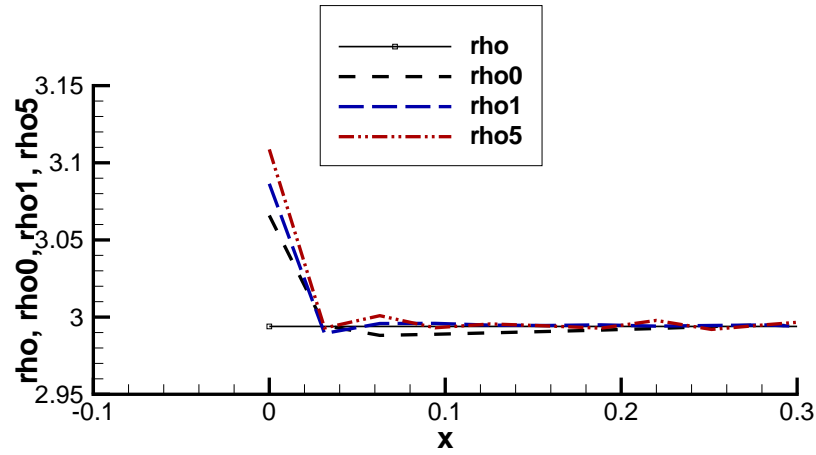


Рис. 8.7: Отражённая волна

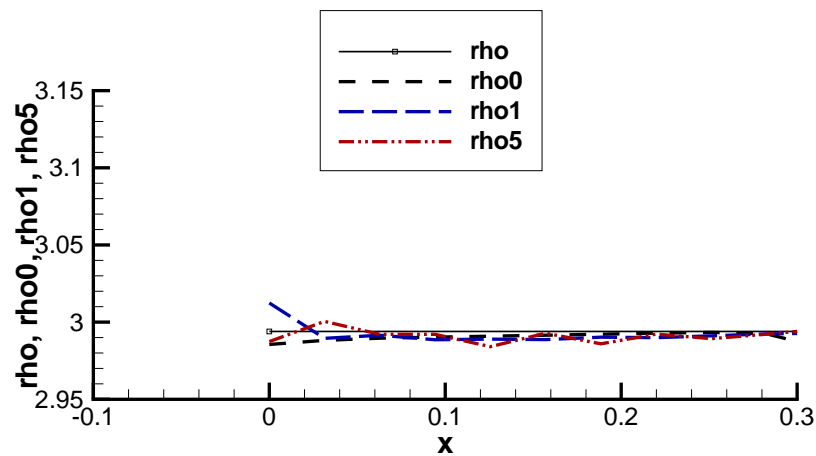


Рис. 8.8: Отражённая волна при использовании явного вида потока

В случае 1A видимый дефект может исчезнуть при некоторых  $q$ , например при  $q_{\max} \equiv \max_t q = 0.42$  ( $\tau = 0.01$ ) и при использовании расчёта величин  $f_m$  в выражениях  $S_a(f_{m+1} - f_m)$  исходя прямо из определения потока  $f$ , см. стр. 11. Однако при расчёте с использованием лимитеров особенность вновь появляется, причём `superbee` приводит к возникновению ряби, как и в случае столкновения потоков.

Можно предложить совсем другой способ удовлетворить граничным условиям. Можно относить неизвестные к полуцелым точкам сетки или, что то же самое, сместить границу на  $\Delta x_0/2$  влево.

В этом случае вектор решения на границе определяется экстраполяцией по двум точкам. Далее можно применять либо характеристический метод, либо явно действовать так же, как в предыдущем случае, и использовать явный вид  $f$ . В последнем случае значение  $p$  следует подбирать таким, чтобы и на неявном слое экстраполированный на границу вектор решения имел нулевую нормальную компоненту скорости.



Если на границе задан поток  $f$ , то отклонение плотности после отражения от границы от точного постоянного значения заметно больше, чем в случае, когда на границе задано  $u$ ; особенность не исчезает.

При достижении границы волной разрежения особенность не возникает. Остальные параметры:  $T = 0.017$ ,  $q_{\max} = 0.73$ ,  $L = \pi$ ,  $M = 100$ .

## 8.6 Учёт диффузионных эффектов

Как и следовало ожидать, наличие диффузионных членов приводит к нивелированию дефекта решения, связанного с энтропийным следом. Отметим также, что поведение плотности в задаче столкновения потоков с диффузией аналогично тому, которое наблюдалось при сглаженном начальном профиле скорости.

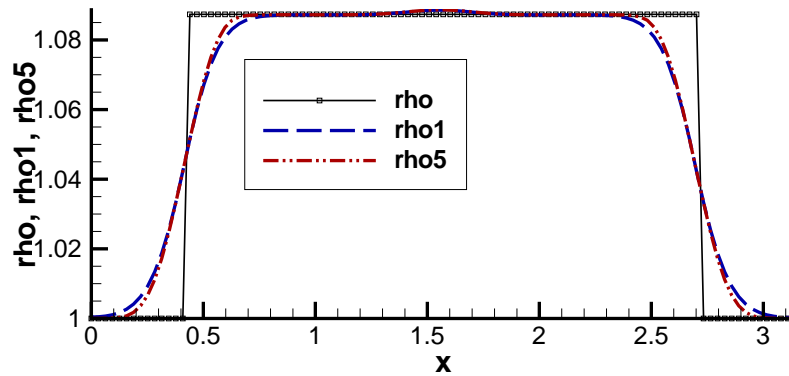


Рис. 8.9: Учёт вязкости,  $\eta = 0.0018192 \text{ кг} \cdot (\text{м} \cdot \text{сек})^{-1}$

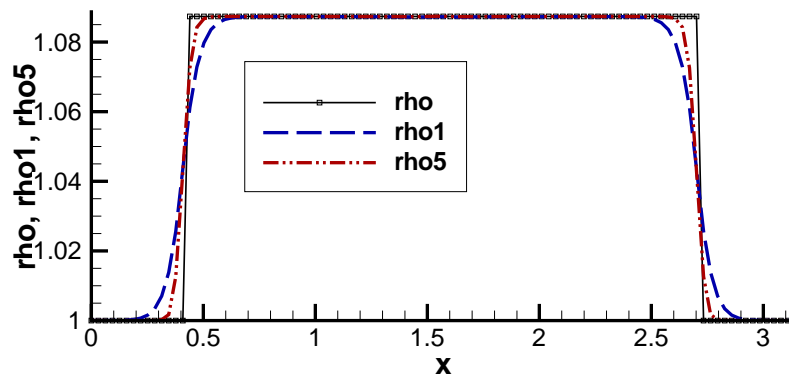


Рис. 8.10: Учёт вязкости,  $\eta = 0.000215 \text{ кг} \cdot (\text{м} \cdot \text{сек})^{-1}$

Найдём, при каких значениях вязкости исчезает дефект. Поскольку точное решение при наличии вязкости неизвестно, можно считать допустимым коэффициент, которому соответствует гладкое решение.

Возьмём характерные масштабы по длине, скорости, плотности, температуре и времени  $L_n, U_n, \rho_n, T_n$ , приведённые в работе [7]. Положим начальные скорости одинаковыми по модулю, равными  $U_n/10$ ,  $T = T_n$ ,  $\rho = \rho_n$ .

Значения параметров:  $T_n = 300 \text{ K}$ ;  $R = 8.31434 \text{ Дж} \cdot (\text{моль} \cdot \text{K})^{-1}$ ;  $M = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}$ ;  $\gamma = 1.4$ ; Отсюда получаем  $U_n = \sqrt{R/M \cdot T_n} = 927.418 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Диссипативные параметры:  $\xi = 0 \text{ кг} \cdot (\text{м} \cdot \text{сек})^{-1}$ ,  $\eta = 0.0018192 \text{ кг} \cdot (\text{м} \cdot \text{сек})^{-1}$ ;  $\text{Pr} = 1$ ,  $\text{Sc} = 1$ ;  $\rho_n = 0.116265 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ;  $L_n = 0.001426 \text{ м}$ ;  $\bar{\xi} = \xi/\rho_n U_n L_n = 0$ ,  $\bar{\eta} = \eta/\rho_n U_n L_n = 0.0118314$ . В этих единицах обезразмеренный параметр  $\bar{\alpha}$ , соответствующий  $\alpha = R/M$ , равен по определению 1.

Полученная вязкость удовлетворяет описанному критерию. Уже при вязкости, соответствующей пентану ( $\eta = 0.000215 \text{ кг} \cdot (\text{м} \cdot \text{сек})^{-1}$ ), энтропийный след практически размывается. На рис. 8.9 и 8.10 представлены графики  $\rho$ , полученной по схемам с `minmod (rho1)` и `superbee (rho5)` для двух вязкостей, а также точное решение (`rho`), посчитанное при отсутствии вязкости, а значит, и температуропроводности. Параметры расчёта:  $L = \pi$ ,  $M = 100$ ,  $T = 1$ ,  $\tau = 0.01$ ,  $q_{\max} \equiv \max_t q = 0.4$ .

Точное решение задачи о распаде разрыва (при  $\eta = 0$ , в обезразмеренных величинах):

- ↓  $P = 1.12447$ ,  $U = 0$ ,  $R_I = 1.08736$ ,  $R_{II} = 1.08736$ ;
- ↓ Левая волна — ударная,  $D_I = -1.14474$ ;
- ↓ Правая волна — ударная,  $D_{II} = 1.14474$ .

## 9 Заключение

Рассмотрены консервативные разностные схемы, полученные на основе исходной TVD схемы для скалярного уравнения переноса и имеющие второй порядок сходимости почти всюду. Все они устойчивы при выполнении условия Куранта по обоим направлениям и используют минимальный шаблон.

Эти схемы допускают использование различных лимитеров. Каждый из них можно сравнить, во-первых, по точности передачи характерных профилей в скалярном случае. Во-вторых, различные лимитеры можно сравнить по степени выраженности фронтов в газодинамических задачах. По этим признакам, бесспорно, следует выделить ограничитель `superbee`.

TVD схемы — это схемы высокого разрешения, которые обеспечивают качественную передачу фронтов. На рис. 8.1 начальные профили представляют собой: угол, «полочка» и кусок гладкого профиля, синуса на отрезке  $[0, \pi]$ . Точнее всего передаёт разрывные профили `superbee`. На рис. 8.3 рассмотрено решение задачи о распаде разрыва  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 6$ ,  $v_L = v_R = 0$ ,  $p_L = 0.4$ ,  $p_R = 2.4$ .

В отличие от скалярного случая, для которого схема с лимитерами при требуемом порядке аппроксимации вполне достаточна, её использование в случае системы не всегда приводит к приемлемым профилям решения — схема лишь квазимонотонна. Это, в частности, связано с применением сквозного счёта, без выделения и учёта дополнительных особенностей решения. Вышесказанное верно для схем как с лимитерами, так и без них. Как следствие, для этих схем не всегда получаются решения без нефизических немонотонностей для определённого класса начальных условий, как внутри области, так и на границе, поскольку условие эволюционности для разностного решения может не выполняться. Причём в этом случае лимитер *superbee* в большей степени подчёркивает получаемые особенности решения, в меньшей степени — *minmod*. Также эти эффекты усиливаются при числах Куранта, близких к 1. Лимитеры *minmod* и *superbee*, в отличие от схемы 1А, приводят к периодически возникающим «забросам» у фронтов и ряби профиля плотности за ударной волной (рис. 8.4). Случай с отражением ударной волны в целом схож по остающимся особенностям в профиле решения, см. рис. 8.7.

В целом, несмотря на видимые дефекты, имеет место соответствие профиля получаемых величин точному решению задачи о распаде разрыва, что выражается в правильном определении уровней  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$  в профилях и скоростей фронтов.

При двумерном расчёте для центрально-симметричного начального профиля схема сохраняет круглую форму всех разрывов, несмотря на то, что сетка не соответствует форме разрыва. В тесте бралось  $\rho_{in} = 6$ ,  $\rho_{out} = 1$ ,  $v_0 = 0$ ,  $p_{in} = 2.4$ ,  $p_{out} = 0.4$ .

Таким образом, существует класс таких начальных условий, что схемы TVD приводят к существенным локальным несоответствиям профилей решения. В частности, такого рода проблемы возникают в том случае, когда имеется начальный скачок скорости и особенности в профилях плотности и температуры. Если для широкого класса задач оптимальным является *superbee*, то в последнем случае преимущество имеет *minmod*.

Однако использование сглаженных начальных условий, хотя бы на 2 расчётных интервала, а также учёт вязкости или введение дополнительной численной диссипации, позволяет эффективно применять схемы с лимитерами для расчёта физических задач.

## Список литературы

- [1] О.М. Белоцерковский, В.А. Гуцин, В.В. Щенников, Метод расщепления в применении к решению задачи динамики вязкой жидкости, 1975. ЖВМ и МФ, Т. 15, N1, сс. 197–207.

- [2] С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др., Численное решение многомерных задач газовой динамики, 1976. М.: Наука.
- [3] О.М. Белоцерковский, В.А. Гуцин, В.Н. Коньшин, Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, 1987. ЖВМ и МФ, Т. 27, N4, сс. 594–609.
- [4] Ю.Б. Радвогин, Квазимонотонные многомерные разностные схемы второго порядка, 1991. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, N19.
- [5] А.Ю. Демьянов, Поведение ньютоновских характеристик в задаче перехода горения в детонацию, 2001. XLIV научная конференция МФТИ.
- [6] А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семёнов, Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений и систем, 2001. М.: Физматлит.
- [7] М.Ю. Заславский, А.Х. Пергамент, Б.Д. Плющенко Динамика и устойчивость одномерных задач горения, 2002. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, N21.
- [8] G.I. Barenblatt, Ya.B. Zeldovich, A.G. Istratov, 1962. Prikl. Mech. Tekn. Fiz. 2, 21.
- [9] A.G. Istratov, V.B. Librovich, 1969. Astronautica Acta, 14, 453.
- [10] A. Harten, High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, 1983. J. Comp. Phys., V. 49, N3, p. 357.
- [11] P.K. Sweby, High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, 1984. SIAM Journ. of Num. Anal., N21, 995–1011.
- [12] M.A. Liberman, V.V. Bychkov, S.M. Golberg, 1993. J. Exp. Theor. Phys. 77, 227.
- [13] Yu.B. Radvogin, N.A. Zaitsev, Multidimensional minimal stencil supported second order accurate upwind schemes for solving hyperbolic and Euler systems. Preprint, KIAM, RAS, 1996, N22.
- [14] M.A. Liberman, S.M. Golberg, V.V. Bychkov, L.E. Eriksson, 1998. Combin. Sci. Technol. 136, 221.
- [15] V.V. Bychkov, M.A. Liberman, 2000. Phys. Rep. 4–5, 325.